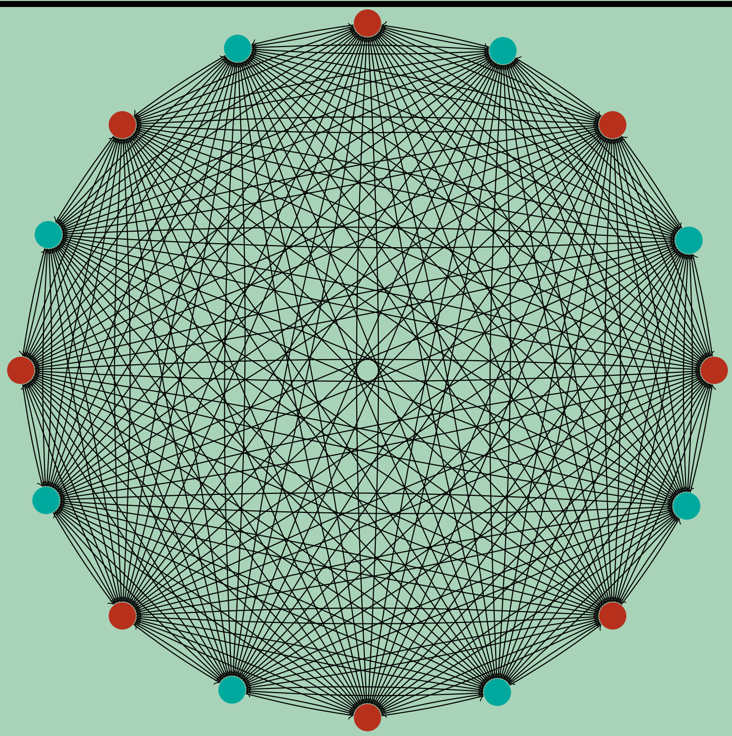
# Équations Différentielles Ordinaires Élémentaires




**El-Bachir Yallaoui**

*Département de Mathématiques*
**Faculté des Sciences**
Université Ferhat Abbas, Sétif I

# Tables des matières

# Chapitre 1

# Introduction

Une équation impliquant une variable dépendante et de ses dérivés par rapport à une ou plusieurs variables indépendantes est appelée une équation différentielle . Beaucoup des lois générales de la nature, de la physique, la chimie, la biologie, et l'astronomie trouvent leur expression la plus naturelle dans le Langage d'équations différentielles. Des applications sont également fréquentes en mathématique elle-même, en particulier en géométrie, et de l'ingénierie, de l'économie, et de nombreux autres domaines des sciences appliquées.

Il est facile de comprendre la raison de cette large utilisation des équations différentielles. Le lecteur se souviendra que si $y = f(x)$ est une fonction donnée, puis sa dérivée $dy/dx$ peut être interprété comme le taux de variation de $y$ par rapport à $x$. Dans tout processus naturel, les variables impliquées et leurs taux de variation sont reliés entre eux par le biais des principes scientifiques de base qui gouverne ce processus. Lorsque cette connexion est exprimée en symboles mathématiques, le résultat est souvent une équation différentielle.

Dans ce chapitre, nous donnons une perspective à votre étude des équations différentielles. Nous commençons par donner la définition d'une équation différentielle et pour fournir une structure organisationnelle ces notes, nous indiquons plusieurs des moyens de classification des équations différentielles. Nous allons donner la signification d'une solution d'une équation différentielle et celle avec conditions initiales en notant la possibilité d'avoir une infinité de solutions appelées famille de solutions et leurs courbes qui donnent le champs de vecteurs. Enfin nous allons donner les énoncés des théorème d'existence et unicité dont les démonstrations seront ajoutées dans les annexes.

## 1.1 Définitions et terminologie

La dérivée $\frac{dy}{dx}$ d'une fonction $y(x) = \phi(x)$ est elle-même une autre fonction $\phi'(x)$ trouvée par une règle appropriée. La fonction $y = e^{3x^2}$ est dérivable sur l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, et sa dérivée est égale à $y' = dy/dx = 6xe^{3x^2}$. Si on remplace $e^{3x^2}$ par $y$ dans l 'équation de $y'$ on obtient

$$\frac{dy}{dx} = 6xy \tag{1.1}$$

L'équation (1.1) est appelée équation différentielle. Maintenant, imaginez que votre ami vous donne tout simplement l 'équation (1.1), et vous demande de trouver la fonction $y$ qui satisfait cette équation. Vous êtes maintenant face à face avec l'un des problèmes fondamentaux de ce cours : trouver la solution d'une équation différentielle.

Avant de poursuivre, nous donnons une définition plus précise de ce concept.

**Définition 1.1.** *Une équation contenant des dérivées d'une ou de plusieurs variables dépendantes, par rapport à une ou plusieurs variables indépendantes, est dite une **équation différentielle** (ED). Et donc une équation différentielle est une équation liant une fonction inconnue $y(x)$ , une ou plusieurs de ses dérivées successives et la variable indépendante $x$. Par exemple (1.1) est une équation différentielle.*

## 1.2 Classification

On peut classifier les équations différentielles par type, ordre et linéarité.

### *Classification par type*

On appelle équation différentielle ordinaire (EDO), toute équation qui ne contient que des dérivées ordinaires d'une ou de plusieurs variables dépendantes par rapport à une seule variable indépendante. Par exemple,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} + 3y &= 2^x, \\ \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 3y &= 0, \\ \frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dt} &= 2x + 3y \end{aligned} \tag{1.2}$$

sont des équations différentielles ordinaires. Une équation impliquant les dérivées partielles de une ou plusieurs variables dépendantes de deux variables indépendantes ou plus est appelée une **équation différentielle partielle** (EDP). Par exemple,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= x, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

sont des équations différentielles partielles. Dans cet ouvrage ont fera seulement les équations différentielles ordinaires.

***Classification par ordre***

L'ordre d'une équation différentielle est le degré le plus élevé de la dérivée dans l'équation. Par exemple,

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \left(\frac{dy}{dt}\right)^3 + 3y = 0,$$

est une équation d'ordre 2.

Les équations différentielles ordinaires du premier ordre sont parfois écrites sous la forme

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0.$$

Par exemple, l'équation

$$(y - x)\, dx + 5xdy = 0$$

peut être transformée à

$$5xy\prime + y = x.$$

Une équation différentielle d'ordre $n$ est une égalité sous la forme ;

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{1.4}$$

ou $F$ est fonction réelles des $(n+2)$ variables : $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$.

Une équation différentielle d'ordre $n$ peut être écrite sous la forme équivalente appelée **forme résolue** ou **forme normale**

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right) \tag{1.5}$$

ou $f$ une fonction réelle des $(n+1)$ variables : $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$. Donc les équations

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y, y')$$

représentent les équations du $1^{er}$ et $2^{eme}$ ordre respectivement. Par exemple, la forme résolue de l'équation du premier ordre $5xy' + y = x$ est $y' = (x - y)/5x$ et celle du deuxième ordre $y'' - 3y' + 7 = 0$ est $y'' = 3y' - 7$.

***Classification par linéarité***

L'équation différentielle d'ordre $n$, (1.4) est dite **linéaire** si on peut l'écrire sous la forme

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)\, y = g(x) \tag{1.6}$$

Deux cas particuliers importants de (1.6) sont les équations linéaires du premier et deuxième ordre ;

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)\, y = g(x) \tag{1.7}$$

$$a_2(x)\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)\, y = g(x)\,. \tag{1.8}$$

Les équations

$$
\begin{aligned}
5xy\prime + y &= x, \\
5xy'' - 7y' + 3 &= \sin(x), \\
y''' + +5xy' - y &= e^x,
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

sont des équations différentielles linéaires d'ordre 1, 2 et 3 respectivement. Une équation différentielle est **non-linéaire** si elle n'est pas linéaire. Les équation suivantes

$$
\begin{aligned}
(y')^2 - xy &= 0 \\
(1-y)\,y'' + y &= x^2 \\
y'''' + \sin(y) &= 0
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

sont non linéaires.

## 1.3 Solution d'une équation différentielle

L'un des objectifs de ce cours est de résoudre, ou de trouver des solutions des équations différentielles. Dans la définition suivante, nous considérons le concept d'une solution d'une équation différentielle ordinaire.

**Définition 1.2.** *Une solution de l'équation différentielle d'ordre est un couple $(\varphi, I)$, où $I$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $\varphi$ une fonction $n$ fois dérivable définie sur $I$, et telle que pour tout $x$ de $I$, on ait*

$$F(x, \varphi, \varphi', ..., \varphi^{(n)}) = 0$$

*Par abus de langage, on dira souvent que $\varphi$ est une solution de l'équation, sans préciser l'intervalle $I$ de définition de cette solution.*

Vous ne pouvez pas penser à la solution d'une équation différentielle ordinaire sans penser simultanément à l'intervalle. L'intervalle $I$ dans la définition est aussi appelé l'**intervalle de définition**, l'**intervalle d'existence**, l'**intervalle de validité**, ou le **domaine de la solution** et peut être un intervalle ouvert $(a, b)$, un intervalle fermé $[a, b]$, ou un intervalle infini $(a, \infty)$, et ainsi de suite.

**Exemple 1.1.** *Vérifier que*

$$y = xe^x$$

*une solution de l'équation différentielle* $y'' - 2y' + y = 0$ *sur* $(-\infty, +\infty)$.

**Solution.** *Si* $y = xe^x$*, alors* $y' = (x+1)e^x$ *et* $y'' = (x+2)e^x$ *et*

$$y'' - 2y + y = (x+2)e^x - 2(x+1)e^x + xe^x = 0$$

**Exemple 1.2.** *Vérifier que*

$$y = \frac{x^4}{16}$$

*une solution de l'équation différentielle* $y' = xy^{1/2}$ *sur* $(-\infty, +\infty)$.

**Solution.** *Si* $y = xe^x$*, alors* $y' = \dfrac{x^3}{4} = x\dfrac{x^2}{4} = xy^{1/2}$

**Exemple 1.3.** *Vérifier que*

$$y = (x^2 - 1)^{-1}$$

*une solution de l'équation différentielle* $y' + 2xy^2 = 0$ *sur l'un des intervalles* $(-\infty, -1)\,, (-1, 1)$ *ou* $(1, +\infty)\,.$

**Solution.** *Si* $y = (x^2 - 1)^{-1}$ *alors* $y' = -2x(x^2 - 1)^{-2}$ *et donc*

$$y' + 2xy^2 = -2x(x^2 - 1)^{-2} + 2x(x^2 - 1)^{-2} = 0.$$

*Donc* $y = (x^2 - 1)^{-1}$ *est une solution de l'équation différentielle* $y' + 2xy^2 = 0.$
*Pour l'intervalle de définition (validité) on doit choisir un intervalle où* $y\,(x)$ *est définie et différentiable, et donc on doit choisir l'un des intervalles* $(-\infty, -1)\,, (-1, 1)$ *ou* $(1, +\infty)\,.$

**Solutions explicites et implicites**

Si elles existent, les solutions d'une équation différentielle peuvent être soit explicites soit implicites.

**Définition 1.3.** ***Solution explicite d'une équation différentielle***
*Toute fonction* $y\,(x)$*, définie sur un intervalle* $I$ *et possédant au moins* $n$ *des dérivées qui sont continues sur* $I$*, qui vérifie l'équation différentielle ordinaire d'ordre* $n$ $(1.4)$*, est dite une solution explicite de l'équation différentielle* $(1.4)$ *sur l'intervalle* $I$.

**Exemple 1.4.** *Sur l'intervalle $I = (-\infty, \infty)$ on a :*

(a) $y = ce^x$ est une solution de l'équation différentielle $y' - y = 0$.

(b) $y = xe^x$ est une solution de l'équation différentielle $y'' - 2y + 1 = 0$.

(c) $y = c_1 \sin(2x) + c_2 \cos(2x)$ est une solution de l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$.

**Définition 1.4.** ***Solution implicite d'une équation différentielle***
*Une relation $G(x, y) = 0$ est une solution implicite de l'équation différentielle (1.4) sur un intervalle $I$, s'il existe au moins une fonction $y(x)$ qui satisfait la relation ainsi que l'équation différentielle sur $I$.*

Parfois nous ne pouvons pas trouver des solutions explicites aux équations différentielles ordinaires et à la place, nous pouvons trouver des solutions **implicites** comme dans l'exemple suivant.

**Exemple 1.5.** *Vérifier que*

(a) $x^2 + y^2 = 25$ est une solution de l'équation différentielle $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$ sur l'intervalle $(-5, 5)$.

(b) $xy = \ln y + c$ est une solution implicite de l'équation différentielle $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{1 - xy}$.

**Remarque 1.1.** *Dans tous les exemples précédents nous avons utilisé $x$ pour désigner la variable indépendante et $y$ pour désigner la variable dépendante. Mais vous devriez vous habitués à travailler avec d'autres symboles pour désigner ces variables. Par exemple, nous pourrions désigner pat $t$ la variable indépendante et par $x$ la variable dépendante.*

On a vue dans la définition 1.3 qu'on appelle solution (ou intégrale) d'une équation différentielle d'ordre $n$ sur un certain intervalle $I$ de $\mathbb{R}$, toute fonction $y$ définie sur cet intervalle $I$, $n$ fois dérivable en tout point de $I$ et qui vérifie cette équation différentielle sur $I$. On notera en général cette solution $(y, I)$.

## 1.4 Problème de Cauchy (Problème avec conditions initiales)

Nous sommes souvent intéressés par les problèmes ou nous cherchons une solution $y(x)$ d'une équation différentielle de sorte que $y(x)$ satisfait des conditions prescrites imposées sur l'inconnue $y(x)$ ou de ses dérivés quand $x = x_0$, sur un intervalle $I$ contenant $x_0$.

**Exemple 1.6.** *Par exemple on nous demande de trouver les solutions de l'équation différentielle $y' - y = 0$ avec condition initiale $y(0) = 2$.*

**Solution.** *On a vu dans l'exemple 1.4 que la solution générale de cette équation est donnée par $y(x) = ce^x$ et donc $y(0) = c = 2$.*
*La solution du problème avec condition initiale est donc $y(x) = 2e^x$.*
*Donc on change la condition initiale $y(1) = -3$ alors $y(1) = ce = -3 \Longrightarrow c = -3/e$ et donc la solution du problème sera $y(x) = -3e^{x-1}$.*

**Exemple 1.7.** *Résoudre le problème de Cauchy*

$$y' + 2xy^2 = 0; \quad y(0) = -1.$$

**Solution.** *On peut facilement vérifier que $y = \dfrac{1}{(x^2+c)}$ est une solution générale de l'équation différentielle.*
*Si $y = \dfrac{1}{(x^2+c)}$ alors $y' = \dfrac{-2x}{(x^2+c)^2}$ et donc $y' + 2xy^2 = \dfrac{-2x}{(x^2+c)^2} + \dfrac{2x}{(x^2+c)^2} = 0$, ce qui vérifie que $y = \dfrac{1}{(x^2+c)}$ est en effet une solution générale de l'équation différentielle $y' + 2xy^2 = 0$. La condition initiale $y(0) = -1$ est équivalente à $c = -1$. La solution est donc $y(x) = \dfrac{1}{(x^2-1)}$ (voir figure 1.1).*

**Remarque :** Pour la fonction $y(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ considérée comme :

- une fonction le domaine de définition de $y(x)$ est $I = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$.
- une solution de l'équation différentielle $y' + 2xy^2 = 0$, le domaine de définition de $y(x)$ est l'un des intervalles $(-\infty, -1), (-1, 1)$ ou $(1, +\infty)$.
- une solution de l'équation différentielle $y'+2xy^2 = 0$ à condition initiale $y(0) = -1$, le domaine de définition de $y(x)$ est l'intervalle $(-1, 1)$.

