AN3 - Equations différentielles
- Séance de TD -
Corrigés des exercices

1 GI FC34 2011 – Test – 1er ordre

On cherche à résoudre l'équation différentielle suivante : $x^2y' + y = x^3 + x^2 + \frac{1}{2}x \quad (\text{E})$.

1) Résoudre par séparation des variables l'équation homogène associée à (E) et donner ainsi l'expression générale de y_H.

$$(\text{EH}) : x^2\frac{dy}{dx} + y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 dy = -y.dx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{y} = -\frac{1}{x^2}.dx \quad \Leftrightarrow \quad \int\frac{dy}{y} = \int -\frac{1}{x^2}.dx + K$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln(|y_\text{H}|) = \frac{1}{x} + K \quad \Leftrightarrow \quad |y_\text{H}| = \text{e}^{\frac{1}{x}+K} = A\text{e}^{\frac{1}{x}} \quad \Leftrightarrow \quad y_\text{H} = C\text{e}^{\frac{1}{x}}$$

(où $A = \text{e}^K$ est une constante quelconque positive et C une constante quelconque réelle).

2) Déterminer une solution particulière y_P de l'équation (E), par identification à un polynôme du second degré dont on recherchera les coefficients.

$y_\text{P} = ax^2 + bx + c$ et $y'_\text{P} = 2ax + b$. Ainsi,

(E) donne $x^2(2ax+b) + ax^2 + bx + c = x^3 + x^2 + \frac{1}{2}x$

$$\Leftrightarrow \quad 2ax^3 + (a+b)x^2 + bx + c = x^3 + x^2 + \frac{1}{2}x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2a = 1 \\ a + b = 1 \\ b = \frac{1}{2} \\ c = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = 0 \end{cases}$$

Donc $y_P = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$

3) Donner alors l'écriture des solutions de l'équation (E).

En sommant, on obtient $y = C\text{e}^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$.

2 GI FC34 2012 – Test – 1er ordre

On donne l'équation différentielle linéaire (E) : $x^2y' + y = 6x^3\,\text{e}^{\frac{1}{x}}$. L'objectif est de donner la forme générale de ses solutions, en recherchant la solution générale y_H de l'équation homogène par séparation des variables, puis une solution particulière y_P par identification à la forme $ax^2\,\text{e}^{\frac{1}{x}}$.

* (EH) : $x^2y' + y = 0$. Séparons les variables : $x^2\text{d}y = -y\text{d}x$, soit $\frac{1}{y}\text{d}y = -\frac{1}{x^2}\text{d}x$.

Intégrons : $\ln y = \frac{1}{x} + K$ et donc $y_\text{H} = C\text{e}^{\frac{1}{x}}$

* $y_\text{P} = ax^2\,\text{e}^{\frac{1}{x}}$. Donc $y'_\text{P} = 2ax\,\text{e}^{\frac{1}{x}} + ax^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\text{e}^{\frac{1}{x}}$.

(E) devient $2ax^3\,\text{e}^{\frac{1}{x}} = 6x^3\,\text{e}^{\frac{1}{x}}$, soit $a = 3$. Ainsi, $y_\text{P} = 3x^2\,\text{e}^{\frac{1}{x}}$

* solution générale de (E) :

$y = (3x^2 + C)\,\text{e}^{\frac{1}{x}}$

3 GI FC18/26 2013 – Test – 1er ordre

Résoudre l'équation différentielle (E) : $\frac{y'}{x} - 3xy = 3x$.

On recherchera une solution particulière de (E) par la méthode de variation de la constante.

Cette équation est linéaire et non homogène. On recherchera la solution générale y_H de l'équation homogène associée, par séparation des variables, puis une solution particulière y_P de (E).

y_H : $\frac{y'}{x} - 3xy = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = 3x^2 dx \Leftrightarrow \ln y = x^3 + K \Leftrightarrow y_H = Ce^{x^3}$

y_P :

$y_P = C(x)e^{x^3}$; $y_P' = C'e^{x^3} + 3x^2Ce^{x^3}$

(E) : $\frac{y'}{x} - 3xy = 3x \Leftrightarrow \frac{1}{x}\left(C'e^{x^3} + 3x^2Ce^{x^3}\right) - 3xCe^{x^3} = 3x \Leftrightarrow C'e^{x^3} = 3x^2$

$\Leftrightarrow C' = 3x^2e^{-x^3} \Leftrightarrow C = -e^{-x^3} \Leftrightarrow y_P = -1$

Solution générale de (E) : $y = Ce^{x^3} - 1$

4 Fonctions trigonométriques (1er ordre)

Résoudre l'équation $Z'.\cos(u) - Z.\sin(u) = \sin(2u)$.

