Analyse Fonctionnelle Non Linéaire et applications en équations différentielles

Mabel Cuesta

Master 2 Maths Pures. Cours 2009-2010. Semestre 4.

Table des matières

Références

[1] H. Amann, “Ordinary differential equations, An introduction to NonLinear Analysis”, de Gruyter Studies in Mathematics 13, Berlin (1990).

[2] A. Ambrosetti et G. Prodi, “A primer of NonLinear Analysis”, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 34, Cambridge University Press (...).

[3] R.F. Brown, “A topological Introduction to NonLinear Analysis”, Birkhause, (1993).

[4] L. Nirenberg, “Topics in NonLinear Functional Analysis”, Courant Lecture Notes in Mathematics 6, AMS (2000).

[5] M.A. Krasnosel'skii, “Topological methods in the theory of Non Integral Equations”, Macmillan, New York, (1964).

[6] J. Mawhin, "Degré topologique et solutions périodiques des systèmes différentiels non linéaires", Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 38ème année, n. 7-8, 308-398, (1969).

[7] N.S. Papageorgiou et S.Th. Kyritsi-Yiallourou, "Handbook of Applied Analysis", Advances in Mechanics and Mathematics 19, Springer (2009).

[8] P.H. Rabinowitz, "A global theorem for nonlinear eigenvalue problems and applications", Contributions to Nonlinear Functional Analysis, 11-36, Academic, New York, (1971).

[9] P.H. Rabinowitz, "Théorie du degré topologique et application à des problèmes aux limites non linéaires", Notes de cours rédigées par H. Berestycki, LAN Paris 6, (1976).

[10] J.T. Schwartz, "Nonlinear Functional Analysis", Gordon Breach, New York (1953).

[11] K. Yosida, "Functional Analysis", Classics in Mathematics, Springer (1995).

Notations

- Soit $N \in \mathbb{N}_*$ et $||\cdot||$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^N$. Si $x_0 \in \mathbb{R}^N$ et $r \in \mathbb{R}_+$ on note $B_r(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^N, \, ||x - x_0|| < r\}$ et $< \cdot, \cdot >$ le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^N$.

- Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. On pose $C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ l'espace des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^N$, k fois continûment différentiables dans Ω, qui sont continues sur $\overline{\Omega}$ et dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre k sont des restrictions d'applications continues sur $\overline{\Omega}$. Cet espace sera muni de sa topologie usuelle.

- Pour tout $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ on pose $J_\varphi(x) :=$déterminant de $\varphi'(x)$.

- Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$ on pose $Sgn(a) = 1$ si $a > 0, Sgn(a) = -1$ si $a < 0$.

- Si $A \subset \mathbb{R}^N$ on note $\lambda_N^*(A)$ la "mesure extérieure de Lebesgue" de $\mathbb{R}^N$. Lorsque A est mesurable Lebesgue on note $\lambda_N(A)$ sa mesure de Lebesgue.

- Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et f une application de Ω dans $\mathbb{R}^N$ différentiable. Rappelons qu'un point $x \in \Omega$ est dit "régulier" si $J_f(x) \neq 0$. On dit que $y \in R^N$ est une "valeur régulière" de f si tous les points $x \in f^{-1}(y)$ sont réguliers.

- Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et f une application de Ω dans $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$. Alors $suppf := \overline{\{x \in \Omega, \, f(x) \neq 0\}}$.

- Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $f = (f_1, \cdots, f_N) \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ possédant des dérivées partielles en tout point. On définit $div\, f := \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$.

- Soit A une matrice $N \times N$. Les valeurs caractéristiques de A sont les inverses des valeurs propres (avec la convention $1/0 = \infty$). Si λ est une valeur propre, nous noterons la multiplicité algébrique de λ par $m(\lambda)$, c.-à-d., $m(\lambda) = dim \, \cup_{n=1}^\infty Ker\, (A - \lambda Id)^n$. On note $\sigma(A)$ l'ensembles des valeurs propres (réelles ou pas).

1 Préliminaires

Nous rappelons ici le théorème de la fonction réciproque pour des fonctions définies dans un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Nous donnerons dans la section **??** la généralisation de ce théorème aux fonctions définies dans des espaces de Banach. La preuve du théorème de la fonction réciproque dépend du *théorème du point fixe de Banach* que nous rappelons également.

1.1 Théorème du point fixe de Banach

Proposition 1.1. *Soit (X,d) un espace métrique complet et $f : X \mapsto X$ une application α-contractante , c.-à-d., il existe $0 < \alpha < 1$ tel que $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x,y)$ pour tout $x, y \in X$. Alors f possède un unique point fixe.*

Démonstration. On choisit un point $x_0 \in X$ quelconque et on définit la suite $x_n := f(x_{n-1})$. On montre par récurrence que $d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha^n d(x_0, x_1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si on note $f^{(n)} = f \circ f \circ \cdots \circ f$ alors on a

$$d(f^{(n)}(x_0), f^{(m)}(x_0)) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, x_1)$$

et donc $d(x_n, x_m) = d(f^{(n)}(x_0), f^{(m)}(x_0)) \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Comme X est un espace complet et la suite x_n est de Cauchy, il existe $x \in X$ tel que $x_n \to x$. Par continuité, $x_{n+1} = f(x_n) \to f(x)$, d'où $f(x) = x$. L'unicité du point fixe x est une conséquence immédiate de l'α-contractivité. $\square$

1.2 Théorème de la fonction réciproque

Nous omettons la preuve du résultat suivant.

Théorème 1.2. *Théorème de la fonction réciproque. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert, $x_0 \in \Omega$, $y_0 \in \mathbb{R}^N$ et $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, tels que $f'(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ est un isomorphisme et $f(x_0) = y_0$. Alors il existe un voisinage ouvert V de x_0 et un voisinage ouvert W de y_0 tels que $f_{|V}$ est un difféomorphisme de classe C^1 de V sur W ; c.-à-d., il existe une fonction $g \in C^1(W, V)$ tel que $f \circ g = Id_W$ et $g \circ f = Id_V$. En particulier*

$$Sgn\, J_f(x) = Sgn\, J_f(x_0) \text{ pour tout } x \in V.$$

Un corollaire immédiat du théorème de la fonction réciproque est le suivant

Corollaire 1.3. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné, $y_0 \in \mathbb{R}^N$, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, tels que $f'(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ est un isomorphisme pour tout $x \in f^{-1}(y_0)$. Alors $f^{-1}(y_0)$ ne contient qu'un nombre fini de points.*

La preuve de ce résultat est laissée comme exercice.

Exercice 1. *Soit (X,d) un espace métrique complet et $f : X \mapsto X$ une application telle que $f^{(n)} := f \circ f \circ \cdots \circ f$ est α-contractante pour un $n \in \mathbb{N}_*$. Montrer que f possède un unique point fixe.*

Exercice 2. *Montrer la version locale du théorème de point fixe de Banach : Soit* (X, d) *un espace métrique complet,* $\overline{B}_r(x_0) \subset X$ *et* $f : \overline{B}_r(x_0) \to X$ *une application* α*-contractante telle que* $d(f(x_0), x_0) \leq (1 - \alpha)r$*. Montrer que* f *possède un point fixe.*

Exercice 3. *Soit* $(X, ||\cdot||_X)$ *un espace de Banach et* $\phi : \overline{B}_r(0) \mapsto X$ *une application* α*-contractante avec* $0 \leq \alpha < 1$*. Montrer que l'application* $\varphi(x) := x + \phi(x)$ *est continue, injective et* $\overline{B}_{r(1-\alpha)}(\varphi(0)) \subset \varphi(\overline{B}_r(0))$*.*

Exercice 4. *Soit* $B_r(0) \subset \mathbb{R}^N$ *et* $\phi : \overline{B}_r(0) \mapsto \mathbb{R}^N$ *de classe* C^1*. Supposons qu'il existe* $o < \alpha < 1$ *tel que* $||\phi'(x)|| < \alpha$ *pour tout* $x \in \overline{B}_r(0)$*. Montrer que* ϕ *est* $\alpha-$*contractante.*

1.3 Une extension du théorème de la fonction réciproque

Nous aurons besoin d'une extension du théorème précédent. Le but est d'étudier les fonctions de classe C^1 voisines des fonctions qui satisfont les hypothèses du théorème 1.2.

Proposition 1.4. *Soient* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un ouvert,* $x_0 \in \Omega$*,* $y_0 \in \mathbb{R}^N$ *et* $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *tels que* $f'(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ *est un isomorphisme et* $f(x_0) = y_0$*. Alors il existe* $r > 0$ *avec* $\overline{B}_r(x_0) \subset \Omega$ *et il existe* $\epsilon_1 > 0$ *tel que, pour toute* $h \in C^1(\overline{B}_r(x_0), \mathbb{R}^N)$ *satisfaisant* $||f - h||_{C^1(\overline{B}_r(x_0), \mathbb{R}^N)} < \epsilon_1$ *on a que*
(a) h *est injective et* $y_0 \in h(\overline{B}_r(x_0))$ *;*
(b) $J_h(x) \neq 0$ *et* $Sgn\, J_h(x) = Sgn\, J_f(x_0)$ *pour tout* $x \in \overline{B}_r(x_0)$*.*

Démonstration. Soit $\overline{B}_r(x_0) \subset V$, où V est le voisinage donné par le théorème 1.2. Montrons d'abord que **(b)** est vérifié dans $\overline{B}_r(x_0)$. Considérons $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ muni de la norme $\|(a_{ij})_{1\leq i,j\leq N}\| := \max |a_{ij}|_{1\leq i,j\leq N}$. L'application

$$\text{dét} \ : \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$$

est continue et comme $f'(\overline{B}_r(x_0))$ est un sous-ensemble compact de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, il existe un voisinage compact K de $f'(\overline{B}_r(x_0))$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ tel que $X \to$détX est uniformément continue sur K :

$$\forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0, \forall\, X, Y \in K, ||X - Y|| < \delta \Rightarrow |\text{ dét } X - \text{ dét } Y| < \epsilon.$$

Comme K est un voisinage de $f'(\overline{B}_r(x_0))$ il existe $0 < \eta < \delta$ tel que

$$\forall h \in C^1(\overline{B}_r(x_0), \mathbb{R}^N), ||h - f||_{C^1(\overline{B}_r(x_0), \mathbb{R}^N)} < \eta \Rightarrow h'(x) \in K\ \forall x \in \overline{B}_r(x_0).$$

En combinant ces deux inégalités on obtient

$$\forall h \in C^1(\overline{B}_r(x_0), \mathbb{R}^N), ||f - h||_{C^1(\overline{B}_r(x_0), \mathbb{R}^N)} < \eta \Rightarrow |J_h(x) - J_f(x)| < \epsilon\ \forall x \in \overline{B}_r(x_0).$$

Maintenant, si on choisit $0 < \epsilon < \frac{1}{2}\inf\{|J_f(x)|,\, x \in \overline{B}_r(x_0)\}$, cette dernière condition entraîne à la fois que $J_h(x) \neq 0$ pour tout $x \in \overline{B}_r(x_0)$ et $SgnJ_h(x) = SgnJ_f(x) = SgnJ_f(x_0)$.

Pour montrer **(a)** prenons $0 < \epsilon_1 < \inf\{\frac{r}{4\rho}, \epsilon\}$ tel que, pour tout $h \in C^1(\overline{B}_r(x_0), \mathbb{R}^N)$ avec $||h - f||_\infty < \epsilon_1$, on ait

(α) $||h'(x_0)^{-1}|| < \rho$,

(β) $||h'(x_0)^{-1}(h'(y) - h'(x_0))|| < \frac{3}{4} \quad \forall y \in \overline{B}_r(x_0)$,

où $\rho > 0$ est tel que $||f'(x_0)|| < \rho$. Par (β), la fonction $\theta(x) := h'(x_0)^{-1}h(x)$ satisfait $||\theta'(y) - Id||_{\overline{B}_r(x_0)} < \frac{3}{4}$ pour tout $y \in \overline{B}_r(x_0)$. Par l'exercice 4, $\theta - Id$ est une application $\frac{3}{4}$-contractante dans $\overline{B}_r(x_0)$ et par l'exercice 3, θ est injective. Donc h est injective et par conséquent l'équation $h(x) = y_0$ a au plus une solution dans $\overline{B}_r(x_0)$. Montrons que $y_0 \in h(\overline{B}_r(x_0))$. D'après l'exercice 3 on a d'une part que $\overline{B}_{\frac{r}{4}}(\theta(x_0)) \subset \theta(\overline{B}_r(x_0))$ et comme $h(x) = h'(x_0)\theta(x)$ alors

$$h'(x_0)(\overline{B}_{\frac{r}{4}}(\theta(x_0))) \subset h(\overline{B}_r(x_0)).$$

D'autre part $\overline{B}_{\frac{r}{4\rho}}(h(x_0)) \subset h'(x_0)(\overline{B}_{\frac{r}{4}}(\theta(x_0)))$ car si $y \in \overline{B}_{\frac{r}{4\rho}}(h(x_0))$, alors par (α)

$$||h'(x_0)^{-1}y - h'(x_0)^{-1}h(x_0)|| \leq ||h'(x_0)^{-1}|| \, ||y - h(x_0)|| < \frac{r}{4}.$$

Finalement

$$||h(x_0) - y_0|| = ||h(x_0) - f(x_0)|| < \frac{r}{4\rho}$$

et donc $y_0 \in \overline{B}_{\frac{r}{4\rho}}(h(x_0))$. $\square$

2 Le degré topologique de Brouwer

2.1 Le nombre algébrique de zéros d'une fonction régulière

Considérons un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^N$ et une fonction continue $f : \overline{\Omega} \mapsto \mathbb{R}^N$. On se pose le problème suivant : trouver une quantité facilement calculable nous permettant de déduir le nombre de zéros de f dans $\overline{\Omega}$. Dans les cas simples, cette quantité devrait donner le nombre exact de zéros de f et devrait être invariante par des petites déformations (continues) de f. Afin d'empêcher que les zéros de f "sortent" du domaine, nous allons démander que $0 \notin f(\partial\Omega)$. Dans des exemples simples dans $\mathbb{R}$ on remarque que le nombre de zéros n'est pas constant par des déformations continues de f. Or si on assigne à chaque zéro x_0 une "orientation", qui n'est autre que le signe de $f'(x)$, et on définit

$$\alpha(f, \Omega) = \sum_{x \in f^{-1}(0)} Sgn f'(x)$$

on verra que $\alpha(f, \Omega)$ a des très bonnes propriétés. Nous allons tout d'abord généraliser cette formule au cas des dimensions $N \geq 1$ et aux fonctions dans les espaces ci-dessous.

Définition 2.1. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $k \in \mathbb{N} \cup \infty$.*

$$\mathcal{D}_0 := \{\varphi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N) \ : 0 \notin \varphi(\partial\Omega)\}.$$

$$C_r^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N) := \{\varphi \in C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N),\ 0 \text{ est une valeur régulière de } \varphi\}.$$

$$\mathcal{D} := \mathcal{D}_0 \cap C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N).$$

$$\mathcal{D}_r := \mathcal{D}_0 \cap C_r^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N).$$

On a bien les inclusions $\mathcal{D}_r \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{D}_0$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}_r$. Par le corollaire 1.3, $\varphi^{-1}(0)$ ne contient qu'un nombre fini de points. Si on écrit $\varphi^{-1}(0) = \{\chi_1, \cdots, \chi_k\}$, par le théorème de la fonction réciproque on aura que φ est un difféomorphisme d'un voisinage de chaque ξ_p sur un voisinage de 0.

Définition 2.2. *Le* **nombre algébrique de zéros de φ relativement à Ω** *est l'entier*

$$\alpha(\varphi, \Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\chi_i \in \varphi^{-1}(0)} Sgn J_\varphi(\chi_i).$$

Voici une "évaluation intégrale" du nombre des zéros d'une fonction régulière dûe à Heinz (voir [10]).

Proposition 2.3. *Soit $\varphi \in \mathcal{D}_r$. Il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour tout $0 < \epsilon < \epsilon_0$ et pour toute application $j_\epsilon \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ telle que supp $J_\epsilon \subset \overline{B}_\epsilon(0)$ et $\int_{\mathbb{R}^N} j_\epsilon(x)\, dx = 1$* [1] *on a*

$$\alpha(\varphi, \Omega) = \int_\Omega j_\epsilon(\varphi(x)) J_\varphi(x)\, dx. \tag{1}$$

Démonstration. Posons $\varphi^{-1}(0) = \{\chi_1, \cdots, \chi_k\}$, $J_\varphi(\chi_p) \neq 0$ pour tout p. Choisissons des voisinages ouverts U_p de χ_p deux à deux disjoints tels que φ soit un difféomorphisme de U_p sur son image $\varphi(U_p)$. Comme $\varphi(U_1) \cap \varphi(U_2) \cap \ldots \cap \varphi(U_k)$ est un voisinage de 0, pour $\epsilon > 0$ petit, $B_\epsilon(0) \subset \cap_{i=1}^k \varphi(U_i)$. Prenons $N_p = U_p \cap \varphi^{-1}(B_\epsilon(0))$. Les N_p sont des voisinages ouverts des χ_p deux à deux disjoints où J_φ garde signe constant et tels que φ est un difféomorphisme de N_p sur $B_\epsilon(0)$. Soit $j_\epsilon \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ une application telle que *supp* $J_\epsilon \subset \overline{B}_\epsilon(0)$ et $\int_{\mathbb{R}^N} j_\epsilon(x)\, dx = 1$. Posons $I_\epsilon = \int_\Omega j_\epsilon(\varphi(x)) J_\varphi(x)\, dx$. On a

$$I_\epsilon = \int_{\{x \in \Omega;\, |\varphi(x)| \leq \epsilon\}} j_\epsilon(\varphi(x)) J_\varphi(x)\, dx = \sum_{p=1}^k \int_{N_p} j_\epsilon(\varphi(x)) J_\varphi(x)\, dx$$

et par la formule du changement de variable

$$\int_{N_p} j_\epsilon(\varphi(x)) J_\varphi(x)\, dx = Sgn(J_\varphi(\chi_p)) \int_{\overline{B_\epsilon(0)}} j_\epsilon(y)\, dy = Sgn J_\varphi(\chi_p),$$

d'où le résultat. □

1. Un exemple d'une telle application est $j_\epsilon(x) = \frac{c}{\epsilon^N} e^{\frac{\epsilon^2}{||x||^2 - \epsilon^2}}$ si $||x|| < \epsilon; j_\epsilon(x) = 0$ sinon. La constante $c > 0$ est telle que $\int_{\mathbb{R}^N} j_1(x)\, dx = 1$.

2.2 Extension de la définition du nombre algébrique de zéros

Nous allons étendre la définition de $\alpha(\varphi, \Omega)$ aux applications continues φ et dont 0 pourra être une valeur non régulière. Commençons par l'étude des espaces $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_r$.

Lemme 2.4. **(i)** *$\mathcal{D}_0$ est un ouvert de $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$.* **(ii)** *$\mathcal{D}_r$ est dense dans $\mathcal{D}_0$.*

Démonstration. **(i)** Etant donné $\varphi \in \mathcal{D}_0$ il suffit de considérer le voisinage $V = \{\psi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N),\ ||\varphi - \psi||_\infty < dist\,(0, \varphi(\partial\Omega))\,\}$. **(ii)** Soit $\varphi \in \mathcal{D}_0$ et $0 < \epsilon < dist\,(0, \varphi(\partial\Omega))$. En utilisant les résultats classiques de régularisation, il existe $\varphi_\epsilon \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ telle que $||\varphi - \varphi_\epsilon||_\infty < \epsilon/2$, donc $\varphi_\epsilon \in \mathcal{D}$. Par le lemme de Sard, c.f. lemme 2.5, il existe $y \in \mathbb{R}^N$ avec $||y|| < \epsilon/2$ tel que y est une valeur régulière de φ_ϵ. Alors $\psi_\epsilon := \varphi_\epsilon - y \in C_r^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ et $||\varphi - \psi_\epsilon||_\infty < \epsilon$. De plus $0 \notin \psi_\epsilon(\partial\Omega)$ puisque

$$dist\,(0, \varphi_\epsilon(\partial\Omega)) \geq dist\,(0, \varphi(\partial\Omega)) - ||\varphi - \varphi_\epsilon||_\infty > \epsilon/2 > ||y||.$$

□

Nous allons rappeler dans le lemme suivant un résultat du à Sard. Un corollaire de ce lemme est que les valeurs régulières des applications de classe C^1 d'un ouvert de $\mathbb{R}^N$ à valeurs dans $\mathbb{R}^N$ est un ensemble dense.

Lemme 2.5. *Lemme de Sard. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $f \in C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}^N)$. Si $S_f := \{x \in \mathcal{O}, J_f(x) = 0\}$, alors $\lambda_N(f(S_f)) = 0$. En particulier, l'ensemble des valeurs régulières de f est dense dans $\mathbb{R}^N$.*

Démonstration. Considérons un cube fermé C inclus dans $\mathcal{O}$ de coté a. Subdivisons C en k^N sous-cubes de coté $\frac{a}{k}$, $\sqrt{N}\frac{a}{k}$ sera donc le diamètre de chaque sous-cube. L'application $x \to f'(x)$ est uniformément continue sur C. Donc, pour tout $\epsilon > 0$ donné il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x, y \in C \quad ||x - y|| < \alpha \Rightarrow ||f'(x) - f'(y)|| < \epsilon. \tag{2}$$

Choisissons k tel que $\sqrt{N}\frac{a}{k} < \alpha$. Sur C, f est lipschitzienne car l'on peut écrire

$$f(x) - f(y) = \int_0^1 f'(x + t(y - x))(y - x)\,dt$$

et donc

$$||f(x) - f(y)|| \leq \sup_{z \in C} ||f'(z)||\,||y - x|| = M||y - x|| \tag{3}$$

où M est une constante ne dépendant que de f et de C. Soit $x \in C \cap S_f$ et soit $\tilde{C}$ un sous-cube contenant x. On a, d'après (3),

$$\forall y \in \tilde{C}, \quad ||f(y) - f(x)|| < M\sqrt{N}\frac{a}{k},$$

d'où $f(\tilde{C}) \subset B_{K\sqrt{N}\frac{a}{k}}(f(x))$. D'autre part, en utilisant (2),

$$||f(y)-f(x)-f'(x)(y-x)|| \leq \int_0^1 ||f'(x+t(y-x))-f'(x)|| \; ||y-x|| \, dt \leq \epsilon\sqrt{N}\frac{a}{k}.$$

Comme $J_f(x) = 0$ alors $f'(x)$ n'est pas inversible et $f'(x)(\mathbb{R}^N)$ est donc un sous-espace de $\mathbb{R}^N$ distinct de $\mathbb{R}^N$, il est contenu dans un hyperplan H de $\mathbb{R}^N$. L'inégalité précédente se traduit par

$$dist(f(y), f(x) + H) \leq \epsilon\sqrt{N}\frac{a}{k}.$$

Ainsi $f(\tilde{C})$ est inclus dans un pavé de centre $f(x)$ et de volume

$$2\epsilon\sqrt{N}\frac{a}{k}.(2M\sqrt{N}\frac{a}{k})^{N-1}$$

donc $\lambda_N^*(f(\tilde{C})) \leq 2^N M^{N-1} N^{N/2} \frac{a^N}{k^N}\epsilon$ et

$$\lambda_N^*(f(C \cap S_f)) \leq k^N \lambda_N^*(f(\tilde{C})) \leq 2^N k^{N-1} N^{N/2} a^N \epsilon.$$

En faisant $\epsilon \to 0$ on obtient que $f(C \cap S_f)$ est de mesure nulle. Comme S_f peut être recouvert par une union dénombrable d'ensembles du type $S_f \cap C$, on conclut que $f(S_f)$ est également de mesure nulle. $\square$

Les deux propositions ci-dessous donnent des informations cruciales sur la continuité de $\alpha(\varphi - b, \Omega)$ par rapport à φ et à b.