En générale une équation différentielle d'ordre $n$ avec conditions initiales est sous la forme :

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \tag{1.11}$$
$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, y''(x_0) = y_2, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

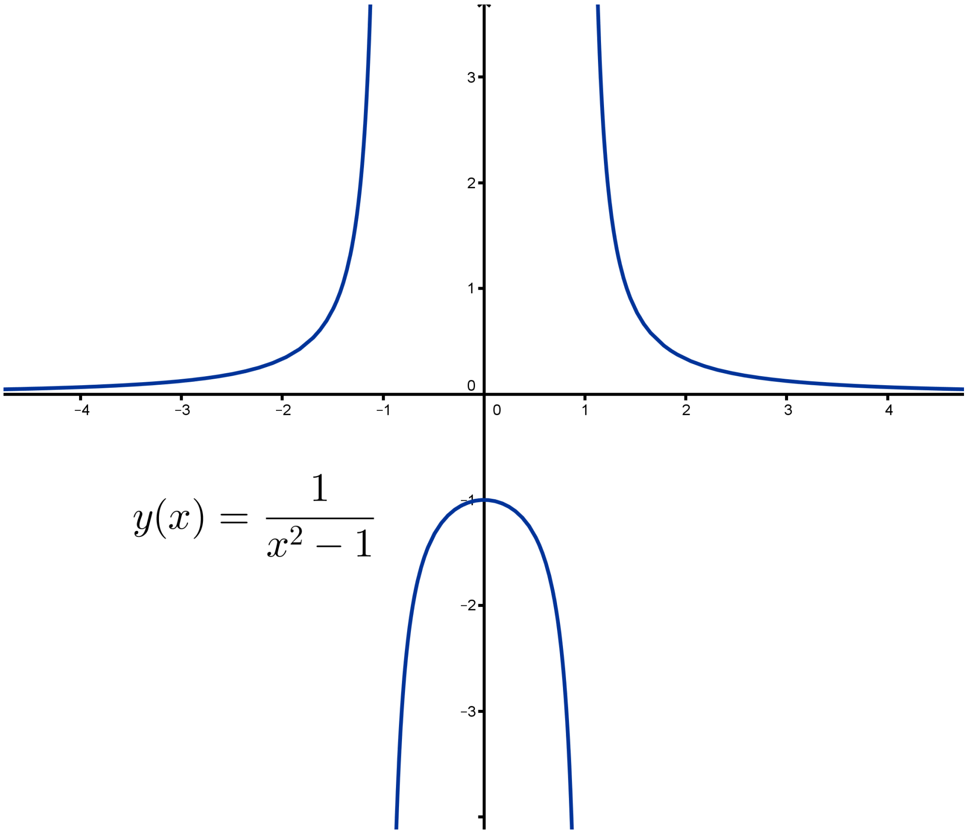



FIGURE 1.1 – Solution de l'équation $y' + 2xy^2 = 0; \quad y(0) = -1$

ou $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ sont des constantes réelles spécifié arbitrairement. En particulier

$$\begin{array}{lll} y\prime = f(x,y) & \text{à condition initiale} & y(x_0) = y_0 \\ y'' = f(x,y,y') & \text{à conditions initiales} & y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1 \end{array} \tag{1.12}$$

sont des équations différentielles d'ordre $1$ et $2$ respectivement avec conditions initiales.

**Exemple 1.8.** *Résoudre l'équation différentielle*

$$x'' + 16x = 0$$

*avec conditions initiales*

$$x(\pi/2) = -2 \qquad \textit{and} \qquad x'(\pi/2) = 1.$$

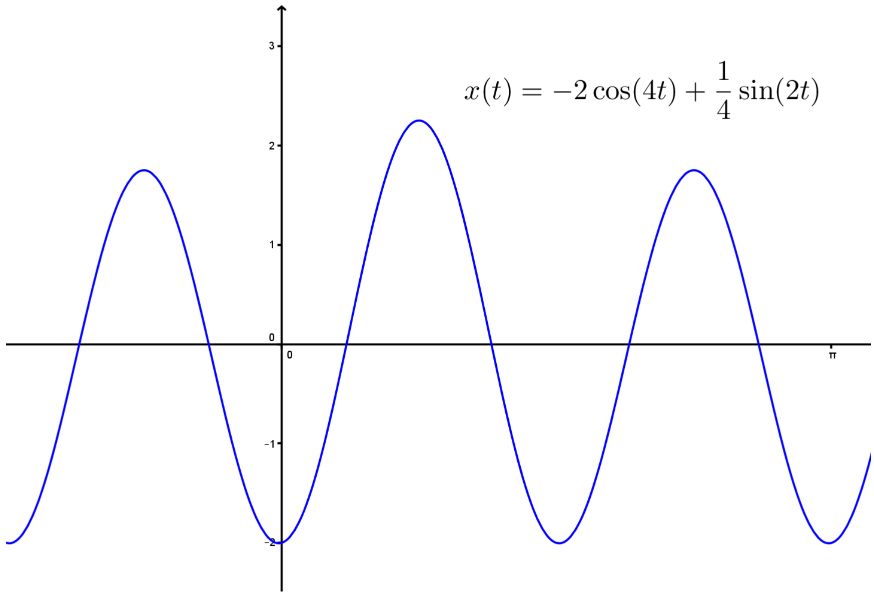



FIGURE 1.2 – $x(t) = -2\cos(4t) + \frac{1}{4}\sin(2t)$

**Solution.** *On a vu que la solution générale de l'équation différentielle* $x'' + 16x = 0$ *est :*

$$x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \sin(2t).$$

$x(\pi/2) = -2 \Longleftrightarrow c_1 \cos(2\pi) + c_2 \sin(2\pi) = -2 \Longleftrightarrow c_1 = -2$ *et*

$x'(\pi/2) = 1 \Longleftrightarrow -4c_1 \sin(2\pi) + 4c_2 \cos(2\pi) = 1 \Longleftrightarrow 4c_2 = 1$

*donc la solution est* $x(t) = -2\cos(4t) + \frac{1}{4}\sin(2t)$.

**Exemple 1.9.** *Vérifier que la famille* $y = cx^4$ *représente une solution pour l'équation différentielle* $xy' - 2y = 0$ *sur l'intervalle* $(-\infty, \infty)$. *La fonction dérivable définie par*

$$y = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

*est une solution particulière de l'équation différentielle mais ne peut être obtenue directement des famille de solutions* $y = cx^4$. *On obtient la solution si on choisi* $c = -1$ *pour* $x < 0$ *et* $c = 1$ *pour* $x \geq 0$.

## 1.5 Existence et unicité

Deux questions fondamentales se posent quand nous résolvons une équation différentielle avec valeurs initiales :

– existe-t-il une solution ?

– si une solution existe, est-elle unique ?

Chacun des exemples avec valeur initiale qu'on vu jusqu'à présent avaient une solution unique. L'exemple prochain nous montre que ce n'est pas toujours le cas.

**Exemple 1.10.** *Les fonctions* $y = 0$ *et* $y = \frac{1}{16}x^4$ *sont des solutions pour le problème*

$$y' = xy^{1/2} \quad \textit{avec condition initiale} \quad y\,(0) = 0$$

*Le problème à donc au moins 2 solutions.*

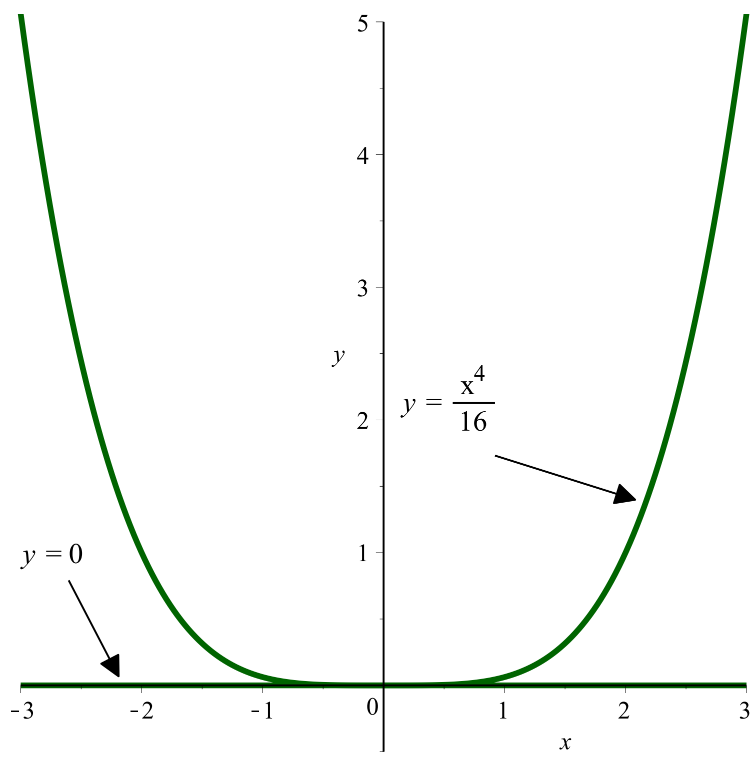



FIGURE 1.3 – Deux solutions pour l'équation $y' = xy^{1/2}, y(0) = 0$.

**Définition 1.5.** *Soit* $\Gamma$ *un ouvert de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$*. Une fonction de deux variables* $F : \Gamma \longrightarrow$

$\mathbb{R}^n$*, est dite lipschitzienne par rapport à la seconde variable, s'il existe un réel* $k$*, tel que*

$$\|F(x,y_1)-F(x,y_2)\| \leq k\,\|y_1-y_2\|$$

*pour tout* $x\in\mathbb{R}, y_1\in\mathbb{R}^n, y_2\in\mathbb{R}^n, (x,y_1)\in\Gamma$ *et* $(x,y_2)\in\Gamma$.
*Si tout point de* $\Gamma$ *a un voisinage dans lequel la fonction* $F$ *est lipschitzienne par rapport à la seconde variable, on dira que* $F$ *est localement lipschitzienne sur* $\Gamma$ *(*$k$ *peut alors varier d'un voisinage à l'autre).*

On remarquera que si la dérivée partielle $F_y=\dfrac{\partial F}{\partial y}$ est continue sur $\Gamma$, alors la fonction $F$ est localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable sur $\Gamma$. Cela fait que Théorème 1.2 est un corollaire du Théorème de Cauchy–Lipschitz. Ce critère est très utile en pratique, car la vérification qu'une dérivée partielle est continue est facile et, se fait la plupart du temps par simple inspection.

**Théorème 1.1** (Cauchy-Lipschitz)**.** *Soit* $\Gamma$ *un ouvert de* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ *et* $F(x,y):\Gamma\longrightarrow\mathbb{R}^n$ *une fonction continue, localement lipschitzienne par rapport à* $y$*. Soit* $(x_0,y_0)$ *un point quelconque sur* $\Gamma$*. Alors il existe une solution unique maximale (non prolongeable)* $(\phi,I)$ *de l équation* $y'=F(x,y)$ *, de condition initiale* $(x_0,y_0)$ *.*

**Remarque 1.2.** *Sous les hypothèses du théorème de Cauchy–Lipschitz , deux solutions avec les mêmes conditions initiales sont égales sur l'intersection de leur domaines.*

Nous allons donner ici l'énoncé sans preuve d'un théorème simple qui donne des conditions qui sont suffisantes pour garantir l'existence et l'unicité d'une solution au problème du premier ordre avec valeur initiale de la forme donnée en (1.13).

**Théorème 1.2.** *Considérons le problème avec condition initiale*

$$y'=\frac{dy}{dx}=f(x,y), \qquad y(x_0)=y_0 \tag{1.13}$$

*si* $f(x,y)$ *et* $f_y=\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *sont continues sur* $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a<x<b, c<y<d\}$ *et si* $(x_0,y_0)$ *est un point intérieur de* $R$*. Alors il exist un intervalle* $I_0=(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset(a,b)\,,\delta>0$ *et une fonction unique* $\phi(x)$*, définie sur* $I_0$*, qui est une solution de* (1.13)*.*

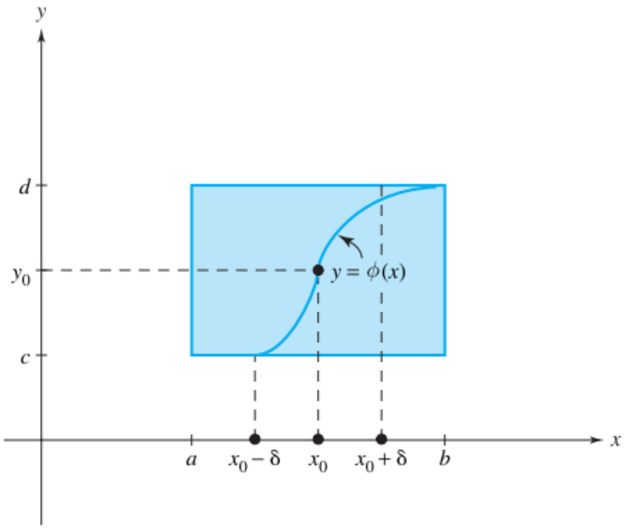



FIGURE 1.4 – Existence et unicité

**Remarque 1.3.** *Le théorème précédent nous dit deux choses.*

*– Tout d'abord, quand une équation satisfait les hypothèses du théorème, nous sommes assurés que la solution du problème avec valeur initiale existe. Naturellement, il est souhaitable de savoir si l'équation que nous essayons de résoudre a en fait une solution avant que nous passions trop de temps à essayer de la résoudre.*

*– Deuxièmement, lorsque les hypothèses sont satisfaites, il existe une solution unique pour le problème avec valeur initiale. Cette unicité nous dit que si nous pouvons trouver une solution, alors elle est la seule. Graphiquement, le théorème dit qu'il n'y a qu'une seule courbe qui passe par le point. En d'autres termes, dans cette équation du premier ordre, deux solutions ne peuvent pas traverser n'importe où dans le rectangle $R$ . Notez que l'existence et l'unicité de la solution tient seulement dans un voisinage.*

**Remarque 1.4.** *Les conditions du théorème sont suffisantes mais pas nécessaire. Donc, lorsque $f(x, y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $R$, alors une solution unique de (1.13) existe à chaque fois que $(x_0, y_0)$ est un point intérieur de $R$. Toutefois, si les hypothèses du Théorème ne sont pas satisfaites , alors tout peut arriver : le problème (1.13) peut encore avoir une solution et cette solution peut être unique, ou (1.13) peut avoir plusieurs solutions, ou il peut ne pas avoir de solution.*

**Exemple 1.11.** *On a vu dans l'exemple précédent que l'équation différentielle $\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}$ possède au moins deux solutions dont le graph passe par le point $(0, 0)$ . Une inspection* *des fonctions*

$$f(x,y) = xy^{1/2} \quad \textit{and} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{2y^{1/2}}$$

*montre qu'elles sont continues quand* $y > 0$. *Donc le théorème nous garantit l'existence et l'unicité d'une solution pour tout point* $(x_0, y_0)$, *tel que* $y_0 > 0$ *dans un intervalle* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. *Donc même sans résoudre on sait qu'il existe un intervalle* $(2 - \delta, 2 + \delta)$ *sur lequel le problème à condition initiale*$\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}, y(2) = 1$ *possède une solution unique.Champs de vecteurs*

**Exemple 1.12.** *Considérons le problème avec condition initiale*

$$y' = x^2 - xy^3, \qquad y(1) = 4 \tag{1.14}$$

*Est ce que le théorème 1.2 garantit l'existence d'une solution unique ?*

**Solution.** *Les fonctions* $f(x,y) = x^2 - xy^3$ *et* $f_y = -3xy^2$ *sont continues dans tout rectangle contenant le point* $(1,4)$, *donc les hypothèses du théorème sont satisfaites. Il en résulte alors du théorème que le problème avec valeur initiale a une solution unique dans l'intervalle* $(1 - \delta, 1 + \delta)$ *où* $\delta$ *est un nombre positif.*

**Exemple 1.13.** *Considérons le problème*

$$y' = 3y^{2/3}, \qquad y(2) = 0 \tag{1.15}$$

*Est ce que le théorème 1.2 garantit l'existence d'une solution unique ?*

**Solution.** *Dans ce cas* $f(x,y) = 3y^{2/3}$ *et* $f_y = 2y^{-1/3}$. *Malheureusement* $f_y = 2y^{-1/3}$ *n'est pas continue quand* $y = 0$. *Donc il n'y a pas de région contenant le point* $(2,0)$ *où les fonctions* $f$ *et* $f_y$ *sont continues. Parce que les hypothèses du théorème ne sont pas satisfaites, nous ne pouvons pas l'utiliser pour déterminer si le problème a ou n'a pas de solution unique. Il s'avère que ce problème a plus d'une solution.*

## 1.6 Famille de courbes

On a vu que la solution générale de l'équation différentielle $y = y$ est $y = ce^x$. Cette solution représente un famille de courbe d'un seul paramètre. Hors que la solution générale de $x'' + 16x = 0$ est $x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \sin(2t)$. Cette solution représente une famille de courbe de deux paramètres. Lors de la résolution d'une équation différentielle du premier ordre $F(x, y, y') = 0$, on obtient généralement une famille de solution avec un paramètre $c$. Une solution contenant une constante arbitraire représente un ensemble $G(x, y, c) = 0$ de solutions appelé **une famille solutions à un paramètre**. Lors de la résolution d'une équation différentielle d'ordre $n, F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$, nous cherchons une famille de solutions de $n$ **paramètres** $G(x, y, c_1, c_2, ..., c_n) = 0$. Cela signifie qu'une seule équation différentielle peut posséder un nombre infini de solutions correspondant au nombre illimité de choix pour le paramètre (s). Une solution d'une équation différentielle qui est ne dépend pas de paramètres d'arbitraires est appelé une **solution particulière**. Par exemple vous pouvez vérifier que $y = cx - x \cos x$ est une famille se solution à 1 paramètre sur l'intervalle $(-\infty, \infty)$, et $y = -x \cos x$ est une solution particulière qu'on obtient quand $c = 0$. De même sur l'intervalle $(-\infty, \infty)$, $y = c_1 e^x + c_2 x e^x$ est une famille se solution à deux paramètres de l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$. Quelques solutions particulières sont $y = 0\,(c_1 = c_2 = 0)$, $y = e^x\,(c_1 = 1, c_2 = 0)$, et $y = e^x\,(c_1 = 0, c_2 = 1)$.