* Equation sans second membre : $Z'\cos(u) - Z\sin(u) = 0 \Leftrightarrow \frac{dZ}{Z} = \frac{\sin(u)}{\cos(u)}.du$

$\ln(|Z|) = -\ln(|\cos(u)|) + C \Leftrightarrow \underline{Z_H = \frac{K}{\cos(u)}}$

* Variation de la constante : $Z_P = \frac{K(u)}{\cos(u)}$; $Z_P' = \frac{K'(u)}{\cos(u)} + \frac{K\sin(u)}{\cos^2(u)}$

En reportant dans l'équation complète il vient : $K'(u) = \sin(2u) \quad \Leftarrow \quad K(u) = -\frac{\cos(2u)}{2}$

Ainsi une solution particulière de l'équation complète est :

$Z_P = -\frac{\cos(2u)}{2\cos(u)} = -\frac{2\cos^2(u) - 1}{2\cos(u)} = \underline{-\cos(u) + \frac{1}{2\cos(u)}}$

* Solution générale de l'équation : $Z = -\cos(u) + \frac{\cancel{1/2}}{\cos(u)} + \frac{K}{\cos(u)} \boxed{= -\cos(u) + \frac{C}{\cos(u)}}$

5 GI FA 2012 – Test 2 – 1er ordre, arcsinus et DL

On se propose de travailler avec la fonction arcsinus, définie sur [-1 ; 1] et à valeurs dans $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1) a. Au moyen de l'écriture fractionnaire différentielle d'une dérivée, montrer que la dérivée de $\arcsin x$ est $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Soit $y = \arcsin x$. On a donc $x = \sin y$. $\frac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$, d'où $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

b. A l'aide de la formule de McLaurin, déterminer un développement limité en zéro de la fonction arcsin, à l'ordre 3. *On aura avantage à écrire* $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$.

La formule de McLaurin de la fonction f à l'ordre n au voisinage de 0 s'écrit :

$$f(x) = f(0) + x\, f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + x^n \varepsilon(x)$$

Ecrivons d'abord les trois premières dérivées successives de arcsin :

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \quad ; \quad \arcsin''(x) = x\left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}} \quad ;$$

(dérivée de u^n : $n.u'.u^{n-1}$)

$$\arcsin'''(x) = \left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}} + x\left(-\frac{3}{2}\right)(-2x)\left(1-x^2\right)^{-\frac{5}{2}}$$

Ainsi, la formule de McLaurin donne :

$\arcsin x = \arcsin 0 + x.1 + \frac{x^2}{2}.0 + \frac{x^3}{6}.1 + x^3\varepsilon(x)$, soit : $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6}$ + *reste*

c. A l'aide de ce développement limité, donner une valeur arrondie à 10^{-3} de arcsin(0,5).

D'après ce développement limité, $\arcsin 0{,}5 \approx 0{,}5 + \frac{0{,}5^3}{6} \approx 0{,}521$.

d. Donner la valeur exacte de arcsin(0,5) puis à 10^{-4} près le taux d'erreur de la valeur approchée obtenue en question c.

Dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, l'angle dont le sinus vaut 0,5 est $\frac{\pi}{6}$.

$\frac{\pi}{6} \approx 0{,}5235988$. Taux d'erreur : $1 - \frac{0{,}521}{0{,}5235988} \approx 0{,}00496 \approx 0{,}50\%$.

e. Utiliser ce développement limité pour calculer une valeur arrondie à 10^{-7} de $\int_{0,1}^{0,2} \arcsin x.\mathrm{d}x$.

$$\int_{0,1}^{0,2} \arcsin x.\mathrm{d}x \approx \int_{0,1}^{0,2} \left(x+\frac{x^3}{6}\right).\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right]_{0,1}^{0,2} \approx 0,0200666667 - 0,0050041667 = 0,0150625$$

2) On donne l'équation différentielle $xy'+y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (E).

a. Montrer que la fonction $y_{\mathrm{P}}=\frac{\arcsin x}{x}$ est une solution particulière de (E). *La dérivée de la fonction* arcsin *est donnée en question 1a*.

$$y_{\mathrm{P}}' = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}x-\arcsin x}{x^2}. \quad (\mathrm{E}) \text{ est vérifiée : } \frac{x^2}{x^2\sqrt{1-x^2}}-\frac{x\arcsin x}{x^2}+\frac{\arcsin x}{x}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