Proposition 2.6. *Soit $\varphi \in \mathcal{D}$ et soient $b, b_1 \in \mathbb{R}^N \setminus \varphi(\partial\Omega)$ des valeurs régulières de φ qui sont dans la même composante connexe de $\mathbb{R}^N \setminus \varphi(\partial\Omega)$. Alors on a*

$$\alpha(\varphi - b, \Omega) = \alpha(\varphi - b_1, \Omega).$$

Démonstration. Nous pouvons supposer que $b_1 = 0$. Notons $\mathcal{O}$ la composante connexe de $\mathbb{R}^N \setminus \varphi(\partial\Omega)$ contenant b et 0. Comme $\mathbb{R}^N \setminus \varphi(\partial\Omega)$ est un ouvert alors $\mathcal{O}$ est aussi un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et par conséquent $\mathcal{O}$ est connexe par arcs. Soit γ un chemin de b à 0 contenu dans $\mathcal{O}$ et soit η tel que $B_\eta(\gamma(t)) \subset \mathcal{O}$ pour tout $t \in [0,1]$. Nous allons montrer que la différence $\alpha(\varphi - b, \Omega) - \alpha(\varphi, \Omega)$ est l'intégrale de la divergence d'une fonction $u \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ avec $supp\, u \subset \Omega$, $\partial\Omega$ et le résultat sera donc une conséquence de la *formule de Stokes*, c.f. Annexe théorème 8.11 appliquée au prolongement de u par 0 sur un domaine D arbitraire de classe C^1 contenant Ω. Pour tout $0 < \epsilon < \frac{\eta}{4}$ on a $B_\epsilon(0) + \gamma([0,1]) \subset \mathcal{O}$ et donc la condition 4 du lemme 2.7 ci-dessous sera satisfaite si nous choisissons $j_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ telle que $supp\, j_\epsilon = \overline{B}_\epsilon(0)$ et $\int_{\mathbb{R}^N} j_\epsilon(x)\, dx = 1$. Par **(i)** du lemme 2.7 il existe $v \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ avec $supp\, v \subset \mathcal{O}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^N$

$$div\, v\,(x) = j_\epsilon(x) - j_\epsilon(x - b).$$

On applique ensuite **(ii)** du lemme 2.7 avec v et φ. La condition $supp\, v \cap \varphi(\partial\Omega) = \emptyset$ est satisfaite car $supp\, v \subset \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N \setminus \varphi(\partial\Omega)$. Il existe alors $u \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ avec $supp\, u \subset \Omega$ tel que $\forall x \in \overline{\Omega}$

$$div\, u\,(x) = [j_\epsilon(\varphi(x)) - j_\epsilon(\varphi(x) - b)]J_\varphi(x).$$

Comme $supp\ u \subset \Omega$ alors u est nul sur $\partial\Omega$ et par conséquent $\int_\Omega div\, u\, dx = 0$, ce qui donne

$$\int_\Omega j_\epsilon(\varphi(x))J_\varphi(x)\, dx = \int_\Omega j_\epsilon(\varphi(x) - b)J_\varphi(x)\, dx.$$

En utilisant la représentation intégrale de α on conclut $\alpha(\varphi, \Omega) = \alpha(\varphi - b, \Omega)$. $\square$

Lemme 2.7. **(i)** *Soient $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné, $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^N$ continue et $h \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ à support compact tel que, si $K := supp\, h$,*

$$K + \gamma([0,1])) \subset \mathcal{O}. \tag{4}$$

Alors il existe $v \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ avec $supp\, v \subset \mathcal{O}$ tel que, $\forall x \in \mathbb{R}^N$,

$$div\, v\,(x) = h(x - \gamma(0)) - h(x - \gamma(1)).$$

(ii) *Soit $\varphi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ et $v \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ à support compact tel que $supp\, v \cap \varphi(\partial\Omega) = \emptyset$. Alors il existe $u \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ avec $supp\, u \subset \Omega$ tel que $\forall x \in \overline{\Omega}$,*

$$div\, u\,(x) = div\, v(\varphi(x))J_\varphi(x).$$

Démonstration. **(i)** Supposons d'abord que $\gamma(t) = tx_0$ et posons $\psi(x) := \int_0^1 h(x - tx_0)\, dt$ et $v(x) := \psi(x)x_0$. Si $v(x) \neq 0 \Rightarrow \psi(x) \neq 0 \Rightarrow \exists t \in [0,1]$ tel que $x - tx_0 \in K$, donc $supp\ v \subset K + \gamma([0,1])$. D'autre part

$$div\, v(x) = \psi'(x)(x_0) = -\frac{d}{ds}[\psi(x - sx_0)_{|s=0} = -\frac{d}{ds}\int_0^1 h(x - (t+s)x_0)_{|s=0}\, dt =$$

$$- \int_0^1 \tfrac{d}{dt} h(x - tx_0)\, dt = h(x) - h(x - x_0).$$

Soit maintenant γ un chemin quelconque dans $\mathbb{R}^N$. Pour tout $s, t \in [0,1]$ on introduit la relation d'équivalence $s \sim t \Leftrightarrow$ il existe $u \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ avec $supp\, v \subset \mathcal{O}$ telle que $h(x - \gamma(s)) - h(x - \gamma(t)) = div\, u(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$. Nous allons montrer que chaque classe d'équivalence est un ouvert, donc par compacité il aura seulement une classe d'équivalence dans $[0,1]$, ce qui prouve le résultat. Pour s fixé posons $x_t := \gamma(t) - \gamma(s), t \in [0,1]$ et soit E la classe d'équivalence de s. Considérons $h_s(x) := h(x - \gamma(s)), K_s := supp\, h_s$, et $r = dist(K_s, \partial\mathcal{O})$. Par hypothèse $r > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que $|t - s| < \eta \Rightarrow ||\gamma(t) - \gamma(s)|| < \frac{r}{2}$, d'où

$$K_s + \{\rho x_t,\ \rho \in [0,1]\} \subset \mathcal{O}.$$

En utilisant le résultat précédent avec x_t à la place de x_0, il existe $v \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ avec $supp\, v \subset \mathcal{O}$ et $div\, v(x) = h_s(x) - h_s(x - x_t) = h(x - \gamma(s)) - h(x - \gamma(t))$. Alors $t \sim s$ pour tout $|t - s| < \eta$ et donc E est ouvert.
(ii) Soit A_{ij} le cofacteur de $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$ dans $\varphi'(x)$, c.-à-d.,$A_{ij}(x) = (-1)^{i+j} M_{ij}(x)$ où $M_{ij}(x)$ est le mineur relatif à $\frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_j}$. On a l'identité classique

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} A_{kj}(x) = \delta_{ik} J_\varphi(x).$$

Posons $u_i(x) := \sum_{j=1}^{N} v_j(\varphi(x)) A_{ji}(x)$, $i = 1, \ldots, N$ pour tout $x \in \overline{\Omega}$ et prenons $u = (u_1, \cdots, u_N)$. Signalons que si $x \in \mathbb{R}^N$ et $x \notin supp\, v$ alors $v(x) = 0$ et donc $u(x) = 0$. Par conséquent *supp* $u \subset$ *supp* v et donc *supp* $u \cap \varphi(\partial\Omega) = \emptyset$. On a

$$div\, u = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial v_j(\varphi)}{\partial x_i} A_{ji} + g = \sum_{i,j,k=1}^{N} \frac{\partial v_j}{\partial \varphi_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} A_{ji} + g =$$

$$\sum_{j,k=1}^{N} \frac{\partial v_j}{\partial \varphi_k} \delta_{jk} J_\varphi + g = div\, v(\varphi) J_\varphi + g,$$

où $g(x) = \sum_{i,j=1}^{N} v_j(\varphi(x)) \frac{\partial A_{ji}(x)}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{N} v_j(\varphi(x))(-1)^j . \sum_{i=1}^{N} (-1)^i \frac{\partial M_{ji}(x)}{\partial x_i}$.
Or $\sum_{i=1}^{N} (-1)^i \frac{\partial M_{ji}(x)}{\partial x_i} = 0$ d'après un résultat fondamental de la théorie des formes différentielles (c.f. exercice 5). $\square$

Proposition 2.8. *Soit $\varphi \in \mathcal{D}_r$. Il existe un voisinage $U \subset C_r^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N) \cap \mathcal{D}_0$ de φ pour la topologie de $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tel que, pour tout $\psi \in U$, $\alpha(\psi, \Omega) = \alpha(\varphi, \Omega)$.*

Démonstration. Posons $\varphi^{-1}(0) = \{\chi_1, \cdots, \chi_k\}$. Par le théorème de la fonction réciproque 1.2 choisissons des boules $B_r(\chi_p)$ deux à deux disjointes avec $r > 0$ suffisamment petit pour que φ soit un difféomorphisme de $B_r(\chi_p)$ sur son image $\varphi(B_r(\chi_p))$. Soit $r := dist(0, \varphi(\partial\Omega)) > 0$. Alors $||\varphi - \psi||_\infty < r$ implique $0 \notin \psi(\partial\Omega)$. Prenons l'ensemble $D = \overline{\Omega} - \cup_{p=1}^{k} B_r(\chi_p)$. Comme D est un compact et $0 \notin \varphi(D)$ alors $\epsilon_2 := dist\,(0, \varphi(D)) > 0$ et $0 \notin \psi(D)$ pour tout $\psi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ satisfaisant $||\varphi - \psi||_\infty < \epsilon_2$. C'est à dire, les seules solutions de $\psi(x) = 0$ se trouvent dans $\cup_{p=1}^{k} B_r(\chi_p)$. Appliquons maintenant la proposition 1.4 à f en chaque $\overline{B}_r(x_0)$ et soit $\epsilon_1 > 0$ commun à tous les boules. Si $||\varphi - \psi||_{C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)} < \epsilon := \inf\{r, \epsilon_2, \epsilon_1\}$ alors ψ satisfait les conclusions du lemme et on choisit donc $U = \{\psi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N),\ ||\varphi - \psi||_{C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)} < \epsilon\}$. $\square$

Exercice 5. *Soit $\varphi \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^{N-1})$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et posons*

$$D_i := \ d\acute{e}t(\varphi_{x_1}, \cdots, \hat{\varphi_{x_i}}, \cdots, \varphi_{x_N})$$

($\hat{\varphi_{x_i}}$ *signifie que la ième colonne* φ_{x_i} *est supprimée). Montrer que*

$$\sum_{i=1}^{N}(-1)^i\frac{\partial D_i}{\partial x_i}=0.$$

Nous allons maintenant définir le degré topologique de Brouwer.

Théorème 2.9. *Pour tout ouvert borné* $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ *et pour tout* $b\in\mathbb{R}^N$ *il existe une application*

$$deg\,(\cdot,\Omega,b):\{\varphi\in C(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N),\ b\notin\varphi(\partial\Omega)\}\mapsto\mathbb{Z}$$

appelée le degré topologique de Brouwer satisfaisant les propriétés suivantes :

(i) *Normalisation. Si* $b\in\Omega$ *alors de* $deg\,(Id,\Omega,b)=1$.
(ii) *Additivité. Si* Ω_1,Ω_2 *sont deux ouverts de* $\mathbb{R}^N$ *tels que* $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$, $\Omega_1\cap\Omega_2=\emptyset$, *et si* $b\notin\varphi(\partial\Omega_1)\cup\varphi(\partial\Omega_2)$ *alors*

$$deg\,(\varphi,\Omega,b)=deg\,(\varphi,\Omega_1,b)+deg\,(\varphi,\Omega_2,b).$$

(iii) *Continuité.* $deg\,(\cdot,\Omega,b)$ *est continue.*
(iv) *Invariance par translations.* $deg\,(\varphi,\Omega,b)=deg\,(\varphi-b,\Omega,0)$.

Démonstration. Il suffit de montrer l'existence d'une application $deg\,(\cdot,\Omega,0)$: $\mathcal{D}\mapsto\mathbb{Z}$ satisfaisant **(i)-(iii)** puis définir $deg\,(\varphi,\Omega,b)\stackrel{\text{def}}{=}deg\,(\varphi-b,\Omega,0)$. L'application $\alpha(\cdot,\Omega):\mathcal{D}_r\mapsto\mathbb{Z}$ satisfait trivialement (i) et (ii). On définit alors

$$\forall\varphi\in\mathcal{D}_r,\ deg\,(\varphi,\Omega,0)\stackrel{\text{def}}{=}\alpha(\varphi,\Omega).\tag{5}$$

Nous allons étendre la fonction $\alpha(\cdot,\Omega)$ par continuité d'abord dans $\mathcal{D}$ puis dans $\mathcal{D}_0$. Soit $r=dist\,(0,\varphi(\partial\Omega))$ et posons $\mathcal{O}$ la composante connexe de $\mathbb{R}^N\setminus\varphi(\partial\Omega)$ contenant 0.

• *Définition du degré dans* $\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}_r$. Fixons $\varphi\in\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}_r$. Par le lemme de Sard 2.5 il existe $b_1\in\mathbb{R}^N,|b_1|<r$ tel que b_1 est une valeur régulière de φ. De plus $b_1\in\mathcal{O}$ par le choix de r. On définit alors

$$deg\,(\varphi,\Omega,0)\stackrel{\text{def}}{=}\alpha(\varphi-b_1,\Omega).\tag{6}$$

Cette fonction est bien définie car par la proposition 2.6 le terme de droite est constant sur $\mathcal{O}$.

•*Définition du degré dans* $\mathcal{D}_0\setminus\mathcal{D}$. Fixons $\varphi\in\mathcal{D}_0\setminus\mathcal{D}$. Par des résultats connus de régularisation il existe $\psi\in C^\infty(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N)$ tel que $||\psi-\varphi||_\infty<r$. Par le choix de r, $0\notin\psi(\partial\Omega)$. On définit alors

$$deg\,(\varphi,\Omega,0)\stackrel{\text{def}}{=}deg\,(\psi,\Omega,0).\tag{7}$$

Cette définition a un sens car elle ne dépend pas du ψ choisi. En effet soient $\psi_1,\psi_2\in\mathcal{D},||\psi_1-\varphi||_\infty<r$ et $||\psi_2-\varphi||_\infty<r$. Considérons l'homotopie

$H(x,t) := t\psi_1(x) + (1-t)\psi_2(x)$ pour $t \in [0,1], x \in \overline{\Omega}$. Il est clair que $H \in C^\infty(\overline{\Omega} \times [0,1], \mathbb{R}^N)$ et $0 \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$. Nous allons montrer que

$$t \mapsto deg\,(H(\cdot,t),\Omega,0) \text{ est constante.}$$

Pour cela il suffit de montrer que $t \mapsto \alpha(H(\cdot,t),\Omega)$ est localement constante (pensez à faire la preuve avec des classes d'équivalence comme dans le lemme 2.7). Fixons $\tau \in [0,1]$. Par le lemme de Sard il existe $b \in \mathbb{R}^N, |b| < r$ tel que b est une valeur régulière de $H(\cdot,\tau)$. Par le choix de r nous avons $b \notin H(\cdot,\tau)(\partial\Omega)$ et $b \in \mathcal{O}$. De plus, comme H et $\frac{\partial H}{\partial t}$ sont uniformément continues sur $\overline{\Omega} \times [0,1]$, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que $|t-\tau| < \eta \Rightarrow ||H(\cdot,t) - H(\cdot,\tau)||_{C^1} < \epsilon$. Appliquons la proposition 2.8 à $H(\cdot,\tau) - b$. En choisissant ϵ petit nous aurons que si $|t-\tau| < \eta$ alors $H(\cdot,t) \in U$, où U est le voisinage de la proposition 2.8. Donc l'application

$$t \to deg\,(H(\cdot,t),\Omega,0) = \alpha(t\psi_1 + (1-t)\psi_2 - b,\Omega)$$

est constante pour $|t-\tau| < \eta$.
Signalons finalement que la fonction degré définie par (5) est continue en φ puisque elle est localement constante par (7). $\square$

Rémarque 2.10. *Il est possible de montrer qu'il existe une* **unique** *application*

$$deg\,(\cdot,\Omega,b) : \{\varphi \in C(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N)\ : b \notin \varphi(\partial\Omega)\} \mapsto \mathbb{Z}$$

satisfaisant aux propriétés **(i)**-**(iv)** *(c.f. [1]).*

2.3 Propriétés principales du degré

Théorème 2.11. **(v)** *Invariance du degré par homotopie. Soit $H \in C([0,1] \times \overline{\Omega},\mathbb{R}^N)$ et $b \notin H([0,1] \times \partial\Omega)$. Alors $t \mapsto deg\,(H(t,\cdot),\Omega,b)$ est constante.*
(vi) *Invariance du degré dans les composantes connexes de $\mathbb{R}^N \setminus \varphi(\partial\Omega)$. Soient b et b_1 dans la même composante connexe de $\mathbb{R}^N \setminus \varphi(\partial\Omega)$. Alors $deg\,(\varphi,\Omega,b) = deg\,(\varphi,\Omega,b_1)$.*
(vii) *Si $deg\,(\varphi,\Omega,b) \neq 0$ alors il existe $x_0 \in \Omega$ tel que $\varphi(x_0) = b$.*
(viii) *Si $deg\,(\varphi,\Omega,b) \neq 0$ alors $\varphi(\Omega)$ est un voisinage de b.*
(ix) *Si $\varphi(\Omega)$ est inclus dans un sous-espace strictement contenu dans $\mathbb{R}^N$, alors $deg\,(\varphi,\Omega,b) = 0$.*
(x) *Propriété de l'excision. Soit K fermé, $K \subset \overline{\Omega}$ et $b \notin \varphi(K) \cup \varphi(\partial\Omega)$, alors $deg(\varphi,\Omega,b) = deg(\varphi,\Omega \setminus K,b)$.*
(xi) *Soit $\{\Omega_i\}_{i\in I}$ une famille d'ouverts inclus dans Ω deux à deux disjoints et b un point tel que $\varphi^{-1}(b) \subset \cup_{i\in I}\Omega_i$, alors $deg\,(\varphi,\Omega_i,b) = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices $i \in I$ et l'on a $deg\,(\varphi,\Omega,b) = \sum_{i\in I} deg\,(\varphi,\Omega_i,b)$.*
(xii) *Supposons que $\varphi = \psi$ sur $\partial\Omega$, alors pour tout $b \notin \varphi(\partial\Omega) = \psi(\partial\Omega)$ on a $deg\,(\varphi,\Omega,b) = deg\,(\psi,\Omega,b)$.*
(xiii) *Supposons qu'il existe $H \in C(\partial\Omega \times [0,1],\mathbb{R}^N)$ tel que $b \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$,*

$\varphi := H(\cdot, 0)$ et $\psi := H(\cdot, 1)$; alors φ et ψ peuvent se prolonger par continuité dans $\overline{\Omega}$ et $deg\,(\varphi, \Omega, b) = deg\,(\psi, \Omega, b)$.

Démonstration. **(v)** C'est une conséquence de **(iii)**.
(vi) D'après **(iv)**, $deg\,(\varphi, \Omega, b) = deg\,(\varphi - b, \Omega, 0)$ et comme par **(i)** l'application $b \mapsto deg\,(\varphi - b, \Omega, 0) \in \mathbb{Z}$ est continue, elle est localement constante, donc constante dans les composantes connexes de $\mathbb{R}^N \setminus \varphi(\partial\Omega)$.
(vii) Si $b \notin \varphi(\overline{\Omega})$ on se ramène au cas régulier $\psi \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $b \notin \psi(\overline{\Omega})$ tel que $deg\,(\varphi, \Omega, b) = deg\,(\psi, \Omega, b)$. Or $deg\,(\psi, \Omega, b) = \alpha(\psi - b, \Omega) = 0$ car ce dernier nombre est une somme dont l'ensemble d'indices est vide.
(viii) Soit C_b la composante connexe de b dans $\mathbb{R}^N \setminus \varphi(\partial\Omega)$. D'après **(vi)** $deg\,(\varphi, \Omega, b_1) = deg\,(\varphi, \Omega, b) \neq 0$ pour tout $b_1 \in C_b$, et par **(vii)** $b_1 \in \varphi(\Omega)$. Nous avons donc $C_b \subset \varphi(\Omega)$ et puisque C_b est un ouvert, $\varphi(\Omega)$ est un voisinage de b.
(ix) C'est trivial d'après **(viii)**.
(x) On se ramène au cas régulier. Soit $\psi \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ tel que $||\varphi - \psi||_\infty \leq \frac{1}{2}\inf\{dist(b, \varphi(K)), dist(b, \varphi(\partial\Omega)), dist(b, \varphi(\partial(\Omega \setminus K))\}$. Cette condition entraîne que $b \notin \psi(K)$ et aussi que $deg\,(\varphi, \Omega, b) = deg\,(\psi, \Omega, b)$, $deg\,(\varphi, \Omega\setminus K, b) = deg\,(\psi, \Omega \setminus K, b)$. Considérons

$$\alpha = \frac{1}{2}\inf\{dist(b, \psi(K)), dist(b, \psi(\partial\Omega)), dist(b, \psi(\partial(\Omega \setminus K)))\}.$$

D'après le lemme de Sard il existe $c \in B_\alpha(0)$ valeur régulière de ψ. Le choix de α nous assure que $c \notin \psi(K)$ et que b et c se trouvent dans la même composante connexe de $\mathbb{R}^N \setminus \psi(\partial\Omega)$ et de $\mathbb{R}^N \setminus \psi(\partial(\Omega \setminus K))$. On a donc $deg(\psi, \Omega, b) = deg(\psi, \Omega, c)$ et $deg(\psi, \Omega \setminus K, b) = deg(\psi, \Omega \setminus K, c)$. Or

$$deg\,(\psi, \Omega, c) = \sum_{x \in \psi^{-1}(c)} Sgn(J_\psi(x)) = \sum_{x \in \psi^{-1}(c) \cap (\Omega \setminus K)} Sgn(J_\psi(x)) =$$
$$deg\,(\psi, \Omega \setminus K, c).$$

On en déduit $deg\,(\psi, \Omega, b) = deg\,(\psi, \Omega \setminus K, b)$.
(xi) $\varphi^{-1}(b)$ étant compact, il est recouvert par un nombre fini d'ouverts Ω_i, $\varphi^{-1}(b) \subset \cup_{i \in I_0} \Omega_i$, avec $I_0 \subset I$ de cardinal fini. Donc $b \notin \varphi(\overline{\Omega}_i))$ pour tout $i \in I \setminus I_0$, et $deg\,(\varphi, \Omega_i, b) = 0$. En utilisant la propriété de l'excision avec $K = \overline{\Omega} \setminus \cup_{i \in I_0} \Omega_i$ on trouve $deg\,(\varphi, \Omega, b) = deg\,(\varphi, \cup_{i \in I_0} \Omega_i, b)$ et on conclut par la propriété d'additivité.
(xii) Posons $H(x, t) = t\varphi(x) + (1 - t)\psi(x)$, $t \in [0, 1]$. Il clair que $H \in C(\Omega \times [0, 1], \mathbb{R}^N)$ et que $b \notin H(\partial\Omega \times [0, 1])$. D'après l'invariance par homotopie $deg\,(\varphi, \Omega, b) = deg\,(\psi, \Omega, b)$.
(xiii) Par le théorème d'extension de Tietze, c.f. Annexe théorème 8.2, nous pouvons prolonger H en une fonction continue sur $\overline{\Omega} \times [0, 1]$. Posons $\tilde{\varphi} = H(\cdot, 0)$ et $\tilde{\psi} = H(\cdot, 1)$. L'invariance par homotopie donne $deg\,(\tilde{\varphi}, \Omega, b) = deg\,(\tilde{\psi}, \Omega, b)$ puis on applique **(xii)**. $\square$

Exercice 6. *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *et* $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = x^n$. *Calculer* $deg\,(f, (-1,1), 0)$.

Exercice 7. *Soit* $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. *Soit* $B_r(0)$ *une boule dans* $\mathbb{R}^N$ *et posons* $f : B_r(0) \to \mathbb{R}^N$ *l'application définie par* $f(x) = A(x)$. *Le* $deg\,(f, B_r(0), 0)$ *est-il toujours bien défini ? Le cas échéant calculez-le.*

Exercice 8. *Soit* $n \in \mathbb{N}$, B_2 *la boule unité de* $\mathbb{C}$ *et* $f : \overline{B_2} \to \mathbb{C}$ *la fonction* $f(z) = z^n$. *Calculer* $deg\,(f, B_2, 0)$.

Exercice 9. *Est-ce que le degré de Brouwer* $deg\,(\varphi, \Omega, b)$ *est-il bien défini dans les cas ci-dessous ? Le cas échéant calculez le degré. Justifiez les résultats.*
(i) $\Omega =]-2, 2[\subset \mathbb{R}, \varphi(x) = (x^2 - 1)x^2, b = 0$;
(ii) $\Omega = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2, \varphi(x, y) = (\sin x, \cos y), b = (0,1)$;
(iii) $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2, \varphi(re^{it}) = r^2 e^{i2t}, b = 0$.

Exercice 10. *Est-ce que l'indice* $i\,(\varphi, x_0, b)$ *est-il bien défini dans les cas ci-dessous ? Le cas échéant calculer cet indice. Justifier les résultats.*
(i) $\Omega =]-1, 1[\subset \mathbb{R},\ \varphi(x) = \sqrt{|x|},\ x_0 = b = 0$.
(ii) $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2,\ \varphi(x, y) = (x^2 + y^2, xy),\ x_0 = b = (0, 0)$.
Soit $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$*l'ensemble des matrices* $N \times N$ *à coefficients dans* $\mathbb{R}$*, muni de la norm***(iii)** $\Omega = \{A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}),\ ||A||_\infty < 1\}$, $\varphi(A) = Id - BA, x_0 = B^{-1}, b = 0$.

Exercice 11. *Soit* $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^p, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^q$ *deux ouverts bornés et* $f_1 : \Omega_1 \to \mathbb{R}^p, f_2 : \Omega_2 \to \mathbb{R}^q$ *deux fonctions continues. Si* $N = p + q$ *on écrit, pour* $x \in \mathbb{R}^N, x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$. *Posons* $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \subset \mathbb{R}^N$ *et* $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ *la fonction* $f = (f_1, f_2)$. *Soit* $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^N$ *tel que* $b_i \notin f_i(\partial \Omega_i)$. *Montrer que*

$$deg\,(f, \Omega, b) = deg\,(f_1, \Omega_1, b_1).deg\,(f_2, \Omega_2, b_2).$$

Nous donnons maintenant une forme plus générale de l'invariance du degré par homotopie. Soit $\Lambda = [a, b] \subset \mathbb{R}$ et un ouvert borné $\mathcal{A} \subset \Lambda \times \mathbb{R}^N$. Posons $\mathcal{A}_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^N,\ (\lambda, x) \in \mathcal{A}\}$. On a $\partial(\mathcal{A}_\lambda) \subset (\partial \mathcal{A})_\lambda$.

Proposition 2.12. *Soit* $H \in C(\mathcal{A}, \mathbb{R}^N)$ *et* $b \in \mathbb{R}^N \setminus H(\partial \mathcal{A})$. *Alors*

$$deg(H(\lambda, \cdot), \mathcal{A}_\lambda, b)$$

est bien défini et est indépendant de $\lambda \in \Lambda$.