Pour trouver l'équation différentielle associée à une famille de fonctions contenant $n$ constantes arbitraires $G(x, y, c_1, c_2, ..., c_n) = 0$, il faut dériver $n$ fois cette expression et éliminer les $n$ constantes arbitraires à partir des $(n + 1)$ équations disponibles.

**Exemple 1.14.** *Trouver l'équation différentielle de la famille de fonctions*

$$y = ax + b \cos x.$$

**Solution.** *La famille possédant deux constantes arbitraires, on dérive deux fois*

$$\begin{aligned} y &= ax + b \cos x \\ y' &= a - b \sin x \\ y'' &= -b \cos x \Longrightarrow b = -\frac{y''}{\cos x} \end{aligned}$$

*maintenant on a*

$$\begin{aligned} y - xy' &= (ax + b\cos x) - x\,(a - b\sin x) \\ &= b\,(\cos x + x\sin x) \\ &= -\frac{y''}{\cos x}\,(\cos x + x\sin x) \\ &= -y''\,(1 + \tan x) \end{aligned}$$

*L'équation différentielle est donc*

$$y''\,(1 + \tan x) - xy' + y = 0$$

**Exemple 1.15.** *Vérifier que pour toute valeur $C$ que,*

$$4x^2 - y^2 = C$$

*est une solution de l'équation différentielle*

$$y\frac{dy}{dx} - 4x = 0.$$

*Tracer la courbe de solution pour les valeurs de $C = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 4$.*

**Solution.** *Si on dérive la relation par rapport a $x$ on obtient*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(4x^2 - y^2\right) = \frac{d}{dx}C &\Leftrightarrow \\ 8x - 2y\frac{dy}{dx} = 0 &\Leftrightarrow \\ -2\left(y\frac{dy}{dx} - 4x\right) = 0 &\Leftrightarrow \\ y\frac{dy}{dx} - 4x = 0. \end{aligned}$$

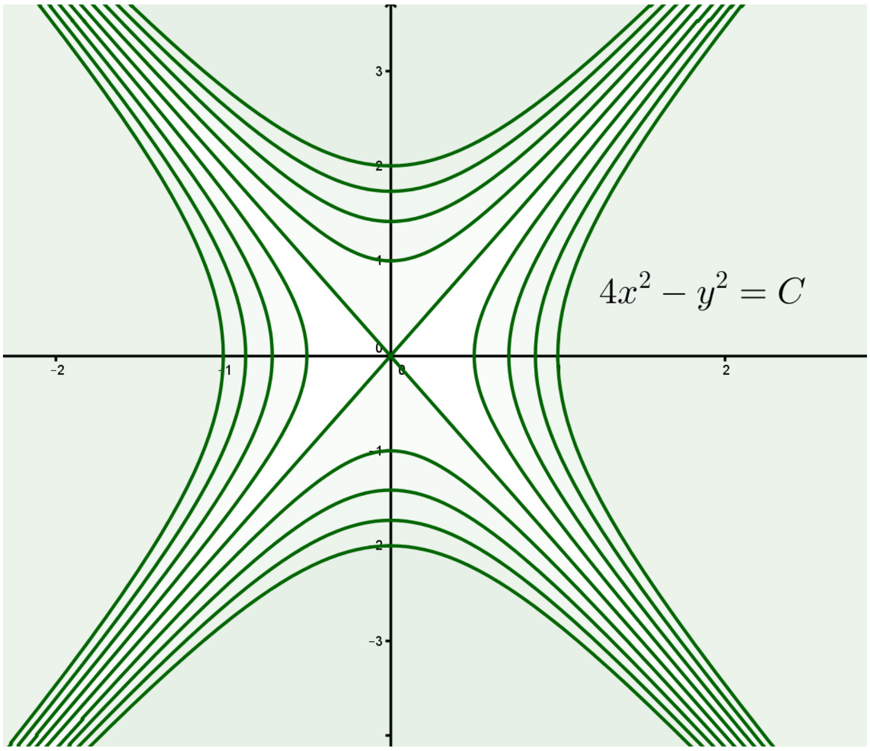



FIGURE 1.5 – Familles de courbes $4x^2 - y^2 = C$ pour les valeurs de $C = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 4$

## 1.7 Champs de vecteurs

Le théorème 1.2 (d'existence et d'unicité) a certainement une grande valeur, mais ne nous dit aucune chose sur la nature de la solution d'une équation différentielle. Pour des raisons pratiques, nous voulons connaitre la valeur de la solution à un certain point, ou les intervalles où la solution est croissante, ou les points où la solution atteint une valeur maximale. Certes, avoir une représentation explicite (une formule) pour la solution serait une aide considérable pour répondre à ces questions. Cependant, pour la plupart des équations différentielles que nous sommes susceptibles de rencontrer dans les applications du monde réel, il sera impossible de trouver une telle formule.

En outre, même si nous sommes assez chanceux pour obtenir une solution implicite, en utilisant cette relation pour déterminer une forme explicite peut être difficile. Ainsi, nous devons compter sur d'autres méthodes d'analyse ou une approximation de la solution. Une technique qui est utile pour visualiser (graphique) les solutions à une équation différentielle du premier ordre est d'esquisser le domaine de la direction de l'équation. Pour décrire cette méthode, nous avons besoin de faire une observation

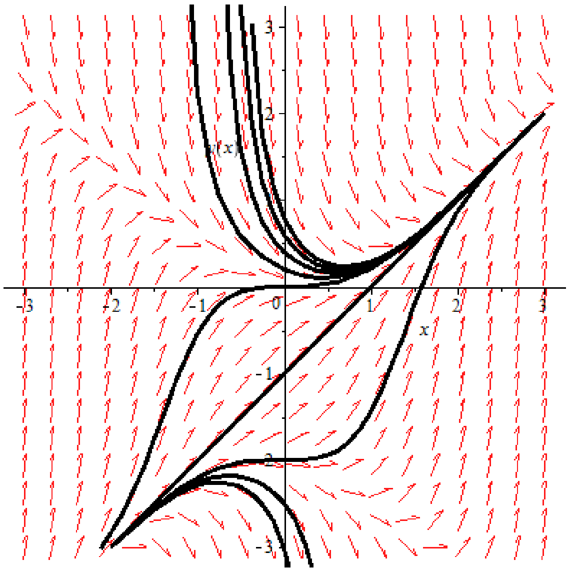


FIGURE 1.6 – Champs de vecteurs et courbes de solutions de $\frac{dy}{dx} = x^2 - 2y - y^2$

générale . A savoir, une équation du premier ordre

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

spécifie une pente à chaque point dans le plan où $f$ est définie. En d'autres termes, elle donne la direction dans laquelle une représentation graphique d'une solution de l'équation doit avoir en chaque point. Considérons, par exemple, l'équation

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - 2y - y^2 \tag{1.16}$$

La courbe d'une solution de (1.16) qui passe par le point $(-1, 1)$ doit avoir une pente égale à $-2$, et une solution qui passe par le point $(0, -2)$ doit avoir une pente égale à $0$. Si on trace les champs de tangentes associées à divers points dans le plan montrant la pente de la courbe de la solution, on obtient le **champs de vecteurs** associé à l'équation différentielle (voir figure 1.6).

Si on considère les équations différentielles

(a) $\frac{dy}{dx} = -2y$

(b) $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$

on obtiendra les champs de vecteurs suivants

graphics[width=3.0in]vf2a.eps

Figure 1.7 : (a) Champs de vecteurs et courbes de solutions $y' = -y$

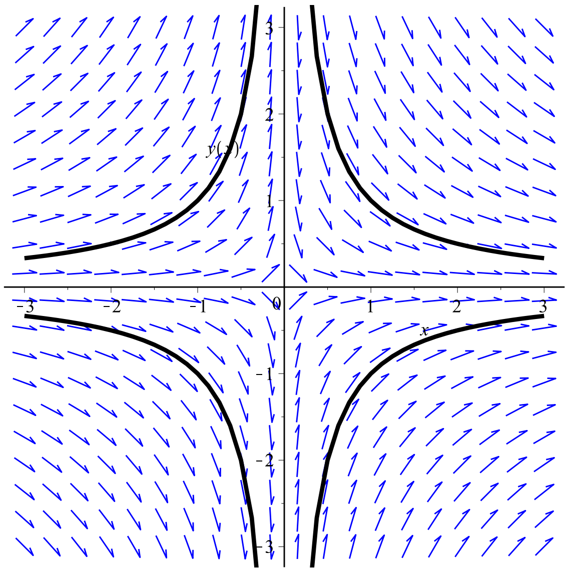



Figure 1.8 : (b) Champs de vecteurs et courbes de solutions $y' = -\frac{y}{x}$

## 1.8 Résumé du chapitre 1

Dans ce chapitre, nous avons introduit la terminologie de base pour les **équations différentielles**. L'**ordre** d'une équation différentielle est l'ordre de la plus haute dérivée. L'objet de ce texte est **d'équations différentielles ordinaires**, qui impliquent des dérivées par rapport à une seule variable indépendante.

Une **solution explicite** d'une équation différentielle est une fonction de la variable indépendante que satisfait à l'équation sur un certain intervalle. Une **solution implicite** est une relation entre les variables dépendantes et indépendantes qui définit implicitement une fonction qui est une solution explicite. Une équation différentielle a généralement une infinité de solutions. Il y a certains théorèmes qui garantis qu'il existe une solution unique pour certains problèmes à valeur initiale dans laquelle il faut trouver une solution à l'équation différentielle qui satisfait également des conditions initiales. Pour une équation d'ordre $n$ , ces conditions représentent les valeurs de la solution et les $(n-1)$ premières dérivées à un moment donné. Même si l'on ne réussit pas à trouver des solutions explicites à une équation différentielle, plusieurs techniques peuvent être utilisées pour aider à analyser les solutions. Une de ces méthodes pour les équations différentielles du premier ordre $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ considère les valeurs des pentes à des points sur le plan. Le conglomérat de ces pentes est le **champs de vecteurs** de l'équation. Connaissant cela est utile dans l'esquisse de la solution à un problème de valeur initiale.

# Exercices

Indiquer l'ordre de l'équation différentielle, et déterminer si l'équation est linéaire ou non.

**1.** $t^2\dfrac{d^2y}{dt^2} - t\dfrac{dy}{dt} + 3y = \sin(t)$

**2.** $(1+t)^2\dfrac{d^2y}{dt^2} + t\dfrac{dy}{dt} + y = e^(t)$

**3.** $\dfrac{d^3y}{dt^3} + \dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} + y = 5$

**4.** $\dfrac{dy}{dt} + ty^2 = 0$

**5.** $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \sin(t+y) = \cos(t)$

**6.** $\dfrac{d^3y}{dt^3} + t\dfrac{dy}{dt} + \cot(t)y = t$

Vérifier que la fonction indiquée est une solution de l'équation différentielle.

**7.** $3y'^{-x/3}$

**8.** $y'^{-3x}$

**9.** $y'' - 6y'^{3x}\cos(2x)$

**10.** $y'' + y = \tan x; \quad y = -\cos(x)\ln(\sec x + \tan x)$

Vérifier que la fonction indiquée est une solution de l'équation différentielle. Procéder comme dans l'exemple 9, en prenant en compte $y$ simplement comme une fonction, donner son domaine. Ensuite, en considérant $y$ comme une solution de l'équation différentielle, donner au moins un intervalle $I$ de définition (validité).

**11.** $(y-x)y' = y - x + 8; \quad y = x + 4\sqrt{x+2}$

**12.** $y'^2 + 1; \quad y = \tan x$

**13.** $y'^2; \quad y = \dfrac{1}{4-x^2}$

**14.** $2y'^3\cos x; \quad y = (1-\sin(x))^{-1/2}$

Vérifier que l'expression indiquée est une solution implicite de l'équation différentielle donnée. Trouver au moins une solution explicite $y(x)$ dans chaque cas. Donner un intervalle I de définition de chaque solution ? .

**15.** $\dfrac{dx}{dt} = (x-1)(1-2x); \quad \ln\left(\dfrac{2x-1}{x-1}\right) = t$

**16.** $2xydx + (x^2-y)dy = 0; \quad -2x^2y + y^2 = 1$

Vérifier que l'expression indiquée est une famille de solutions de l'équation différentielle donnée.

**17.** $\dfrac{dP}{dt} = P(1-P); \quad P = \dfrac{c_1 e^t}{1+c_1 e^t}$

**18.** $y' + 2xy = 1; \quad y = e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt + c_1 e^{-x^2}$

**19.** $y'' - 4y' + 4y = 0; \quad y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$

**20.** $x^3 y''' + 2x^2 y'' - xy' + y = 12x^2; \quad y = c_1 x^{-1} + c_2 x + c_3 x \ln x + 4x^2$

Vérifier si la relation donnée est une solution implicite de l'équation différentielle.

**21.** $y - \ln y = x^2 + 1, \qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy}{y-1}$

**22.** $x^2 + y^2 = 9, \qquad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$

**23.** $e^{xy} + y = x - 1, \qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 - ye^{xy}}{1 + xe^{xy}}$

**24.** $x^2 - \sin(x+y) = 1, \qquad \dfrac{dy}{dx} = 2\sec(x+y) - 1$

Trouver les valeurs de $m$ telle que la fonction $y = e^{mx}$ soit une solution de l'équation différentielle donnée.

**25.** $y' + 3y = 0$

**26.** $y'' + y' - 2y = 0$

Trouver les valeurs de $m$ telle que la fonction $y = x^m$ est une solution de l'équation différentielle donnée.

**27.** $xy'' + 2y' = 0$

**28.** $x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$

Trouver les solutions constantes des équations différentielles données.

**29.** $4xy' + 3y = 6$

**30.** $y'^2 - 3y + 2$

**31.** $(y-2)y' = 2$

**32.** $y'' + y' - 2y = 3$

**33.** Vérifier que $\phi(x) = 2/(1 - ce^x)$, où $c \in \mathbb{R}$ est une famille de solutions avec un paramètre de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(y-2)}{2}.$$

Dessiner les courbes de solutions pour les valeurs de $c = 0, \pm 1, \pm 2$.

**34.** Vérifier que $\phi(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$, est une famille de solutions avec deux paramétrés de l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = 0.$$

pour n'importe qu'elle valeur de $c_1$ et $c_2$. Trouver $c_1$ et $c_2$ pour les conditions initiales :

**(a)** $y(0) = 2, y'(0) = 1$

**(b)** $y(1) = 1, y'(1) = 0$

Vérifier la solution générale et trouver une solution du problème à condition(s) initiale(s) constitué de cette équation différentielle, la solution générale et les conditions initiales données.

**35.** $y = y - y^2, \; y(x) = \dfrac{1}{1 + ce^{-x}}, \quad (a)\; y(0) = -1/2, \quad (b)\; y(1) = 2$

**36.** $y + 2xy^2 = 0, \; y(x) = \dfrac{1}{x^2 + c}, \quad (a)\; y(2) = 1/3, \quad (b)\; y(-2) = 1/2, \quad (c)\; y(0) = 1$

Déterminer si Théorème (1.2 ) implique que le problème suivant possède une solution unique.

**37.** $\dfrac{dy}{dx} = y^4 - x^4, \qquad y(0) = 7$

**38.** $\dfrac{dy}{dt} - ty = \sin^2 t, \qquad y(\pi) = 5$

**39.** $3x\dfrac{dx}{dt} + 4t = 0, \qquad x(2) = -\pi$

**40.** $3x\dfrac{dx}{dt} + \cos x = \sin t, \qquad x(\pi) = 0$

**41.** $y\dfrac{dy}{dx} = x, \qquad y(1) = 0$

**42.** $\dfrac{dy}{dx} = 3x - \sqrt[3]{y-1}, \qquad y(2) = 1$

**43.** Déterminer si Théorème (1.2 ) implique que l'équation différentielle $y' = \sqrt{y^2 - 9}$ possède une solution unique dans les point suivants.

(a) $(1, 4)$ (b) $(5, 3)$

(c) $(2, -3)$ (d) $(-1, 1)$

**44.** **(a)** Vérifier que $y(x) = \tan(x + c)$, est une famille de solutions avec un paramètre de l'équation différentielle $y' = 1 + y^2$.

**(b)** Puisque $f(x, y) = 1 + y^2$ et $f_y = 2y$ sont continues partout, la région $R$ dans le Théorème (1.2) est le plan entier. Si on considère le problème $y' = 1 + y^2$ avec condition initiale $y(0) = 0$. Expliquer pourquoi $I = (-2, 2)$ ne peut être un intervalle de validité.