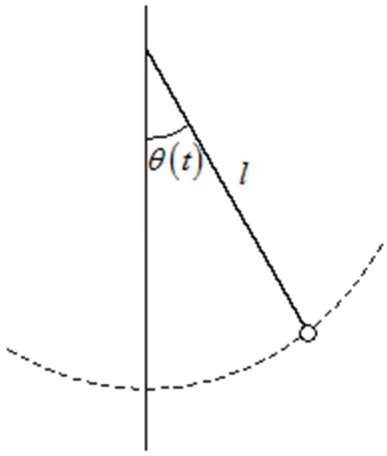
b. Après avoir étudié l'équation homogène associée, en déduire l'expression générale des solutions de (E).

(EH) : $xy'+y=0$. Par séparation des variables :

$$x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x=0 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y}=-\frac{\mathrm{d}x}{x} \Leftrightarrow \ln|y|=-\ln|x|+K=\ln\left|\frac{1}{x}\right|+K \Leftrightarrow y=\frac{C}{x} \quad (C \text{ réel quelconque})$$

Ainsi les solutions de (E) sont : $y=\frac{C}{x}+\frac{\arcsin x}{x}$ (C réel quelconque)

6 GI FC18/26 2011 – Test – 2^d ordre, pendule et DL



On considère ici les oscillations d'un pendule suspendu à un fil (figure ci-contre : état à un instant t quelconque).
La RFDC, relation fondamentale de la dynamique classique, appliquée au cas du pendule donne, après projection sur l'axe du fil, l'équation différentielle :

$$l.\theta''=-g.\sin\theta$$

où l est la longueur du fil, $\theta(t)$ est l'angle que fait le pendule avec la verticale, fonction du temps t, et g est l'accélération de la pesanteur.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.
On rappelle que dans le cas d'une équation différentielle du second ordre, linéaire à coefficients constants, homogène et dont le polynôme caractéristiques a deux racines complexes, les solutions sont le produit d'une exponentielle par une combinaison d'un sinus et d'un cosinus.

1) a. Donner le développement limité de la fonction sinus en 0, à l'ordre 3.

$$\sin x = \sin 0 + x.\cos 0 - \frac{x^2}{2}\sin 0 - \frac{x^3}{6}\cos 0 + x^3\varepsilon(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$$

b. Justifier alors que pour de petites valeurs de θ, on a l'approximation $\sin\theta \approx \theta$.

Lorsque θ est proche de zéro, θ^3 est négligeable devant θ et donc $\sin\theta \approx \theta$.

2) a. Résoudre l'équation différentielle $l.\theta'' + g.\theta = 0$.

$l.\theta'' + g.\theta = 0$ a pour polynôme caractéristique $l.r^2 + g$, de racines complexes $\pm i\sqrt{\frac{g}{l}}$.

Solution générale de l'équation différentielle : $\theta(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}.t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}.t\right)$.

b. Donner l'unique solution correspondant à :
g = 10 N.kg^{-1}, l = 0,40 m, et enfin à t = 0 : θ= 0,1 rad et θ' = 0 rad.s^{-1}.

Avec les valeurs de g et l : $\theta(t) = A\cos(5t) + B\sin(5t)$.

$\theta(0) = 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad A\cos 0 + B\sin 0 = 0{,}1 \quad \Leftrightarrow \quad A = 0{,}1$

$\theta'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad -5A\sin 0 + 5B\cos 0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B = 0$

Solution particulière : $\theta(t) = 0{,}1\cos(5t)$.

c. Quelle est la période de cette dernière fonction ?

La fonction $t \mapsto \cos t$ a pour période 2π.

5t augmente de 2π si, et seulement si, t augmente de $\frac{2\pi}{5}$: période de la fonction.

7 GI FA 2013 – Test 2 – 2^{d} ordre et fonction

Soit l'équation différentielle suivante : $y'' + 2py' + p^2y = 0 \quad (\mathrm{E}_p)$ où y est une fonction d'une variable x et p un paramètre que l'on peut fixer, tel que $p \in \left]0\,;+\infty\right[$.

1) Donner la solution générale de l'équation (E$_p$).

L'équation différentielle (E$_p$) est du 2^{d} ordre, homogène, à coefficients constants.
L'équation caractéristique est : $r^2 + 2pr + p^2 = 0$ de discriminant $\Delta = 4p^2 - 4p^2 = 0$, d'où la racine double : $r = -p$.
Solution générale de l'équation (E$_p$) : $\boxed{y = (Ax + B)\mathrm{e}^{-px}}$, avec A et B coefficients réels.