Démonstration. Soit $N_\lambda = \{x \in \mathcal{A}_\lambda,\ H(\lambda, x) = b\}$. Par hypothèse $N_\lambda \cap (\partial \mathcal{A}_\lambda) = \emptyset$. Comme N_λ est compact, il existe $\epsilon > 0$ et un voisinage ouvert O_λ de $\mathcal{N}_\lambda$ tel que $[\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon] \times O_\lambda \subset \mathcal{A}$ et si (μ, x) est solution de $H = b$ avec $|\lambda - \mu| < \epsilon$ alors $(\mu, x) \in [\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon] \times O_\lambda$. Par l'invariance du degré par homotopie $deg\,(H(\mu, \cdot), \mathcal{O}_\lambda, b)$ est indépendant de μ. Par la propriété d'excision $deg\,(H(\mu, \cdot), \mathcal{O}_\lambda, b) = deg\,(H(\mu, \cdot), \mathcal{A}_\mu, b)$ et donc $deg\,(H(\mu, \cdot), \mathcal{A}_\mu, b)$ est localement constant sur Λ et est donc constant. $\square$

Exercice 12. *Soit $N \in \mathbb{N}_*$. Notons B_N la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^N$ et S^{N-1} le bord de B_N.*
(i) *Calculer $deg\,(-Id, B_N, 0)$.*
(ii) *Montrer que si $N \in \mathbb{N}_*$ est impaire, alors il n'existe pas d'homotopie $H \in C([0,1] \times \overline{B}_N, \overline{B}_N)$ avec $0 \notin H([0,1] \times \partial B_N)$ telle que $H(1,\cdot) = Id$ et $H(0,\cdot) = -Id$.*
(iii) *Montrer que le résultat de* **(ii)** *est faux si N est pair.*

2.4 Définition et propriétés de l'indice

Soit $\varphi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ et $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Supposons que l'équation $\varphi(x) = b$ possède une solution isolée $x_0 \in \Omega$, c'est à dire, il existe une boule $B_r(x_0)$ où x_0 est la seule solution de cette équation. Alors pour tout $\epsilon > 0$, $0 < \epsilon < r$ on a $deg\,(\varphi, B_r(x_0), b) = deg\,(\varphi, B_\epsilon(x_0), b)$ par la propriété d'excision.

Définition 2.13. *On définit l'indice de φ au point x_0 relativement à b par*

$$i\,(\varphi, x_0, b) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\epsilon \to 0} \; deg(\varphi, B_\epsilon(x_0), b).$$

On a la propriété suivante :

Théorème 2.14. *Soit $\varphi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ et $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Supposons que l'équation $\varphi(x) = b$ possède uniquement p solutions distinctes $x_1, \cdots, x_p$ toutes contenues dans Ω. Alors,*

$$deg\,(\varphi, \Omega, b) = \sum_{j=1}^{p} i\,(\varphi, x_j). \tag{8}$$

Nous allons donner un critère simple pour calculer l'indice dans certains cas.

Proposition 2.15. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ contenant l'origine. Soit $\varphi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ définie par $\varphi(x) = x - T(x)$, où $T \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ et $T(0) = 0$. Supposons que $J_\varphi(0) \neq 0$. Alors $i(\varphi, 0, 0) = (-1)^\beta$, où β est la somme des multiplicités des valeurs caractéristiques de $T'(0)$ qui sont dans $]0, 1[$.*

Démonstration. Notons les valeurs caractéristiques de $T'(0)$ par $\mu_i \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Alors $i(\varphi, 0, 0) = Sgn\, J_\varphi(0) = Sgn\,\text{dét}\;(Id - T'(0)) = Sgn\,\Pi_{i=1}^N(1 - \frac{1}{\mu_i})$. Les valeurs caractéristiques non réelles ont dans ce produit une contribution toujours positive car si $\mu_i \notin \mathbb{R}$ est une valeur caractéristique alors $\bar{\mu_i}$ l'est aussi et dans le produit on a le terme $|1 - \frac{1}{\mu_i}|^2$. Si $\mu_i \notin [0, 1]$ alors $1 - \frac{1}{\mu_i} > 0$ et donc

$$i(\varphi, 0, 0) = Sgn\,\Pi_{\mu_i \in]0,1[}(1 - \frac{1}{\mu_i}) = (-1)^\beta.$$

□

Corollaire 2.16. *Soit* $\varphi_\lambda(x) = x - \lambda T(x)$ *où* $T \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$*,* $T(0) = 0$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}^+$*. Alors* $i(\varphi_\lambda, 0, 0)$ *est bien défini pour tout* $\lambda \neq \mu_i$ *et l'on a*

$$i(\varphi_\lambda, 0, 0) = (-1)^{m_j} i(\varphi_{\lambda'}, 0, 0)$$

si $]\frac{1}{\lambda'}, \frac{1}{\lambda}[\cap \sigma(T'(0)) = \frac{1}{\mu_j}$*,* m_j *étant la multiplicité algèbrique de* μ_j*.*

2.5 Définition du degré de Brouwer dans un espace vectoriel de dimension finie

Soit V un espace vectoriel réel de dimension N. Soit Ω un ouvert borné de V, $\varphi \in C(\overline{\Omega}, V)$ et $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Lorsque l'on choisit une base dans V, on peut identifier V à $\mathbb{R}^N$ et définir $deg\,(\varphi, \Omega, b)$. Nous allons montrer que ce degré est indépendant de la base choisie.

Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de V. Notons $V_1 = (V, \mathcal{B}_1), V_2 = (V, \mathcal{B}_2)$. Si $x \in V$, x_1, x_2 désignent les points de $\mathbb{R}^N$ qui sont les coordonnées de x dans $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. Si M est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$ on a $x_1 = Mx_2$. Nous notérons également Ω_i, φ_i, b_i, $i = 1, 2$ les "images" correspondantes à Ω, φ, b relativement à la base $\mathcal{B}_i$.

Lemme 2.17. *Le degré topologique est indépendant de la base choisie pour le calculer, c'est à dire,*

$$deg(\varphi_1, \Omega_1, b_1) = \ deg(\varphi_2, \Omega_2, b_2).$$

Démonstration. Signalons que pour tout $\psi \in C^1(\overline{\Omega}, V)$ on a $J_{\psi_1}(x_1) = J_{\psi_2}(x_2)$. En effet, $\psi_2(x_2) = M^{-1} \circ \psi_1 \circ M(x_2)$ d'où $\psi_2'(x_2) = M^{-1} \circ \psi_1' \circ M(x_2)$ et $J_{\psi_1}(x_1) = J_{\psi_2}(x_2)$. Pour démontrer le lemme nous pouvons supposer que nous sommes dans le cas régulier, c.-à-d., $\varphi_1 \in C^1(\overline{\Omega_1}, \mathbb{R}^N)$ et $\forall x_1 \in \varphi_1^{-1}(b_1)$ on a $J_{\varphi_1}(x_1) \neq 0$ ce qui implique que $\varphi_2 \in C^1(\overline{\Omega}_2, \mathbb{R}^N)$ et $\forall x_2 \in \varphi_2^{-1}(b_2)$ on a $J_{\psi_2}(x_2) = J_{\psi_1}(x_1) \neq 0$. Dans ce cas

$$deg(\varphi_1, \Omega_1, b_1) = \sum_{x_1 \in \varphi_1^{-1}(b_1)} Sgn(J_{\varphi_1}(x_1)) = \sum_{x_2 \in \varphi_2^{-1}(b_2)} Sgn(J_{\varphi_2}(x_2)) =$$

$$deg(\varphi_2, \Omega_2, b_2).$$ □

3 Théorèmes de point fixe I

3.1 Théorème du point fixe de Brouwer

Nous donnons dans cette section plusieurs propriétés de la boule unité de $\mathbb{R}^N$ que nous noterons $B_N := B_1(0) \subset \mathbb{R}^N$ et $S^{N-1} := \partial B_N$.

Théorème 3.1. *Théorème de non rétraction de la boule unité. Il n'existe pas d'application continue* $\varphi : \overline{B_N} \to S^{N-1}$ *telle que* $\varphi_{|_{S^{N-1}}} = Id$*.*

Démonstration. Si une telle application existait, alors $deg\,(\varphi, B_N, 0) = 0$ du fait que $0 \notin \varphi(B_N)$ et de la propriété **(vii)** du théorème 2.11. Mais d'autre part on a $deg\,(\varphi, B_N, 0) = deg\,(Id, B_N, 0) = 1$ par la propriété **(xii)** de ce même théorème, ce qui est contradictoire. □

Ce résultat est équivalent au

Théorème 3.2. *Théorème du point fixe de Brouwer. Soit $f : \overline{B_N} \mapsto \overline{B_N}$ une application continue. Alors il existe $y \in \overline{B_N}$ tel que $f(y) = y$, c.-à-d., $\overline{B_N}$ possède la propriété du point fixe. Plus généralement tout sous-ensemble compact convexe de $\mathbb{R}^N$ possède la propriété du point fixe.*

Démonstration. Nous montrons que le théorème de non rétraction de la boule unité entraîne le théorème de Brouwer. Raisonnons par l'absurde. Nous allons construire une application φ continue de $\overline{B_N}$ sur S^{N-1}, ce qui contredira le théorème précédent. On définit $\varphi(x) = \lambda(x)x + (1 - \lambda(x))f(x)$ où $\lambda(x) \geq 1$ est le seul réel pour lequel $|\varphi(x)| = 1$. Il ne reste plus qu'à montrer que φ est continue. En écrivant $\varphi(x).\varphi(x) = 1$, on arrive à

$$T(\lambda) := \lambda^2|x - f(x)|^2 + 2\lambda < x - f(x), f(x) > + |f(x)|^2 - 1 = 0.$$

Le produit des racines est égal à $\frac{|f(x)|^2-1}{|x-f(x)|^2} \leq 0$, il n'y a qu'une racine positive que l'on notera $\lambda(x)$. Comme $T(1) = |x|^2 - 1 \leq 0$ cette racine est toujours supérieure ou égale à 1. $\lambda(x)$ est donc une fonction continue de x et aussi $\varphi(x)$.

Soit K un compact convexe de $\mathbb{R}^N$ et supposons d'abord que l'intérieur de K est non vide (on peut se placer dans l'espace $R^m, m \leq N$ engendré par K). On peut également supposer que 0 est un point intérieur de K (après translation). Considérons la jauge relative à K : $j_K(x) = \inf\{\lambda \geq 0\,,\, x \in \lambda K\}$ et l'application sur $h : K \to \overline{B_N}$ définie par

$$h(x) = j_K(x)\frac{x}{|x|} \text{ si } x \neq 0, h(0) = 0.$$

Il n'est pas difficile de voir que h est un homéomorphisme (la preuve est laissée comme exercice). L'application $h \circ f \circ h^{-1}$ est continue de $\overline{B_N}$ sur $\overline{B_N}$, elle admet donc un point fixe $h^{-1}(x_0)$ et on conclut. □

3.2 Théorème de Borsuk

Nous commençons par donner un résultat de densité qui concerne les fonctions impaires (comparer avec le résultat (ii) du lemme 2.4).

Lemme 3.3. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné, symétrique par rapport à l'origine avec $0 \in \Omega$ et soit $\varphi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ une application impaire, alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe une fonction impaire $h \in C_r^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ avec $||\varphi - h||_\infty < \epsilon$.*

Démonstration. Supposons d'abord que $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ et que $J_\varphi(0) \neq 0$. Nous allons construire une fonction impaire $\psi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ voisine de φ telle que 0 soit une valeur régulière. La construction se fait par récurrence. Soit

$$\Omega_k := \{x \in \overline{\Omega},\ \exists i \leq k \text{ tel que } x_i \neq 0\}$$

et soit $\chi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ impaire telle que $\chi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ et $\chi'(0) = 0$ (par exemple $\chi(t) = t^3$). Soit $\bar{\varphi}(x) = \frac{\varphi(x)}{\chi(x_1)}$ pour $x \in \Omega_1$. Par le lemme de Sard il existe y^1 valeur régulière pour $\bar{\varphi}$ telle que $||y^1|| \leq \frac{\epsilon}{N \sup_{x \in \Omega} |\chi(x_1)|}$. Posons

$$\psi_1(x) := \varphi(x) - \chi(x_1) y^1,$$

alors $\psi_1'(x) = \chi(x_1)\bar{\varphi}'(x)$ pour les $x \in \Omega_1$ tels que $\psi_1(x) = 0$ donc 0 est une valeur régulière de ψ_1 et $||\psi_1 - \varphi|| \leq \epsilon/N$. Supposons que nous avons, pour un $k \leq N$, défini une fonction impaire $\psi_k \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, $||\varphi - \psi_k|| \leq k\epsilon/N$ et telle que $\psi_{k_{|\Omega_k}}$ a 0 comme valeur régulière. On définit alors

$$\psi_{k+1} := \psi_k(x) - \chi(x_{k+1}) y^{k+1},$$

où $||y^{k+1}|| \leq \frac{\epsilon}{N \sup_{x \in \Omega} \chi(x_{k+1})}$ et y^{k+1} est une valeur régulière de $\frac{\psi_k}{|\chi(x_{k+1})|}$ sur $\{x \in \overline{\Omega}, x_{k+1} \neq 0\}$. Alors ψ_{k+1} est impaire, $||\varphi - \psi_{k+1}| \leq (k+1)\epsilon/N$ dans $\overline{\Omega}$. De plus si $x \in \Omega_{k+1}$ et $x_{k+1} = 0$ alors $x \in \Omega_k$, $\psi_{k+1}(x) = \psi_k(x)$, $\psi_{k+1}'(x) = \psi_k'(x)$, donc 0 est aussi une valeur régulière pour ψ_{k+1} sur Ω_k. Nous aurons à la fin une fonction $\psi := \psi_N$ impaire, $||\varphi - \psi|| \leq \epsilon$ et dont 0 est une valeur régulière de φ sur $\Omega_N = \overline{\Omega} \setminus \{0\}$. Comme $\psi'(0) = \psi_1(0) = \varphi'(0)$ on a donc que 0 est une valeur régulière de φ sur $\overline{\Omega}$.

Finalement nous pouvons supprimer l'hypothèse $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ et l'hypothèse $J_\varphi(0) \neq 0$. En effet on peut approximer φ par une fonction $\psi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ puis prendre $\psi_0(x) = \frac{\psi(x) - \psi(-x)}{2}$. Soit $\delta > 0$ petit qui ne soit pas une valeur propre de $\psi_0'(0)$ et posons $\bar{\varphi} = \psi_0 - \delta Id$. Alors $\bar{\varphi}$ est impaire, voisine de φ et $J_{\bar{\varphi}}(0) \neq 0$. □

Théorème 3.4. *L'antipondensatz de Borsuk. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné, symétrique par rapport à l'origine avec $0 \in \Omega$. Soit $\varphi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ une application continue, impaire sur $\partial\Omega$ et telle que $0 \notin \varphi(\partial\Omega)$. Alors $deg\,(\varphi, \Omega, 0)$ est un entier impair.*

Démonstration. Soit $\tilde{\varphi}(x) := \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{2}$, $x \in \overline{\Omega}$. Alors $\tilde{\varphi}$ est impaire et $\varphi_{|\partial\Omega} = \tilde{\varphi}_{|\partial\Omega}$, d'où $deg\,(\varphi, \Omega, 0) = deg\,(\tilde{\varphi}, \Omega, 0)$. Par le lemme ci-dessus il existe une application $h \in C_r^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ impaire telle que $||h - \varphi||_\infty < dist\,(0, \varphi(\partial\Omega))$. Alors $0 \notin h(\partial\Omega)$ et par (7)

$$deg\,(\tilde{\varphi}, \Omega, 0) = deg\,(h, \Omega, 0) = Sgn\, J_h(0) + \sum_{x \in h^{-1}(0), x \neq 0} Sgn\, J_h(x),$$

la dernière somme étant paire car h est impaire. □

Corollaire 3.5. *Théorème de Borsuk-Ulam. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné, symétrique par rapport à l'origine et contenant l'origine. Soit $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}^N$ une application continue telle que $\varphi(\partial\Omega)$ est contenu dans un sous espace propre de $\mathbb{R}^N$. Alors il existe $x \in \partial\Omega$ tel que $\varphi(x) = \varphi(-x)$.*

Démonstration. En peut supposer sans perte de généralité que $\varphi(\partial\Omega) \subset \mathbb{R}^{N-1}$. A l'aide du théorème de Tietze-Urysohn on peut prolonger φ en une application $\bar{\varphi} \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{N-1})$. Supposons par l'absurde que $\varphi(x) \neq \varphi(-x)$ pour tout $x \in \partial\Omega$. Alors $\bar{\varphi}(x) \neq 0$ pour tout $x \in \partial\Omega$ et par le théorème de Borsuk

$$deg\,(\tilde{\varphi}, \Omega, 0) \neq 0.$$

Ceci est en contradiction avec la propriété **(ix)** du théorème 2.11 car $\tilde{\varphi}(\Omega) \subset \mathbb{R}^{N-1}$. □

Corollaire 3.6. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné, symétrique par rapport à l'origine avec $0 \in \Omega$. Soit $\varphi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ une application continue telle que $0 \notin \varphi(\partial\Omega)$ et $\varphi(-x) \neq \lambda\varphi(x)$ pour tout $x \in \partial\Omega$ et pour tout $\lambda \geq 1$. Alors $deg\,(\varphi, \Omega, 0)$ est un entier impair.*

Démonstration. Soit $\psi(x) = \varphi(x) - \varphi(-x)$, qui est continue et impaire. Soit $H(t,x) = (1-t)\varphi(x) + t\psi(x) = \varphi(x) - t\varphi(-x)$. Par hypothèse $0 \notin H([0,1], \partial\Omega)$ et par la propriété **(v)** du théorème 2.11

$$deg\,(\varphi, \Omega, 0) = deg\,(\psi, \Omega, 0) = \text{ nombre impair.}$$

□

Corollaire 3.7. *Théorème de Ljusternik-Schnirelmann-Borsuk. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné, symétrique par rapport à l'origine avec $0 \in \Omega$. Si $\{C_i\}_{1 \leq i \leq K}$ est un recouvrement fermé de $\partial\Omega$ tel que $C_i \cap (-C_i) = \emptyset$ pour tout $1 \leq i \leq K$ alors $K \geq N + 1$.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que $K \leq N$. Posons pour $1 \leq i \leq K - 1$, $\varphi_i(x) = 1$ si $x \in C_i$ et $\varphi_i(x) = -1$ si $x \in -C_i$ et prolongeons par continuité φ_i sur tout $\overline{\Omega}$ grâce au théorème de Tietze-Urysohn. Pour $K \leq i \leq N$ soit $\varphi_i(x) = 1$ pour tout $x \in \overline{\Omega}$. Nous allons montrer que $\varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_N)$ satisfait l'hypothèse du corollaire précédent : $\varphi(-x) \neq \lambda\varphi(x)$ pour tout $\lambda \geq 1$, pour tout $x \in \partial\Omega$. Si $x \in C_K$ alors $x \notin -C_k$ et donc $x \in -C_i$ pour un $1 \leq i \leq K - 1$. Il s'en suit que $\varphi_i(x) = -1$, $\varphi_i(-x) = 1$, et on voit que $\varphi(x) \neq \lambda\varphi(-x)$ pour tout $\lambda > 0$. Si $x \notin C_K$ alors $x \in C_i$ pour un $1 \leq i \leq K-1$ et on raisonne de la même manière. Par le corollaire précédent $deg\,(\varphi, \Omega, 0) \neq 0$ et, en particulier, il existe $x \in \Omega, \varphi(x) = 0$, ce qui est absurde car $\varphi_K \equiv 1$. □

Exercice 13. *Montrer que le théorème du point fixe de Brouwer entraîne le théorème de non réctraction de la boulé unité.*

Exercice 14. *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un ouvert borné, symétrique par rapport à l'origine avec* $0 \in \Omega$. *Soit* $\varphi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ *telle que* $0 \notin \varphi(\partial\Omega)$. *Supposons que pour tout* $x \in \partial\Omega$, $\varphi(x)$ *et* $\varphi(-x)$ *ne pointent pas dans la même direction. Montrer que* $deg\,(\varphi, \Omega, 0)$ *est impair.*

Exercice 15. *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un ouvert borné, symétrique par rapport à l'origine et contenant l'origine. Soit* $\varphi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ *impaire sur* $\partial\Omega$. *Montrer*
(i) *il existe* $x \in \overline{\Omega}$ *tel que* $\varphi(x) = 0$ *;*
(ii) *il existe* $x \in \overline{\Omega}$ *tel que* $\varphi(x) = x$.

Exercice 16. *Supposons que la température et la pression dans un point de la surface de la terre sont des fonctions continues. Montrer qu'il existe un couple de points antipodaux qui ont la même température et la même pression.*

Exercice 17. *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un ouvert borné, symétrique par rapport à l'origine avec* $0 \in \Omega$. *Soit* $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}^N$ *une application continue impaire telle que* $\varphi(\partial\Omega)$ *est contenu dans un sous-espace strictement contenu dans* $\mathbb{R}^N$. *Montrer qu'il existe* $x \in \partial\Omega$ *tel que* $\varphi(x) = 0$.

Exercice 18. *Monter qu'il n'existe pas d'application impaire* $\varphi \in C(S^N, S^K)$ *pour* $N > K$.

Exercice 19. *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un ouvert et* $\varphi \in C(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *une application localement injective. Montrer que* φ *est une application ouverte (l'image d'un ouvert est un ouvert).*

Exercice 20. *Soit* $N \in \mathbb{N}_*$. *Notons* B_N *la boule unité ouverte de* $\mathbb{R}^N$ *et* S^{N-1} *le bord de* B_N.
(i) *Calculer* $deg\,(-Id, B_N, 0)$.
(ii) *Montrer que si* $N \in \mathbb{N}_*$ *est impaire, alors il n'existe pas d'homotopie* $H \in C([0,1] \times \overline{B}_N, \overline{B}_N)$ *admissible telle que* $H(1, \cdot) = Id$ *et* $H(0, \cdot) = -Id$.

4 Le degré de Leray-Schauder

Ce chapitre est consacré à la définition et à l'étude des propriétés du degré de Leray-Schauder. Il s'agit d'étendre la définition du degré topologique dans les espaces de dimension infinie et à une classe d'applications : les perturbations compactes de l'identité.

4.1 Opérateurs continus et opérateurs compacts non linéaires

Soient $(E, ||\cdot||_E)$ et $(F, ||\cdot||_F)$ deux espaces de Banach et $A \subset E$ une partie non vide.

Définition 4.1. *Une application $\varphi : A \to F$ est dite* **compacte** *si et seulement si elle est continue et l'image de tout ensemble borné $B \subset A$ est un ensemble relativement compact de F, c'est-à-dire, $\overline{f(B)}$ est un compact. Nous noterons $Q(A, F)$ l'ensemble des applications compactes définies sur A à valeurs dans F.*

Dans ce qui suit nous parlerons *d'opérateurs* pour désigner seulement les applications de $C(A, F)$ (sans qu'elles soient nécessairement linéaires). Nous noterons également

$$C_B(A, F) := \{f \in C(A, F), \forall B \subset A \text{ borné } \Rightarrow f(B) \text{ bornée}\}.$$

Proposition 4.2. *Soit $A \subset E$ une partie non vide.*
(i) *$\mathcal{Q}(A, F)$ est un espace vectoriel. Si de plus A est borné alors $\mathcal{Q}(A, F)$ est fermé dans l'espace $(C_B(A, F), ||\cdot||_\infty)$.*
(ii) *Soit G un espace de Banach. Si $f \in C_B(A, F)$ et $g \in \mathcal{Q}(F, G)$ (resp. $f \in \mathcal{Q}(A, F)$ et $g \in C(F, G)$) alors $g \circ f \in \mathcal{Q}(A, G)$.*
(iii) *Si $F = E$, A est borné et $f \in \mathcal{Q}(A, F)$ alors l'opérateur $g = Id - f$ est fermé (l'image d'un fermé est un fermé) et propre (l'image inverse d'un compact est un compact).*

La preuve est laissée comme exercice. Étudions quelques exemples importants d'opérateurs compacts.

Proposition 4.3. *Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $k, N \in \mathbb{N}$ et considérons l'espace de Banach $C^k([a, b], \mathbb{R}^N)$ muni de la norme usuelle $||u||_{C^k([a,b],\mathbb{R}^N)} = \sum_{i=1}^k ||u^{(i)}||_\infty$. Alors l'inclusion $j : C^{k+1}([a, b], \mathbb{R}^N) \to C^k([a, b], \mathbb{R}^N)$ est un opérateur (linéaire) compact.*

Démonstration. C'est une conséquence du théorème d'Arzelà-Ascoli, c.f. Annexe théorème 8.1. En effect, si A est un sous-ensemble borné de $C^{k+1}([a, b], \mathbb{R}^N)$ montrons que son image par j, c.à-d., l'ensemble A, est relativement compact dans $C^k([a, b], \mathbb{R}^N)$. Si u_n est une suite bornée pour la norme $||\cdot||_{C^{k+1}([a,b],\mathbb{R}^N)}$, posons $A_p = \{u_n^{(p)}, n \in \mathbb{N}\}$, pour tout $1 \leq p \leq k$. Pour chaque p fixé, il suffit donc de montrer que la suite $u_n^{(p)}$ possède une suite partielle convergente uniformément. Soit $\beta = \sup_{n\in\mathbb{N}} ||u_n||_{C^{k+1}([a,b],\mathbb{R}^N)}$ et $\epsilon > 0$. Il est clair que la suite $u_n^{(p)}$ est uniformément bornée, et on a donc A_p satisfait **(b)** du théorème 8.1. Par le théorème des valeurs intermédiaires on a, pour tout $1 \leq p \leq k$,

$$||\frac{u_n^{(p)}(x) - u_n^{(p)}(y)}{x-y}|| \leq \beta$$

quel que soit $x, y \in [a,b]$ et la suite est donc équicontinue. □

Une autre classe d'opérateurs sont les **opérateurs de Nemitsky** :

Proposition 4.4. *Soit $f : [a,b]\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ une fonction continue. On définit l'opérateur*

$$\mathcal{F}(u)(t) := f(t, u(t)).$$

Alors F est continu de $C([a,b],\mathbb{R}^N)$ dans $C([a,b],\mathbb{R}^N)$.