**(c)** Trouver l'intervalle de définition maximum pour (**b**).

# Chapitre 2

# Équations différentielles du premier ordre

Ce chapitre traite des équations différentielles du premier ordre, dont la forme est

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

où $f$ est une fonction donnée de deux variables. Toute fonction différentiable $y = \varphi(t)$ qui satisfait cette équation pour tout $x$ dans un intervalle est appelé une solution, notre objectif est de déterminer si ces fonctions existent et, dans le cas échéant, développer des méthodes pour les trouver. Malheureusement, pour une fonction arbitraire $f$, il n'y a pas de méthode générale pour résoudre l'équation en termes de fonctions élémentaires. Au lieu de cela, nous allons décrire plusieurs méthodes , dont chacune est applicable à une certaine sous-classe d'équations du premier ordre. Les méthode les plus importantes sont celles des équations séparables (section 2.1 ) , des équations linéaires (section 2.2 ) , et des équations exactes ( section 2.3). Dans certains cas où l'équation différentielle n'est sous l'une des formes importantes, on va décrire des méthodes où on transforme l'équation différentielle de telle sort quelle devienne sous l'une des formes connues. Cela comprendra les méthodes de solutions de certaines équations classiques comme celles de Bernoulli, Riccati, Lagrange et Clairaut.

## 2.1 Équations séparables

Nous commençons notre étude sur la méthode de résoudre des équations différentielles avec le plus simple des cas de toutes les équations différentielles : **équations du premier ordre avec des variables séparables**. La méthode pour résoudre les équations différentielles dans cette section dépend de nombreuses techniques d'intégrations, vous êtes invités à vous rafraichir la mémoire sur les formules importantes comprises dans **les annexes A et B** à la fin de cet ouvrage et en consultant vos cours d'analyse.

Considérons l'équation du premier ordre

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{2.1}$$

si la fonction $f$ ne dépend que de $x$ c.à.d $f(x, y) = g(x)$ on a l'équation

$$\frac{dy}{dx} = g(x)$$

qui se résoudra tout simplement par intégration

$$y = \int g(x)\, dx = G(x) + C.$$

Par exemple si $\dfrac{dy}{dx} = 1 + e^x$ alors $y = x + e^x + C$. Cet exemple est un cas particulier d'équations différentielles séparables.

**Théorème 2.1** (Picard)**.** *Si $f(x, y)$ et $\partial f/\partial y$ sont continues dans un rectangle fermé $R$, alors sur tout point intérieur $(x_0, y_0)$ de $R$ il passe une unique fonction intégrale de l'équation $dy/dx = f(x, y)$.*

**Définition 2.1.** *Une équation de type (2.1) est dite à variables séparables si on peut l'écrire sous l'une des formes*

$$f(x)\, dx + g(y)\, dy = 0 \tag{2.2}$$

*où bien*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f(x)}{g(y)} \tag{2.3}$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\,h(y) \quad \text{où } h(y) = -\frac{1}{g(y)} \tag{2.4}$$

*en d'autres termes, si l'on peut complètement séparer la variable dépendante et la variable indépendante.*

Par exemple l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+xy}{1+y^3}$$

est séparable car on peut l'écrire sous la forme

$$\frac{dy}{dx} = (x)\left(\frac{1+y}{1+y^3}\right)$$

mais l'équation

$$\frac{dy}{dx} = 4 + x^2 y$$

n'est pas séparable.

Pour résoudre une telle équation on intègre,

$$\int f(x)\,dx + \int g(y)\,dy = C$$

$$F(x) + G(y) = C$$

$$G(y) = -F(x) + C$$

où $F$ et $G$ sont des primitives respectives de $f$ et $g$. Donc la solution est en principe la famille de solutions

$$y = G^{-1}(-F(x) + C).$$

**Exemple 2.1.** *Résoudre l'équation différentielle* $(x+2)\,dy - ydx = 0$.

**Solution.** *Si* $x \neq 2$ *et* $y \neq 0$, *l'équation est équivalente à*

$$(x+2)\,dy - ydx = 0 \Longleftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x+2}$$

*qui donne*

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{y} &= \int \frac{dx}{x+2} \\ \ln|y| &= \ln|x+2| + C \\ &= \ln|x+2| + \ln K, \ K > 0 \\ &= \ln(K|x+2|)\end{aligned}$$

*et donc*

$$\begin{aligned}|y| &= K|x+2| \\ y &= \pm K(x+2) = K_1(x+2)\end{aligned}$$

*où on a remplacer* $\pm K$ *par une autre constante arbitraire* $K_1 \neq 0$.

**Exemple 2.2.** *Résoudre l'équation non linéaire*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{y^2}$$

**Solution.** *L'équation est équivalente à*

$$\begin{array}{lcll}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+1}{y^2} & \Longleftrightarrow & y^2 dy = (x+1)\,dx & \Longleftrightarrow \\ \int y^2 dy = \int (x+1)\,dx & \Longleftrightarrow & y^3/3 = x^2/2 + x + C & \Longleftrightarrow \\ y^3 = 3\left(x^2/2 + x + C\right) & \Longleftrightarrow & y = \left[3\left(x^2/2 + x + C\right)\right]^{1/3} & \end{array}$$

**Exemple 2.3.** *Résoudre l'équation non linéaire*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3 - 2x + 1}{e^y + \cos y}$$

**Solution.** *Après séparation des variables et intégration on trouve*

$$\begin{aligned}(e^y + \cos y)\,dy &= \left(4x^3 - 2x + 1\right)dx, \\ \int (e^y + \cos y)\,dy &= \int \left(4x^3 - 2x + 1\right)dx, \\ e^y - \sin y &= x^4 - x^2 + x + C\end{aligned}$$

*Nous voudrions à résoudre pour $y$ explicitement, mais nous ne pouvons pas. C'est souvent le cas dans la résolution des équations non linéaires du premier ordre. Par conséquent, quand nous disons " résoudre l'équation" nous devons parfois être satisfaits si seulement une forme implicite de la solution a été trouvée.*

**Exemple 2.4** (Solutions perdues)**.** *Considérons l'équation différentielle*

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 1$$

**Solution.** *Si $y \neq \pm 1$ on obtient*

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = y^2 - 1 &\Longleftrightarrow \frac{dy}{y^2 - 1} = dx, \\
\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right) dy = dx &\Longleftrightarrow \ln|y-1| - \ln|y+1| = 2x + C, \\
\ln|y-1| - \ln|y+1| = 2x + C &\Longleftrightarrow \ln\frac{|y-1|}{|y+1|} = 2x + C, \\
\frac{y-1}{y+1} &= e^{2x+C} = e^C e^{2x}.
\end{aligned}$$

*Si nous résolvons l'équation par rapport à la variable $y$ on trouve la famille de solutions*

$$y = \frac{1 + e^C e^{2x}}{1 - e^C e^{2x}} = \frac{1 + Ke^{2x}}{1 - Ke^{2x}}, \text{ ou } K = e^C \tag{2.5}$$

*où* $K = e^C > 0$.

*Maintenant si on retourne à l'équation initiale*

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 1 = (y-1)(y+1)$$

*on voit que $y = 1$ et $y = -1$ sont des solutions qui ne sont pas incluses dans la famille de solutions (2.5). Donc la solution générale sera*

$$y = \frac{1 + Ke^{2x}}{1 - Ke^{2x}}, \text{ ou } K > 0, y = -1 \text{ et } y = 1 \tag{2.6}$$

**Exemple 2.5.** *Résoudre l'équation non linéaire avec condition initiale*

$$(e^y - y)\cos x dy = e^y \sin(2x)\, dx, \;\; y(0) = 0$$

**Solution.** *On a*

$$\begin{gathered}
\left(e^{y}-y\right)\cos x dy=e^{y}\sin\left(2x\right)dx \Longleftrightarrow \frac{\left(e^{y}-y\right)}{e^{y}}dy=\frac{\sin\left(2x\right)}{\cos x}dx,\\
\left(1-ye^{-y}\right)dy=2\sin x dx \Longleftrightarrow \int\left(1-ye^{-y}\right)dy=\int 2\sin x dx,\\
y+e^{-y}+ye^{-y}=-2\cos x+C
\end{gathered}$$

*si on utilise la condition initiale $y\left(0\right)=0$ on trouve*

$$1=-2+C \Longleftrightarrow C=3$$

*donc la solution est*

$$y+e^{-y}+ye^{-y}=-2\cos x+3.$$

**Solutions définies par intégrales**

Si $g$ est une fonction continue sur un intervalle ouvert $I$ contenant $a$ , alors pour tout $x$ dans $I$,

$$\frac{d}{dx}\int_{a}^{x}g\left(t\right)dt=g\left(x\right)$$

Ce résultat est l'une des deux formes du théorème fondamentale du calcul différentiel et intégral . En d'autres termes $\int_{a}^{x}g\left(t\right)dt$, est une primitive de la fonction $g$. Il ya des moments où cette forme est pratique dans la résolution des équations différentielles. Par exemple, si $g$ est continue sur un intervalle $I$ contenant $x_0$ et $x,$ alors la solution du problème avec condition initiale

$$\frac{dy}{dx}=g\left(x\right),\; y\left(x_0\right)=y_0$$

est

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x}g\left(t\right)dt$$

Puisque une primitive d'une fonction continue $g$ ne peut pas toujours être exprimée en termes de fonctions élémentaires, cela pourrait être le meilleur que nous pouvons faire dans l'obtention d'une solution explicite de l'équation différentielle.

**Exemple 2.6.** *Résoudre*

$$\frac{dy}{dx}=e^{-x^{2}},\; y\left(-1\right)=2$$

**Solution.** *La fonction $g(x) = e^{-x^2}$ est continue sur tout $\mathbb{R}$, est donc possède une primitive. Malheureusement cette primitive n'est pas une fonction élémentaire. Si on utilise le résultat dessus on trouve que la solution est donnée par*

$$\begin{aligned} y &= y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt \\ &= 2 + \int_{-1}^{x} e^{-t^2} dt. \end{aligned}$$

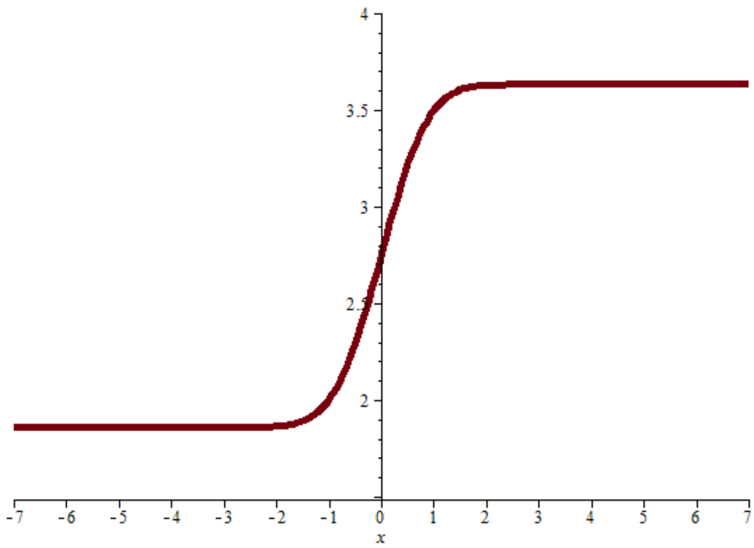



Figure 2.1 : $y(x) = 2 + \int_{-1}^{x} e^{-t^2} dt$.

***Équation sous la forme*** $y' = G(ax + by)$

Lorsque le côté droit de l'équation $dy/dx = f(x, y)$ peut être exprimé en fonction de $ax + by$, où $a$ et b sont des constantes, c'est-à-dire

$$\frac{dy}{dx} = G(ax + by) \tag{2.7}$$

alors, le changement de variable

$$u = ax + by$$

transforme l'équation en une équation **à variables séparables** sous la forme

$$\frac{du}{dx} = b\frac{dy}{dx} + a = bG(u) + a$$

La méthode est illustrée dans l'exemple suivant,

**Exemple 2.7.** *Intégrer l'équation différentielle suivante* $\frac{dy}{dx} = (-2x+y)^2 - 7.$

**Solution.** *Si on pose* $u = -2x + y$, *alors* $du/dx = -2 + dy/dx$, *et l'équation sera transformée à une équation séparable*

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} = -2 + \frac{dy}{dx} = -2 + u^2 - 7 = u^2 - 9 \Longleftrightarrow \\ \frac{du}{u^2-9} = dx \Longleftrightarrow \frac{du}{(u-3)(u+3)} = dx \\ \Longleftrightarrow \frac{1}{6}\left[\frac{1}{(u-3)} - \frac{1}{(u+3)}\right] du = dx \\ \frac{1}{6}\ln\left|\frac{u-3}{u+3}\right| = x + c \Longleftrightarrow \frac{u-3}{u+3} = e^{6x+6c} = c_1 e^{6x} \end{aligned}$$

*Si nous résolvons la dernière équation par rapport à* $u$ *et puis par rapport à* $x$,*on trouve*

$$u = \frac{3(1+c_1e^{6x})}{1-c_1e^{6x}} \text{ et } y = 2x + \frac{3(1+c_1e^{6x})}{1-c_1e^{6x}}$$

**Exemple 2.8.** *Intégrer l'équation différentielle suivante* $\frac{dy}{dx} = (x+y+1)^2$.

**Solution.** *Si on pose* $u = x + y + 1$, *alors* $du/dx = 1 + dy/dx$, *et l'équation sera transformée à une équation séparable*

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} = 1 + u^2 \Longleftrightarrow \\ \frac{du}{u^2+1} = dx \Longleftrightarrow \int \frac{du}{u^2+1} = \int dx \\ \tan^{-1} u = x + c \Longleftrightarrow u = \tan(x + C_1) \end{aligned}$$

*Si nous résolvons la dernière équation par rapport à* $u$ *et puis par rapport à* $x$,*on trouve*

$$x + y + 1 = \tan(x + C_1) \Longleftrightarrow y = \tan(x + C_1) - x - 1$$

### *Équations homogènes*

Nous résolvons habituellement une équation différentielle en le reconnaissant comme un certain type ou classe (par exemple, séparable, linéaire, ou exacte), puis en effectuant une procédure composée d'étapes mathématiques spécifiques, qui donne une solution de l'équation. Mais il n'est pas rare de trouver une équation différentielle qui ne tombe pas dans l'une des classes d'équations que nous savons résoudre. Les procédures qui sont abordés dans cette section peuvent être utiles dans cette situation. Dans cette section, nous étudions quatre types d'équations qui peuvent être transformés en une équation séparable ou linéaire au moyen d'une substitution ou transformation appropriée.

On dit que la fonction $f(x,y)$ est homogène de degré $n$, si

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y)$$

pour une valeur $n$, et pour tout $t, x$ et $y$. Par exemple la fonction $f(x,y) = x^2 + xy$ est homogène de degré $2$ car

$$f(tx,ty) = (tx)^2 + (tx)(ty) = t^2\left(x^2 + xy\right) = t^2 f(x,y)$$

par contre la fonction $f(x,y) = x^2 + y$ n'est pas homogène.

L'équation différentielle $y' = f(x,y)$ est homogène, si la fonction $f(x,y)$ elle–même est homogène.

Si l'équation différentielle est sous la forme $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$, elle sera dite homogène, si si à la fois $M$ et $N$ sont homogènes de même degré.

On peut toujours écrire une équation différentielle homogène sous la forme

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

et si on fait le changement de variable $u = y/x \Leftrightarrow y = ux$ on aura

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx} = f(u)$$

qui est une équation à variables séparables, et don on aura

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x}.$$

**Exemple 2.9.** *Résoudre* $(x+y)\,dx-(x-y)\,dy=0.$

**Solution.** *On commence par écrire l'équation sous la forme*

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{x+y}{x-y}\\&=\frac{1+y/x}{1-y/x}.\end{aligned}$$

Si on fait le changement de variable $u=y/x$ et on sépare les variable on trouve

$$\begin{aligned}u+x\frac{du}{dx}&=\frac{1+u}{1-u}\\x\frac{du}{dx}&=-\frac{1+u^2}{-1+u}\\\frac{1-u}{1+u^2}du&=\frac{dx}{x}.\end{aligned}$$

Après intégration on obtient

$$\tan^{-1}u-\frac{1}{2}\ln\left(1+u^2\right)=\ln|x|+C;$$

et quand on remplace $u$ par $y/x$ et on simplifie, on obtient

$$\begin{aligned}\tan^{-1}\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)&=\ln|x|+C\\\tan^{-1}\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\right)&=\ln|x|+C\\\tan^{-1}\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)+\ln|x|&=\ln|x|+C\\\tan^{-1}\frac{y}{x}-\ln\sqrt{x^2+y^2}&=C\end{aligned}$$

comme solution générale.