2) Parmi toutes les solutions, déterminer, en fonction de p, la fonction, notée f_p, qui vérifie les conditions : $f_p(0) = p$ et $f_p'(0) = 0$

Conditions initiales :
$f_p(0) = p$, ce qui donne, à partir de la solution de l'équation différentielle : $B = p$
$f_p'(0) = 0$. On a : $y' = Ae^{-px} - p(Ax+B)e^{-px}$, donc $f_p'(0) = 0 = A - pB$, d'où $A = p^2$
Finalement, la fonction recherchée est : $\boxed{f_p(x) = \left(p^2x + p\right)\mathrm{e}^{-px}}$

3) En étudiant les variations de f_p, montrer que toutes les courbes admettent un maximum pour la même valeur de x, indépendante de p. Déterminer cette valeur de x.

Calcul de la dérivée de f_p :
$f_p'(x) = p^2\mathrm{e}^{-px} - p\left(p^2x + p\right)\mathrm{e}^{-px} = -p^3x\mathrm{e}^{-px}$
p étant un nombre réel positif, son cube l'est aussi. e^{-px} est également positif.
Donc la dérivée est du signe de $-x$ (et s'annule pour $x = 0$).
Elle est donc positive pour $x < 0$, et négative pour $x > 0$.
Donc toutes les courbes représentant les fonctions f_p admettent un maximum pour $x = 0$.

8 2^{d} ordre et variation des constantes

Résoudre (identification puis variation des constantes) : $y'' - 4y' + 4y = \mathrm{e}^{2x}$
(identification à $(ax^2 + bx + c)\mathrm{e}^{2x}$)

* L'équation homogène a été résolue en autonomie (3.2.1 b.) : $y_{\mathrm{H}} = \left(Ax + B\right)\mathrm{e}^{2x}$.
* Solution particulière de l'équation complète (identification à un polynôme du second degré, multiplié par l'exponentielle - 2 est une racine double du polynôme caractéristique et le membre de droite contient devant l'exponentielle un polynôme de degré zéro : 1).

L'équation donne :

$$\left(4ax^2 + \left(8a + 4b\right)x + 2a + 4b + 4c\right)\mathrm{e}^{2x} - 4\left(2ax^2 + \left(2a + 2b\right)x + b + 2c\right)\mathrm{e}^{2x} + 4\left(ax^2 + bx + c\right)\mathrm{e}^{2x}$$

$$= \mathrm{e}^{2x} \Leftrightarrow \quad 2a\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x} \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{2}$$

d'où une solution particulière : $y_{\mathrm{P}} = \dfrac{x^2}{2}\mathrm{e}^{2x}$

* Solution particulière de l'équation complète (variation des constantes) :
On notera A pour A(x) (idem pour B, A' et B') sans oublier qu'il ne s'agit pas de constantes

$$y_{\mathrm{P}} = \left(A.x + B\right)\mathrm{e}^{2x} \;;\; y_P' = \left(A'.x + A + B' + 2A.x + 2B\right)\mathrm{e}^{2x} \quad \text{où l'on pose} \quad A'.x + B' = 0 \quad (1) \quad ;$$

$$y_P'' = \left(A' + 2A'.x + 4A + 4A.x + 2B' + 4B\right)\mathrm{e}^{2x} \overset{\text{d'après (1)}}{=} \left(A' + 4A + 4A.x + 4B\right)\mathrm{e}^{2x}$$

L'équation donne :
$$\left(A' + 4A + 4A.x + 4B\right)\mathrm{e}^{2x} - 4\left(A + 2A.x + 2B\right)\mathrm{e}^{2x} + 4\left(A.x + B\right)\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x}$$
$$\Leftrightarrow \quad A'\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x} \quad \Leftrightarrow \quad A' = 1 \quad (2)$$

Ainsi, $A(x)=x$ et avec (1) : $B(x)=-\dfrac{x^2}{2}$. D'où $y_P=\big(A(x).x+B(x)\big)e^{2x}=\dfrac{x^2}{2}e^{2x}$

* Solution générale de l'équation différentielle : $\boxed{y=\left(\dfrac{x^2}{2}+Ax+B\right)e^{2x}}$

* Remarque : la recherche de y_P par identification peut se faire d'une manière plus générale par identification à $f(x)e^{2x}$:

$y'=2f(x)e^{2x}+f'(x)e^{2x}$; $y''=4f(x)e^{2x}+4f'(x)e^{2x}+f''(x)e^{2x}$

Il suffit de reporter dans l'équation complète et aboutir à $f''(x)=1$, soit $f(x)=\dfrac{x^2}{2}$

9 GI FA 2012 – Test 1 – 2^d ordre

On cherche à résoudre l'équation différentielle du second ordre : $y''-y'-6y=\left(1+x^2\right)e^{3x}$ (E)

1) Trouver la solution générale de l'équation homogène associée.