Démonstration. Soit $u_0 \in C([a,b],\mathbb{R}^N)$ et $\epsilon > 0$. Comme $u_0([a,b])$ est un compact de $\mathbb{R}^N$, il existe un voisinage U de $[a,b] \times u_0([a,b])$, disons $U = \{(t,y) \in [a,b]\times\mathbb{R}, \, dist\,(y, u_0([a,b]) < \rho\}$ pour un certain $\rho > 0$, tel que $f_{|U}$ est uniformément continue. Donc pour tout $\epsilon > 0$ il existe $0 < \eta < \rho$ tel que $\forall t, s \in [a,b]$, $\forall x \in u_0([a,b])$, $\forall y \in \mathbb{R}^)$,

$$|t-s| + ||x-y|| \leq \eta \Rightarrow ||f(t,x) - f(t,y)|| \leq \epsilon.$$

Si $v \in C([a,b],\mathbb{R}^N)$ est telle que $||v - u_0||_\infty \leq \eta$ alors on a que, pour tout $t \in [a,b] \Rightarrow ||v(t) - u_0(t)|| \leq \eta$ et donc

$$||F(v) - F(u_0)||_\infty = \max_{t\in[a,b]} ||f(t,v(t)) - f(t,u_0(t))|| \leq \epsilon.$$

□

Rémarque 4.5. (i) *Les opérateurs de Nemitsky sont des opérateurs locaux dans le sens que la valeur de $T(u)(s)$ ne dépend que de celle de u au point s.* **(ii)** *Le résultat précédent reste valable si l'on suppose seulement que pour tout $s \in \mathbb{R}^N, f(\cdot, s)$ est mesurable et p.p $t \in [a,b], f(t,\cdot)$ est continue. On dit alors que f est une fonction de Carathéodory.*

Proposition 4.6. *Soit $f : [a,b]\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ une fonction continue. Pour $t_0 \in [a,b]$ fixé, on définit l'opérateur*

$$\mathcal{T}(u)(s) := \int_{t_0}^{s} f(t, u(t))\,dt.$$

Alors T est un opérateur compact de $C([a,b],\mathbb{R}^N)$ dans $C([a,b],\mathbb{R}^N)$.

Démonstration. Soit $u_n, u \in C([a,b],\mathbb{R}^N)$ telle que $\lim_{n\to+\infty} ||u_n - u||_\infty = 0$. Alors, par la proposition 4.4, $\lim_{n\to+\infty} ||f(\cdot,u_n) - f(\cdot,u)||_\infty = 0$ et

$$||T(u_n) - T(u_n)||_\infty \leq |b-a|\, ||f(\cdot,u_n) - f(\cdot,u)||_\infty \to 0.$$

T est donc continue et bornée. Comme pour tout $u \in C([a,b],\mathbb{R}^N), T(u) \in C^1([a,b],\mathbb{R}^N)$, alors $T = j \circ T$ où $j : C^1([a,b],\mathbb{R}^N) \to C([a,b],\mathbb{R}^N)$ et la compacité de T résulte de la proposition 4.3. □

Considérons l'espace

$$C_0^2([0,1],\mathbb{R}) \overset{\text{def}}{=} \{u \in C^2([0,1],\mathbb{R}),\ u(0) = u(1) = 0\}. \tag{9}$$

et l'opérateur $L_D : C_0^2([0,1],\mathbb{R}) \to C([0,1],\mathbb{R})$,

$$L_D(u) = u''. \tag{10}$$

Lemme 4.7. **(i)** *L_D est inversible et $\forall f \in C([0,1],\mathbb{R})$, $\forall x \in [0,1]$,*

$$L_D^{-1}(f)(x) = \int_0^1 G(x,y)f(y)\,dy \tag{11}$$

où $G : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ est la fonction de Green suivante :

$$G(x,y) = \begin{cases} (x-1)y & si \quad 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ (y-1)x & si \quad 0 \leq x \leq y \leq 1. \end{cases}$$

(ii) *Si on pose $w(x) = \int_0^1 G(x,y)f(y)\,dy$ alors*

$$w'(x) = \int_0^x yf(y)\,dy + \int_x^1 (y-1)f(y)\,dy. \tag{12}$$

(iii) *L_D^{-1} est un opérateur linéaire, continu et borné, avec*

$$||L_D^{-1}(f)||_{C^2([0,1])} \leq 2||f||_\infty. \tag{13}$$

(iv) *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le problème $L_D^{-1}(u) = \lambda u$ admet une solution $u \in C_0^2([0,1],\mathbb{R})$ non triviale ($\not\equiv 0$) si et seulement si $\lambda = -(\pi n)^{-2}$ avec $n \in \mathbb{N}_*$. Dans ce cas là $u(x) = A\sin(n\pi x)$ avec $A \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. Il est clair que que la fonction $w(x) = \int_0^1 G(x,y)f(y)\,dy = (x-1)\int_0^x yf(y)\,dy + x\int_x^1 (y-1)f(y)\,dy$ satisfait les conditions de Dirichlet, w est 2-fois dérivable, et $w''(x) = f(x)$ pour tout $x \in [0,1]$. Elle est la seule solution du problème $u'' = f$ dans $C_0^2([0,1],\mathbb{R})$. De plus $L_D^{-1}(u) = \lambda u$ si et seulement si $\lambda u'' = u$ et $u(0) = u(1) = 0$. Donc $\lambda = -(n\pi)^{-2}$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$ et dans ce cas là $u(x) = A\sin(n\pi x)$ avec $A \in \mathbb{R}$. □

Exercice 21. *Soient $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et $n \in \mathbb{N}$. Montrer l'opérateur*

$$\mathcal{K}(u)(s) := \int_a^b K(s,t)|u(t)|^n u(t)\,dt$$

est un opérateur compact de $C([a,b],\mathbb{R})$ dans $C([a,b],\mathbb{R})$.

Exercice 22. *Soient $K : [a,b]\times[a,b] \to \mathbb{R}$ et $f : [a,b]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et supposons que $f \in C([a,b] \times \mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer l'opérateur*

$$\mathcal{K}(u)(s) := \int_a^b K(s,t)f(t,u(t))\,dt$$

est un opérateur compact de $C([a,b],\mathbb{R})$ dans $C([a,b],\mathbb{R})$.

Exercice 23. *L'opérateur $T : C([a,b],\mathbb{R}) \to C([a,b],\mathbb{R})$ défini par $T(u) = u^2$ est-il un opérateur compact ?.*

Exercice 24. *Soit $K : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et considérons l'opérateur*

$$\mathcal{K}(u)(s) := \int_0^1 K(s,t)(2+\sin u(t))\,dt, \quad s \in [0,1]$$

(i) *Montrer que $\mathcal{K}$ est un opérateur compact de $C([0,1],\mathbb{R})$ dans $C([0,1],\mathbb{R})$.*

(ii) *Montrer que $\mathcal{K}$ satisfait la condition du bord de Leray-Schauder.*

(iii) *En déduire que l'équation $u = \mathcal{K}(u)$ possède au moins une solution u_0 dans $C([0,1],\mathbb{R})$ et donner une majoration de $||u_0||_\infty$.*

(iv) *Montrer que le problème de Dirichlet*

$$\begin{cases} u''(t) = 2 + \sin u(t) & \forall t \in [0,1]; \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

possède une solution $u \in C_0^2([0,1],\mathbb{R})$ satisfaisant

$$\max\{||u||_\infty, ||u'||_\infty, ||u''||_\infty\} \leq 3.$$

4.2 Définition du degré de Leray-Schauder

Rappelons que, en dimension finie, le degré est indépendant de la base utilisée pour le calculer. Pour $m < N$, on considère $\mathbb{R}^m$ comme un sous-ensemble de $\mathbb{R}^N$ en rajoutant $N-m$ coordonnées nulles. Une application $\varphi \in C(\overline{\Omega},\mathbb{R}^m)$, où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, pourra alors être considerée comme une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^N$. Nous avons

Lemme 4.8. *Théorème de réduction de Leray-Schauder. Soit $\varphi \in C(\overline{\Omega},\mathbb{R}^m)$ et $\Phi(x) = x - \varphi(x)$. Si $b \in \mathbb{R}^m$ est tel que $b \notin \Phi(\partial\Omega)$, on a*

$$deg(\Phi,\Omega,b) = deg(\Phi_{\overline{\Omega}\cap\mathbb{R}^m}, \Omega\cap\mathbb{R}^m, b).$$

Démonstration. Remarquons que le degré est bien défini puisque

$$b \notin \Phi_{\overline{\Omega}\cap\mathbb{R}^m}(\partial_{\mathbb{R}^m}(\Omega \cap \mathbb{R}^m))$$

car $\partial_{\mathbb{R}^m}(\Omega \cap \mathbb{R}^m) \subset \partial\Omega \cap \mathbb{R}^m$. Supposons que $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ et que b est une valeur régulière de $\Phi = Id - \varphi$. Alors b est régulière pour $\Phi_{\overline{\Omega}\cap\mathbb{R}^m}$ puisque pour tout $x \in \Omega \cap \mathbb{R}^m$, $J_\Phi(x) = J_{\Phi_{\overline{\Omega}\cap\mathbb{R}^m}}(x)$ (on utilise ici que $\varphi(\Omega) \subset \mathbb{R}^m$). De plus $x \in \Phi^{-1}(b) \Leftrightarrow x \in \Omega \cap \mathbb{R}^m$ et $x \in \Phi^{-1}_{\overline{\Omega}\cap\mathbb{R}^m}(b)$ d'où le résultat. □

Nous allons étendre la définition du degré à une classe d'applications : les **perturbations de dimension finie de l'identité**. Dans la suite E est un *espace de Banach réel* et Ω désigne un *ouvert borné de* E.

Définition 4.9. *Soit $T \in C(\overline{\Omega}, E)$ telle que $T(\overline{\Omega})$ soit contenue dans un sous-espace de dimension finie $F \subset E$ et posons $\Phi = Id - T$. Soit $b \in F, b \notin \Phi(\partial\Omega)$. On pose*

$$deg(\Phi, \Omega, b) \stackrel{\text{def}}{=} deg(\Phi_{\overline{\Omega}\cap F}, \Omega \cap F, b). \tag{14}$$

Lemme 4.10. *La définition* (14) *est indépendante du choix de F.*

Démonstration. Soient F_1, F_2 deux sous espaces de dimension finie de E tels que $T(\overline{\Omega}) \subset F_1 \cap F_2$ et $b \in F_1 \cap F_2$. En appliquant le lemme 4.8 on a, pour $i = 1, 2$,

$$\deg(\Phi_{\overline{\Omega}\cap F_i}, \Omega \cap F_i, b) = \deg(\Phi_{\overline{\Omega}\cap F_2 \cap F_1}, \Omega \cap F_1 \cap F_2, b).$$

□

Maintenant nous allons étendre la définition du degré à une autre classe plus large d'applications. Pour cela nous avons besoin du lemme suivant.

Définition 4.11. *Pour tout partie finie $D \subset E$ on désigne par* **l'enveloppe convexe de** D

$$conv\,(D) := \{\sum_{i=1}^{n} t_i x_i;\ t_i \geq 0, x_i \in D \ et \ \sum_{j=1}^{n} t_j = 1\}.$$

Remarquons que $conv(D)$ est contenue dans un sous-espace de E de dimension finie.

Lemme 4.12. *Lemme de la projection de Schauder. Soit K une partie compacte de E. Alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe une partie finie $D \subset E$ et une application $P : K \mapsto conv\,(D)$ continue telle que $||P(x) - x|| < \epsilon$ pour tout $x \in K$.*

Démonstration. Comme K est compact, il existe $D := \{x_i, x_2, \cdots, x_n\}$ dans K tel que $K \subset \cup_{i=1}^n B_\epsilon(x_i)$. Dans la suite on dira que D est un **ϵ-réseau de** K. Pour tout $i = 1, \cdots$ on définit les fonctions continues

$$\phi_i(x) = \epsilon - ||x - x_i|| \text{ si } x \in B_\epsilon(x_i); \phi_i(x) = 0 \text{ sinon.}$$

On pose $\phi = \sum_{i=1}^n \phi_i$. Alors $\phi(x) > 0$ pour tout $x \in K$ et on définit la projection de Schauder $P : K \to conv\,(D)$ comme

$$P(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{\phi_i(x)}{\phi(x)} x_i$$

et on a alors

$$||P(x) - x|| = || \sum_{i=1}^{n} \frac{\phi_i(x)}{\phi(x)} x_i - x|| \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\phi_i(x)}{\phi(x)} ||x_i - x|| < \epsilon.$$

□

Considérons un opérateur compact $T \in Q(\overline{\Omega}, E)$ et $\Phi = Id - T$. Ces applications sont appelées des **perturbations compactes l'identité**. Soit $b \in E \setminus \Phi(\partial\Omega)$. Par **(iii)** de la proposition 4.2 , l'ensemble $\Phi(\partial\Omega)$ est un fermé et donc $\epsilon := dist(b, \Phi(\partial\Omega)) > 0$. On peut, en appliquant le lemme 4.12 à $K = \overline{T(\overline{\Omega})}$, trouver un sous espace de dimension finie F_ϵ de E contenant b, et une application $P \in C(K, F_\epsilon)$ telle que $||x - P(x)|| < \epsilon$ pour tout $x \in K$. L'image de $T_\epsilon := P \circ T$ est donc contenue dans F_ϵ et $\Phi_\epsilon := Id - T_\epsilon$ est alors une perturbation de dimension finie de l'identité. D'autre part $dist(b, \Phi_\epsilon(\partial\Omega)) > 0$. Le degré $deg\,(\Phi_\epsilon, \Omega, b)$ est donc bien défini.

Définition 4.13. *Soit Φ une perturbation compacte de l'identité, $\Phi = Id - T$, $T \in Q(\overline{\Omega}, E)$ et $b \in E \setminus \Phi(\partial\Omega)$. On définit le* **degré de Leray-Schauder** *$deg\,(\Phi, \Omega, b)$ par*

$$deg(\Phi, \Omega, b) = \; deg(\Phi_\epsilon, \Omega, b),$$

où Φ_ϵ est une perturbation de dimension finie de l'identité vérifiant, pour tout $x \in \overline{\Omega}$, $||\Phi(x) - \Phi_\epsilon(x)|| < \epsilon$ avec $\epsilon = dist(b, \Phi(\partial\Omega))$.

Lemme 4.14. *La définition* (4.13) *est indépendante du choix de Φ_ϵ.*

Démonstration. Soient $\Phi_i = Id - T_i$, $i = 1, 2$ avec $T_i(\overline{\Omega}) \subset F_i$, F_1 et F_2 étant deux sous espaces de dimension finie de E. Supposons que pour tout $x \in \overline{\Omega}, ||\Phi(x) - \Phi_i(x)|| < \epsilon, i = 1, 2$. Soit F un sous espace de dimension finie contenant F_1, F_2 et le point b. Par définition du degré des perturbations de dimension finie de l'identité on a

$$\deg(\Phi_i, \Omega, b) = \; \deg(\Phi_{i_{\overline{\Omega}\cap F}}, \Omega \cap F, b),\; i = 1, 2.$$

Posons $\Psi_\theta = \theta\Phi_{1_{\overline{\Omega}\cap F}} + (1 - \theta)\Phi_{2_{\overline{\Omega}\cap F}}$, $\theta \in [0, 1]$. Comme $\partial_F(\Omega \cap F) \subset \partial\Omega \cap F$, on a $dist(b, \Psi_\theta(\partial_F(\Omega \cap F))) > 0$, pour tout $\theta \in [0, 1]$. En utilisant que le degré de Brouwer est invariante par homotopie on obtient le résultat. □

4.3 Propriétés principales du degré de Leray-Schauder

Enonçons les propriétés du degré de Leray-Schauder.

Théorème 4.15. *Soit Φ une perturbation compacte de l'identité, $\Phi = Id - T$, $T \in Q(\overline{\Omega}, E)$ et $b \in E \setminus \Phi(\partial\Omega)$.*
(i) *Continuité par rapport à l'opérateur T. Il existe un voisinage U de T dans $Q(\overline{\Omega}, E)$ tel que pour tout $S \in U$ on a que $b \notin (Id - S)(\partial\Omega)$ et $deg\,(Id - S, \Omega, b) = deg\,(Id - T, \Omega, b)$.*
(ii) *Invariance du degré par homotopie compacte. Soit $H \in C(\overline{\Omega} \times [0, 1], E)$ définie par $H(u, t) = u - S(u, t)$ avec $S \in Q(\overline{\Omega} \times [0, 1], E)$. Si $b \notin H(\partial\Omega \times [0, 1])$, le degré $deg\,(H(\cdot, t), \Omega, b)$ est indépendant de t.*
(iii) *Invariance du degré dans les composantes connexes de $E \setminus \Phi(\partial\Omega)$. Soient b et b_1 dans la même composante connexe de $E \setminus \Phi(\partial\Omega)$. Alors $deg\,(\Phi, \Omega, b) = deg\,(\Phi, \Omega, b_1)$.*
(iv) *Additivité. Si Ω_1, Ω_2 sont deux ouverts de E tels que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ et $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, et si $b \notin \Phi(\partial\Omega_1) \cup \Phi(\partial\Omega_2)$ alors*

$$deg\,(\Phi, \Omega, b) = deg(\Phi, \Omega_1, b) + deg\,(\Phi, \Omega_2, b).$$

(v) *Normalisation. Si $b \in \Omega$ alors de $deg\,(Id, \Omega, b) = 1$.*
(vi) *Invariance par translations. $deg\,(\Phi, \Omega, b) = deg\,(\Phi - b, \Omega, 0)$.*
(vii) *Si $deg\,(\Phi, \Omega, b) \neq 0$ alors il existe $x_0 \in \Omega$ tel que $\Phi(x_0) = b$.*
(viii) *Si $deg\,(\Phi, \Omega, b) \neq 0$ alors $\Phi(\Omega)$ est un voisinage de b.*
(ix)*) Si $\Phi(\Omega)$ est inclus dans un sous-espace contenu strictement dans E alors $deg\,(\Phi, \Omega, b) = 0$.*
(x) *Propriété de l'excision. Si $K \subset \overline{\Omega}$ est fermé et $b \notin \Phi(K)$ alors $deg\,(\Phi, \Omega, b) = deg\,(\Phi, \Omega \setminus K, b)$.*
(xi) *Soit $\{\Omega_i\}_{i \in I}$ une famille d'ouverts inclus dans Ω deux à deux disjoints, et b un point tel que $\Phi^{-1}(b) \subset \cup_{i \in I} \Omega_i$ alors $deg\,(\Phi, \Omega_i, b) = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices $i \in I$ et $deg\,(\Phi, \Omega, b) = \sum_{i \in I} deg\,(\Phi, \Omega_i, b)$.*
(xii) *Supposons que $T = S$ sur $\partial\Omega$ où $S \in Q(\overline{\Omega}, E)$, alors pour tout $b \notin (Id - T)(\partial\Omega) = (Id - S)(\partial\Omega)$ on a $deg\,(Id - T, \Omega, b) = deg\,(Id - S, \Omega, b)$.*
(xiii) *Soit F un sous espace fermé de E contenant le point b et $T(\overline{\Omega})$. Alors $deg\,(\Phi, \Omega, b) = deg\,(\Phi_{|_{\overline{\Omega} \cap F}}, \Omega \cap F, b)$.*

Démonstration. Dans les cas **(i)**-**(xii)** on se ramène à des degrés en dimension finie et on utilise les propriétés analogues montrées pour le degré de Brouwer. Nous donnons seulement la preuve de la continuité par rapport à T. **(i)** Soit $r := dist(b, (Id - T)(\partial\Omega)) > 0$ et considérons le voisinage U de T dans $Q(\overline{\Omega}, E)$ défini par

$$U = \{S \in Q(\overline{\Omega}, E), \; ||S - T||_\infty < \frac{r}{4}\}.$$

Prenons $S \in U$. Il est clair que $dist(b, (Id - S)(\partial\Omega)) > \frac{r}{2}$. Soient deux perturbations de dimension finie de l'identité $Id - T_1, Id - S_1$ telles que

$$||T_1 - T||_\infty < \frac{r}{4},\ ||S_1 - S||_\infty < \frac{r}{4}.$$

Choisissons un sous-espace de dimension finie F contenu dans E et contenant $T_1(\overline{\Omega})$, $S_1(\overline{\Omega})$ et le point b. Par définition on a :

$$\deg(Id - T, \Omega, b) = \deg((Id - T_1)_{|_{\overline{\Omega}\cap F}}, \Omega \cap F, b)$$

et

$$\deg(Id - S, \Omega, b) = \deg((Id - S_1)_{|_{\overline{\Omega}\cap F}}, \Omega \cap F, b).$$

Posons $H_\theta = Id - (\theta T_1 + (1-\theta)S_1)$, pour $\theta \in [0,1]$ et remarquons que si $u \in \partial_F(\Omega \cap F) \subset \partial\Omega \cap F$ on a

$$||b - H_\theta(u)|| \geq ||b - (Id - T)(u)|| - \theta||T(u) - T_1(u)|| - (1-\theta)||T(u) - S_1(u)|| > 0.$$

On conclut en utilisant l'invariance par homotopie du degré de Brouwer.
(xiii) Posons $K = \overline{T(\overline{\Omega})}$. K est un compact de F puisque F est fermé. Soit $r = dist(b, \Phi(\partial\Omega)) > 0$. Il existe alors un sous-espace F_r de dimension finie de F et une application $P \in C(K, F_r)$ telle que $\forall x \in K, ||x - P(x)|| \leq \frac{r}{2}$. Soit $r' = dist(b, \Phi_{|_{\overline{\Omega}\cap F}}(\partial_F(\Omega \cap F))) \geq r$ et posons $\Phi_r = Id - P \circ T$. On a

$$||\Phi_{|_{\overline{\Omega}\cap F}} - \Phi_{r_{|_{\overline{\Omega}\cap F}}}||_{\infty, \overline{\Omega}\cap F} \leq \frac{r}{2} \leq \frac{r'}{2}$$

d'où, par **(i)** d'abord et puis par la définition du degré de L-S,

$$\deg(\Phi_{|_{\overline{\Omega}\cap F}}, \Omega \cap F, b) = \deg(\Phi_{r_{|_{\overline{\Omega}\cap F_r}}}, \Omega \cap F_r, b) = \deg(\Phi, \Omega, b).$$

□

Nous avons aussi l'analogue de la proposition 2.12.

Proposition 4.16. *Soit $\Lambda = [\underline{\lambda}, \overline{\lambda}] \subset \mathbb{R}$ et l'espace de Banach $\Lambda \times E$ muni de la norme $||(\lambda, u)|| = ||u|| + |\lambda|$. Considérons un ouvert borné $\mathcal{A}$ de $\Lambda \times E$ et un opérateur compact T de $\overline{\mathcal{A}}$ dans E. Posons $H(\lambda, u) = u - T(\lambda, u)$. Pour tout $\lambda \in \Lambda, \mathcal{A}_\lambda := \{u \in E,\ (\lambda, u) \in \mathcal{A}\}$ est un ouvert borné de E. Alors pour tout $b \in E \setminus H(\partial\mathcal{A})$ on a que $d_0 := deg\,(H(\lambda, \cdot), \mathcal{A}_\lambda, b)$ est indépendant de $\lambda \in \Lambda$.*

Démonstration. La démonstration est la même qu'en dimension finie, c.f. proposition 2.12. Il suffit de remarquer que $H^{-1}(b) = \{(\lambda, u) \in \overline{\mathcal{A}},\ H(\lambda, u) = b\} = \tilde{H}^{-1}(\Lambda \times \{b\})$ est un compact car $\tilde{H}(\lambda, u) := (\lambda, u) - (0, T(\lambda, u))$ est une application propre (c.f. proposition 4.2).

□

Un résultat qui nous sera utile dans les applications est le suivant

Proposition 4.17. *Soient E_1, E_2 deux espaces de Banach, $\Omega_1 \subset E_1, \Omega_2 \subset E_2$ deux ouverts bornés et $T_1 : \overline{\Omega_1} \to E_1, T_2 : \overline{\Omega_2} \to E_2$ deux opérateurs compacts. Posons $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2) = Id - T := \overline{\Omega_1} \times \overline{\Omega_2} \to E_1 \times E_2$ où $T = (T_1, T_2)$. Soit $b = (b_1, b_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $b_i \notin \Phi_i(\partial\Omega_i)$, $i = 1, 2$. Alors,*

$$deg\,(\Phi, \Omega_1, \times\Omega_2, b) = deg\,(\Phi_1, \Omega_1, b_1).deg\,(\Phi_2, \Omega_2, b_2).$$

Démonstration. Par hypothèse il existe des compacts $K_1 \subset E_1, K_2 \subset E_2$ tels que $\Phi_i(\overline{\Omega_i}) \subset K_i$, $i = 1, 2$. Soit

$$0 < r < \min\{\inf_{u\in\partial\Omega_1} ||\Phi_1(u) - u||, \inf_{v\in\partial\Omega_2} ||\Phi_2(v) - v||\}.$$

On a alors $dist\,(\Phi(u, v) - (u, v)) \leq r$ pour tout $(u, v) \in \partial(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Choisissons $0 < \epsilon < \frac{r}{4}$ dans le lemme 4.12 et soient $P_1 : K_1, \to F_1$, $P_2 : K_2 \to F_2$ les projections respectivement pour Φ_1 et Φ_2, F_i étant un sous-espace de dimension finie de E_i. On peut supposer que $b_i \in F_i$, $i = 1, 2$. Alors

$$dist\,((P_1, P_2)(u, v) - (u, v)) \leq \frac{r}{2} \quad \forall (u, v) \in K_1 \times K_2$$

et si on pose $\Phi_r := (P_1, P_2) \circ \Phi$ alors, par la proposition4.9,

$$deg\,(\Phi, \Omega_1 \times \Omega_2, b) = deg\,(\Phi_r, (\Omega_1 \times \Omega_2) \cap (F_1 \times F_2), b).$$

et comme ce dernier degré est le degré de Brouwer, on conclut à l'aide de l'exercice 11. □

4.4 Calcul du degré d'une perturbation linéaire compacte de l'identité

Nous allons calculer le degré d'abord dans le cas où $T = L$ est une application linéaire compacte, c.f. aux résultats du paragraphe 8.6 de l'annexe. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des opérateurs linéaires et continus de E dans E et par $\mathcal{QL}(E)$ les opérateurs linéaires et compacts. loo

Proposition 4.18. *Soit $L \in \mathcal{QL}(E)$ et soit $\Phi = Id - L$. Si L n'a pas 1 comme valeur caractéristique alors, pour tout $R > 0$,*

$$deg(\Phi, B_r(0), 0) = (-1)^\beta$$

où β est la somme des multiplicités des valeurs caratéristiques de L comprises entre 0 *et* 1.