**Exemple 2.10.** *Résoudre* $(x^2+y^2)\,dx+(x^2-xy)\,dy=0.$

**Solution.** *Par inspection on trouve que* $M(x,y)=x^2+y^2$ *et* $N(x,y)=x^2-xy$ *sont homogènes de degré* $2$. *Si on pose* $y=ux$ *on obtient* $dy=udx+xdu$, *et après substitution* *on aura*

$$\begin{aligned}\left(x^2+u^2x^2\right)dx+\left(x^2-ux^2\right)[udx+xdu]&=0\\ x^2(1+u)\,dx+x^3(1-u)\,du&=0\\ \frac{1-u}{1+u}du+\frac{dx}{x}&=0\\ \left(-1+\frac{2}{1+u}\right)du+\frac{dx}{x}&=0\end{aligned}$$

*si on intègre on trouve*

$$\begin{aligned}-u+2\ln|1+u|+\ln|x|&=\ln|c|\\ -\frac{y}{x}+2\ln\left|1+\frac{y}{x}\right|+\ln|x|&=\ln|c|\\ \ln\left|1+\frac{y}{x}\right|^2+\ln|x|-\ln|c|&=\frac{y}{x}\\ \ln\left|\frac{(x+y)^2}{cx}\right|&=\frac{y}{x}\end{aligned}$$

*et donc la solution générale est*

$$(x+y)^2=cxe^{y/x}.$$

***Équation de type*** $(a_1x+b_1y+c_1)\,dx+(a_2x+b_2y+c_2)\,dy=0$

Nous avons utilisé diverses substitutions de $y$ pour transformer l'équation originale dans une nouvelle équation que nous pourrions résoudre. Dans le cas des équations sous la forme

$$(a_1x+b_1y+c_1)\,dx+(a_2x+b_2y+c_2)\,dy=0. \tag{2.8}$$

nous devons transformer à la fois $x$ et $y$ dans de nouvelles variables, par exemple, $u$ et $v$.

Si $a_1b_2=a_2b_1$ on peut montrer que l'équation (2.8) peut être transformée sous la forme

$$\frac{dy}{dx}=G(ax+by)$$

qu'on a étudier précédemment. Avant de considérer le cas $a_1b_2\neq a_2b_1$, observons que si $c_1 = c_2 = 0$ , alors l'équation (2.8) devient,

$$(a_1x + b_1y)\,dx + (a_2x + b_2y)\,dy = 0$$

qui peut être réécrite sous la forme

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(a_1x + b_1y)}{(a_2x + b_2y)} \Longleftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{(a_1 + b_1y/x)}{(a_2 + b_2y/x)} \tag{2.9}$$

Cette équation est homogène, dont la méthode a été décrite précédemment dans cette section.

Si $a_1b_2 \neq a_2b_1$ le système

$$\begin{aligned} a_1h + b_1k + c_1 &= 0 \\ a_2h + b_2k + c_2 &= 0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

possède une solution unique $(h, k)$ . Si on fait les transformations

$$\begin{aligned} x &= u + h \\ y &= v + k \end{aligned} \tag{2.11}$$

alors, l'équation (2.8) peut être transformée en une équation homogène

$$\frac{dv}{du} = -\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v} = -\frac{a_1 + b_1v/u}{a_2 + b_2v/u}$$

dont la méthode de résolution à été décrite dans cette section.

**Exemple 2.11.** *Trouver la solution générale de*

$$(-3x + y + 6)\,dx + (x + y + 2)\,dy = 0 \tag{2.12}$$

**Solution.** *Puisque* $a_1b_2 = (-3)(1) \neq (1)(1) = a_2b_1$, *on fera les transformations* $x = u + h$ *et* $y = v + k$, *où* $(h, k)$ *est la solution du système*

$$\begin{aligned} -3h + k + 6 &= 0 \\ h + k + 2 &= 0 \end{aligned} \tag{2.13}$$

*qui sont* $h = 1$ *et* $k = -3$. *Donc nos transformation seront* $x = u + 1$ *et* $y = v - 3$, *avec*

*$dy = dv$ et $dx = du$. Après substitution dans (2.12) on trouve l'équation*

$$(-3u + v)\, du + (u + v)\, dv = 0 \tag{2.14}$$

$$\frac{dv}{du} = -\frac{-3u + v}{u + v} = \frac{3 - v/u}{1 + v/u}. \tag{2.15}$$

*La dernière équation est homogène, donc si on pose $v = zu$. Donc $dv/du = z + u\,(dz/du)$ et après substitution on trouve*

$$z + u\frac{dz}{du} = \frac{3 - z}{1 + z}$$

*qui après séparation des variables nous donne*

$$\begin{aligned} \int \frac{z+1}{z^2 + 2z - 3} dz &= -\int \frac{1}{u} du \\ \frac{1}{2} \ln \left| z^2 + 2z - 3 \right| &= -\ln |u| + C_1 \\ z^2 + 2z - 3 &= Cu^{-2}. \end{aligned}$$

*Quand on remplace $z$ par $v/u$ on obtient*

$$\begin{aligned} (v/u)^2 + 2\,(v/u) - 3 &= Cu^{-2}, \\ v^2 + 2uv - 3u^2 &= C, \\ (y+3)^2 + 2\,(x-1)\,(y+3) - 3\,(x-1)^2 &= C. \end{aligned}$$

*Cette dernière équation nous donne une solution implicite de (2.12).*

**Exemple 2.12.** *Intégrer l'équation différentielle*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y - 1}{2x + 2y + 3}$$

**Solution.** *Dans cette équation on a $a_1 b_2 = (1)\,(2) = a_2 b_1$. Si on pose $u = x + y$ on aura*

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= 1 + \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{u-1}{2u+3} \\ \frac{du}{dx} &= \frac{3u+2}{2u+3} \end{aligned}$$

*qui est une équation à variables séparables que l'on intègre*

$$\int \frac{2u+3}{3u+2} du = \int dx$$
$$\frac{2}{3}u + \frac{5}{9}\ln|9u+6| = x + C_1$$

*si on retourne aux variables $x$ et $y$ on trouve*

$$\frac{2}{3}(x+y) + \frac{5}{9}\ln|9(x+y)+6| = x + C_1$$

*et donc la solution implicite est*

$$-3x + 6y + 5\ln|9x+9y+6| = C.$$

***Substitution sous la forme*** $y = z^m$

Considérons l'équation non homogène

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y^2 - 3x^4}{x^3}$$

on veut faire le changement de variable $y = z^m$ de tel sort que la nouvelle équation soit homogène. Donc on aura

$$mz^{m-1}\frac{dz}{dx} = \frac{2z^{2m} - 3x^4}{x^3}$$
$$\frac{dz}{dx} = \frac{2z^{2m} - 3x^4}{mz^{m-1}x^3}$$

pour avoir homogénéité on doit avoir $2m = 4 = m+2$ qui est satisfaite quand $m = 2$. Donc l'équation devient

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2z^4 - 3x^4}{2zx^3} = \left(\frac{z}{x}\right)^3 - \frac{3}{2}\frac{1}{(z/x)}$$

qui est homogène. Si on pose $z = ux \Rightarrow \dfrac{dz}{dx} = u + x\dfrac{du}{dx} = u^3 - \dfrac{3}{2u}$ qui après séparation ey intégration devient

$$\begin{aligned} u + x\frac{du}{dx} &= u^3 - \frac{3}{2u} \\ x\frac{du}{dx} &= \frac{1}{2}\frac{2u^4 - 3 - 2u^2}{u} \\ \frac{2u}{2u^4 - 2u^2 - 3}du &= \frac{dx}{x} \\ \int \frac{2u}{2u^4 - 2u^2 - 3}du &= \int \frac{dx}{x} \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} -\operatorname{arctanh}\frac{\sqrt{7}}{4}\left(4u^2 - 2\right) &= \sqrt{7}\ln|x| + C_1 \\ -\operatorname{arctanh}\frac{\sqrt{7}}{4}\left(4\left(\frac{z}{x}\right)^2 - 2\right) &= \sqrt{7}\ln|x| + C_1 \\ -\operatorname{arctanh}\frac{\sqrt{7}}{4}\left(4\frac{y}{x^2} - 2\right) &= \sqrt{7}\ln|x| + C_1 \end{aligned}$$

qui finalement nous donne la solution

$$2y = x^2 + \sqrt{7}x^2\tanh\left(-\sqrt{7}\ln x + \sqrt{7}C\right)$$

***Exercices***

Résoudre l'équation différentielle à variables séparable suivante.

**1.** $\dfrac{dy}{dx} = \sin 4x$

**2.** $\dfrac{dy}{dx} = (2x+3)^2$

**3.** $dx + e^{2x}dy = 0$

**4.** $(y-1)^2\, dx - dy = 0$

**5.** $2tdx = 3xdt$

**6.** $\dfrac{dy}{dx} + 2xy^2 = 0$

**7.** $\dfrac{dy}{dx} = e^{ax+by}$

**8.** $e^x y\dfrac{dy}{dx} = e^{-y} + e^{-2x-y}$

**9.** $yx^2 \ln x\dfrac{dy}{dx} = (y+1)^2$

**10.** $\dfrac{dx}{dt} = \left(\dfrac{x+2}{2t+3}\right)^2$

**11.** $\csc y dx + \sec^2 x dy = 0$

**12.** $\sin 5x dx + 2y\cos^3 5x dy = 0$

**13.** $(e^y+1)^2\, e^{-y}dx + (e^x+1)^3\, e^{-x}dy = 0$

**14.** $x\left(1+y^2\right)^{1/2} dx = y\left(1+x^2\right)^{1/2} dy$

**15.** $(3x^2y - xy)\, dx + (2x^3y^2 + x^3y^4)\, dy = 0$

Trouver la solution explicite de l'équation différentielle.

**16.** $\dfrac{dx}{dt} = 2\left(x^2+1\right), \qquad x(\pi/4) = 1$

**17.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2-1}{x^2-1}, \qquad y(2) = 2$

**18.** $x^2dy = (y - xy)\, dx, \qquad y(-1) = 1$

**19.** $\dfrac{dy}{dt} + 3y = 1, \qquad y(0) = 2/3$

**20.** $\sqrt{4-y^2}dx = \sqrt{1-9x^2}dy, \qquad y(0) = 1$

**21.** $(1+x^4)\, dy + x\left(1+y^2\right) dx = 0, \qquad y(1) = 0$

**22.** $dy = ye^{-x^2}dx, \qquad y(5) = 1$

**23.** $\csc^2 x dy = y^2 dx, \qquad y(-3) = 2$

Résoudre les équations différentilles sous la form $y' = G(ax + by)$.

**24.** $y' = \sqrt{x+y} - 1$

**25.** $y' = +\sqrt{y - 2x + 3}$

**26.** $y' = (x + y + 2)^2$

**27.** $y' = (x - y - 5)^2$

**28.** $y' = \sin(x - y)$

**29.** $y' = \tan^2(x + y)$

**30.** $y' = 2 + e^{(x-y+3)}$

**31.** $y' = \cos(x + y); \qquad y(0) = \pi/4$

**32.** $y' = \dfrac{2x + 3y}{2x + 3y + 1}; \qquad y(-1) = 2$

Intégrer les équations différentielles homogènes suivantes.

**33.** $(x - y)\,dx + xdy = 0$

**34.** $(x + y)\,dx + xdy = 0$

**35.** $xdx + (y - 2x)\,dy = 0$

**36.** $ydx - 2(x + y)\,dy = 0$

**37.** $(xy + yx)\,dx + x^2dy = 0$

**38.** $(x + y)\,dx - x^2dy = 0$

**39.** $-ydx + \left(x + \sqrt{xy}\right)dy = 0$

**40.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y - x}{x + y}$

**41.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + 3y}{3x + y}$

**42.** $x\dfrac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 - y^2}, x > 0$

**43.** $xy^2\dfrac{dy}{dx} = y^3 - x^3, \qquad y(1) = 2$

**44.** $(x^2 + 2y^2)\dfrac{dx}{dy} = xy, \qquad y(1) = 2$

**45.** $\left(x + e^{y/x}\right)dx - xe^{y/x} = 0, \qquad y(1) = 0$

**46.** $ydx + x(\ln x - \ln y - 1)\,dy = 0, \qquad y(1) = e$

Intégrer les équations se ramenant aux équations homogènes.

**47.** $(-x+y-1)\,dx+(x+y+3)\,dy=0$

**48.** $(x+y-1)\,dx+(-x+y-5)\,dy=0$

**49.** $(2x-y)\,dx+(4x+y-3)\,dy=0$

**50.** $(2x+y+4)\,dx+(x-2y-2)\,dy=0$

**51.** $(x+y+2)\,dx+(3x-y-6)\,dy=0$

**52.** $\cos(x+y)\,dy=\sin(x+y)\,dx$

**53.** $(-7x+3y+7)dx-(3x-7y-3)dy=0$

**54.** $(x+2y+1)dx-(2x+4y+3)dy=0$

**55.** $(x+2y+1)dx-(2x-3)dy=0$

Intégrer les équations suivantes en utilisant la transformation donnée .

**56.** $y'=\dfrac{x^4+y^2}{x^3},\ y=z^n$

**57.** $(x^2y^2-1)dy+2xy^3dx=0,\ y=z^n$

**58.** $2yy'=y^2+x-1,\ z=y^2$

**59.** $y'=\tan y+\dfrac{2\cos x}{\cos y},\ z=\sin y$

**60.** $y'+y\ln y=xy,\ z=\ln y$

**61.** $y'=-e^y-1,\ z=e^{-y}$

## 2.2 Équations différentielles linéaires

Les équations différentielles linéaires sont un type particulier d'équations différentielles qui se produit fréquemment dans les applications.

**Définition 2.2.** *Rappelons qu'une équation différentielle linéaire du premier ordre est une équation qui peut être exprimé sous la forme*

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)\,y = g(x) \tag{2.16}$$

*où* $a_0(x), a_1(x)$ *et* $g(x)$ *dépendent seulement de* $x$. *Si* $g(x) = 0$ *on dit que l'équation est* **homogène** *ou* **complémentaire**.

Par exemple l'équation

$$e^x\frac{dy}{dx} + \sin(x)\,y = \cos(x)$$

est linéaire, hors que

$$y\frac{dy}{dx} + e^x y = x + 1$$

ne l'est pas. Si on divise les deux cotés de (2.16) par $a_1(x)$, on obtient une forme plus utile appelée la **forme standard** qui est

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)\,. \tag{2.17}$$

Multiplions par une fonction $m(x)$ l'équation (2.17)

$$m(x)\frac{dy}{dx} + m(x)\,P(x)\,y = m(x)\,Q(x) \tag{2.18}$$

nous voulons trouver une fonction $m(x)$ (facteur intégrant) tel que le coté gauche de l'équation (2.18) est la dérivée d'un produit

$$m\frac{dy}{dx} + mPy = \frac{d}{dx}[my] = m\frac{dy}{dx} + m'y \tag{2.19}$$

donc

$$\begin{aligned} mP = m' &\Longleftrightarrow mP = \frac{dm}{dx} \\ \frac{dm}{m} = Pdx &\Longleftrightarrow \int \frac{dm}{m} = \int Pdx \\ \ln|m| = \int Pdx &\Longleftrightarrow m = e^{\int Pdx} \end{aligned}$$

avec ce choix de $m$ l'équation (2.18) devient

$$\begin{aligned} \underbrace{m(x)\frac{dy}{dx} + m(x)P(x)y} = m(x)Q(x) &\Longleftrightarrow \\ \frac{d}{dx}[m(x)y] = m(x)Q(x) &\Longleftrightarrow \\ m(x)y = \int m(x)Q(x)dx + C &\Longleftrightarrow \\ y = \frac{1}{m(x)}\left[\int m(x)Q(x)dx + C\right] \end{aligned}$$

la fonction $m = e^{\int Pdx}$ est appelée le **facteur intégrant** (*FI*). Dont la solution générale de (2.17) est

$$y = e^{-\int Pdx}\left[\int e^{\int Pdx} Q(x)\,dx + C\right] \tag{2.20}$$

**Théorème 2.2.** *Si $P(x)$ et $Q(x)$ sont des fonctions continues sur $I$ contenant $x_0$, alors la solution de*

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

*est égale à*

$$y = e^{-\int Pdx}\left[\int e^{\int Pdx} Q(x)\,dx + C\right]$$

**Cas particulier :** si $P(x) = p$ (constante) et $Q(x) = 0$ dans (2.17) alors l'équation devient

$$y' + py = 0$$

et sa solution générale est

$$y = Ce^{-px}$$

**Exemple 2.13.** *Trouvez la solution générale de l'équation linéaire homogène*

$$\frac{dy}{dx} - 2y = 0 \tag{2.21}$$

**Solution.** *Dans cette équation $P(x) = -2$, donc le facteur intégrant est égale à*

$$m(x) = e^{\int Pdx} = e^{\int -2dx} = e^{-2x}$$

*multipliant par $m(x) = e^{-2x}$ l'équation initiale on obtient*

$$\begin{aligned} \underbrace{e^{-2x}\frac{dy}{dx} - 2e^{-2x}y}_{} &= 0, \\ \frac{d}{dx}\left(e^{-2x}y\right) &= 0, \\ e^{-2x}y &= C \\ y &= Ce^{2x} \end{aligned}$$

*La solution générale de l'équation différentielle homogène est donc $y_h = Ce^{2x}$, $\quad x \in (-\infty, +\infty)$.*

**Cas particulier :** si $P(x) = p$ et $Q(x) = q$, où $p$ et $q$ sont des constantes dans (2.17) alors l'équation devient

$$y' + py = q$$

et sa solution générale est

$$y = \frac{q}{p} + Ce^{-px}$$

**Exemple 2.14.** *Trouvez la solution générale de l'équation linéaire non homogène*

$$\frac{dy}{dx} - 2y = 5 \tag{2.22}$$

**Solution.** *Dans cette équation $P(x) = -2$, donc le facteur intégrant est égale à*

$$m(x) = e^{\int Pdx} = e^{\int -2dx} = e^{-2x}$$

*multipliant par* $m(x) = e^{-2x}$ *l'équation initiale on obtient*

$$\begin{aligned}\underbrace{e^{-2x}\frac{dy}{dx} - 2e^{-2x}y}_{} &= 5e^{-2x},\\ \frac{d}{dx}\left(e^{-2x}y\right) &= 5e^{-2x},\\ e^{-2x}y &= -\frac{5}{2}e^{-2x} + C\\ y &= -\frac{5}{2} + Ce^{2x}\end{aligned}$$

*La solution générale de l'équation différentielle homogène est donc* $y = -\frac{5}{2} + Ce^{2x}$.