Equation homogène associée à (*E*) : $y''-y'-6y=0$

Polynôme caractéristique : $r^2-r-6=0$ discriminant : $\Delta=25>0$ racines : -2 et 3

La solution générale de l'équation homogène est donc : $\boxed{y_H=Ae^{-2x}+Be^{3x}}$

2) Par la méthode d'identification, déterminer une solution particulière de l'équation différentielle (E) en cherchant une solution de la forme : $f(x)e^{3x}$.

Déterminons une solution particulière de l'équation (E) de la forme $y_P=f(x)e^{3x}$

Il nous faut ses dérivées : $y_P'=f'e^{3x}+3fe^{3x}$

$y_P''=f''e^{3x}+3f'e^{3x}+3f'e^{3x}+9fe^{3x}=f''e^{3x}+6f'e^{3x}+9fe^{3x}$

En reportant y_P, y_P', y_P'' dans (E) et en factorisant par e^{3x}, on a :

$\left(f''+6f'+9f-f'-3f-6f\right)e^{3x}=\left(1+x^2\right)e^{3x}$ qui se simplifie en : $f''+5f'=1+x^2$ (E')

Nous obtenons ici une équation différentielle (E') dont nous cherchons à trouver une solution particulière. On pressent qu' en choisissant pour *f* un polynôme de degré 3, (E') se vérifie.

$f=ax^3+bx^2+cx+d$; $f'=3ax^2+2bx+c$; $f''=6ax+2b$

$(E'):15ax^2+(6a+10b)x+2b+5c=1+x^2 \quad \Rightarrow a=\dfrac{1}{15};b=-\dfrac{1}{25};c=\dfrac{27}{125}$

(*d* peut être quelconque, donc choisissons 0). D'où $\boxed{y_P=f(x)e^{3x}=\left(\dfrac{1}{15}x^3-\dfrac{1}{25}x^2+\dfrac{27}{125}x\right)e^{3x}}$

3) En déduire la solution générale de l'équation différentielle (*E*).

$$\boxed{y=Ae^{-2x}+Be^{3x}+\left(\dfrac{1}{15}x^3-\dfrac{1}{25}x^2+\dfrac{27}{125}x\right)e^{3x}}$$

10 2^d ordre, DL et courbe

1) On se propose de résoudre l'équation différentielle linéaire du second ordre :

$$\text{(E)} \quad y'' - 2y' + 2y = 2\cos x - \sin x$$

a) Résoudre l'équation $y'' - 2y' + 2y = 0$.

Polynôme caractéristique : $r^2 - 2r + 2$, de discriminant -4.
Ses deux racines complexes ont pour partie réelle 1 et pour partie imaginaire ± 1.
Solution générale de cette équation : $y_{\mathrm{H}} = \mathrm{e}^x\left(A\cos x + B\sin x\right)$

b) Calculer les réels α et β tels que la fonction $x \mapsto \alpha\cos x + \beta\sin x$ soit une solution particulière de l'équation (E).

$y_{\mathrm{P}} = a\cos x + b\sin x \quad ; \quad y_{\mathrm{P}}' = -a\sin x + b\cos x \quad ; \quad y_{\mathrm{P}}'' = -a\cos x - b\sin x$

L'équation donne : $(a-2b)\cos x + (2a+b)\sin x = 2\cos x - \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b = 2 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \end{cases}$: $y_{\mathrm{P}} = -\sin x$

c) En déduire la solution générale de (E).

$\boxed{y = \mathrm{e}^x\left(A\cos x + B\sin x\right) - \sin x}$

2) a) Donner la solution $y = f(x)$ dont le développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 est $f(x) = 1 + x + x.\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0}\varepsilon(x) = 0$

Dans la forme $y = \mathrm{e}^x\left(A\cos x + B\sin x\right) - \sin x$, remplaçons les fonctions de x par les parties régulières de leurs développements limités à l'ordre 1 au voisinage de zéro. Nous obtenons alors $P_1(x)$, partie régulière du DL à l'ordre 1 de y :

$P_1(x) = (1+x)(A\times 1 + B\times x) - x\,[\text{arrêté à l'ordre 1}] = A + (A + B - 1)x$

Pour correspondre à la fonction f demandée, il faut $A = 1$ et $A + B - 1 = 1$, soit $B = 1$.