Démonstration. Le degré est bien défini puisque 0 est la seule solution de $\Phi(u) = 0$ (1 n'étant pas une valeur caractéristique de L). Par la proposition 8.16 l'ensemble des valeurs caractéristiques μ_i est au plus dénombrable et son seul point d'accumulation est $+\infty$. Ceci implique que le nombre de valeurs caractéristiques de L dans un intervalle borné de $\mathbb{R}$ est fini. Désignons par $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_p$ les valeurs caractéristiques de L dans $]0,1[$. Soit

$$N_i = \cup_{n=1}^{\infty} \ker(\mu_i L - Id)^n = \ker(\mu_i L - Id)^{\alpha_i}$$

où $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, \cdots, p$ et posons N la somme directe des N_i. On sait, c.f. théorème 8.14, que N est invariant par L et de dimension finie. On peut donc trouver un supplémentaire topologique F de N dans E (voir par exemple dans K. Yosida) et F est invariant par L. Par la formule du produit de la proposition 4.17

$$deg\,(Id - L, B_r(0), 0) = deg\,(Id - L_{|_N}, B_r(0) \cap N, 0).deg\,(Id - L_{|_F}, B_r(0) \cap F, 0).$$

Dans $B_r(0) \cap F$ on considère la déformation admissible $Id - tL, 0`t \leq 1$ (si $(Id - tL)(x) = 0, x \in F$ alors $x = 0$). Donc

$$deg\,(Id - L, B_r(0), 0) = deg\,(Id - L_{|_N}, B_r(0) \cap N, 0) = (-1)^{\beta}$$

par le résultat de la proposition 2.15. □
Montrons un résultat que será d'utilité plus tard dans les applications.

Proposition 4.19. *Soit $L_D(u) = u''$, $j : C^2([0,1], \mathbb{R}) \to C([0,1], \mathbb{R})$ l'inclusion et posons $T = j \circ L_D^{-1}$. Alors pour tout $\alpha \neq -(n\pi)^2, n \in \mathbb{N}_*$ le degré $deg\,(Id - \alpha T, B_R(0), 0)$ est bien défini quel que soit $R > 0$ et*

$$deg\,(Id - \alpha T, B_R(0), 0) = \pm 1.$$

Démonstration. Par le lemme 4.7 on sait que T est un opérateur linéaire compact. Ses valeurs propres sont les nombres $\lambda_n = -(n\pi)^{-2}$, $n \in \mathbb{N}_*$. En particulier, si $\alpha \neq -(n\pi)^2, n \in \mathbb{N}_*$, alors 1 n'est pas une valeur caractéristique de αT. De plus la multiplicité de chaque valeur propre est 1. La conclusion est une conséquence de la proposition précédente. □

Exercice 25. *Si $\alpha \neq -(n\pi)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'opérateur*

$$L_\alpha : C_0^2([0,1], \mathbb{R}) \to C([0,1], \mathbb{R}), \quad L_\alpha(u) := u'' + \alpha u.$$

Montrer que $\forall h \in C([0,1], \mathbb{R})$, $\forall x \in [0,1]$,

$$L_\alpha^{-1}(h)(x) = \int_0^1 G_\alpha(x,y) h(y)\, dy$$

où $G_\alpha : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ est la fonction de Green suivante :

$$G_\alpha(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin\left(\sqrt{\alpha}(x-1)\right)\, \sin\left(\sqrt{\alpha} y\right)}{\sqrt{\alpha}\sin(\sqrt{\alpha})} & si\ 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ \frac{\sin\left(\sqrt{\alpha} x\right)\, \sin\left(\sqrt{\alpha}(y-1)\right)}{\sqrt{\alpha}\sin(\sqrt{\alpha})} & si\ 0 \leq x \leq y \leq 1. \end{cases}$$

Calculer $deg(Id - j \circ L_\alpha^{-1}, B_R(0), 0)$.

4.5 Définition et calcul de l'indice par linéarisation

Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace de Banach et $\Omega \subset E)$ un ouvert borné. Soit $T \in Q(\overline{\Omega}, E)$ et posons $\Phi = Id - T$. Considérons une solution isolée u_0 de l'équation $\Phi(u) = b$; pour un certain $r_0 > 0$, u_0 est la seule solution de $\Phi(u) = b$. Alors pour tout $\epsilon > 0$, $0 < \epsilon < r$ on a $deg\,(\varphi, B(x_0, r), b) = deg\,(\varphi, B(x_0, \epsilon), b)$ par la propriété d'excision. Donc pour tout $\epsilon > 0$ suffisamment petit, $deg\,(\varphi, B(x_0, \epsilon), b)$ est constant.

Définition 4.20. *On définit l'indice de φ au point x_0 relativement à b*

$$i\,(\Phi, x_0, b) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\epsilon \to 0}\ deg(\Phi, B(x_0, \epsilon), b).$$

Par linéarisation nous allons déduire la valeur de l'indice de 0 de $Id - T$ lorsque T est un opérateur compact non linéaire, différentiable à l'origine. Rappelons quelques définitions du calcul différentiel dans les espaces de Banach.

Définition 4.21. *Soit $T : \Omega \to E$ un opérateur défini sur un ouvert Ω de E et soit $x_0 \in \Omega$. On dit que T est* **Fréchet différentiable en** x_0 *si et seulement si il existe une application linéaire continue $T'(x_0) : E \to E$ telle que*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{||T(x) - T(x_0) - T'(x_0)(x - x_0)||}{||x - x_0||} = 0.$$

Exemple 4.1. *Considérons l'opérateur $T : C([a, b], \mathbb{R}) \to C([a, b], \mathbb{R})$ défini par $T(u) = u^2$. Alors T est Fréchet différentiable en toute fonction $u \in C([a, b], \mathbb{R})$ et $T'(u)(v) = 2u\,v$.*

Exemple 4.2. *Considérons l'opérateur $T : C([a, b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ défini par $T(u) = \int_a^b u^2(s)\,ds$. Alors T est Fréchet différentiable en toute fonction $u \in C([a, b], \mathbb{R})$ et $T'(u)(v) = 2\int_a^b u(s)\,v(s)\,ds$.*

Proposition 4.22. *Soit $r > 0$ et $T : B_r(0) \subset E \to E$ un opérateur compact Fréchet différentiable en 0. Alors $T'(0)$ est un opérateur linéaire compact.*

Démonstration. Pour tout $0 < \epsilon$ l'opérateur $S_\epsilon(x) := \frac{T(\epsilon x) - T(0)}{\epsilon}$ est compact dans, disons, $\overline{B_r(0)}$. Comme T est Fréchet différentiable en 0, S_ϵ converge vers $T'(0)$ uniformément sur $\overline{B_r(0)}$ lorsque $\epsilon \to 0$. Alors $T'(0)(\overline{B_r(0)})$ est relativement compact par **(i)** de la proposition 4.2, d'où le résultat. □

Théorème 4.23. *Soit $\Phi = Id - T$ une perturbation compacte de l'identité différentiable en un point a de son domaine au sens de Fréchet. Supposons que $T(a) = 0$. Si 1 n'est pas une valeur caractéristique de $T'(a)$ alors a est une solution isolée de l'équation $\Phi(u) = 0$ et, pour tout $\epsilon > 0$ suffisamment petit*

$$deg(\Phi, B_\epsilon(a, 0) = i(\Phi, a, 0) = (-1)^\beta$$

où β est la somme des multiplicités des valeurs caractéristiques de $T'(a)$ comprises entre 0 et 1.

Démonstration. Par simplicité supposons que $a = 0$. Posons $\Phi_t(u) = u - T'()u + tR(u)$ avec $\lim_{u\to 0} \frac{R(u)}{||u||} = 0$ et $t \geq 0$. Φ_t est une perturbation compacte de l'identité car $T'(0)$ et $R(u)$ sont des opérateurs compacts, $R(0) = 0$. L'équation $\Phi_t(u) = 0$ s'écrit $u = (Id - T'(0))^{-1}(-tR(u))$, donc

$$||u|| \leq ||(Id - T'(0))^{-1}||.\, ||R(u)||$$

si $0 \leq t \leq 1$. Soit $0 < \eta$ tel que pour tout $||u|| \leq \eta$ on ait $\frac{||R(u)||}{||u||} \leq \frac{1}{2||(Id-T'(0))^{-1}||}$. On a alors $0 \notin \Phi_t(\partial B_\eta(0)$ pour tout $t \in [0,1]$ et 0 est la seule solution de $\Phi_t(u) = 0$ dans $\overline{B_\eta(0)}$. Par l'invariance du degré par homotopie

$$i(\Phi, 0, 0) = deg\,(\Phi, B_\epsilon(0), 0) = deg\,(Id - T'(0), B_\epsilon(0), 0) = (-1)^\beta.$$

□

Exemple 4.3. *Considérons à nouveau l'opérateur T de l'exercice 21. T est Fréchet différentiable en tout point : si $u \in C([a,b],\mathbb{R})$ alors*

$$T'(u)(v)(\cdot) = \int_a^b K(\cdot,t)nu^{n-1}(t)\,v(t)\,dt$$

pour tout $v \in C([a,b],\mathbb{R})$.

Le corollaire suivant est un résultat est important dans théorie de la bifurcation et sera utilisé plus tard.

Corollaire 4.24. *Soit $\Phi_\lambda(x) = x - \lambda T(x)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et T satisfaisant les hypothèses du théorème 4.23. Alors $i(\Phi_\lambda, 0, 0)$ est bien défini lorsque λ n'est pas une valeur caractéristique de $T'(0)$ et l'on a*

$$i(\Phi_\lambda, 0, 0) = (-1)^{m_j} i(\Phi_{\lambda'}, 0, 0)$$

si $]\frac{1}{\lambda'}, \frac{1}{\lambda}[\cap\sigma(T'(0)) = \frac{1}{\mu_j}$, m_j étant la multiplicité de μ_j.

5 Théorèmes du point fixe II

5.1 Théorème de Borsuk-Ulam en dimension infinie

Théorème 5.1. *Soit Ω un ouvert borné de E, symétrique par rapport à l'origine et contenant l'origine. Soit $T \in Q(\overline{\Omega}, E)$ et $\Phi = Id - T$. Si T est impaire sur $\partial\Omega$ et si $0 \notin \Phi(\partial\Omega)$ alors $deg\,(\Phi, \Omega, 0)$ est un entier impair.*

Démonstration. Grâce à **(xii)** du théorème 4.15 on peut supposer que T est impaire sur $\overline{\Omega}$ en remplaçant si nécessaire T par $\frac{T(u)-T(-u)}{2}$ qui est compacte, impaire et coïncide avec T sur $\partial\Omega$. Dans ces conditions $K = \overline{T(\overline{\Omega})}$ est un compact symétrique par rapport à l'origine. Soit $r = dist(b, \Phi(\partial\Omega))$. D'après le lemme de Schauder 4.12 il existe un sous-espace F de dimension finie et une application $P \in C(K, F)$ vérifiant pour tout $x \in K, ||x - P(x)|| < \frac{r}{2}$. Posons, pour tout $x \in K, P_1(x) = \frac{P(x)-P(-x)}{2}$. Du fait que K est symétrique par rapport à l'origine on a $||x - P_1(x)|| < r$. L'application $\Phi_1 := Id - P_1 \circ T$ est donc impaire et $deg\,(\Phi, \Omega, b) = deg\,(\Phi_{1_{|_{\overline{\Omega} \cap F}}}, \Omega \cap F, b)$. Le résultat découle alors du théorème 3.4. □

5.2 Théorème du point fixe de Schauder

Un contre-example de Kakutani montre que l'analogue du théorème de Brouwer n'est pas valable en dimension infinie.

Exemple 5.1. *Considérons l'espace de Hilbert l_2 et sa boule unité fermée $\overline{B}(0,1)$. On définit $f(x) = f(x_1, x_2, \cdots,) = (\sqrt{1 - ||x||^2}, x_1, x_2, \cdots)$. Alors*

$$||f(x)|| = \sqrt{(1 - \sqrt{||x||^2})^2 + x_1^2 + x_2^2 + \cdots} = \sqrt{(1 - ||x||^2 + ||x||^2} = 1.$$

Il est clair que f est continue et $f : \overline{B}_1(0) \mapsto \overline{B}_1(0)$. Or f ne possède pas de point fixe.

Dans la suite nous considérerons $(E, ||\cdot||)$ un espace de Banach.

Théorème 5.2. *Théorème du point fixe de Schauder. Soit C un sous-ensemble de E fermé et convexe et $f : C \mapsto C$ une application continue telle que $f(C)$ est relativement compact. Alors f possède un point fixe. Plus généralement, si C est un compact convexe alors toute fonction continue de C sur C possède un point fixe.*

Démonstration. On note K l'adhérence de $f(C)$ qui est, par hypothèse, un compact. $K \subset C$ car C est un fermé (si C est compact alors $K = f(C)$ car $f(C)$ est compact). Pour chaque n soit F_n un $\frac{1}{n}$- réseau de K et soit $P_n : K \mapsto conv(F_n)$ une projection de Schauder, c.f. lemme 4.12. Comme C est convexe et F_n est une partie de C alors $conv(F_n) \subset C$ est un sous-ensemble compact et convexe. On définit $f_n : conv(F_n) \mapsto conv(F_n)$ par $f_n := P_n \circ f_{|_{conv(F_n)}}$. Par le théorème de Brouwer f_n possède au moins un point fixe y_n. Or $f(y_n) \in K$ qui est un compact et donc la suite $f(y_n)$ possède una sous-suite convergente que nous noterons de la même manière. On pose $y = \lim_{n\to\infty} f(y_n) \in C$. Montrons que $f(y) = y$. En effet,

$$||f_n(y_n) - f(y_n)|| = ||P_n(f(y_n) - f(y_n)|| < \frac{1}{n}$$

d'où $y = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} f_n(y_n) = \lim_{n\to\infty} y_n$ et par conséquent $f(y) = y$. □

5.3 Théorème du point fixe de Schaeffer

Il est souvent plus facile de utiliser une version plus simple du théorème de Schauder avec la condition connue comme *la condition de bord de Leray-Schauder* :

Définition 5.3. *On dit que $f : E \mapsto E$ satisfait la* **la condition de bord de Leray-Schauder** *si il existe $r > 0$ tel que $||x|| = r$ entraîne $f(x) \neq \lambda x$ pour tout $\lambda > 1$.*

Rémarque 5.4. *Par exemple si il existe $r > 0$ tel que $||x|| = r$ entraîne $||f(x)|| \leq r$ alors f satisfait la condition de bord de Leray-Schauder.*

Théorème 5.5. *Théorème du point fixe de Schaeffer. Soit $f : E \mapsto E$ une application compacte satisfaisant la condition du bord de Leray-Schauder. Alors f posséde un point fixe.*

Démonstration. On considère $C = \overline{B}_r(0)$ où $r > 0$ est donné par la condition du bord. Considérons la rétraction ρ de E dans C qui est définie par $\rho(x) = x$ si $x \in C$ et $\rho(x) = \frac{r}{||x||}x$ si $||x|| > r$ et notons $f_* := \rho \circ f : C \mapsto C$. Comme f_* est compacte, par le théorème de Schauder il existe $x \in C$ tel que $f_*(x) = x$. Montrons que $f(x) \in C$ car dans ce cas $f_*(x) = f(x)$ et on aura la conclusion. Si $f(x) \notin C$ alors $x = f_*(x) = \frac{r}{||f(x)||}f(x)$ et on a d'une part

$$||x|| = ||\frac{r}{||f(x)||}f(x)|| = r$$

et d'autre part

$$f(x) = \frac{||f(x)||}{r}x = \lambda x$$

avec $\lambda > 1$, ce qui est contradictoire. □

Exercice 26. *Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace de Banach, $U \subset E$ un ouvert borné avec $0 \in U$ et $T : \overline{U} \to E$ un opérateur compact.*

I. *Montrer que ou bien* **(a)** *T possède un point fixe dans $\overline{U}$, ou bien* **(b)** *il existe $\lambda \in]0,1[$ et $x \in \partial U$ tels que $u = \lambda T(u)$.*

II. *Supposons qu'il existe une fonction $\varphi : E \to \mathbb{R}_+$ avec les propriétés $\varphi^{-1}(0) = 0$ et $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$ pour tout $\lambda > 0$ et tout $x \in E$. Montrer que T possède un point fixe dans $\overline{U}$ si une des conditions suivantes est vérifiée :* **(i)** *$\varphi(T(x)) \leq \varphi(x)$ pour tout $x \in \partial U$ ou* **(ii)** *$\varphi(T(x))^2 \leq \varphi(T(x) - x)^2 + \varphi(x)^2$ pour tout $x \in \partial U$.*

III. *Supposons que T est définie dans tout l'espace E et que T est compact. Posons $F_T := \{x \in E,\ \exists\lambda \in]0,1[$ tel que $x = \lambda T(x)\}$. Montrer que soit F_T est non borné ou T possède un point fixe dans E.*

Exercice 27. **(i)** *Montrer le Théorème de Poincaré-Bohl : soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné, $\varphi_1, \varphi_2 \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ deux applications et $z \in \mathbb{R}^N$ fixé satisfaisant*

$$z \notin \overline{\varphi_1(x)\varphi_2(x)} := \{y \in \mathbb{R}^N,\, y = t\varphi_1(x) + (1-t)\varphi_2(x), t \in [0,1]\}\ \forall x \in \partial\Omega.$$

Montrer que $deg\,(\varphi_1, \Omega, z) = deg\,(\varphi_2, \Omega, z)$.

(ii) *Montrer le Théorème de Rouché : soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné, $\varphi_1, \varphi_2 \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ deux applications et $z \in \mathbb{R}^N$ fixé satisfaisant*

$$||\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|| < ||\varphi_1(x) - z|| \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Montrer que $deg\,(\varphi_1, \Omega, z) = deg\,(\varphi_2, \Omega, z)$.

(iii) *Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_n \in \mathbb{R}_*$, déterminer $i(f,0,0)$ où $f(x) = a_n, x^n$. Puis, pour l'application $g(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, où $a_j \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$, montrer que $\lim_{R\to\infty} deg\,(g,]-R, R[, 0) = i(f, 0, 0)$.*

6 Equations différentielles ordinaires

6.1 Théorème d'existence de Cauchy-Peano.

Soit $D \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $f : I \times D \to \mathbb{R}^N$ continue dans un voisinage d'un point $(t_0, y_0) \in I \times D$. Considérons le problème aux valeurs initiales suivant

$$(15) \qquad (PVI) \qquad y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0.$$

Une solution de (PVI) est une fonction y de classe C^1 définie dans un voisinage J de t_0 satisfaisant l'équation de (PVI) pour tout $t \in J$ et satisfaisant la condition initiale.

Théorème 6.1. *Soit $f : I \times D \to \mathbb{R}^N$ continue dans un voisinage d'un point $(t_0, y_0) \in I \times D$. Alors il existe $\alpha > 0$ et une fonction $y : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \mapsto D$ de classe C^1 solution du problème aux valeurs initiales (PVI).*

Démonstration. Soient $a, b > 0$ tels que f est continue dans le cylindre $R = [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B_b(y_0)}$. Soit $M > \max\{1, \frac{b}{a}, \max_{(t,y)\in R} |f(t,y)|\}$ et notons $\alpha = \frac{b}{M}$. Notons E l'ensemble des fonctions continues définies dans $J_0 := [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^N$. Considérons l'ensemble C suivant

$$C = \{u \in E;\ ||u - y_0||| < b, \quad ||u(t_1) - u(t_2)|| < M\,|t_1 - t_2| \quad \forall\ t_1, t_2 \in J_0\}.$$

C est un ensemble convexe et fermé pour la topologie induite de la normé infinie de E. Prenons la fonction $T : E \mapsto E$ définie par

$$T(u)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds.$$

Il est clair que les points fixes de T sont les solutions du problème aux valeurs initiales. Par la proposition 4.6 (c.f paragraphe 3.1) l'opérateur T est compact. D'après le théorème de Schauder il suffit de montrer que $T(C) \subset C$. Les détails sont laissés comme exercice. □

Rémarque 6.2. *Si on suppose en plus que f est localement lipschitzienne en y pour tout $t \in I$ fixé, alors (PVI) possède, localement, une unique solution. On notera $y(t, t_0, y_0)$ la solution maximale (dans le sens du domaine de définition !) de (PVI).*

6.2 Solutions périodiques d'équations différentielles non résonantes

L'existence de solutions périodiques d'une équation différentielle ordinaire n'est pas un problème trivial, on pourra penser au cas $y'(t) \equiv 1$. Nous allons traiter ici ce problème d'abord dans le cas des équations *linéaires*, pour lesquelles on s'interesséra aux solutions de période T, pour $T > 0$ fixé. Plus précisement, soit $T > 0$, $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, $b \in C([0,T], \mathbb{R}^N)$ et posons $f(t, y) = A(t)y + b(t)$, $t_0 = 0$ et $y_0 \in \mathbb{R}^N$ quelconque dans (PVI). Alors $y(t, 0, y_0)$ est définie dans tout $[0, T]$ et elle est donnée par la *formule des variations des constantes*

$$y(t, 0, y_0) = e^{tA}y_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)A} b(\tau)\, d\tau.$$

Il est clair qu'il existe une solution du problème

$$\text{(16)} \qquad \begin{cases} y'(t) = Ay(t) + b(t) & \forall t \in [0, T]; \\ y(0) = y(T), \end{cases}$$

si et seulement si il existe $y \in \mathbb{R}^N$ tel que

$$\text{(17)} \qquad e^{TA}y + \int_0^T e^{(T-\tau)A} b(\tau)\, d\tau = y.$$

Proposition 6.3. *Supposons que $b \equiv 0$. Le problème*

$$\text{(18)} \qquad \begin{cases} y'(t) = Ay(t) & \forall t \in [0, T] \\ y(0) = y(T), \end{cases}$$

admet une solution non triviale si et seulement si

$$\text{(19)} \qquad \sigma(A) \cap \frac{2\pi}{T}\mathbb{Z}i \neq \emptyset.$$

Démonstration. D'après la condition (17) avec $b \equiv 0$, l existe une solution non triviale de (18) si et seulement si il existe $y_0 \neq 0$ tel que $e^{TA}y_0 = y_0$. Ceci équivaut à la condition $1 \in \sigma(e^{TA})$ et puisque $\sigma(e^{TA}) = e^{\sigma(TA)} = e^{T\sigma(A)}$, on obtient la condition

$$\sigma(A) \cap \frac{2\pi}{T}\mathbb{Z}i \neq \emptyset.$$

$\square$

Dans la proposition suivante on montre une sorte *d'alternative de Fredholm.*

Proposition 6.4. *Le problème* (16) *admet une unique solution pour toute fonction* $b \in C([0,T], \mathbb{R}^N)$ *si et seulement si*

$$\sigma(A) \cap \frac{2\pi}{T}\mathbb{Z}i = \emptyset. \tag{20}$$

Dans ce cas-là, la solution est donnée par la formule suivante

$$u(t) = e^{tA}\Big((Id - e^{TA})^{-1}\, e^{TA} \int_0^T e^{-\tau A} b(\tau)\, d\tau\Big) + \int_0^t e^{(t-\tau)A} b(\tau)\, d\tau.$$

La preuve est laissée comme exercice.

Exercice 28. **i)** *Soit* $T > 0$ *et* $e \in C([0,T], \mathbb{R})$. *Considérons l'eq́uation de second ordre*

$$\left\{ \begin{array}{l} x''(t) + ax'(t) + bx(t) = e(t) \quad \forall t \in [0,T]; \\ x(0) = x(T), x'(0) = x'(T), \end{array} \right. \tag{21}$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$. *Discuter, suivant les valeurs de* a *et* b, *l'existence/non-existence de solutions de ce problème pour toute fonction* $e \in C([0,T], \mathbb{R})$.
ii) *Montrer que lorsque* $T = 2\pi$ *et* $e(t) = \sin t$, *le problème n'a pas de solution.*
iii *Posons* $C_T^2([0,T], \mathbb{R}) := \{x \in C^2([0,T], \mathbb{R}),\, x(0) = x(T), x'(0) = x'(T)\}$ *et* $L_p : C_T^2([0,T], \mathbb{R}) \to C([0,T], \mathbb{R})$ *l'opérateur défini par* $L_p(x) = x'' + x$. *Montrer que si* $T < 2\pi$ *alors* L_D *est inversible, avec pour tout* $e \in C([0,\pi], \mathbb{R})$,

$$L_p^{-1}(e)(x) = \int_0^T G_p(x,y)\, e(y)\, dy$$

où $G_p : [0,T] \times [0,T] \to \mathbb{R}$ *est la fonction de Green suivante :*

$$G_p(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\cos y - \cos(y-T)}{2 - 2\cos T} \sin x + \frac{\sin(y-T) - \sin y}{2-2\cos T} \cos x & \textit{si } x \le y, \\ \frac{\cos y - \cos(y-T)}{2 - 2\cos T} \sin(x-T) + \frac{\sin(y-T) - \sin y}{2-2\cos T} \cos(x-T) & \textit{si } x > y. \end{array} \right.$$

Comme application de la théorie du degré nous allons étudier l'équation

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(t) = Ay(t) + b(t, y(t)),\, \forall t \in [0,T]; \\ y(0) = y(T), \end{array} \right. \tag{22}$$

dans le cas où $b \in C([0,T] \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ satisfait

$$\liminf_{r \to \infty} \frac{\max\{||b(t,y)||,\, 0 \le t \le T, ||y|| \le r\}}{r} = 0. \tag{23}$$

Ces fonctions b sont appelées *sous-lineáires à l'infini.* Nous supposerons également la condition (20), c'est à dire, l'équation $y'(t) = Ay(t)$ n'a pas de solutions T-périodiques (cas dit *non résonant*).