**Remarque 2.1.** *La solution de (2.22) peut être écrite comme* $y = -\frac{5}{2} + Ce^{2x} = y_p + y_h$, *où* $y_p$ *est une solution particulière de (2.22) et* $y_h$ *est la solution de (2.21).*

**Remarque 2.2.** *L'équation différentielle (2.17) a la propriété que sa solution est la somme des deux solutions :*

$$y = y_p + y_h$$

*où* $y_h$ *est la solution de l'équation homogène et* $y_p$ *est une solution particulière de l'équation (2.17) non homogène.*

*Pour le voir cela, observer que si on remplace* $y = y_p + y_h$ *dans (2.17) on obtient*

$$\begin{gathered}\frac{d}{dx}(y_p + y_h) + P(x)(y_p + y_h) =\\ \left[\underbrace{\frac{d}{dx}(y_p) + P(x)(y_p)}_{Q(x)}\right] + \left[\underbrace{\frac{d}{dx}(y_h) + P(x)(y_h)}_{0}\right] = Q(x) + 0\end{gathered}$$

Compte tenu des deux exemples précédents, nous pouvons trouver la solution générale de l'équation linéaire à coefficients constants.

**Corollaire 2.1.** *Si* $p$ *et* $q$ *sont des constantes, alors la solution générale de l'équation linéaire à coefficients constants est égale à*

$$\frac{dy}{dx} + py = q$$

*est*

$$y = \frac{q}{p} + Ce^{-px}, x \in \mathbb{R}$$

*Démonstration.* Ici $P = p, Q = q$ et donc le facteur intégrant $m = e^{-px}$, la solution générale est égale à

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int Pdx}\left[\int e^{\int Pdx} Q\left(x\right) dx + C\right] \\ &= e^{-\int pdx}\left[\int e^{\int pdx} qdx + C\right] \\ &= e^{-px}\left[\frac{q}{p}e^{px} + C\right] \\ &= \frac{q}{p} + Ce^{-px} \end{aligned}$$

□

**Corollaire 2.2.** *Si $p$ est une constante et $Q\left(x\right)$ est une fonction continue sur $I$ contenant $x_0$, alors la solution de*

$$\frac{dy}{dx} + py = Q\left(x\right)$$

*est égale à*

$$y = \int_{x_0}^{x} e^{p(s-x)} Q\left(s\right) ds + Ce^{-px}$$

*Démonstration.* ici $P = p$ et donc le facteur intégrant $m = e^{px}$, la solution générale est égale à

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} + py &= Q\left(x\right) \\ e^{px}\frac{dy}{dx} + e^{px}py &= e^{px}Q\left(x\right) \\ \frac{d}{dx}\left[e^{px}y\right] &= e^{px}Q\left(x\right) \\ e^{px}y &= \int_{x_0}^{x} e^{ps} Q\left(s\right) ds + C \\ y &= \int_{x_0}^{x} e^{p(s-x)} Q\left(s\right) ds + Ce^{-px} \end{aligned}$$

□

**Exemple 2.15.** *Trouvez la solution générale de l'équation linéaire*

$$\frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x^2} = x\cos x,\ x > 0$$

**Solution.** *Nous allons d'abord mettre l'équation linéaire sous forme standard*

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = x^2\cos x,\ x > 0 \tag{2.23}$$

*dans cette équation* $P(x) = -\frac{2}{x}$, *donc le facteur intégrant est égale à*

$$m(x) = e^{\int P dx} = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln x} = x^{-2}$$

*multipliant par* $m(x) = x^{-2}$ *l'équation (2.23) on obtient*

$$\begin{aligned}
\underbrace{x^{-2}\frac{dy}{dx} - 2x^{-3}y} &= \cos x, \\
\frac{d}{dx}\left(x^{-2}y\right) &= \cos x, \\
x^{-2}y &= \int \cos x dx = \sin x + C \\
y &= x^2\sin x + x^2C,\ x > 0 \qquad (2.24)
\end{aligned}$$

*La solution générale de (2.23) est donc (2.24).*

**Exemple 2.16.** *Trouvez la solution générale de l'équation linéaire*

$$x^2\frac{dy}{dx} - 3xy = x^6e^x,\ x > 0$$

**Solution.** *Nous allons d'abord mettre l'équation linéaire sous forme standard*

$$\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y = x^4e^x,\ x > 0 \tag{2.25}$$

*dans cette équation* $P(x) = -\frac{3}{x}$, *donc le facteur intégrant est égale à*

$$m(x) = e^{\int P dx} = e^{\int -\frac{3}{x}dx} = e^{-3\ln x} = x^{-3}$$

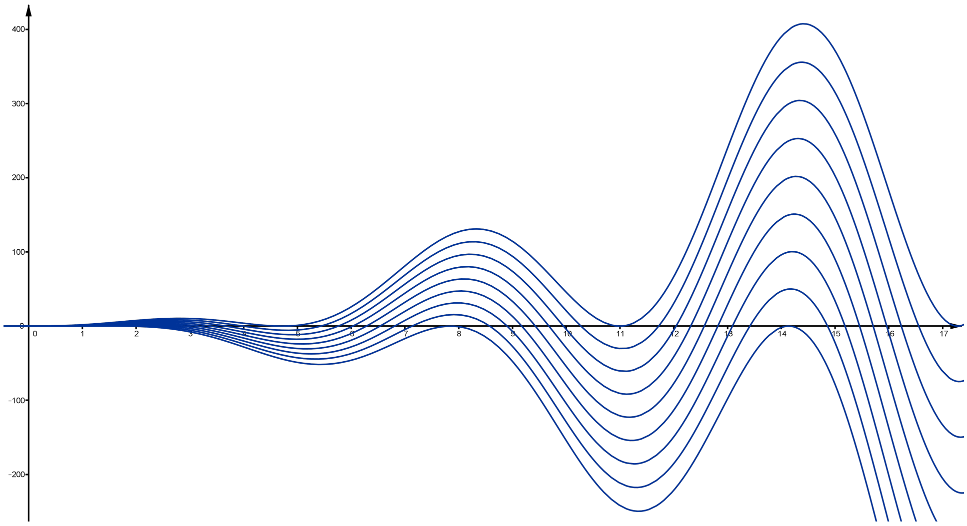


FIGURE 2.2 – Famille de courbes pour $y = x^2 \sin x + x^2 C$.

*multipliant par* $m(x) = x^{-3}$ *l'équation standard on obtient*

$$\underbrace{x^{-3}\frac{dy}{dx} - 3x^{-2}y}_{\displaystyle\frac{d}{dx}\left(x^{-3}y\right)} = xe^x,$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-3}y\right) = xe^x,$$

$$x^{-3}y = \int xe^x dx = e^x(x-1) + C$$

$$y = e^x(x-1)x^3 + Cx^3$$

*La solution générale est donc* $y = e^x(x-1)x^3 + Cx^3, \quad x > 0$.

**Exemple 2.17.** *Trouvez la solution générale de l'équation linéaire*

$$\left(x^2 - 1\right)\frac{dy}{dx} + xy = 0$$

**Solution.** *Nous allons d'abord mettre l'équation linéaire sous forme standard*

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x}{(x^2-1)}y = 0 \tag{2.26}$$

*dans cette équation* $P(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$, *qui est définie sur les intervalles* $(-\infty, 1), (-1, 1)$

*et* $(1, \infty)$*. Le facteur intégrant est égale à*

$$m(x) = e^{\int P dx} = e^{\int \frac{x}{x^2-1} dx} = e^{\frac{1}{2}\ln\left(x^2-1\right)} = \sqrt{x^2-1}$$

*On considère le facteur intégrant seulement sur les intervalles* $(-\infty, 1)$ *et* $(1, \infty)$*.*

*Multipliant par* $m(x) = \sqrt{x^2-1}$ *l'équation standard on obtient*

$$\begin{aligned}
\underbrace{\sqrt{x^2-1}\frac{dy}{dx} + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}y}_{} &= 0 \\
\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2-1}y\right) &= 0, \\
\sqrt{x^2-1}y &= C \\
y &= \frac{C}{\sqrt{x^2-1}}
\end{aligned}$$

*La solution générale est donc* $y = y = C/\sqrt{x^2-1}$, *pour* $x < -1$ *ou* $x > 1$*.*
*Notez que les valeurs* $x = -1, 1$ *sont singulières car les solutions ne sont pas définies sur ces valeurs.*

**Exemple 2.18.** ***Coefficient discontinue.***
*Trouvez la solution de l'équation linéaire avec condition initiale*

$$y' + y = f(x), \ y(0) = 1$$
$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

**Solution.** *Le facteur intégrant est égale à*

$$m(x) = e^{\int P dx} = e^{\int dx} = e^x$$

*multipliant par* $m(t) = e^x$ *l'équation standard on obtient*

$$\underbrace{e^x \frac{dy}{dt} + e^x y}_{} = \begin{cases} e^x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases},$$

$$\frac{d}{dt}(e^x y) = \begin{cases} e^x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases},$$

$$e^x y = \begin{cases} e^x + c_1, & 0 \leq x \leq 1 \\ c_2, & x > 1 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 1 + c_1 e^{-x}, & 0 \leq x \leq 1 \\ c_2 e^{-x}, & x > 1 \end{cases}$$

*La condition initiale* $y(0) = 1$ *nous donne que* $c_1 = -1$ *et donc la solution est*

$$y = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & 0 \leq x \leq 1 \\ c_2 e^{-x}, & x > 1 \end{cases}.$$

*Si on choisi* $c_2 = e - 1$ *la solution sera continue sur l'intervalle* $(0, \infty)$.

**Exemple 2.19.** ***Solution définie par intégrale.***

*Trouvez la solution générale de l'équation linéaire puis celle avec condition initiale*

$$2y' + ty = 2, \; y(0) = 1$$

**Solution.** *Nous allons d'abord mettre l'équation linéaire sous forme standard*

$$y' + \frac{t}{2} y = 1 \tag{2.27}$$

*dans cette équation* $P(t) = t/2$, *donc le facteur intégrant est égale à*

$$m(t) = e^{\int P dt} = e^{\int \frac{t}{2} dt} = e^{t^2/4}$$

*multipliant par $m(t) = e^{t^2/4}$ l'équation standard on obtient*

$$\underbrace{e^{t^2/4}\frac{dy}{dt} + \tfrac{1}{2}e^{t^2/4}ty}_{\frac{d}{dt}\left(e^{t^2/4}y\right)} = e^{t^2/4},$$
$$\frac{d}{dt}\left(e^{t^2/4}y\right) = e^{t^2/4},$$
$$e^{t^2/4}y = \int_0^t e^{s^2/4}ds + C$$
$$y = e^{-t^2/4}\int_0^t e^{s^2/4}ds + Ce^{-t^2/4}$$

*La condition initiale $y(0) = 1$ nous donne que $C = 1$ et donc la solution est*

$$y = e^{-t^2/4}\int_0^t e^{s^2/4}ds + e^{-t^2/4}.$$

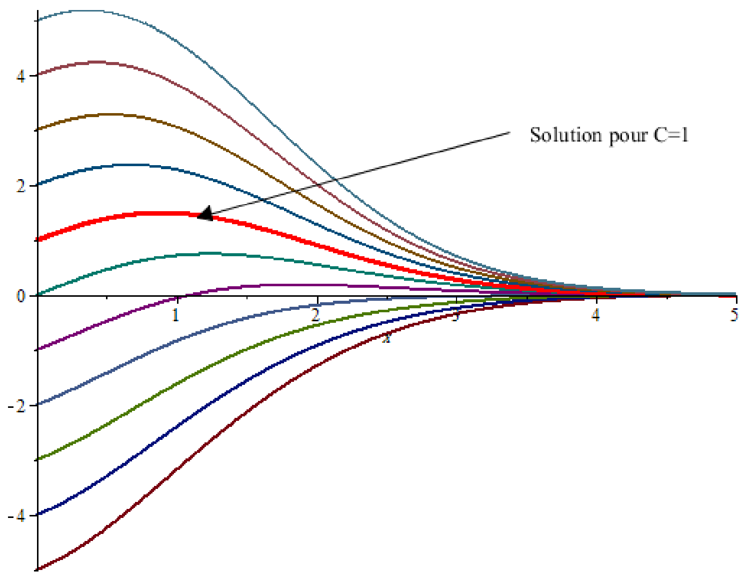



Figure 2.3 : Courbes intégrales de $2y' + ty = 2$.

**Exemple 2.20.** *Résoudre l'équation* $(2x - y)\dfrac{dy}{dx} = 2y$

**Solution.** *Cette équation n'est pas linéaire quand on la considère par rapport à* $\dfrac{dy}{dx}$. *Cependant si on la considère par rapport à* $\dfrac{dx}{dy}$ *elle le sera.*

$$\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = -\frac{1}{2}y \tag{2.28}$$

*Le facteur intégrant est* $m(x) = e^{\int -\frac{1}{y}dy} = y^{-1}$ *On aura donc*

$$\begin{aligned} \left[y^{-1}x\right]' &= -\frac{1}{2} \\ y^{-1}x &= -\frac{1}{2}y + C \\ x &= -\frac{1}{2}y^2 + Cy \end{aligned}$$

### *Équation de Bernoulli*

C'est une équation de la forme

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)\,y^n \text{ avec } n \neq 0, 1 \tag{2.29}$$

où $P(x)$ et $Q(x)$ sont continues sur l'intervalle $(a, b)$ et $n$ est un nombre réel.

On transforme cette équation en une équation linéaire en la divisant par $y^n$ et en faisant le changement de variable $v = y^{1-n}$.

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)\,y^{1-n} = Q(x) \tag{2.30}$$

et en faisant le changement de variable $v = y^{1-n}$.Ce qui implique que

$$\frac{dv}{dx} = (1-n)\,y^{-n}\frac{dy}{dx} \Longleftrightarrow \frac{1}{(1-n)}\frac{dv}{dx} = y^{-n}\frac{dy}{dx}. \tag{2.31}$$

Effectuons ces opérations on obtient l'équation linéaire

$$\frac{1}{(1-n)}\frac{dv}{dx} + P(x)\,v = Q(x) \tag{2.32}$$

$$\frac{dv}{dx} + (1-n)\,P(x)\,v = (1-n)\,Q(x) \tag{2.33}$$

Nous savons comment résoudre cette équation. Par la suite, il nous suffira de revenir à la variable $y$ pour avoir notre solution finale.

**Exemple 2.21.** *Résoudre* $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = y^2,\ x > 0.$

**Solution.** *En divisant par $y^2$ on obtient*

$$y^{-2}\frac{dy}{dx}+\frac{y^{-1}}{x}=1.$$

*Posons $v=y^{-1}$, alors*

$$\frac{dv}{dx}=-y^{-2}\frac{dy}{dx}.$$

*L'équation devient*

$$\begin{aligned}-\frac{dv}{dx}+\frac{v}{x}&=1\\ \frac{dv}{dx}-\frac{1}{x}v&=-1\end{aligned}$$

*Le facteur intégrant est alors* $e^{\int-\frac{dx}{x}}=e^{-\ln x}=\frac{1}{x}$.