Donc : $\boxed{f(x) = \mathrm{e}^x\left(\cos x + \sin x\right) - \sin x}$

Dans le détail, si nous écrivons les développements limités complets de chaque fonction, à l'ordre 1, et que nous désirons celui de $f(x)$ à l'ordre 1, on voit que les calculs conduisent à l'écriture de termes qui, soit peuvent s'écrire sous la forme $x.\varepsilon_i(x)$ (où la fonction ε_i tend vers 0 lorsque x tend vers 0), soit ne le peuvent pas :

$$\begin{aligned} y &= \left(1 + x + x.\varepsilon_1(x)\right)\left(A\times\left(1 + x.\varepsilon_2(x)\right) + B\times\left(x + x.\varepsilon_3(x)\right)\right) - \left(x + x.\varepsilon_3(x)\right) \\ &= A + Ax\varepsilon_2(x) + Bx + Bx\varepsilon_3(x) + Ax + Ax^2\varepsilon_2(x) + Bx^2 + Bx^2\varepsilon_3(x) \\ &\quad + Ax\varepsilon_1(x) + Ax^2\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x) + Bx^2\varepsilon_1(x) + Bx^2\varepsilon_1(x)\varepsilon_3(x) - x - x\varepsilon_3(x) \end{aligned}$$

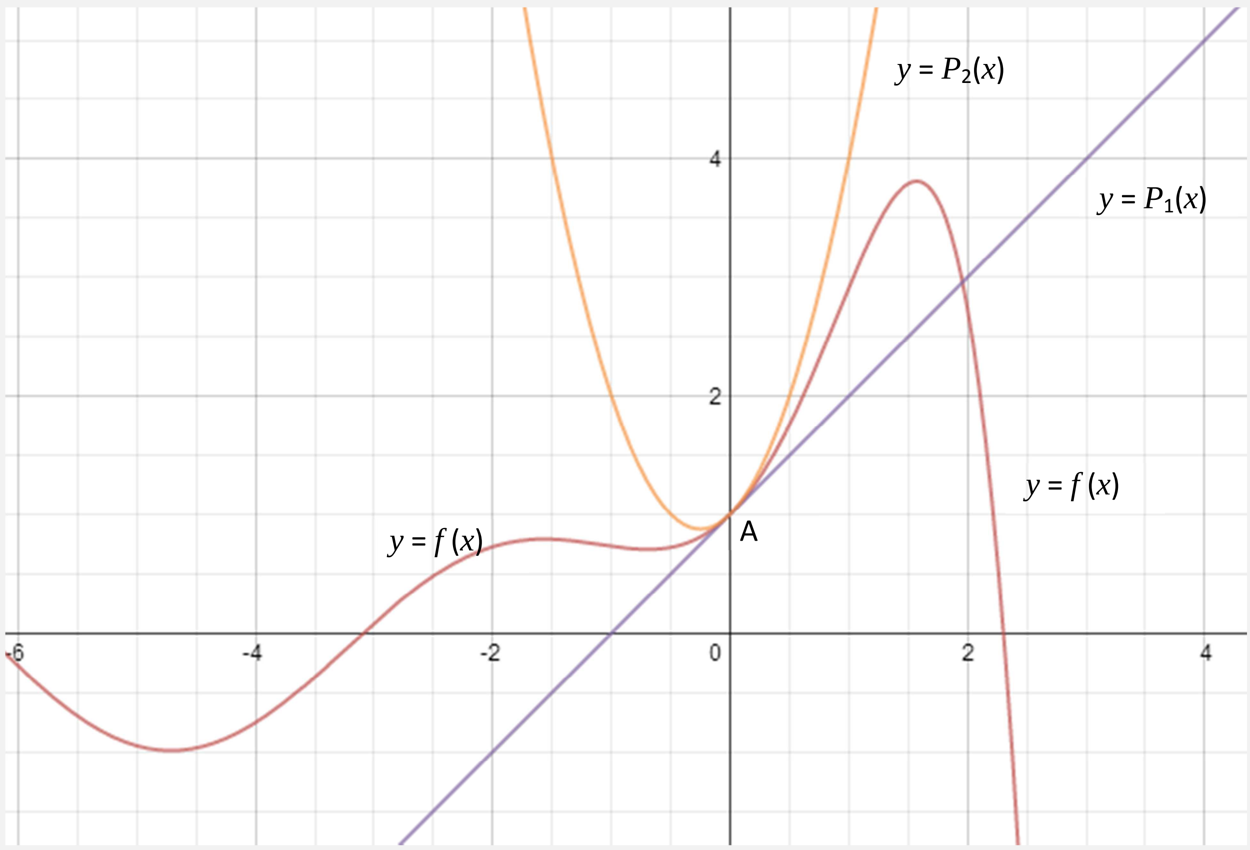
$$= A + x\varepsilon_4(x) + Bx + x\varepsilon_5(x) + Ax + x\varepsilon_6(x) + x\varepsilon_7(x) + x\varepsilon_8(x)$$
$$+ x\varepsilon_9(x) + x\varepsilon_{10}(x) + x\varepsilon_{11}(x) + x\varepsilon_{12}(x) - x - x\varepsilon_3(x)$$
$$= A + Bx + Ax - x + x.\varepsilon(x) = A + (A + B - 1)x + x.\varepsilon(x)$$