Théorème 6.5. *Soit* $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ *satisfaisant* (20) *et soit* $b \in C([0,T] \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ *satisfaisant* (23). *Alors le problème* (22) *possède une solution.*

Démonstration. Considérons l'espace

$$E = C_T([0,T], \mathbb{R}^N) := \{u \in C([0,T], \mathbb{R}^N),\ u(0) = u(T)\}$$

muni de la norme usuelle et soit $S : E \to E$ défini par

$$S(y)(t) := e^{tA}\Big((Id - e^{TA})^{-1}\, e^{TA} \int_0^T e^{-\tau A} b(\tau, y(\tau))\, d\tau\Big) + \int_0^t e^{(t-\tau)A} b(\tau, y(\tau))\, d\tau.$$

Il est clair que si $y \in E$ est un point fixe de S alors y est dérivable et y est une solution de (22).

Posons $P(r) = \max\{||b(t,y)||,\ 0 \le t \le T, ||y|| \le r\}$ et soit $\overline{B}_r(0)$ une boule dans E. Alors pour tout $y \in \overline{B}_r(0)$ on a $||S(y)|| \le KP(r)$ où K est une constante ne dépendant que de A. On a donc $S : \overline{B}_r(0) \to \overline{B}_r(0)$, si r est suffisamment grand pour que $KP(r) \le r$, ce qui est possible grâce à la condition (23). Comme S est un opérateur compact par la proposition 4.6, on conclut que S admet un point fixe par le théorème du point fixe de Schauder. □

Corollaire 6.6. *Soit* $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ *satisfaisant* (20) *et soit* $b \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$. *Alors le problème*

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(t) = Ay(t) + \epsilon b(t, y(t)),\ \forall t \in [0,T]; \\ y(0) = y(T), \end{array} \right. \tag{24}$$

possède une solution pour tout $\epsilon > 0$ *suffisamment petit.*

La preuve est laissée comme exercice.

6.3 Solutions périodiques d'équations différentielles résonantes

Considérons maintenant les cas $A = 0$, $b \in C([0,T] \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ et l'équation

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(t) = \epsilon b(t, y(t)),\ \forall t \in [0,T]; \\ y(0) = y(T), \end{array} \right. \tag{25}$$

pour tout $\epsilon > 0$. Comme le problème $y'(t) = 0$ a des solutions T-périodiques (les solutions constantes !) le problème est dit *résonant*. Considérons l'espace

$$E = C([0,T], \mathbb{R}^N)$$

muni de la norme usuelle et l'opérateur $S : E \to E$ défini par

$$S(y)(t) := y(T) + \int_0^t \epsilon b(\tau, y(\tau))\, d\tau.$$

Les points fixes de S sont des solutions de (25).

Théorème 6.7. *Considérons l'application $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ définie par*

$$g(y) := \int_0^T \epsilon b(\tau, y)\, d\tau.$$

Supposons qu'il existe un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ telle que g ne s'annule pas sur $\partial\Omega$ et

$$deg\,(g, \Omega, 0) \neq 0$$

où deg est le degré de Brouwer. Alors le problème (25) *a une solution pour tout $\epsilon > 0$ suffisamment petit.*

Démonstration. Fixons $0 < \epsilon \leq 1$. Posons $G := \{y \in E,\ y([0, T]) \subset \Omega\}$. G est donc un ouvert borné de E. On défini $H : \overline{G} \times [0, 1] \to E$ par

$$H(y, \lambda)(t) := \lambda y(t) + (1 - \lambda) y(T)$$

et

$$a(t, \lambda) := \lambda t + (1 - \lambda) T.$$

Considérons

$$S(y, \lambda) := y(T) + \epsilon \int_0^{a(t,\lambda)} b(\tau, H(\lambda, y)(\tau))\, d\tau.$$

Pour chaque $\lambda \in [0, 1]$, l'opérateur $S(\cdot, \lambda)$ est compact d'après la proposition 4.6. Puis, comme $S(y, 1) = S$, la conclusion du théorème suivra si on montre que $deg(Id - S(\cdot, 1), G, 0) \neq 0$.

Montrons que $Id - S(\cdot, \lambda)$ n'a pas de z'eros dans ∂G si ϵ est petit. Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe $\lambda_n, \epsilon_n \to 0$ et $y_n \in \partial G$ tel que

$$y_n(t) = y_n(T) + \epsilon_n \int_0^{a(t,\lambda_n)} b(\tau, H(\lambda_n, y)(\tau))\, d\tau \quad \forall t \in [0, T]. \tag{26}$$

Nous pouvons supposer, en prenant une sous-suite si nécessaire, qu'il existe $\lambda_0 \in [0, 1]$ tel que $\lambda_n \to \lambda_0$. En faisant $t = T$ dans (26) on obtient que $\int_0^T b(\tau, H(\lambda_n, y)(\tau))\, d\tau = 0$ pour tout n. D'autre part comme G est borné et l'opérateur $S(\cdot, \lambda)$ est compact, il existe $y \in \partial G$ tels que $y_n \to y$ dans E et, en passant à la limite dans (26), on trouve $y(t) \equiv y(T) = a \in \partial G \cap \mathbb{R}^N = \partial\Omega$. Par conséquent $H(y_n, \lambda_n) \to H(y, \lambda_0) = y(T) = a$ ou encore $\int_0^T b(\tau, a)\, d\tau = 0$, ce qui contredit le fait que g ne s'annule pas sur $\partial\Omega$. Par l'invariance du degré de Leray-Schauder par homotopie on conclut, pour tout ϵ suffisamment petit, que

$$deg\,(Id - S(\cdot, 0), G, 0) = deg\,(Id - S(\cdot, 1), G, 0).$$

Or par la propriété **(xiii)** de la proposition 4.15

$$deg\,(Id - S(\cdot, 0), G, 0) = deg\,(Id - S(\cdot, 0), G \cap \mathbb{R}^N, 0) =$$

$$deg\,(Id - S(\cdot, 0), \Omega, 0) = deg\,(g, \Omega, 0) \neq 0.$$

□

Corollaire 6.8. *Dans les hypothèses du théorème 6.7, si pour tout* $0 < \epsilon \leq 1$, *aucune solution de* (25) *n'appartient pas à* ∂G, *alors le problème* (25) *admet une solution quel que soit* $0 < \epsilon \leq 1$.

La preuve est laissée comme exercice.

Comme application de ce corollaire considérons **l'équation de Liénard** suivante, c.f. [6] :

$$\left\{ \begin{array}{ll} x'' + h(x)x' + x = e(t) & \forall x \in [0, T]; \\ x(0) = x(T),\ x'(0) = x'(T) & \end{array} \right. \tag{27}$$

avec $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues. Nous allons prouver

Proposition 6.9. *Supposons que* $T < 2\pi$. *Alors pour toute fonction* $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue et* T*-périodique il existe une solution de* (27).

Démonstration. Nous pouvons supposer que $\int_0^T e(s)\,ds = 0$ en remplaçant si nécessaire x par $x - 1/T \int_0^T e(s)\,ds$ (la fonction h change). Considérons le système

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = y \\ y' = -h(x)y - x - e(t). \end{array} \right. \tag{28}$$

Alors $g(x, y) = \int_0^T ((y, -h(x)y - x - e(t))\,dt = (yT, -h(x)yT - xT)$. Un calcul élementaire montre que $g(x, y) = (0, 0)$ si et seulement si $x = y = 0$ et si l'on prend $\Omega := B_R(0) \subset \mathbb{R}^2$ alors $deg\,(g, \Omega, 0) = 1$ pour tout $R > 0$. D'après le corollaire 6.8 il suffit de trouver des bornes a-priori dans l'espace $C^1([0, T], \mathbb{R})$ du problème (25), qui dans notre cas correspond à l'équation

$$x'' + \epsilon h(x)x' + \epsilon^2 x = \epsilon^2 e(t); \quad x(0) = x(T) \text{ et } x'(0) = x'(T).$$

En intégrant cette dernière équation sur $[0, T]$ on obtient que $\int_0^T x(s)\,ds = 0$, et si l'on multiplie par x et l'on intègre on trouve

$$-\int_0^T x'(t)^2\,dt + \epsilon^2 \int_0^T x(t)^2\,dt = \epsilon^2 \int_0^T x(t)e(t)\,dt.$$

Nous avons utilisé resp. que $h(x)x' = \frac{d}{dt}H(x)$ où $H(s) = \int_0^s h(t)\,dt$ et que $h(x)x'x = \frac{d}{dt}G(x(t))$ où $G(s) = \int_0^s h(t)t\,dt$. En utilisant ensuite **l'inégalité de Poincaré-Wirtinger**, c.f. exercice 29,

$$\int_0^T x'(t)^2\,dt \geq \frac{4\pi^2}{T^2}\int_0^T x(t)^2\,dt$$

on en déduit

$$(1 - \frac{T^2}{4\pi^2})\int_0^T x'(t)^2\,dt \leq -\epsilon^2\int_0^T x(t)e(t)\,dt \leq ||x||_{L^2}||e||_{L^2}$$

ou encore

$$||x'||_{L^2} \leq \frac{2\pi T}{4\pi^2 - T^2}||e||_{L^2}.$$

Par le TVI on trouve

$$||x||_\infty \leq \sqrt{T}\frac{2\pi T}{4\pi^2 - T^2}||e||_{L^2}.$$

Soit $M := \sqrt{T}\frac{2\pi T}{4\pi^2 - T^2}||e||_{L^2}$, $q := \max\{|h(x)|,\, |x| \leq M\}, p := ||e||_\infty$. Il suit directement de l'équation de Liénard que

$$||x''||_\infty \leq \epsilon q||x'||_\infty + \epsilon^2(M + p),$$

et, d'àpres l'exercice 30,

$$||x'||_\infty^2 \leq 4M\epsilon q||x'||_\infty + 4M\epsilon^2(M + p)$$

ce qui entraîne que $||x'||_\infty$ est borné et on conclut la preuve. □

Exercice 29. *Soit $x \in C^2([0,T],\mathbb{R})$ telle que $x(0) = x(T), x'(0) = x'(T)$ et $\int_0^T x(t)\,dt = 0$. En utilisant le développement en série de Fourier, montrer* **l'inégalité de Poincaré-Wirtinger** *:*

$$\int_0^T x'(t)^2\,dt \geq \frac{4\pi^2}{T^2}\int_0^T x(t)^2\,dt$$

Exercice 30. *Soit $x \in C^2([0,+\infty))$ et supposons que $||x||_\infty, ||x'||_\infty$ et $||x'||_\infty$ sont des nombres finis. En utilisant le développement en série de Taylor de $x(t+h)$, montrer* **l'inégalité de Landau** *:*

$$||x'||_\infty^2 \leq 4||x||_\infty\,||x''||_\infty.$$

Exercice 31. *Considérons l'équation du type Liénard*

$$\begin{cases} u''(t) + u^2(t)u'(t) + g(u(t)) = e(t) & \forall t \in [0,1]; \\ u(0) = u(1),\, u'(0) = u'(1), \end{cases} \tag{29}$$

avec $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue telle que* $\int_0^1 e(t)\,dt = 0$ *et* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la fonction impaire définie par* $g(x) := \min\{x, 1\}$ *si* $x \geq 0$.
(i) *Ecrire* (29) *sous la forme*

$$\begin{cases} X'(t) = b(t, X(t)) & t \in [0,1], \\ X(0) = X(1), \end{cases}$$

avec $X : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ *et* $b : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *continue.*
(ii) *Posons* $g(x,y) := \int_0^1 b(t,(x,y))\,dt$ *pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Montrer que le degré de Brouwer $deg\,(g, B_R(0), 0)$ *est bien défini pour tout* $R > 0$ *et le calculer.*
(iii) *Posons* $G := \{X \in C([0,1],\mathbb{R}^2),\ ||X||_\infty < R\}$. *En utilisant un résultat du cours montrer que* (29) *possède une solution si pour tout* $\epsilon \in]0,1]$ *les solutions de*

$$\begin{cases} u''(t) + \epsilon^2 u^2(t) u'(t) + \epsilon g(u(t)) = \epsilon e(t) & \forall t \in [0,1]; \\ u(0) = u(1),\ u'(0) = u'(1) \end{cases}$$

ne sont pas dans ∂G.
(iv) *Conclure que* (29) *possède au moins une solution.*

6.4 Equations différentielles du second ordre asymptotiquement linéaires à l'infini

Considérons le problème de Dirichlet dans l'intervalle $[0,1]$

$$\begin{cases} u''(x) = f(x,u), & \forall x \in [0,1]; \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{30}$$

où $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue. Une solution de (30) est une fonction $u \in C_0^2([0,1],\mathbb{R})$ satisfaisant l'équation différentielle. Nous allons étudier ce problème d'abord dans le cas linéaire $f(x,u) = \alpha u + b(x)$, puis dans le cas où f est asymptotiquement linéaire.

Proposition 6.10. *Considérons le problème* (30) *pour* $f(x,u) = \alpha u + b(x)$ *avec* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* $b \in C([0,1],\mathbb{R})$.
(i) *Si* $\alpha \neq -(n\pi)^2\ \forall n \in \mathbb{N}$ *alors* (30) *possède une unique solution.*
(ii) *Si* $\alpha = -(n\pi)^2$ *pour un* $n \in \mathbb{N}$ *alors* (30) *possède une solution si et seulement si* $\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)\,dx = 0$.

Démonstration. **(i)** Voir l'exercice 25. **(ii)**. Si $\alpha = -(n\pi)^2$ pour un $n \in \mathbb{N}$ et (30) possède une solution alors, en multipliant l'équation par la fonction $\sin(n\pi x)$ et en l'intégrant sur $[0,1]$ il vient

$$\int_0^1 (u''(x)\sin(n\pi x) + (n\pi)^2 u(x)\sin(n\pi x))\,dx = \int_0^1 b(x)\sin(n\pi x)\,dx.$$

Par une intégration par parties on montre que l'intégrale de gauche est égale à 0. Réciproquement, si $\int_0^1 b(x)\sin(n\pi x)\,dx = 0$ alors il est facile de voir que $\int_0^1(\int_0^1 G_\alpha(x,y)f(y)\,dy)\,\sin(n\pi x)\,dx = 0$ et $u = L_\alpha^{-1}(b)$ satisfait l'équation. $\square$

Considérons maintenant le cas d'une fonction $f(x,u) = g(u) + b(x)$ avec $b \in C([0,1],\mathbb{R})$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et "asymptotiquement linéaire" :

$$\lim_{|s|\to+\infty} \frac{g(s)}{s} = \alpha \in \mathbb{R}. \tag{31}$$

On va montrer le résultat suivant :

Proposition 6.11. *Supposons que g satisfait* (31). *Si $\alpha \neq -(n\pi)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors pour tout $b \in C([0,1],\mathbb{R})$ il existe au moins une solution $u \in C_0^2([0,1],\mathbb{R})$ du problème* (30).

Démonstration. Une fonction $u \in C([0,1],\mathbb{R})$ est une solution de (30) si et seulement si $u \in C_0^2([0,1],\mathbb{R})$ est solution de $L_D^{-1}(g(u)+b) = u$. Posons, pour tout $\lambda \in [0,1]$, $F_\lambda : C([0,1],\mathbb{R}) \to C([0,1],\mathbb{R})$ définie par $F_\lambda(u) = \lambda g(u) + (1-\lambda)\alpha u + b$. Par la proposition 4.4, F_λ est continue. Soit $H : C([0,1],\mathbb{R}) \times [0,1] \to C([0,1],\mathbb{R})$,

$$H(u,\lambda) := u - j \circ L_D^{-1}(F_\lambda(u)).$$

Alors $(Id - H)(\cdot,\lambda) = j \circ L_D^{-1} \circ F_\lambda$ est un opérateur compact car j est compact par la proposition 4.3. Nous allons montrer qu'il existe une boule $BR(0)$ dans $C([0,1],\mathbb{R})$ telle que pour tout $\lambda \in [0,1]$ l'on ait

$$0 \notin H(\partial B_R(0),\lambda).$$

Par la propriété **(ii)** du théorème 4.15

$$deg\,(H(\cdot,1), B_R(0), 0) = deg\,(H(\cdot,0), B_R(0), 0).$$

Si l'on sait que ce dernier degré est non nul alors par la propriété **(vii)** du degré de Leray-Schauder on aura la conclusion.

Commençons par établir l'existence d'un tel $R > 0$. Il suffit de trouver $R > 0$ tel que pour tout $u \in C([0,1],\mathbb{R})$ et pour tout $\lambda \in [0,1])$, $H(u,\lambda) = 0 \Rightarrow ||u||_\infty < R$. Pour montrer une *estimation a priori* de la norme infinie des solutions nous allons raisonner par l'absurde. Supposons qu'il existe $u_n \in C([0,1],\mathbb{R})$ et $\lambda_n \in [0,1]$ tels que

$$H(u_n,\lambda_n) = 0 \text{ et } a_n := ||u_n||_\infty \geq n.$$

En posant $v_n = u_n/a_n$ on a que $v_n \in C_0^2([0,1],\mathbb{R})$ satisfait $||v_n||_\infty = 1$ et

$$v_n = L_D^{-1}\Big(\lambda_n \frac{g(a_n\,v_n)}{a_n} + (1-\lambda_n)\alpha v_n + \frac{b}{a_n}\Big), \tag{32}$$

ou encore

$$\begin{cases} v_n''(x) = \lambda_n \frac{g(a_n\, v_n(x))}{a_n} + (1-\lambda_n)\alpha v_n(x) + \frac{b(x)}{a_n} & \forall x \in [0,1] \\ v_n(0) = v_n(1) = 0. \end{cases}$$

L'hypothèse sur g entraîne qu'il existe $A, B > 0$ tels que $|g(s)| \leq A|s| + B$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ et par conséquent, comme $||v_n||_\infty = 1$, le terme de droite de (32) est borné dans $C([0,1],\mathbb{R})$ par une constante indépendante de $n \in \mathbb{N}$. D'où $||v_n'||_\infty$ et $||v_n''||_\infty$ sont bornées uniformément pour tout $n \in \mathbb{N}$ grâce à (12) et (11) respectivement. En utilisant que l'inclusion $j : C_0^2([0,1],\mathbb{R}) \to C([0,1],\mathbb{R})$ est compacte et comme $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée dans $C_0^2([0,1],\mathbb{R})$, il existe une sous suite $\{v_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergeant vers une fonction $v \in C([0,1],\mathbb{R})$ pour la norme de cet espace. Trivialement

$$||v||_\infty = 1 \text{ et } v(0) = v(1) = 0.$$

Comme $\lambda_{n_k} \in [0,1]$, il existe une sous suite, encore notée λ_{n_k}, et il existe $\lambda_0 \in [0,1]$ tels que $\lambda_{n_k} \to \lambda_0$. Ainsi, $v_{n_k} \to v$ uniformément dans $[0,1]$ et on a, par la continuité de la fonction g, que pour tout $x \in [0,1]$,

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{g(a_{n_k}\, v_{n_k}(x))}{a_{n_k}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{g(a_{n_k}\, v_{n_k}(x))}{a_{n_k} v_{n_k}(x)} v_{n_k}(x) = \alpha v(x)$$

(on discute les cas $v(x) \neq 0$ et $v(x) = 0$ de façon différente). Montrons que $v \in C_0^2([0,1],\mathbb{R})$. On pose $h_k := \lambda_{n_k} \frac{g(a_{n_k}\, v_{n_k})}{a_{n_k}} + (1-\lambda_{n_k})\alpha v_{n_k} + \frac{b}{a_{n_k}}$. En utilisant l'estimation de g on a que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$||h_k||_\infty \leq A + B + ||b||_\infty.$$

En utilisant ensuite l'expression intégrale de $v_{n_k}'(x)$, c.à-d. l'équation (12) pour $w = v_n$ et avec $f = h_k$,

$$v_{n_k}'(x) = \int_0^x y h_k(y)\, dy + \int_x^1 (y-1) h_k(y)\, dy,$$

on déduit, grâce au théorème de la convergence dominée de Lebesgue, que $v_{n_k}'(x)$ converge vers $\int_0^x y\alpha v(y)\, dy + \int_x^1 (y-1)\alpha v(y)\, dy$ pour tout $x \in [0,1]$. En écrivant $v_{n_k}(x) = \int_0^x v_{n_k}'(z)\, dz$ et puisque $||v_{n_k}'||_\infty \leq 2(A + B + ||b||_\infty)$, alors, par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue

$$v(x) = \int_0^x (\int_0^z y\alpha v(y)\, dy + \int_z^1 (y-1)\alpha v(y)\, dy)\, dz$$

et v est dérivable en tout point. Cette dernière expression implique que $v \in C^2([0,1],\mathbb{R})$ et, en dérivant v', que v est solution de

$$\begin{cases} v''(x) = \alpha v(x) & \forall x \in [0,1] \\ v(0) = v(1) = 0. \end{cases}$$

D'après **(i)** de la proposition 6.10 avec $b \equiv 0$ il en résulte que $v \equiv 0$ ce qui est contradictoire avec le fait que $||v||_\infty = 1$. Nous avons prouvé qu'il existe $R > 0$ tel que $H(u, \lambda) = 0 \Rightarrow ||u||_{C([0,1],\mathbb{R})} < R$, c.à-d. $0 \notin H(\partial B(0, R), \lambda)$. Montrons finalement $deg(H(\cdot, 0), B_R(0), 0) \neq 0$. En effet

$$deg(H(\cdot, 0), B_R(0), 0) = deg(Id - \alpha j \circ L_D^{-1}, B_R(0), 0) = \pm 1$$

par le résultat de la proposition 4.19 □

6.5 Le problème de Dirichlet pour une classe d'équations de second ordre superlinéaires

Supposons que $u(t, x)$ est la température à l'instant t du point x d'une barre de longueur 1 dont les extremités sont toujours à température 0. Nous supposerons que $u(t, x)$ satisfait une *équation de la chaleur non linéaire* de la forme

$$(33) \qquad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}) + q(t, u), & \forall t \geq 0, \quad \forall x \in [0, 1]; \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0 & \forall t \geq 0, \end{cases}$$

où $k = k(u) > 0$ peut être interprété comme la conductivité de la barre (qui ne dépend que de la température). Par souci de simplicité on suppose que k est de classe C^1, $k(u) \geq k_0 > 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}$ et que la fonction $q(t, u)$ est linéaire : $q(t, u) = R(t)u + S(t)$ avec $R(t) < 0$ et $S(t) > 0$ pour tout t. Cherchons les solutions stationnaires, c.-à-d. $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$: ce sont les solutions $u(x)$ du *problème de Dirichlet* suivant

$$(34) \qquad \begin{cases} u''(x) = -\frac{1}{k(u)}\Big(k'(u)\,(u')^2 + Ru + S\Big), & \forall x \in [0, 1]; \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Proposition 6.12. *Supposons que $k > 0$ est une fonction de classe $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et soient $R < 0 < s$ deux nombres réels. Alors* (34) *possède une solution.*

Démonstration. Posons $F : C^1([0, 1], \mathbb{R}) \to C([0, 1], \mathbb{R})$,

$$F(u) = -\frac{1}{k(u)}\Big(k'(u)\,(u')^2 + Ru + S\Big),$$

$L_D : C_0^2([0, 1], \mathbb{R}) \to C([0, 1], \mathbb{R}), L_D(u) = u''$ et $j : C^2([0, 1], \mathbb{R}) \to C^1([0, 1], \mathbb{R})$ l'inclusion. Alors F est continu et

$$T := j \circ L_D^{-1} \circ F : C^1([0, 1], \mathbb{R}) \to C^1([0, 1], \mathbb{R})$$

est compact. On montre que F est continue et bornée comme dans la proposition 4.4. La compacité de T est une conséquence de la proposition 4.3. De plus $u \in C_0^2([0, 1], \mathbb{R})$ est une solution de (34) si et seulement si $u = T(u)$. Nous allons prouver la condition de bord de Leray-Schauder : il existe $r > 0$ tel que $||x|| = r$ entraîne $T(x) \neq \lambda x$ pour tout $\lambda > 1$. En fait nous allons prouver un résultat un peu plus fort : il existe $r > 0$ tel que si $T(u) = \lambda u$ pour un $\lambda > 1$ alors $||u||_{C^1} \leq r$, cet à dire, nous allons établir des *estimations a priori* des solutions. Soit donc u une solution de $T(u) = \lambda u$ pour un $\lambda > 1$, c.-à-d.,

$$u''(x) = -\frac{1}{\lambda k(u)}[(u')^2 k' + Ru + S], u(0) = u(1) = 0.$$

La fonction $\frac{u^2}{2}$ ne peut pas atteindre son maximum en $x = 0$ ou $x = 1$ (sinon elle serait $\equiv 0$), elle l'atteindra en un point $x_0 \in]0, 1[$ et la dérivée seconde en x_0 est donc négative. On trouve

$$\frac{d^2}{dx^2}(\frac{u^2}{2})_{|x_0} = u'(x_0)^2 + u(x_0)u''(x_0) = -\frac{u(x_0)}{\lambda k(u(x_0))}[Ru(x_0) + S] < 0.$$

Alors $Ru^2(x_0)+Su(x_0) > 0$ et donc $0 < |u(x_0)| \leq -S/R := M$. Comme $|u(x_0)|$ est le maximum de u, on conclut que $||u||_\infty \leq M$. En utilisant l'équation on a pour tout $x \in [0, 1]$,

$$|u''(x)| \leq \frac{\max_{u\in[-M,M]} |k'(u)|u'(x)^2 + \max_{u\in[-M,M]}(Ru + S)}{k_0} = Au'(x)^2 + B$$

pour certains $A > 0, B > 0$. Par l'exercice 32 ci-dessous on conclut que $|u'(x)| \leq \sqrt{\frac{B}{A}(e^{4AM} - 1)} := M_1$ pour tout $x \in [0, 1]$. On prendra alors $r := \max\{M, M_1\}$. □

Exercice 32. *Soit I un intervalle borné de $\mathbb{R}$, A, B des constantes positives et $u \in C_0^2(I, \mathbb{R})$ telle que*

$$|u''(x)| \leq Au'(x)^2 + B$$

pour tout $x \in I$. Posons $\alpha := \max_{t\in I} |u(t)|$. Montrer que

$$|u'(x)| \leq \sqrt{\frac{B}{A}(e^{4A\alpha} - 1)}$$

pour tout $x \in I$.