*Si on multiplie l'équation par $\frac{1}{x}$ on trouve*

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\frac{dv}{dx}-\frac{1}{x^2}v&=-\frac{1}{x},\\ \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}v\right)&=-\frac{1}{x},\\ \frac{1}{x}v&=-\ln x+C\\ v&=-x\ln x+Cx\end{aligned}$$

La solution est donc

$$y=\frac{1}{-x\ln x+Cx}.$$

**Exemple 2.22.** *Résoudre l'équation avec valeur initiale et trouvez l'intervalle de validité*

$$\frac{dy}{dx}+\frac{4}{x}y=x^3y^2,\ y(2)=-1,\ x>0.$$

**Solution.** *En divisant par $y^2$ on obtient*

$$y^{-2}\frac{dy}{dx}+\frac{4}{x}y^{-1}=x^3.$$

*Posons* $v = y^{-1}$, *alors*

$$\frac{dv}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx}.$$

*L'équation devient*

$$-\frac{dv}{dx} + \frac{4}{x}v = x^3 \Longleftrightarrow \frac{dv}{dx} - \frac{4}{x}v = -x^3.$$

*Le facteur intégrant est alors* $e^{\int -\frac{4}{x}dx} = e^{-4\ln x} = x^{-4}$.

*Si on multiplie l'équation par le facteur intégrant on trouve*

$$\begin{aligned}
x^{-4}\frac{dv}{dx} - 4x^{-3}v &= -x^{-1} \\
\left(x^{-4}v\right)' &= -x^{-1} \\
x^{-4}v &= -\ln x + c \\
v(x) &= x^4(-\ln x + c) \\
y(x) &= \frac{1}{x^4(c - \ln x)}
\end{aligned}$$

*Pour la condition initiale* $y(2) = -1$ *on trouve*

$$\begin{aligned}
-1 = y(2) &= \frac{1}{2^4(c - \ln 2)} \\
-1 &= 2^4(c - \ln 2) \\
c &= -2^{-4} + \ln 2 = \ln 2 - \frac{1}{16}
\end{aligned}$$

*la solution est donc*

$$\begin{aligned}
y(x) &= \frac{1}{x^4\left(\ln 2 - \frac{1}{16} - \ln x\right)} \\
&= \frac{-16}{x^4(-16\ln 2 + 1 + 16\ln x)} \\
&= \frac{-16}{x^4\left(16\ln\frac{x}{2} + 1\right)}.
\end{aligned}$$

*Pour l'intervalle de validité le terme* $16\ln\frac{x}{2} + 1 \neq 0$ *c'est-à-dire* $x \neq 2e^{-1/16}$. *Donc* *l'intervalle de validité est l'un des deux intervalles*

$$I_1 = \left(0, 2e^{-1/16}\right) \text{ ou bien } I_2 = \left(2e^{-1/16}, \infty\right)$$

**Exemple 2.23.** *Résoudre l'équation avec valeur initiale et trouvez l'intervalle de validité*

$$6\frac{dy}{dx} - 2y = xy^4, \; y(0) = -2.$$

**Solution.** *On multiplie par* $\frac{-1}{2}y^{-4}$ *on obtient*

$$-3y^{-4}\frac{dy}{dx} + y^{-3} = -\frac{x}{2}$$

*Posons* $v = y^{-3}$, *alors*

$$\frac{dv}{dx} = -3y^{-4}\frac{dy}{dx}.$$

*L'équation devient*

$$\frac{dv}{dx} + v = -\frac{x}{2}.$$

*Le facteur intégrant est alors* $e^{\int dx} = e^x$.

*Si on multiplie l'équation par le facteur intégrant on trouve*

$$\begin{aligned}
e^x\frac{dv}{dx} + e^x v &= -\frac{x}{2}e^x, \\
(e^x v)' &= -\frac{x}{2}e^x \\
e^x v &= \int -\frac{x}{2}e^x dx \\
e^x v &= -\frac{1}{2}e^x(x-1) + c \\
v &= -\frac{1}{2}(x-1) + ce^{-x} \\
y(x) &= \frac{1}{v^{1/3}(x)} = \left[\frac{2}{-(x-1) + 2ce^{-x}}\right]^{1/3}
\end{aligned}$$

*Pour la condition initiale* $y(0) = -2$ *on trouve*

$$-2 = y(0) = \frac{1}{v^{1/3}(0)} = \frac{1}{(1/2+c)^{1/3}}$$
$$-\frac{1}{8} = \frac{1}{2} + c \Longleftrightarrow c = -\frac{5}{8}$$

*la solution est donc*

$$y(x) = \left[\frac{-8}{4(x-1)+5e^{-x}}\right]^{1/3}$$

*Puisque le dénominateur n'est jamais nul, l'intervalle de validité est* $\mathbb{R}$.

### *Équation de Riccati*

L'équation différentielle de Riccati est une équation qui peut être écrite sous la forme

$$\frac{dy}{dx} = f_2(x)\,y^2 + f_1(x)\,y + f_0(x) \tag{2.34}$$

où les fonctions $f_2, f_1$ et $f_0$ sont continues sur $I$. Notez que :

- Si $f_2 \equiv 0$ on obtient une équation linéaire.
- Si $f_0 \equiv 0$ on obtient une équation de Bernoulli.
- Si $f_2 \equiv f_0 \equiv 0$ ou $f_1 \equiv f_0 \equiv 0$ on obtient une équation séparable.
- Si $f_2, f_1$ et $f_0$ sont constantes on obtient une équation séparable.

Pour le cas général on suppose qu'on possède une solution particulière $u$ a priori et on suppose que la solution générale est $y = u + v$, alors

$$\begin{aligned} y' &= u' + v' \\ &= f_2(u+v)^2 + f_1(u+v) + f_0 \\ &= \left[f_2u^2 + f_1u + f_0\right] + \left[f_2v^2 + 2f_2uv + f_1v\right] \\ &= u' + v\left[2f_2u + f_1\right] + v^2 f_2 \end{aligned}$$

après simplification on obtient

$$v' = v\left[2f_2u + f_1\right] + v^2 f_2$$
$$v' - v\left[f_2u + f_1\right] = v^2 f_2$$

qui est une équation de Bernoulli avec $n = 2$, dont la solution sera obtenue si on pose $z = v^{-1}$.

Ci-dessous, nous considérons certains cas particuliers bien connus de l'équation de Riccati.

**Exemple 2.24.** *Résoudre l'équation de Ricatti*

$$y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2 = 1 + (x - y)^2$$

*avec solution particulière $u = x$.*

**Solution.** *Si on remplace $y$ par $x$ dans l'equation on trouve que $x' = 1 + (x - x)^2$, qui montre qu'on effet $u = x$ est une solution. Posons $y = x + v$ l'équation devient*

$$\begin{aligned} y' &= 1 + v' \\ &= 1 + (x - x - v)^2 \\ &= 1 + v^2 \end{aligned}$$

*qui donne*

$$\begin{aligned} v' &= \frac{dv}{dx} = v^2 \\ \frac{dv}{v^2} &= dx \Longleftrightarrow \\ -\frac{1}{v} &= x + c \\ v &= -\frac{1}{x + c} \end{aligned}$$

*Noter que $v = 0$ est une solution singuliere de $v' = v^2$ qui n'est pas couverte par la solution dessus. La solution générale est donc*

$$y = x - \frac{1}{x + c} \;\; \textit{et} \;\; y = x, c \in \mathbb{R}.$$

**Exemple 2.25.** *Résoudre l'équation*

$$y' + y^2 = \frac{2}{x^2}$$

*avec solution particulière $y = 2x^{-1}$.*

**Solution.** *Posons $y = 2x^{-1} + v$, alors l'équation devient*

$$y' = \left(2x^{-1} + v\right)' = -\left(2x^{-1} + v\right)^2 + 2x^{-2}$$

$$-2x^{-2} + v' = -\left(4x^{-2} + 4x^{-1}v + v^2\right) + 2x^{-2}$$
$$v' + \frac{4}{x}v = -v^2$$

*où la dernière équation est de Bernoulli.*
*Si on divise par $-v^2$ et on fait le changement de variable $z = \frac{1}{v}, \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}$, on trouve*

$$-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} - \frac{4v}{x} = 1$$

*cette équation est équivalente à l'équation linéaire*

$$\frac{dz}{dx} - \frac{4}{x}z = 1$$

*dont la solution est*
$$z = -\frac{x}{3} + Cx^4$$

*et don*
$$v = \frac{1}{-\frac{x}{3} + Cx^4} = -\frac{3}{x - 3Cx^4}.$$

*Donc*
$$y = \frac{2}{x} - \frac{3}{x - 3Cx^4},\ C \in \mathbb{R}.$$

**Exemple 2.26.** *Résoudre $\frac{dy}{dx} = y^2 + 2y + 2$.*

**Solution.** *Dans ce cas les fonctions sont constantes, donc l'équation est séparable.*

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + 2y + 2 \Longleftrightarrow \frac{dy}{y^2 + 2y + 2} = dx$$
$$\int \frac{dy}{y^2 + 2y + 2} = \int dx \Longleftrightarrow \int \frac{dy}{(y+1)^2 + 1} = \int dx$$
$$\tan^{-1}(y+1) = x + c \Longleftrightarrow y = \tan(x+c) - 1,\ c \in \mathbb{R}$$

### *Équation de Lagrange*

Une équation différentielle de type

$$y = xg\left(y'\right) + f\left(y'\right) \tag{2.35}$$

où $g(y')$ et $f(y')$ sont des fonctions connues et différentiables sur un certain intervalle est appelée équation différentielle de Lagrange.

Si on pose $y' = p$ l'équation (2.35) devient

$$y = xg\left(p\right) + f\left(p\right) \tag{2.36}$$

si on dérive (2.36) par rapport à $x$ on trouve l'équation

$$y' = p = g\left(p\right) + \left[xg'\left(p\right) + f'\left(p\right)\right]\frac{dp}{dx} \tag{2.37}$$

qui devient après un simple réarrangent

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p - g\left(p\right)}{xg'\left(p\right) + f'\left(p\right)}. \tag{2.38}$$

Si on inverse les variables on trouve

$$\frac{dx}{dp} = \frac{xg'\left(p\right) + f'\left(p\right)}{p - g\left(p\right)} \tag{2.39}$$

avec la condition $p - g\left(p\right) \neq 0$. L'équation (2.39) est une équation linéaire car on peut l'écrire comme

$$\frac{dx}{dp} - \frac{g'\left(p\right)}{p - g\left(p\right)}x = \frac{f'\left(p\right)}{p - g\left(p\right)} \tag{2.40}$$

dont la solution sera appelée

$$x = F\left(p, c\right), c \in \mathbb{R}. \tag{2.41}$$

Pour déterminer la solution générale de (2.35) on remplace (2.41) dans (2.36) pour obtenir

$$y = F\left(p, c\right)g\left(p\right) + f\left(p\right) \tag{2.42}$$

on essai d'eliminer $p$ pour avoir une équation de la forme

$$\varphi(x, y, c) = 0 \tag{2.43}$$

sinon, on utilise la variable $p$ comme un paramètre dans une solution parametrique donnée par

$$\begin{aligned} x = & \quad F(p, c), c \in \mathbb{R} \\ y = & \quad F(p, c)\, g(p) + f(p) \end{aligned} \tag{2.44}$$

L'équation de Lagrange peut egalement avoir une solution singulière si $g(p) - p = 0$. La solution singulière est donnee par l'expression :

$$y = g(c)x + f(c)$$

ou $c$ est la solution de $g(p) - p = 0$.

**Exemple 2.27.** *Trouver la solution générale et singulière de l'équation différentielle*

$$y = 2xy' - 3(y')^2$$

**Solution.** *Ici, nous voyons que nous avons une équation de Lagrange avec $g(y') = 2y'$ et $f(y') = -3y'$. Nous allons la résoudre en utilisant la méthode de dérivation. Posons $y' = p$, donc l'équation peut être écrite sous la forme :*

$$y = 2xp - 3p^2.$$

*Si on dérive par rapport à $x$ on trouve*

$$\frac{dy}{dx} = p = 2p + (2x - 6p)\frac{dp}{dx} \tag{2.45}$$

$$-p = (2x - 6p)\frac{dp}{dx} \tag{2.46}$$

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2x}{p} = +6 \tag{2.47}$$

*Comme on peut le voir, on obtient une équation linéaire de la fonction $x(p)$. Le facteur* *intégrant est*

$$m(p) = e^{\int \frac{2}{p}dp} = e^{2\ln|p|} = p^2.$$

*La solution générale de l'équation linéaire est donnée par*

$$x(p) = 2p + cp^{-2}.$$

*En substituant cette expression pour $x$ dans l'équation de Lagrange, nous obtenons :*

$$y = 2\left(2p + cp^{-2}\right)p - 3p^2 = p^2 + 2cp^{-1}$$

*Ainsi, la solution générale sous forme paramétrique est définie par le système d'équations :*

$$\begin{cases} x = 2p + cp^{-2} \\ y = p^2 + 2cp^{-1} \end{cases}$$

*En outre, l'équation de Lagrange peut avoir une solution singulière. En résolvant l'équation $g(p) - p = 0$, nous trouvons la racine :*

$$2p - p = 0 \Longrightarrow p = 0.$$

*Par conséquent, la solution singulière est exprimée par la fonction linéaire :*

$$y = g(0)x + f(0) = 0x + 0 = 0.$$

***Équation de Clairaut***

L'équation de Clairaut est un cas particulier de l'équation de Lagrange quand $g(y') = y'$. Elle a donc la forme :

$$y = xy' + f(y') \tag{2.48}$$

où $f(y')$ est fonction non linéaire. Elle est résolu de la même manière en introduisant un paramètre. Si on pose $y' = p$ l'équation (2.48) devient

$$y = xp + f(p) \tag{2.49}$$

si on dérive (2.49) par rapport à $x$ on trouve l'équation

$$y' = p = p + [x + f'(p)] \frac{dp}{dx} \tag{2.50}$$

donc on aura

$$[x + f'(p)] \frac{dp}{dx} = 0. \tag{2.51}$$

Si $\dfrac{dp}{dx} = 0$ on aura $p = c \in \mathbb{R}$, et en remplacant $p = c$ dans (2.49) on obtient la solution générale

$$y = cx + f(c). \tag{2.52}$$

En outre si $x + f'(p) = 0$ on obtient une solution singulière de forme paramétrique

$$\begin{cases} x = -f'(p), p \in \mathbb{R} \\ y = -f'(p)p + f(p) \end{cases} \tag{2.53}$$

**Exemple 2.28.** *Trouvez la solution générale et la solution singulière de l'équation différentielle $y = xy' + (y')^2$.*

**Solution.** *C'est une équation de Clairaut. On posant $y' = p$ l'équation devient*

$$y = xp + p^2.$$

*Si on dérive par rapport à $x$ on touve*

$$p = p + (x + 2p)\frac{dp}{dx} 0 = (x + 2p)\frac{dp}{dx}$$

*Si $\frac{dp}{dx} = 0$ on obtient la solution générale est*

$$y = cx + c^2.$$

*Si*

$$(x + 2p) = 0 \Longrightarrow x = -2p$$

*on trouve la solution singulière*

$$\begin{cases} x = & -2p \\ y = & xp + p^2 \end{cases}$$

*et si on élimine $p$ on trouve*

$$y = x\left(-\frac{x}{2}\right) + \left(-\frac{x}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}x^2.$$

*Du point de vue géométrique, la courbe $y = -x^2/4$ est une enveloppe de la famille des lignes droites $y = cx + c^2$, définies par la solution générale.*

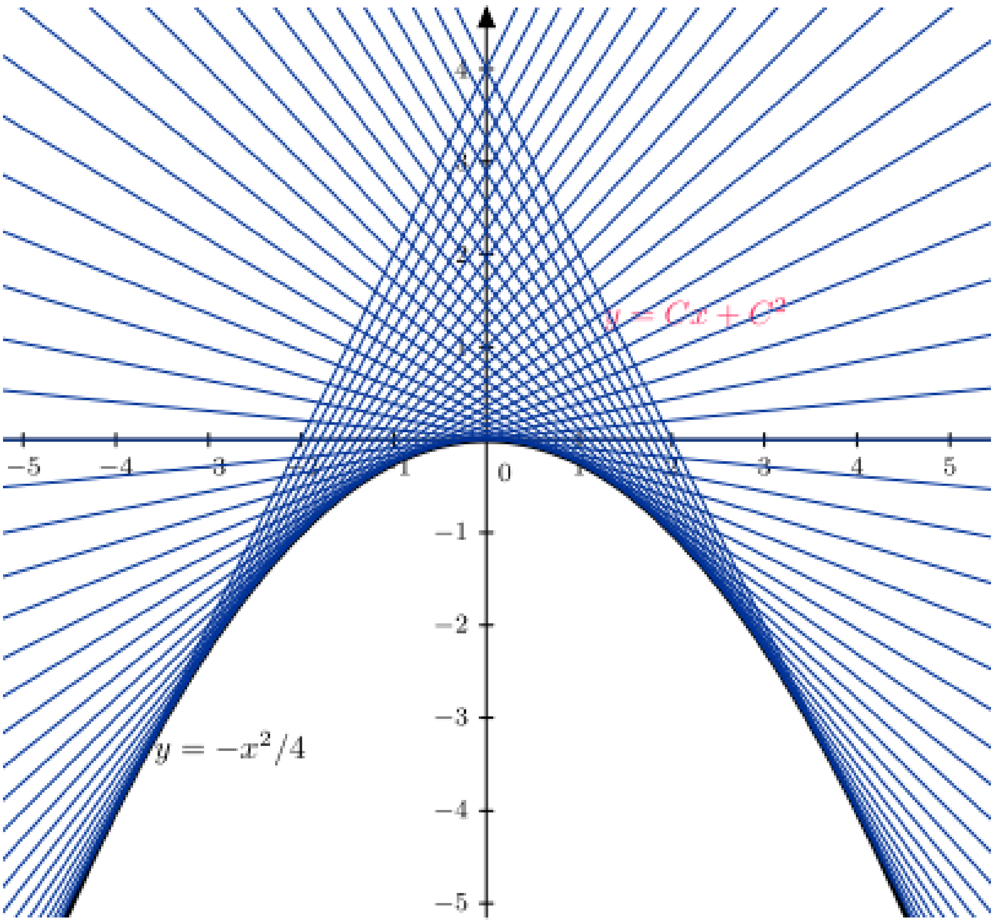



Figure 2.4 : Courbe des solutions de $y = xy' + (y')^2$

# Exercices

Trouver la solution générale de l'équation différentielle donnée. Donnez le plus grand intervalle $I$ sur lequel la solution générale est définie.