Dans notre calcul, le terme Bx^2 est apparu, par exemple. Il n'est pas embarrassant puisqu'il vaut $x \times Bx$ où Bx est une expression de type $\varepsilon(x)$, puisqu'elle tend vers zéro avec x.
Ainsi Bx^2 a été écrit $x\varepsilon_7(x)$.
Donc, le développement limité de y en 0 à l'ordre 1 est $y = A + (A + B - 1)x + x\varepsilon(x)$.

b) Soit Γ la courbe représentative de f dans le repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ et A le point de coordonnées (0, 1). Préciser la position de Γ par rapport à sa tangente en A au voisinage de ce point.

L'équation de la droite tangente à Γ en A est donnée par $y = P_1(x) = 1 + x$.
Celle de la parabole tangente à Γ en A est donnée par la partie régulière de $DL_2(f)(0)$, DL de f en 0 à l'ordre 2 : $P_2(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + x\right) - x\left[\text{arrêté à l'ordre 2}\right] = 1 + x + x^2$

$P_2(x) > P_1(x)$ pour tout x et donc, au voisinage de zéro et quel que soit le signe de x,
$f(x) > 1 + x$ (à première vue).
Au voisinage du point A, la courbe Γ est au-dessus de sa tangente.



11 Variables séparables

Résoudre $y' - \dfrac{1-y}{1+x} = 0$ (équation à variables séparables).

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \dfrac{1-y}{1+x} = 0$ ssi $\dfrac{\mathrm{d}y}{1-y} = \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x}$

Intégrons les deux membres : $-\ln|1-y| = \ln|1+x| + C$

Prenons l'exponentielle de chaque membre : $\dfrac{1}{1-y} = K(1+x)$ d'où : $\boxed{y = 1 - \dfrac{1}{K(1+x)}}$

12 GI FC18/26 2011 – Test – Variables séparables

Résoudre l'équation différentielle suivante : $\dfrac{xy'}{y} + 1 = x \quad (\mathrm{E})$, qui est à variables séparables.

L'équation s'écrit $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{x-1}{x} = 1 - \dfrac{1}{x}$, soit en différenciant : $\dfrac{1}{y}.\mathrm{d}y = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right).\mathrm{d}x$.

En intégrant, on obtient : $\ln|y| = x - \ln|x| + K$, et en appliquant une exponentielle :

$y = C.\mathrm{e}^{x - \ln|x|} = C.\dfrac{\mathrm{e}^x}{|x|}$.

L'oubli des valeurs absolues ne sera pas pénalisant ici ; tout en remarquant qu'elle n'est pas définie en zéro, on peut citer pour y toute fonction de forme

$$y = C_1.\frac{\mathrm{e}^x}{x} \textit{ sur }]-\infty\,;0[\textit{ et } y = C_2.\frac{\mathrm{e}^x}{x} \textit{ sur }]0\,;+\infty[$$

13 GI FC18/26 2012 – Test – Variables séparables

On donne l'équation différentielle suivante : $\dfrac{y^2 y'}{x} + 1 = 0 \quad (\mathrm{E})$, qui est à variables séparables.

1) Donner la forme générale des solutions de cette équation.

L'équation s'écrit $y^2 y' = -x$, soit en différenciant : $y^2.\mathrm{d}y = -x.\mathrm{d}x$.