7 Résultats de bifurcation

La théorie de la bifurcation étudie la structure des solutions pour des équations non-linéaires définies dans des espaces de Banach et dépendant d'un paramètre. Si $(E, || \cdot ||)$ un espace de Banach réel, $(\lambda_0, x_0) \in \mathbb{R} \times E$ et $G : \mathbb{R} \times E \to E$ un opérateur tel que $G(\lambda_0, x_0) = 0$, on veut déterminer toutes les solutions de

$$G(\lambda, u) = 0$$

dans un voisinage de (λ_0, x_0). Un premier résultat dans ce sens est donné par le *théorème de la fonction implicite* dans les espaces de Banach. Rappelons ce résultat.

7.1 Calcul différentiel dans les espaces de Banach

Définition 7.1. *Soient X et Y deux espaces de Banach. Un opérateur $T : X \to Y$ est de classe C^1 si T est Fréchet différentiable et $T' : X \to \mathcal{L}(X)$ est continu.*

Définition 7.2. *Soient X_1, X_2 et Y des espaces de Banach, $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ et $T : X_1 \times X_2 \to Y$. Les dérivées partielles de T en (a_1, a_2)*

$$D_{x_1}T(a_1, a_2) : X_1 \to Y, \quad D_{x_2}T(a_1, a_2) : X_2 \to Y$$

sont, respectivement, les dérivées Fréchet des applications $T(\cdot, a_2) : X_1 \to Y$ en a_1 et $T(a_1, \cdot) : X_2 \to Y$ en a_2. On note

$$D_{x_1}T(a_1, a_2) := T(\cdot, a_2)'(a_1), \;\; D_{x_2}T(a_1, a_2) := T(a_1, \cdot)'(a_2).$$

Les détails de la proposition et du théorème suivants sont omis (c.f. [2]).

Proposition 7.3. *Soient X_1, X_2 et Y des espaces de Banach, $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ et $T : X_1 \times X_2 \to Y$.*
(i) *Si T est Fréchet différentiable en $x = (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ alors les dérivées partielles de T en (x_1, x_2) existent et on a*

$$T'(x)(h) = D_{x_1}T(x)(h_1) + D_{x_2}T(x)(h_2) \quad \forall h = (h_1, h_2) \in X_1 \times X_2.$$

(ii) *T est de classe C^1 ssi les dérivées partielles existent et sont continues en tout point de $X_1 \times X_2$.*

Théorème 7.4. Théorème de la fonction implicite *Soient X_1, X_2 et Y des espaces de Banach, U un ouvert de $X_1 \times X_2$, $(a_1, a_2) \in U$ et $T : U \to Y$ de classe C^1. Supposons que $T(a_1, a_2) = 0$ et que $D_{x_2}T(a_1, a_2)$ est un isomorphisme de X_2 dans Y, avec inverse continu. Alors il existe U, V des voisinages ouverts de a_1 et a_2 respectivement avec $V \times W \subset U$ et il existe $\Phi \in C^1(V, W)$ tels que*

$$T(x_1, x_2) = 0 \text{ et } (x_1, x_2) \in V \times W \Leftrightarrow x_2 = \Phi(x_1).$$

En particulier

$$\Phi'(x_1) = -\Big(D_{x_2}T(x_1, \Phi(x_1)\Big)^{-1} \circ D_{x_1}T(x_1, \Phi(x_1))$$

pour tout $x_1 \in V$.

Supposons que G est un opérateur de $\mathbb{R} \times E$ dans E tel que $G(\lambda_0, u_0) = 0$. On peut obtenir un résultat d'existence locale de solutions de cette équation au voisinage de λ_0 de deux façons :
(a) en supposant que G est de casse C^1 et que $D_uG(\lambda_0, u_0)$ est un isomorphisme de E dans E. Par le théorème de la fonction implicite il existe une courbe unique de solutions de $G(\lambda, u) = 0$ paramétrée par λ dans un voisinage de λ_0 ;

(b) en supposant que $G(\lambda, u) = Id - \lambda K(u)$ où $K : E \to E$ est compact. Le théorème du point fixe de Schauder montre l'existence de solutions de $G(\lambda, u) = 0$ pour λ petit.

Nous nous intéressons au cas où on ne peut pas appliquer ni (a) ni (b). C'est le but de deux paragraphes suivants.

7.2 Résultats locaux de bifurcation

Soit E un espace de Banach réel et $U \subset E$ un ouvert contenant 0. Soit $I = [-\delta + \lambda_0, \delta + \lambda_0] \subset \mathbb{R}$. Considérons le cas où $G(\lambda, u) = u - T(\lambda, u)$ avec $T : I \times \overline{U} \to E$ un opérateur satisfaisant

$$T(\lambda, 0) = 0 \quad \forall \lambda \in I. \tag{35}$$

Signalons que la condition (35) est vérifiée par les opérateurs de la forme

$$\begin{cases} T(\lambda, u) = \lambda L(u) + H(\lambda, u) \\ L \in \mathcal{QL}(E), \quad H \in \mathcal{Q}(I \times \overline{U}, E), \quad H(\cdot, 0) = 0 \\ \forall \eta > 0 \, \exists r > 0, \, |\lambda - \lambda'| \leq r, ||u|| \leq r \Rightarrow |H(\lambda, u)| \leq \eta ||u||. \end{cases} \tag{36}$$

Cette classe d'opérateurs est assez naturelle si l'on pense à "linéariser" un opérateur T différentiable. Si l'on pouvait appliquer le théorème de la fonction implicite au voisinage de $(\lambda_0, 0)$ on aurait que la seule solution de $u = T(\lambda, u)$ avec λ proche de λ_0 est la solution $u = 0$.

Le **problème de bifurcation** pour l'équation

$$u = T(\lambda, u) \tag{37}$$

consiste en trouver des solutions (λ, u) différentes de la solution "triviale" $(\lambda, 0)$.

Définition 7.5. *Un point* $(\lambda_0, 0) \in I \times U$ *est* **point de bifurcation** *de* (37) *ssi tout voisinage de* $(\lambda_0, 0)$ *contient une solution non triviale de* (37)*, c'est à dire,* $(\lambda_0, 0) \in \overline{\mathcal{S}}$ *où*

$$\mathcal{S} := \{(\lambda, u) \in I \times U, \, u = T(\lambda, u) \text{ et } u \neq 0\}.$$

Par simplicité, nous dirons que λ_0 *est un point de bifurcation.*

Lemme 7.6. *On note* $\mathcal{R} := \{(\lambda, u) \in I \times U, T(\lambda, u) = u\}$ *l'ensemble de solutions de* (37)*. Alors tout partie fermée et bornée de* $\mathcal{R}$ *est compacte.*

Démonstration. Soit $A \subset \mathcal{R}$ fermé et borné et soit $(\lambda_n, u_n) \in A$ une suite. Montrons que l'on peut extraire une suite convergente dans A. Comme A est borné, il existe $C > 0$ tel que $|\lambda_n| \leq C$ et $||u_n|| \leq C$ pour tout n. Donc, pour une sous- suite, $\lambda_{n_k} \to \lambda_0$. Comme T est un opérateur compact alors il existe une sous-suite $u_{n_k} = T(\lambda_{n_k}, u_{n_k})$ convergente dans E vers un certain u. Par continuité $u = T(\lambda_0, u)$, et comme A est fermé, $(\lambda_0, u) \in A$. □

Voici un résultat qui nous sera très utile :

Lemme 7.7. *Supposons* (36).
(i) *Si λ n'est pas une valeur caractéristique de L alors il existe $r = r(\lambda) > 0$ tel que pour tout $0 \leq \epsilon \leq 1$*

$$|\lambda - \lambda'| \leq r,\ 0 \neq ||u|| \leq r \Rightarrow u \neq \lambda' L(u) + \epsilon H(\lambda', u). \tag{38}$$

(ii) $(\lambda, 0)$ *n'est pas un point de bifurcation de* (37) *ssi on a* (38) *pour $\epsilon = 1$.*

Démonstration. **(i)** Si λ n'est pas une valeur caractéristique de L alors on prend $c = 1/||(Id - \lambda L)^{-1}||$ et on a

$$||u - \lambda' L(u) - \epsilon H(\lambda', u)|| \geq c||u|| - |\lambda - \lambda'|\, ||L||\, ||u|| - \epsilon||H(\lambda', u)||.$$

On utilisant la condition (36) on montre que si $|\lambda - \lambda'|$ et $0 \neq ||u||$ sont suffisamment petits alors

$$||u - \lambda' L(u) - \epsilon H(\lambda', u)|| > 0.$$

(ii) Trivial. □

Voici une condition nécessaire pour être un point de bifurcation :

Proposition 7.8. *Si λ_0 est un point de bifurcation de* (37) *alors λ_0 est une valeur caractéristique de L.*

La preuve est une conséquence immédiate du lemme.

La condition précedente dans la proposition 7.8 n'est pas suffisante pour assurer la bifurcation au point $(\lambda_0, 0)$:

Exemple 7.1. *Dans $\mathbb{R}^2$ considérons, pour tout $u = (u_1, u_2)$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$,*

$$G(\lambda, u) = (\lambda - 1)u + (u_2^3, -u_1^3).$$

Ici $D_u G(1, (0,0)) = -Id$ mais $(1, (0,0))$ n'est pas un point de bifurcation car $G(\lambda, u) = 0$ si et seulement si $u_1^4 + u_2^4 = 0$, i.e. $u = (0,0)$.

Dans cet exemple, $\lambda_0 = 1$ est une valeur caractéristique de $D_u G(1, (0,0))$ de multiplicité 2. Cependant si une valeur caractéristique est de multiplicité impaire alors on a le résultat suivant dû à Krasnosels'kii [5] :

Théorème 7.9. *<u>Théorème de Krasnosels'kii.</u> Supposons* (36). *Si λ_0 est une valeur caractéristique de L de multiplicité impaire, alors λ_0 est un point de bifurcation.*

Démonstration. Supposons que λ_0 n'est pas un point de bifurcation et soit $r = r(\lambda_0) > 0$ donné par le lemme 7.7. Le degré $deg\,(Id - T(\lambda, \cdot), B_r(0), 0)$ est donc bien défini et il est *indépendant de* λ, pour tout $|\lambda - \lambda_0| \leq r$. L'indice $i\,(Id - T(\lambda, \cdot), 0, 0)$ est aussi bien défini pour tout $\lambda \in [\lambda_0 - r, \lambda_0 + r]$ et coïncide avec le $deg\,(Id - T(\lambda, \cdot), B_r(0), 0)$. Nous pouvons supposer que la seule valeur caractéristique de L dans l'intervalle $[\lambda_0 - r, \lambda_0 + r]$ est λ_0 et notons $2k+1$ sa multiplicité. Comme $\lambda_0 \pm r$ n'est pas une valeur caractéristique de L, par le lemme 7.7 il existe $r' = r(\lambda_0 \pm r) < r$ tel que, pour tout $0 \leq \epsilon \leq 1$,

$$0 \neq ||u|| \leq r' \Rightarrow u \neq (\lambda_0 \pm r)L(u) + \epsilon H(\lambda_0 \pm r, u).$$

Par l'invariance du degré par homotopie il suit que

$$deg\,(Id - T(\lambda_0 \pm r, \cdot), B_{r'}(0), 0) = deg\,(Id - (\lambda_0 \pm r)L, B_{r'}(0), 0). \tag{39}$$

D'autre part, par le théorème 4.23 et le corollaire 4.24

$$i\,(Id - (\lambda_0 - r)L, 0, 0) = (-1)^{2k+1} i\,(Id - (\lambda_0 + r)L, 0, 0). \tag{40}$$

Par (39) et (40)

$$deg\,(Id - T(\lambda_0 - r, \cdot), B_{r'}(0), 0) \neq deg\,(Id - T(\lambda_0 + r, \cdot), B_{r'}(0), 0),$$

ce qui contrédit que le degré de $Id - T(\lambda, \cdot)$ est indépendant de λ. . □

7.3 Un résultat global de bifurcation

P.H. Rabinowitz [8] a montré une version "globale" du théorème de Krasnosels'kii :

Théorème 7.10. <u>*Théorème de Rabinowitz.*</u> *Supposons* (36) *et soit* λ_0 *une valeur caractéristique de* L *de multiplicité impaire. Notons* $\mathcal{C}$ *la composante connexe de* $\overline{\mathcal{S}}$ *contenant* $(\lambda_0, 0)$. *Alors soit*
(i) $\mathcal{C}$ *n'est pas compact,*
soit
(ii) $\mathcal{C}$ *est borné et contient un nombre fini de points* $(\lambda_j, 0)$ *avec* $\lambda_j \neq \lambda_0$ *et* λ_j *valeur caractéristique de* L. *De plus*

$$card\,\{(\lambda_j, 0) \in \mathcal{C},\ \lambda_j^{-1} \in \sigma(L) \ \textit{de multiplicité impaire}\} \equiv 0(mod.2).$$

Nous donnons la preuve de J. Izé, voir dans [4].

Démonstration. Pour $r > 0$ tel que $[-2r, 2r] + \lambda_0 \subset \Lambda$, $B_r(0) \subset U$ et $\lambda_0 \pm r \notin \sigma(L)^{-1}$, considérons l'homotopie $H_r : [-r, r] \times B_r(0) \to \mathbb{R} \times E$ définie par

$$H_r(s, u) = (||u||^2 - r^2, u - T(\lambda_0 + s, u)).$$

Soit $r' = r(\lambda_0 \pm r) < r$ satisfaisant (38). Nous allons montrer que si r' est suffisamment petit alors

$$deg\,(H_{r'}, B_{\sqrt{r'^2 + r^2}}(0), 0) = i_- - i_+, \tag{41}$$

où ici $B_{\sqrt{r'^2+r^2}}(0)$ désigne la boule dans $\mathbb{R} \times E$ et

$$i_+ := i\,(Id - (\lambda_0 + r)L, 0, 0), \quad i_- := i\,(Id - (\lambda_0 - r)L, 0, 0).$$

Par l'équation (40) nous avons que $i_+ = -i_-$. Le degré dans (41) est bien défini puisque, d'une part, $H_{r'} = Id - G$ avec

$$G(s, u) = (-||u||^2 + (r')^2 - s, T(\lambda_0 + s, u))$$

étant un opérateur compact, et d'autre part, par (38), l'équation $H_{r'}(s, u) = (0, 0)$ n'a d'autres solutions dans $\partial B_{\sqrt{r'^2+r^2}}(0)$ que $u = 0$ et $s = \pm r$. Pour calculer le degré de $H_{r'}$ dans $B_{\sqrt{r'^2+r^2}}(0)$ considérons l'homotopie

$$H_{r'}(t, s, u) := \Big(t(||u||^2 - r'^2) + (1-t)(r^2 - s^2), u - (\lambda_0 + s)L(u) - tH(\lambda_0 + s, u)\Big)$$

pour $0 \leq t \leq 1$. On montre aisément que le $deg\,(H_{r'}(t, \cdot), B_{\sqrt{r'^2+r^2}}(0), 0)$ est bien défini et est indépendant de t. Pour $t = 0$ les seules solutions de $H_{r'}(0, s, u) = (0, 0)$ sont $(\pm r, 0)$. Par la propriété de l'excision (et la définition de l'indice)

$$deg\,(H_{r'}(0, \cdot), B_{\sqrt{r'^2+r^2}}(0), 0) = i(H_{r'}(0, \cdot), (r, 0), 0) + i(H_{r'}(0, \cdot), (-r, 0), 0).$$

Nous pouvons donc calculer ces indices en utilisant d'abord le théorème 4.23 autour des points $(r, 0)$ et $(-r, 0)$, puis la propriété multiplicative du degré, c.f. proposition4.17. En détail, posons $\Phi(s, u) = H_{r'}(0, s, u)$. On pourra vérifier que la dérivée Fréchet de Φ en un point (s_0, u_0) est égale à

$$\Phi'(s_0, u_0)(s, u) = (-2s_0 s, -sL(u_0) + u - (\lambda_0 + s_0)L(u)),$$

d'où

$$\Phi'(r, 0)(s, u) = (-2rs, u - (\lambda_0 + r)L(u)),\ \Phi'(-r, 0)(s, u) = (2rs, u - (\lambda_0 - r)L(u)).$$

Par le théorème 4.23 on a

$$i(H_{r'}(0, \cdot), (r, 0), 0) = i(\Phi'(r, 0), (r, 0), 0),$$

$$i(H_{r'}(0, \cdot), (-r, 0), 0) = i(\Phi'(-r, 0), (-r, 0), 0).$$

Signalons que l'application $(s, u) \to \Phi'(\pm r, 0)(s, u)$ est à variables séparées dans le sens que $\Phi'(r, 0)(s, u) = (\Phi_1(s), \Phi_2(u))$, et pareil pour $\Phi'(-r, 0)(s, u)$. En utilisant la proposition 4.17, on obtient

$$i(\Phi'(r, 0), (r, 0), 0) = i(\Phi_1, r, 0).\, i(\Phi_2, 0, 0) = -1.\, i(Id - (\lambda_0 + r)L, 0, 0) = -i_+,$$

et

$$i(\Phi'(-r, 0), (-r, 0), 0) = 1.\, i(Id - (\lambda_0 - r)L, 0, 0) = i_-.$$

Ceci conclut la preuve de (41).

Supposons maintenant par l'absurde que $\mathcal{C}$ est compact dans $I \times \overline{U}$. Soient $(\lambda_j, 0), 0 \leq j \leq p$ les seuls points dans $\mathcal{C}$ avec λ_j étant une valeur caractéristique de L. Soit $\Omega \subset \mathbb{R} \times E$ un ouvert contenant $\mathcal{C}$ tel que
(1) $\partial\Omega$ ne contient pas de solutions non triviales de $u = T(\lambda, u)$ et
(2) les seuls points $(\lambda, 0) \in \overline{\Omega}$ avec λ valeur caractéristique sont les points $(\lambda_j, 0)$.

L'existence de Ω est justifiée par l'argument suivant. Soit $\delta > 0$ tel que il n'y a pas de valeurs caractéristiques de L dans chaque $]\lambda_i - \delta, \lambda_i + \delta[\backslash\{\lambda_i\}$, $i = 1, \cdots, p$. Prenons $A_1 = \mathcal{C}, A_2 = \partial A \cap \overline{\mathcal{S}}$ où $A := \{(\lambda, u),\, dist((\lambda, u), \mathcal{C}) < \frac{\delta}{2}\}$, et soit $E = \overline{A} \cap \overline{\mathcal{S}}$. Par le lemme 7.6, E est un espace métrique compact. On peut supposer que $A_2 \neq \emptyset$ sinon on prend $\Omega = A$. Par la maximalité de $\mathcal{C}$ il est clair que A_1 et A_2 sont séparés dans le sens du lemme 8.3 de l'annexe. Soient B_1 et B_2 donnés par ce lemme et $0 < \epsilon < \min\{dist(B_1, B_2), dist(B_1, \partial U)\}$. On choisit alors $\Omega = \{(\lambda, u) \in I \times U,\, dist((\lambda, u), B_1) < \epsilon\}$.

Considérons $H_r : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} \times E$ définie par

$$H_r(\lambda, u) := (||u||^2 - r^2, u - T(\lambda, u)).$$

Le $deg\,(H_r, \Omega, 0)$ est bien défini et il est indépendant de r puisque dans $\partial\Omega$ les seules solutions de $u = T(\lambda, u)$ sont $u = 0$ et donc $||u|| \neq r$. Pour r grand, l'équation $||u|| = r$ n'a pas de solutions dans Ω (car Ω est borné) et donc $deg\,(H_r, \Omega, 0) = 0$. Pour r petit, si $u = T(\lambda, u)$ et $||u|| = r$ alors, par le lemme 7.7, $\lambda = \lambda_j$ pour un $0 \leq j \leq p$ et on a

$$0 = deg\,(H_r, \Omega, 0) = \sum_{j=0}^{p} i_-(\lambda_j) - i_+(\lambda_j).$$

Comme par le corollaire 4.24, $i_+(\lambda_j) = (-1)^{m_j} i_-(\lambda_j)$, où m_j est la multiplicité de λ_j, et $i_+, i_- = \pm 1$ par le théorème 4.18 alors les termes non nuls dans cette dernière équation sont ceux avec m_j impair, il doit donc y en avoir un nombre pair. □

Rémarque 7.11. *Chacune de deux possibilités sur le comportement de $\mathcal{C}$ peut se produire.*
(i) *Si $H \equiv 0$ alors il y a bifurcation en tout point $(\lambda_0, 0)$ avec λ_0 valeur caractéristique de L et $\mathcal{C} = \{\lambda_0\} \times F_{\lambda_0}$, où F_{λ_0} est le sous-espace propre associé à λ_0.*
(ii) *Dans $E = \mathbb{R}^2$ considérons $L(u_1, u_2) = (u_1, 1/2u_2)$, $H(u_1, u_2) = (-u_2^3, u_1^3)$ et l'équation $u = \lambda L(u) + LH(u)$. Les valeurs caractéristiques sont 1 et 1/2 et elles sont simples. On écrivant $L^{-1}u = \lambda u + H(u)$ on trouve que*

$$\mathcal{C} = \{(\lambda, u),\, 1 \leq \lambda \leq 2, u_1 = \pm(2-\lambda)^{3/8}(\lambda-1)^{1/8}, u_2 = \pm(2-\lambda)^{1/8}(\lambda-1)^{3/8}\}.$$

7.4 Application du théorème de Rabinowitz aux problèmes de Dirichlet non linéaires

Considérons le problème de Dirichlet dans l'intervalle $[0,1]$

$$\begin{cases} u''(x) = f(x, u, u', \lambda), & \forall x \in [0,1]; \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{42}$$

où $f : [0,1] \times \mathbb{R} \times \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue de la forme $f(x, u, u', \lambda) = \lambda u + h(x, u, u', \lambda)$ avec $h(x, u, \lambda) = o(\sqrt{u^2 + u'^2})$ au voisinage de 0, uniformément par rapport à x et à λ dans des compacts de $\mathbb{R}$. On écrit l'équation (42) comme

$$u = \lambda L(u) + H(\lambda, u, u') \tag{43}$$

où $L := j \circ L_D^{-1} : C^1([0,1], \mathbb{R}) \to C^1([0,1], \mathbb{R})$ et $H : \mathbb{R} \times C^1([0,1], \mathbb{R}) \to C^1([0,1], \mathbb{R})$ est défini par $H(\lambda, u, u') := j \circ L_D^{-1} \circ h(\cdot, \lambda, u, u')$. Nous savons que L et H sont des opérateurs compacts. Les valeurs caractéristiques de L sont les valeurs $\lambda_k = -(k\pi)^2, k \in \mathbb{N}_*$, les vecteurs propres associés à λ_k sont les multiples de $v_k(x) = \sin(k\pi x)$. Notons

$S_k := \{u \in C^1([0,1], \mathbb{R}), u$ possède exactement $k+1$ zéros simples dans $[0,1]\}$.

Proposition 7.12. *Notons $\mathcal{C}_k$ la composante de $\overline{\mathcal{S}}$ contenant $(\lambda_k, 0)$. Alors $\mathcal{C}_k \subset \mathbb{R} \times S_k$. En particulier $\mathcal{C}_k$ est non bornée.*

Démonstration. Nous allons montrer d'abord qu'il existe un voisinage N_k de $(\lambda_k, 0)$ tel que si $(\lambda, u) \in \mathcal{S} \cap N_k$ alors $u \in S_k$. Supposons par l'absurde qu'un tel voisinage n'existe pas. Il existe alors une suite $(\lambda_n, u_n) \in \mathcal{S}$ convergeant vers $(\lambda_k, 0)$ avec $u_n \not\equiv 0$ et $u_n \notin S_k$. La suite $v_n := \frac{u_n}{||u_n||_{C^1}}$ est bornée et satisfait

$$v_n = \lambda_n L(v_n) + \frac{H(\cdot, \lambda_n, u_n, u_n^{'})}{||u_n||_{C^1}} \tag{44}$$

Par compacité, il existe une sous-suite de v_n, encore notée v_n, et il existe $w \in C^1([0,1], \mathbb{R})$ tels que $\lim_{n\to\infty} L(v_n) = w$. Par hypothèse $\lim_{n\to\infty} \frac{H(\cdot, \lambda_n, u_n, u_n^{'})}{||u_n||_{C^1}} = 0$. En passant à la limite dans (44) on trouve

$$\lim_{n\to\infty} ||v_n - \lambda_k w||_{C^1} = 0$$

et en particulier $||w||_{C^1} = 1$. Par continuité $L(w) = \lambda_k w$ ce qui entraîne que $w \in S_k$. Comme S_k est un ouvert (voir **(i)** du lemme ci-dessous) on conclut que $u_n = v_n ||u_n|| \in S_k$, une contradiction.

Supposons maintenant par l'absurde que $\mathcal{C}_k$ n'est pas contenue dans $\mathbb{R} \times S_k$. Il existe alors un point $(\lambda, u) \in \mathcal{C}_k$ avec $u \in \partial S_k$. Par **(ii)** du lemme cidessous u possède un zéro double dans $[0,1]$. Comme de plus u est solution de (42), par **(iii)** du lemme suivant $u \equiv 0$, et par conséquent $\lambda = \lambda_m$ (car λ est un point de bifurcation) avec $m \neq k$. Il s'en suit que $(\lambda, 0) \in \mathbb{R} \times S_m$ et que $N_m \cap \mathbb{R} \times S_k \neq \emptyset$, une contradiction.