En intégrant, on obtient : $\dfrac{y^3}{3} = -\dfrac{x^2}{2} + K$, et donc $y = \left(K - \dfrac{3x^2}{2}\right)^{1/3}$.

2) Déterminer l'unique solution y vérifiant $y(6) = 6$.

$y(6) = 6$ donne $6 = \left(K - \dfrac{3\times 6^2}{2}\right)^{1/3}$, soit $216 = K - 54$. Donc $K = 270$ et $y = \left(270 - \dfrac{3x^2}{2}\right)^{1/3}$.

14 Premier membre = différentielle

Résoudre $\frac{1}{T}V' - \frac{V}{T^2} = 0$ (équation dont le premier membre est une différentielle).

La forme différentielle donne $\frac{1}{T}\mathrm{d}V - \frac{V}{T^2}\mathrm{d}T = 0$

$\frac{\partial U(V,T)}{\partial V} = \frac{1}{T}$, donc $U(V,T) = \frac{V}{T} + f(T)$

$\frac{\partial U(V,T)}{\partial T} = -\frac{V}{T^2} + f'(T) = -\frac{V}{T^2} \Rightarrow f'(T) = 0 \Rightarrow f(T) = Cste$ et $U(V,T) = \frac{V}{T} + Cste$.

Comme $U = Cste$ nous en déduisons la solution générale : $\frac{V}{T} = Cste$ soit : $\boxed{V = kT}$

Vérifions : $V' = k$, donc : $\frac{1}{T}V' - \frac{V}{T^2} = \frac{1}{T}k - \frac{kT}{T^2} = \frac{k}{T} - \frac{k}{T} = 0$

On peut y voir l'équation des gaz parfaits à pression constante :

$$PV = nRT \Leftrightarrow V = \frac{nR}{P}T \quad ; \quad k = \frac{nR}{P}$$

15 GI FC34 2013 – Test - Bernoulli

On se propose de résoudre l'équation différentielle suivante : $xy' + y + y^2 = 0 \quad (\mathrm{E})$

où y est une fonction de variable x.

1) Il s'agit d'une équation de Bernoulli, pour laquelle on doit appliquer un changement de variable.

Montrer qu'en introduisant la fonction $u = \frac{1}{y}$, l'équation (E) équivaut à : $xu' - u = 1 \quad (\mathrm{E}_1)$.

Avec $y = \frac{1}{u}$ et $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{u'}{u^2}$, (E) devient :

$$-x\frac{u'}{u^2} + \frac{1}{u} + \frac{1}{u^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -xu' + u + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad xu' - u = 1 \quad (\mathrm{E}_1)$$

2) Résoudre l'équation (E_1), linéaire du premier ordre (la solution particulière sera <u>obtenue par la méthode de variation de la constante</u>).

Résolution de l'équation homogène associée : $xu' - u = 0 \quad (\mathrm{E}_1\mathrm{H})$

Séparation des variables : $x.\mathrm{d}u - u.\mathrm{d}x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{1}{x}.\mathrm{d}x$

Intégration : $\ln|u| = \ln|x| + K \quad \Leftrightarrow \quad |u| = \mathrm{e}^{\ln|x| + K} = \mathrm{e}^{\ln|x|} \times \mathrm{e}^{K} \quad \Leftrightarrow \quad u_{\mathrm{H}} = C.x$

Solution particulière de l'équation générale : par variation de la constante.
Posons $u_P = C.x$ où C est une fonction de x. On a : $u_P' = C'.x + C$.

$(\mathrm{E}_1) \Leftrightarrow x(C'x + C) - Cx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C'x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C' = \dfrac{1}{x^2}$

$C = \dfrac{-1}{x}$ convient, et ainsi on peut citer la solution simpliste : $u_P = -1$

Solution générale de (E_1) : $u = Cx - 1$

3) En déduire l'expression générale des solutions y de (E) - vérifier cette solution dans l'équation différentielle.

$$y = \frac{1}{u} = \frac{1}{Cx - 1}$$

Vérification : on a besoin de y' : $y' = \left(\dfrac{1}{Cx-1}\right)' = \dfrac{-C}{(Cx-1)^2}$

$(\mathrm{E}) \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{-Cx}{(Cx-1)^2} + \dfrac{1}{Cx-1} + \dfrac{1}{(Cx-1)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{-Cx}{(Cx-1)^2} + \dfrac{Cx-1}{(Cx-1)^2} + \dfrac{1}{(Cx-1)^2} = 0$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{0}{(Cx-1)^2} = 0$ OK