Finalement, le fait que $\mathcal{C} \subset \mathbb{R} \times S_k$ entraine que le cas **(ii)** du théorème de Rabinowitz ne peut pas avoir lieu, c'est à dire, $\mathcal{C}$ n'est pas compact et le lemme 7.6 on conclut que $\mathcal{C}$ n'est pas bornée. $\square$

Lemme 7.13. **(i)** *S_k est un ouvert pour la topologie de $C^1([0,1], \mathbb{R})$.*
(ii) *Si $u \in \partial S_k$ alors u possède un zéro double dans $[0,1]$.*
(iii) *Si u est solution de (42) et u possède un zéro double dans $[0,1]$ alors $u \equiv 0$.*

Démonstration. **(i)** Trivial. **(ii)** Si u possède un nombre fini de zéros, tous simples, u est dans un S_m, qui est un ouvert. Donc $u \notin \partial S_k$. Si u possède un nombre infini de zéros, tous simples, il existe une sous-suite convergeant vers un zéro s_0 et $u'(s_0) = 0$ (sinon il n'y aurait pas de zéros dans un voisinage de s_0), ce qui contredit que tous les zéros sont simples.**(iii)** Supposons que $u(\tau) = u'(\tau) = 0$ pour un $\tau \in [0,1]$ et écrivons u comme solution du problème

$$w'' = \lambda w + b(x)w + c(x)w'; \quad w(\tau) = w'(\tau) = 0. \tag{45}$$

Les fonctions $b(x) := \frac{H(x,\lambda,u(x),u'(x))u(x)}{u(x)^2+u'(x)^2}$ et $c(x) := \frac{H(x,\lambda,u,u')u'(x)}{u(x)^2+u'(x)^2}$ peuvent être prolongées par continuité dans les points où $u(x) = u'(x) = 0$ grâce à l'hypothèse sur h. Or la seule solution du problème (45) est la solution nulle car (45) est un (PVI) avec une fonction lipschitzienne en (w, w'). $\square$

Exemple 7.2. *Nous allons appliquer les résultats de bifurcation à l'équation*

$$\begin{cases} u''(x) + \lambda(u - u^3) = 0, & x \in [0,1]; \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{46}$$

En multipliant l'équation par u et on intégrant on trouve

$$-\int_0^1 u'(x)^2\,dx + \lambda \int_0^1 u(x)^2\,dx - \lambda \int_0^1 u(x)^4\,dx = 0.$$

En utilisant ensuite **l'inégalité de Poincaré**, *c.f. exercice 33,*

$$\int_0^1 u'(t)^2\,dx \geq \pi^2 \int_0^1 u(x)^2\,dx$$

on en déduit

$$(1 - \frac{\lambda}{\pi^2}) \int_0^1 u'(x)^2\,dx + \lambda \int_0^1 u(x)^4\,dx \leq 0.$$

Alors il n'y a pas de solutions non triviales pour $0 < \lambda < \pi^2$. On montre aussi que $||u||_{C^1} \leq c(\lambda)$.

Exercice 33. *Soit $u \in C^2([0,1],\mathbb{R})$ telle que $u(0) = u(1) = 0$. En utilisant le développement en série de sinus, montrer* **l'inégalité de Poincaré** *:*

$$\int_0^1 u'(t)^2\,dt \geq \pi^2 \int_0^1 u(t)^2\,dt$$

Exercice 34. *Montrer que si $\lambda \in](k\pi)^2, ((k+1)\pi)^2[$ les solutions non triviales du problème*

$$\begin{cases} u''(x) + \lambda(u + u^3) = 0, & x \in [0,1]; \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

appartiennent à S_{k+1}.Établir le diagramme de bifurcation du problème.

Exercice 35. *Montrer que 1 n'est pas un point de bifurcation du système d'équations*

$$x_2 - \lambda x_1 + x_2^3 = 0; \quad -\lambda x_2 - x_1^3 = 0.$$

Exercice 36. *Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0, \alpha := f'(0) > 0$ et $f(t)t \leq \alpha t^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Considérons le problème aux valeurs initiales de Dirichlet*

$$\begin{cases} u''(x) + \lambda f(u(x)) = 0, & \forall x \in [0,1], \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{47}$$

(i) *En linéarisant f, montrer qu'il est possible d'écrire le problème* (47) *de la forme*

$$u = \lambda(L(u) + H(u)); \quad u \in C([0,1],\mathbb{R}), \tag{48}$$

avec L un opérateur linéaire compact et H un opérateur compact satisfaisant $\lim_{t\to 0} \frac{H(t)}{t} = 0$. Déterminer L et H.

8 Annexe

8.1 Théorème d'Arzelà-Ascoli

Rappelons que dans un espace métrique un sous-ensemble est *relativement compact* si son adhérence est un ensemble compact.

Théorème 8.1. *3héorème d'Arzelà-Ascoli. Soit (K,d) un espace métrique compact, $(E, ||\cdot||)$ un espace de Banach et $A \subset C(K,E)$. Alors A est relativement compact dans $(C(K,E), ||\cdot||_{\infty,K})$ si et seulement si les deux conditions ci-dessous sont satisfaites :*
(a) *A est équicontinu, c.à-d., pour tout $x \in K$ et pour tout $\epsilon > 0$ il existe un voisinage $V \subset K$ de x tel que $||f(x) - f(y)|| < \epsilon \quad \forall y \in V,\ \forall f \in A$;*
(b) *$A(x) := \{f(x),\ f \in A\}$ est relativement compact dans E.*

Démonstration. Supposons que A est relativement compact. Alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe un nombre fini $f_i \in A$ tels que, pour tout $f \in A$ il existe un indice i pour lequel $||f - f_i||_{\infty,K} \leq \epsilon/3$. Notons I_0 l'ensemble fini de ces indices. Alors, d'une part, pour tout $x \in K$, $||f(x) - f_i(x)|| \leq \epsilon/3$, c.-à-d, $A(x) \subset \cup_{i \in I_0} \overline{B_{\epsilon/3}(f_i(x))}$ et par conséquent $A(x)$ est relativement compact dans E. D'autre part, soit V un voisinage de x tel que, pour tout $y \in V$, on ait $||f_i(x) - f_i(y)|| \leq \epsilon/3$ pour tout $i \in I_0$. On aura alors que, pour tout $y \in V$ et pour tout $f \in A$, $||f(y) - f(x)|| \leq \epsilon$.

Supposons maintenant **(a)** et **(b)**. Notons V_x le voisinage de x donné par **(a)**. Comme $K \subset \cup_{x \in K} V_x$ et K est compact, on peut extraire un nombre fini $x_1, \cdots, x_m$ tels que $K \subset \cup_{i=1}^m V_{x_i}$. Par **(b)** $A(x_i)$ est relativement compact, la réunion finie $\cup_{i=1}^m A(x_i)$ l'est aussi et on peut alors trouver dans cette réunion un nombre fini de points $c_1, \cdots c_n$ telles que

$$\cup_{i=1}^m A(x_i) \subset \cup_{j=1}^n B_{\epsilon/4}(c_j).$$

Notons par φ une application quelconque de $\{1, \cdots m\}$ dans $\{1, \cdots n\}$. Il y a seulement un nombre fini de telles applications. Notons

$$L_\varphi := \{f \in A, \forall i \in \{1, \cdots m\},\ \ ||f(x_i) - c_{\varphi(i)}|| \leq \epsilon/4\}.$$

Alors $A \subset \cup_\varphi L_\varphi$ et puisque $||f - g||_{\infty, K} \leq \epsilon$ pour tout $f, g \in L_\varphi$, on conclut. □

8.2 Théorème de Tietze-Urysohn

Théorème 8.2. *Théorème de Tietze-Urysohn. Soit (E, d) un espace métrique, A un ensemble fermé de E et $f : A \to \mathbb{R}^m$ une application continue et bornée. Il existe alors un prolongement continu $\tilde{f}$ de f défini sur E tel que, pour tout $1 \leq j \leq m$, on a*

$$\sup_{x \in E} \tilde{f}_j(x) = \sup_{x \in A} f_j(x), \quad \inf_{x \in E} \tilde{f}_j(x) = \inf_{x \in A} f_j(x).$$

Démonstration. Supposons que $m = 1$ et $\inf_{x \in A} f(x) = 1, \sup_{x \in A} f(x) = 2$. On définit $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \in A$ et

$$\tilde{f}(x) = \frac{\inf_{y \in A} f(y)\, d(x, y)}{dist\,(x, A)}$$

si $x \notin A$. On a alors que $1 \leq \tilde{f}(x) \leq 2$ pour tout $x \in E$. Montrons la continuité de $\tilde{f}$. Si $x \in A^\circ$, la continuité suit de la continuité de f. Si $x \in E \setminus A$ montrons que $h(x) := \inf_{y \in A} f(y)\, d(x, y)$ est continue en x. Soit $r = dist\,(x, A)$, alors pour tout $0 < \eta < r$, si $x' \in B_\eta(x)$ on a que $d(x, y) \leq d(x', y) + \eta$ pour tout $y \in A$ et par conséquent $h(x) \leq h(x') + 2\eta$ (car $f(y) \leq 2$). De la même manière on prouve que $h(x') \leq h(x) + 2\eta$. Ceci prouve la continuité de $\tilde{f}$ en x. Soit maintenant $x \in \partial A$. Par continuité, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $r > 0$ tel que $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$ pour tout $y \in A \cap B_r(x)$. Posons $C = A \cap B_r(x)$ et $D = A \setminus C$. Prenons $x' \in B_{r/4}(x)$ et distinguons deux cas : (1) $x' \in E \setminus A$ et (2) $x' \in A$. Dans le premier cas on a que $\forall y \in D \Rightarrow d(x', y) \geq 3r/4$ et donc

$$\inf_{y \in D} f(y) d(x', y) \geq 3r/4.$$

D'autre part $f(x)d(x,x') \leq 2d(x,x') \leq r/2$ et on conclut que

$$\inf_{y\in A} f(y)d(x',y) = \inf_{y\in C} f(y)d(x',y).$$

Or dans C on a que $f(y)-2\epsilon \leq f(x) \leq f(y)+2\epsilon$ et, puisque $\inf_{y\in C} d(x',y) = dist\,(x',A)$, on trouve

$$(f(x)-\epsilon)dist\,(x',A) \leq \inf_{y\in A} f(y)\,d(x,y) \leq (f(x)-\epsilon)dist\,(x',A).$$

Ceci prouve que $|\tilde{f}(x')-f(x)| \leq \epsilon$. Dans le cas (2) trivialement $|\tilde{f}(x')-f(x)| = |f(x')-f(x)| \leq \epsilon$, ce qui conclut la preuve. □

8.3 Un lemme de séparation

Lemme 8.3. *Soit (E,d) un espace métrique compact , A_1 et A_2 deux sous-ensembles fermés disjoints de E. Alors, ou bien*
(i) *il existe une composante connexe de E qui rencontre A_1, A_2 ou bien*
(ii) *il existe B_1, B_2 fermés disjoints de E tels que $A_i \subset B_i$ pour $i = 1,2$ et $E = B_1 \cup B_2$.*

Démonstration. Si **(i)** n'est pas vrai nous allons montrer qu'il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que aucune ϵ_0-chaîne ne rencontre A_1 et A_2 à la fois. En effet, si au contraire pour tout $n \in \mathbb{N}_*$ il existe $a_n \in A_1, b_n \in A_2$ et une $1/n-$ chaîne reliant a_n et b_n, par compacité on aura, pour une suite extraite, $a_{n_k} \to a$, $b_{n_k} \to b$ avec $a \in A_1$ et $b \in A_2$. Alors $b \in C_a := \{x \in E,\ \text{il existe une chaîne reliant } x \text{ et } a\}$ et comme C_a est un fermé connexe, alors on a une contradiction. Choisissons

$$B_1 = \{y \in E,\ \exists x \in A_1,\ \text{et il existe une } \epsilon_0 - \text{ chaîne reliant } x \text{ et } y\}$$

et $B_2 = E \setminus B_1$. B_1 est fermé car si $x \in \bar{B}_1$ alors $B_{\epsilon_0}(x) \cap B_1 \neq \emptyset$ donc $x \in B_1$. De plus B_1 est ouvert car pour tout $x \in B_1$, $B_{\epsilon_0}(x) \subset B_1$. □

Définition 8.4. *Si* **(i)** *dans le lemme 8.3 n'a pas vrai on dit que A_1 et A_2 sont* **séparés**.

8.4 La mesure superficielle

Soient ω un ouvert de $\mathbb{R}^{N-1}$ et $F : \omega \to \mathbb{R}^N$ une fonction de classe C^1. On dit que F est un *plongement* si F est injective et $F'(x)$ est de rang $N-1$. Signalons que si F est un plongement alors $F'(x)^*F'(x) \in \mathcal{M}_{N-1}$ définie positive et ses éléments sont $< \partial_j F(x), \partial_i F(x) >$, où $< \cdot, \cdot >$ désigne le produit scalaire de $\mathbb{R}^N$.

Définition 8.5. *Soient ω un ouvert de $\mathbb{R}^{N-1}$ et $F : \omega \to \mathbb{R}^N$ une fonction de classe C^1. On suppose que F est un plongement et on note $S := F(\omega)$. Si $u : S \to \mathbb{R}$ est une fonction continue à support compact, on pose*

$$\int_S u(\sigma)\,d\sigma := \int_\omega u(F(x))[\textit{dét}\ F'(x)^*F'(x)]^{1/2}\,dx.$$

La mesure $d\sigma$ est appelée la **mesure superficielle sur S.**

Pour que cette définition ait un sens il faut montrer que

Proposition 8.6. *La mesure superficielle sur S est indépendante du plongement F.*

Démonstration. Soit $\omega' \subset \mathbb{R}^{N-1}$ et $G : \omega' \to \mathbb{R}^N$ un plongement tel que $S = G(\omega')$. Alors $H : f^{-1} \circ G : \omega' \to \omega$ est un difféomorphisme et $G'(y) = F'(H(y))H'(y)$. Soit $u : S \to \mathbb{R}$ continue à support compact et notons $d^* \sigma$ la mesure définie à l'aide de G. On a

$$\int_S u(\sigma) d^* \sigma = \int_{\omega'} u(G(x))[\text{dét } G'(x)^* G'(x)]^{1/2}\, dx =$$

$$\int_{\omega'} u(F \circ H(y))[\text{dét } F'(H(y))^* F'(H(y))]^{1/2} |J_H(y)\, dy =$$

$$\int_\omega u(F(x))[\text{dét } F'(x)^* F'(x)]^{1/2}\, dx = \int_S u(\sigma) d\,\sigma.$$

□

8.5 La formule d'intégration par parties. Formule de Stokes

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Nous allons écrire les points de $\mathbb{R}^N$ comme (x', x_N) avec $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$.

Définition 8.7. *Un ouvert est* **de classe** C^k *pour $k \geq 1$, si pour tout point $x_0 \in \partial\Omega$ on peut trouver un voisinage ouvert U de x_0, une boule $B_r(0) \subset \mathbb{R}^N$, une bijection $\Phi : B_r(0) \to U$ et une application $\varphi : B_r(0) \cap (\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}) \to \mathbb{R}$ tels que*
(1) *$\Phi(0) = x_0$ et ϕ, φ, Φ^{-1} sont de classe C^k,*
(2) *$\overline{\Omega} \cap U = \Phi(B_r(0) \cap \mathbb{R}^{N-1} \times [0, +\infty))$,*
(3) *$\exists R_0$ matrice de rotation et $b_0 \in \mathbb{R}^N$ tels que*

$$\overline{\Omega} \cap U \subset R_0(\{y', y_n) \in \mathbb{R}^N,\, y_N \geq \varphi(y')\}) + b_0,$$

$$\partial\Omega \cap U \subset R_0(\{y', y_n) \in \mathbb{R}^N,\, y_N = \varphi(y')\}) + b_0.$$

Rémarque 8.8. *Si Ω est de classe C^1 au voisinage de $\sigma = \Phi(0)$ alors $F(y') := R_0(y', \varphi(y')) + b_0$ définie sur $B_r(0) \cap (\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\})$, est un plongement.*

Définition 8.9. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert de classe C^k. La* **normale extérieure** *à $\partial\Omega$ en un point $\sigma = R_0(y, \varphi(y)) + b_0$ de $\partial\Omega \cap U$ est donnée par*

$$n(\sigma) := R_0(\frac{(\nabla\varphi(y), -1)}{\sqrt{1 + |\nabla\varphi(y)|^2}}).$$

On vérifiera que $n(\sigma)$ dépend uniquement de $\partial\Omega$ et non pas du choix particulier de Φ et φ. Pour $1 \leq i \leq N$ on désigne $n_i(\sigma)$ la i-´eme composante de $n(\sigma)$.

Définition 8.10. *Soit u une fonction de classe C^1 au voisinage de $\partial\Omega$. La* **dérivée normale** *de u en $\sigma \in \partial\Omega$ est définie par*

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\sigma) :=< \nabla u(\sigma), n(\sigma) > .$$

Théorème 8.11. *Formule de Stokes. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert de classe C^1. Si $u \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ avec $\operatorname{supp} u$ compact, alors pour $1 \leq i \leq N$ on a la formule d'intégration par parties :*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} u(\sigma).n_i(\sigma)\, d\sigma.$$

De façon équivalente, si $u \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ avec $\operatorname{supp} u$ compact et $div\, u := \sum_{i=1}^N \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$, on a

$$\int_\Omega div\,(u(x))\, dx = \int_{\partial\Omega} u(\sigma).n(\sigma)\, d\sigma.$$

8.6 Rappels sur la Théorie de Fredholm des opérateurs linéaires compacts

Nous allons dans cette section rappeler quelques résultats de la théorie des opérateurs compacts définis sur des espaces de Banach.

Définition 8.12. *Soient $(E_1, ||\cdot||_1)$ et $(E_2, ||\cdot||_2)$ deux espaces de Banach. Soit $T : E_1 \mapsto E_2$ un opérateur linéaire. On dit que T est compact si et seulement si l'image d'un ensemble borné B est un ensemble relativement compact de E_2, c.-à-d., $\overline{T(B)}$ est un compact.*

On note

$$\mathcal{L}(E_1, E_2) := \{L : E_1 \to E_2,\ L \text{ est linéaire et continu }\},$$

$$\mathcal{QL}(E_1, E_2) := \{T : E_1 \to E_2,\ T \text{ est linéaire continu et compact }\}.$$

Lorsque $E_1 = E_2$ nous écrivons $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{QL}(E)$. Si $A \subset E$ est un sous espace notons par A^* son dual topologique. Si $L \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ on note $L^* \in \mathcal{L}(E_2^*, E_1^*)$ est l'opérateur adjoint de L.

Proposition 8.13. (i) *$\mathcal{QL}(E_1, E_2)$ est un sous espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(E_1, E_2)$.*
(ii) *Si $L \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ est de rang fini, c.-à-d. $\dim Img(L) < \infty$ alors $L \in \mathcal{QL}(E_1, E_2)$.*
(iii) *Soit E_3 un espace de Banach. Si $L \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ et $T \in \mathcal{QL}(E_2, E_3)$ (resp. $L \in \mathcal{QL}(E_1, E_2)$ et $T \in \mathcal{L}(E_2, E_3)$) alors $T \circ L \in \mathcal{QL}(E_1, E_3)$.*
(iv) *Si $T \in \mathcal{QL}(E_1, E_2)$ alors $T^* \in \mathcal{QL}(E_2^*, E_1^*)$ et réciproquement.*

Théorème 8.14. <u>Alternative de Fredholm.</u> *Soit* $(E, ||\cdot||_E)$ *un espace de Banach,* $L \in \mathcal{QL}(E, E)$ *et* $\lambda \neq 0$. *Alors*
(i) $Ker(L - \lambda Id) = \{0\}$ *si et seulement si* $Img(L - \lambda Id) = E$,
(ii) $Img(L - \lambda Id) = [Ker(L^* - \lambda Id)]^{\perp}$,
(iii) $Ker(L - \lambda Id)$ *est de dimension finie et* $Img(L - \lambda Id)$ *est fermé,*
(iv) *la suite* $Ker((L - \lambda Id)^n)$ *est croissante et il existe* $p \in \mathbb{N}$ *tel que* $Ker((L - \lambda Id)^n) = Ker((L - \lambda Id)^p)$ *pour tout* $n \geq p$. *Le plus petit des* p *satisfaisant cette propriété est appelé multiplicité algébrique de* λ.

Définition 8.15. *Soit* $L \in \mathcal{L}(E)$. *Le spectre de* L *est défini par*

$$\sigma(L) = \{\mu \in \mathbb{R},\ L - \lambda Id \text{ n'est pas inversible}\}. \tag{49}$$

Nous dirons que $\lambda \in \sigma(L)$ *est une valeur propre de* L *si et seulement si* $Ker(L - \lambda Id) \neq \{0\}$. *Les inverses des valeurs propres (avec la convention* $\frac{1}{0} = \infty$*) sont appelées valeurs caractéristiques de* L.

Rappelons les propriétés de $\sigma(L)$:

Proposition 8.16. *Soit* $L \in \mathcal{L}(E)$. *Alors*
(i) $\sigma(L)$ *est un compact de* $\mathbb{R}$ *contenu dans* $[-||L||, ||L||]$.
(ii) *Si* $L \in \mathcal{L}(E) \cap \mathcal{Q}(E)$ *et* $dim E = \infty$ *alors* $0 \in \sigma(L)$.
(iii) *Si* $L \in \mathcal{L}(E) \cap \mathcal{Q}(E)$ *si* $\lambda \neq 0$ *alors* $\lambda \in \sigma(L)$ *si et seulement si* λ *est une valeur propre de* L.
(iv) $L \in \mathcal{L}(E) \cap \mathcal{Q}(E)$ *alors ou bien* $\sigma(L)$ *est fini ou bien* $\sigma(L)$ *est une suite qui tend vers* 0.

8.7 Problèmes de Sturm-Liouville et fonctions de Green

Soit $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $p, q, e : I \to \mathbb{R}$ des fonctions continues, $p \in C^1$ et $p(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$.

Définition 8.17. Les équations de Sturm-Liouville *dans* I *sont des équations de la forme*

$$\frac{d}{dx}\Big(p(x)\frac{du}{dx}\Big) + q(x)u = e(x), \quad x \in [a, b]. \tag{50}$$

L'équation est dite **régulière** *si* $p(a).p(b) \neq 0$ *ou* **singulière** *sinon.*

Soient $\alpha_i, \beta_i, i = 1, 2$ des nombres réels tels que $\sum_{i=1}^{2} \alpha_i^2 \neq 0$, $\sum_{i=1}^{2} \beta_i^2 \neq 0$.

Définition 8.18. *Les équations de la forme*

$$\begin{cases} \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0; \\ \beta_1 u(a) + \beta_2 u'(a) = 0, \end{cases} \tag{51}$$

sont appelées **conditions aux limites ou conditions de bord séparées** *de Sturm-Liouville.*

On peut vérifier que les conditions de Dirichlet : $u(a) = u(b) = 0$, les conditions de Neuwmann : $u'(a) = u'(b) = 0$ sont des équatons de bord séparées.

Définition 8.19. *Nous dirons que l'équation de Sturm-Liouville* (50) *avec des conditions de bord* (51) **admet une fonction de Green** *si et seulement il existe une fonction* $G \in C(I \times I, \mathbb{R})$ *telle que* $\forall e \in C(I, \mathbb{R}), \forall u \in C^2(I, \mathbb{R})$

$$u \textit{ satisfait } (50) - (51) \Leftrightarrow u(x) = \int_a^b G(x, y)e(y)\, dy.$$

Théorème 8.20. *Supposons que l'équation de Sturm-Liouville* (50) *est reguliière avec des conditions de bord* (51)*. Il existe une fonction de Green si et seulement si* 0 *n'est pas une valeur propre. Dans ce cas là, fonction de Green est unique, symétrique et elle prend la forme*

$$G(x, y) = \begin{cases} cu_1(x)u_2(y) & \textit{si } x \leq y; \\ cu_1(y)u_2(x) & \textit{si } x > y, \end{cases} \tag{52}$$

où u_1 *est une solution non triviale de* (50) *satisfaisant la première equation de* (51)*,* u_2 *est une solution non triviale de* (50) *satisfaisant la deuxième equation de* (51) *et*

$$c^{-1} := p(a)\Big(u_1(a)u_2'(a) - u_2(a)u_1'(a)\Big).$$

Démonstration. Il est clair que si il existe une fonction de Green alors l'unique solution du problème $\frac{d}{dx}\Big(p(x)\frac{du}{dx}\Big) + q(x)u = 0$. Réciproquement supposons que 0 n'est pas une valeur propre et soit G la fonction définie dans (52). On peut vérifier sans difficulté que $\Big(p(u_1u_2' - u_2u_1')\Big)' = 0$, d'où $p(u_1u_2' - u_2u_1') \equiv K$ avec $K \in \mathbb{R}$. Montrons que $K \neq 0$. En effet si $p(u_1u_2' - u_2u_1') \equiv 0$ alors $u_1u_2' - u_2u_1' \equiv 0$ et u_1 est proportionnel à u_2. Dans ce cas, u_1 (et u_2) est une solution non triviale de $\frac{d}{dx}\Big(p(x)\frac{du}{dx}\Big) + q(x)u == 0$ satisfaisant les deux conditions de (51), ce qui contredit que 0 n'est pas une valeur propre. Donc $K \neq 0$. Finalement on montre sans difficulté que si $e \in C(I, \mathbb{R})$ est fixé, alors la fonction $u(x) = \int_a^b G(x, y)e(y)\, dy$ est une solution de (50) qui satisfait (51). La preuve de l'unicité de la fonction de Green est laissée comme exercice. □