**1.** $\dfrac{dy}{dx} = 3y$

**2.** $3\dfrac{dy}{dx} + 6y = 4$

**3.** $\dfrac{dy}{dx} + y = e^{2x}$

**4.** $y' + 3x^2 y = x^2$

**5.** $y' + 2xy = x^3$

**6.** $x^2 y' + xy = 3$

**7.** $y' = 2y + x^2 + 4$

**8.** $x\dfrac{dy}{dx} - y = x^2 \sin x$

**9.** $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = 3$

**10.** $x\dfrac{dy}{dx} + 4y = x^3 - x$

**11.** $(1+x)\dfrac{dy}{dx} - xy = x + x^2$

**12.** $x^2\dfrac{dy}{dx} + x(x+2)\,y = e^x$

**13.** $\cos x\dfrac{dy}{dx} + (\sin x)\,y = 1$

Trouver la solution de l'équation différentielle avec condition initiale. Donnez le plus grand intervalle $I$ sur lequel la solution est définie.

**14.** $x\dfrac{dy}{dx} + y = e^x,\ y(1) = 2$

**15.** $t\dfrac{dx}{dt} - x = 2t^2,\ t(1) = 5$

**16.** $(x+1)\dfrac{dy}{dx} + y = \ln x,\ y(1) = 10$

**17.** $y' + (\tan x)\,y = \cos^2 x,\ y(0) = -1$

**18.** $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = xe^x,\ y(1) = e - 1$

**19.** $\dfrac{dy}{dx} + 4y = e^{-x},\ y(0) = \dfrac{4}{3}$

**20.** $\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{3}{t}x = t^2 \ln t + \dfrac{1}{t^2},\ x(1) = 0$

**21.** $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{3}{x}y + 2 = 3x,\ y(1) = 1$

**22.** $\sin x \dfrac{dy}{dx} + y \cos x = x \sin x,\ y(\pi/2) = 2$

**23.** $\dfrac{dy}{dx} + 2y = f(x),\ y(0) = 0$ ou $f(x) = \begin{cases} 1, 0 \leq x \leq 3 \\ 0, x > 3 \end{cases}$

**24.** $\dfrac{dy}{dx} + y = f(x),\ y(0) = 1$ ou $f(x) = \begin{cases} 1, 0 \leq x \leq 1 \\ -1, x > 1 \end{cases}$

**25.** $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = f(x),\ y(0) = 2$ ou $f(x) = \begin{cases} x, 0 \leq x < 1 \\ 0, x \geq 1 \end{cases}$

**26.** $(1 + x^2) \dfrac{dy}{dx} + 2xy = f(x),\ y(0) = 0$ ou $f(x) = \begin{cases} x, 0 \leq x < 1 \\ -x, x \geq 1 \end{cases}$

**27.** $\dfrac{dy}{dx} + P(x) y = 4x,\ y(0) = 3$ ou $P(x) = \begin{cases} 2, 0 \leq x \leq 1 \\ -2/x, x > 1 \end{cases}$

**28.** Trouver une courbe passant par le point $(1, -2)$ telle que la pente de la tangente en chaque point soit égale à l'ordonnée correspondante augmentée de quatre unités.

Trouver les solutions des équations différentielles de Bernoulli suivantes.

**29.** $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = x^2 y^2$

**30.** $\dfrac{dy}{dx} - y = e^{2x} y^3$

**31.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y}{x} - x^2 y^2$

**32.** $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x-2} = 2(x-2) y^{1/2}$

**33.** $\dfrac{dy}{dx} + xy^3 + \dfrac{y}{x} = 0$

**34.** $\dfrac{dy}{dx} + y = e^x y^{-2}$

**35.** $\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{r^2 + 2rt}{t^2}$

**36.** $\dfrac{dy}{dx} + y = -xy^3$

**37.** $x^2 \dfrac{dy}{dx} - 2xy = 3y^4; \qquad y(1) = 1/2$

**38.** $y^{1/2} \dfrac{dy}{dx} + y^{3/2} = 1; \qquad y(0) = 4$

Vérifier que $u(x)$ est une solution de l'équation de Riccati et trouver les autres solutions.

**39.** $y' = x^3 (y - x)^2 + \dfrac{y}{x}; \qquad u(x) = x$

**40.** $y' = y^2 - \dfrac{y}{x} - \dfrac{1}{x^2}; \qquad u(x) = x^{-1}$

**41.** $y' = 1 + t^2 - 2ty + y^2; \qquad u(t) = t$

**42.** $y' = \dfrac{2\cos^2 t - \sin^2 t + y^2}{2\cos t}; \qquad u(t) = \sin t$

**43.** $y' = x^3 y^2 + y x^{-1} + x^5; \qquad u(x) = x$

Intégrer les équations de Lagrange suivantes.

**44.** $y = 2xy' + (y')^2$

**45.** $y = 2x(y')^2 + (y')^2$

**46.** $y = x(1 + y') + (y')^2$

**47.** $y = y(y')^2 + 2xy'$

**48.** $2y = 4xy' + \ln y'$

**49.** $y = xy' + \sqrt{1 + (y')^2}$

## 2.3 Équations exactes

Dans cette section, nous examinons les équations du premier ordre sous la forme différentielle $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$. En appliquant un test simple sur $M$ et $N$, nous pouvons déterminer si $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ est une différentielle d'une fonction $f(x,y)$. Si la réponse est oui, nous pouvons construire $f$ par intégration partielle.

Bien que l'équation simple du premier ordre

$$ydx + xdy = 0$$

est séparable, nous pouvons résoudre l'équation d'une autre manière en reconnaissant que l'expression sur le côté gauche de l'égalité est la différentielle de la fonction $f(x,y) = xy$, c-a-d

$$0 = ydx + xdy = d\,(xy)$$

et donc la solution sera tout simplement la famille

$$xy = C$$

**Différentielle d'une fonction de deux variables :** si $z = f(x,y)$ est une fonction à deux variables dont les dérivées partielles du premier ordre sont continues dans une région $R$ du plan–$xy$, alors sa différentielle est

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \tag{2.54}$$

dans le cas particulier quand $f\,(x,y) = C$, où $C$ est une constante, alors (2.54) implique que

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0 \tag{2.55}$$

en d'autres termes la famille de fonctions $f\,(x,y) = C$ est une solution de l'équation différentielle (2.55). Par exemple la famille de fonctions

$$x^3 - 4xy + y^2 = C$$

est une solution de l'équation différentielle

$$\left(3x^2 - 4y\right) dx + (-4x + 2y)\, dy = 0$$

Maintenant supposons qu'on a l'équation

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{2.56}$$

et supposons qu'on peut trouver une fonction $f\,(x, y)$ telle que

$$M = \frac{\partial f}{\partial x} = f_x \text{ et } N = \frac{\partial f}{\partial y} = f_y \tag{2.57}$$

alors on peut écrire (2.56) sous la forme

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0 \;\text{ où }\; df = 0 \tag{2.58}$$

et sa solution générale est donc

$$f\,(x, y) = C$$

dans ce cas on dit que l'équation différentielle (2.56) est **exacte**.

Supposons maintenant que l'équation différentielle (2.56) est exacte, alors il existe une fonction $f$ qui satisfait (2.57). Nous savons du calcul différentiel élémentaire que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \tag{2.59}$$

où bien

$$M_y = \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = N_x \tag{2.60}$$

et donc (2.60) est une condition nécessaire pour que (2.56) soit exacte. Nous montrerons également que cette condition est suffisante en montrant que (2.60) nous permet de construire une fonction $f$ qui satisfait les équations (2.57). Nous commençons par l'intégration de la première des équations de (2.57) par rapport à $x$ :

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = M \Longleftrightarrow f = \int M dx + g\,(y) \tag{2.61}$$

si on utilise le fait que

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = N$$

on trouve que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int M dx + g'(y) = N$$
$$g'(y) = N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx$$

cela donne

$$g(y) = \int \left( N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx \right) dy \tag{2.62}$$

à condition que la fonction à intégrer ici est une fonction seulement de $y$. Cela sera vrai si la dérivée de l'intégrale par rapport à $x$ est égal à 0, et comme la dérivé en question est égale à

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx \right) &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int M dx \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \int M dx \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \\ &= 0 \end{aligned}$$

En résumé, nous avons prouvé la théorème suivant :

**Théorème 2.3.** *l'équation (2.56) est exacte si et seulement si $M_y = N_x$, et dans ce cas, sa solution générale est $f(x, y) = C$, où $f$ est donnée par (2.61) et (2.62).*

**Remarque 2.3.** *On doit souligner ici c'est l'équation $f(x, y) = C$, et non pas la fonction $f$, qui est la solution générale de (2.56).*

**Exemple 2.29.** *Intégrer l'équation différentielle suivante*

$$2xydx + \left(x^2 - 1\right) dy = 0.$$

**Solution.** *Avec $M = 2xy$ et $N = (x^2 - 1)$ on a*

$$M_y = 2x = N_x$$

*donc l'équation est exacte, et en utilisant théorème (2.3) il existe une fonction* $f(x, y)$ *telle que*

$$f_x = M = 2xy \text{ et } f_y = N = x^2 - 1 \tag{2.63}$$

*en utilisant la première équation on obtient*

$$f(x, y) = x^2 y + g(y).$$

*Si on dérive par rapport à* $y$ *on trouve*

$$f_y = x^2 + g'(y) = x^2 - 1$$

*donc*

$$g'(y) = -1 \Longrightarrow g(y) = -y.$$

*Donc*

$$f(x, y) = x^2 y - y$$

*et*

$$x^2 y - y = C$$

*est la solution générale. Si nous résolvons l'équation par rapport à la variable* $y$ *on trouvera la solution explicite*

$$y = \frac{C}{x^2 - 1}$$

*qui est définie sur tout intervalle ne contenant ni* $x = -1$ *ni* $x = 1$.

**Exemple 2.30.** *Résoudre l'équation différentielle*

$$\left(e^{2y} - y\cos xy\right)dx + \left(2xe^{2y} - x\cos xy + 2y\right)dy = 0.$$

**Solution.** *Avec* $M = (e^{2y} - y\cos xy)$ *et* $N = (2xe^{2y} - x\cos xy + 2y)$ *on a*

$$M_y = 2e^{2y} - \cos xy + xy\sin xy = N_x$$

*donc l'équation est exacte, et en utilisant théorème (2.3) il existe une fonction* $f(x, y)$

*telle que*

$$f_x = M = e^{2y} - y\cos xy \ \text{ et } \ f_y = N = 2xe^{2y} - x\cos xy + 2y \tag{2.64}$$

*en utilisant la deuxième équation on obtient*

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int \left(2xe^{2y} - x\cos xy + 2y\right) dy \\ &= xe^{2y} - \sin xy + y^2 + h(x). \end{aligned}$$

*Si on dérive par rapport à $x$ on trouve*

$$f_x = e^{2y} - y\sin xy + h'(x) = M = e^{2y} - y\cos xy$$

*donc*

$$h'(x) = 0 \Longrightarrow h(x) = c.$$

*Donc*

$$f(x,y) = xe^{2y} - \sin xy + y^2 + c$$

*et*

$$xe^{2y} - \sin xy + y^2 = C$$

*représente la solution générale.*

**Exemple 2.31.** *Intégrer l'équation différentielle suivante avec condition initiale*

$$e^y dx + (xe^y + 2y)\, dy = 0, \ y(0) = 1.$$

**Solution.** *Avec $M = e^y$ et $N = (xe^y + 2y)$ on a*

$$M_y = e^y = N_x$$

*donc l'équation est exacte, et en utilisant théorème (2.3) il existe une fonction $f(x,y)$ telle que*

$$f_x = M = e^y \ \text{ et } \ f_y = N = xe^y + 2y \tag{2.65}$$

*en utilisant la première équation on obtient*

$$
\begin{aligned}
f_x &= e^y \\
f(x,y) &= \int e^y dx \\
&= xe^y + g(y).
\end{aligned}
$$

*Si on dérive par rapport à $y$ on trouve*

$$f_y = xe^y + g'(y) = N = xe^y + 2y$$

*donc*

$$g'(y) = 2y \Longrightarrow g(y) = y^2.$$

*Donc*

$$f(x,y) = xe^y + y^2$$

*et*

$$xe^y + y^2 = C$$

*représente la solution générale. Si on utilise la condition initiale $y(0) = 1,$ on obtient $C = 1$ et donc l'équation à une solution unique représentée par*

$$xe^y + y^2 = 1$$

***Facteurs intégrants spéciaux***

Le lecteur a sans doute remarqué que les équations différentielles exactes sont relativement rares, parce que l'exactitude dépend d'un équilibre précis de la forme de l'équation qui est facilement détruit par des changements mineurs. Dans ces circonstances, il est raisonnable de se demander si les équations exactes méritent d'être discutés du tout. Dans la présente section, nous allons essayer de convaincre le lecteur qu'elles méritent.

Il est facile de vérifier que l'équation

$$ydx + \left(x^2y - x\right) dy = 0$$

n'est pas exacte, car $M_y = 1$ et $N_x = 2xy - 1$. Mais si on multiplie l'équation par $1/x^2$, l'équation devient
$$\frac{y}{x^2}dx + \left(y - \frac{1}{x}\right) dy = 0$$
qui est exacte, car $M_y = 1/x^2 = N_x$.

**Exemple 2.32.** *Montrer que $\mu(x, y) = xy^2$ est un facteur intégrant de*

$$(2y - 6x)\, dx + \left(3x - 4x^2y^{-1}\right) dy = 0$$

*puis utiliser ce facteur intégrant pour résoudre l'équation*

**Solution.** *Il est clair que l'équation n'est pas exact car $M_y = 2 \neq N_x = 3 + 8xy^{-1}$. Si on multiplie par $\mu(x, y) = xy^2$ on obtient l'équation*

$$\left(2xy^3 - 6x^2y^2\right) dx + \left(3x^2y^2 - 4x^3y\right) dy = 0$$

*qui est exacte car $M_y = 6xy^2 - 12x^2y = N_x$.*

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int \left(2xy^3 - 6x^2y^2\right) dx + g(y) \\ &= x^2y^3 - 2x^3y^2 + g(y) \end{aligned}$$

*alors*
$$F_y = 3x^2y^2 - 4x^3y + g'(y) = N = 3x^2y^2 - 4x^3y$$

*donc $g'(y) = 0$ et on peut choisir $g(y) \equiv 0$. La solution est donc*

$$F(x, y) = x^2y^3 - 2x^3y^2 = C.$$

Supposons que l'équation

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{2.66}$$

n'est pas exacte. Dans quelles conditions peut-on trouver une fonction $\mu(x, y)$

(**facteur intégrant**) telle que

$$\mu\left(Mdx+Ndy\right)=0$$

est exacte. Nous allons démontrer que (2.66) a toujours un **facteur intégrant** si elle a une solution générale.

Supposons alors que (2.66) a une solution générale.

$$f\left(x,y\right)=c$$

si on dérive on trouve

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0 &\Longleftrightarrow f_x dx+f_y dy=0\\ Mdx+Ndy=0 &\Longleftrightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{M}{N}=-\frac{f_x}{f_y}\end{aligned}$$

donc

$$\frac{f_x}{M}=\frac{f_y}{N}.$$

Si l'on dénote le rapport commun par $\mu\left(x,y\right)$, alors on aura

$$f_x=\mu M \text{ et } f_y=\mu N$$

et si on multiplie (2.66) par $\mu$ on obtient

$$\mu Mdx+\mu Ndy=0 \tag{2.67}$$

$$f_x dx+f_y dy=0$$

qui est exact. Cet argument montre que si (2.66) a une solution générale, elle a au moins un facteur intégrant.

Maintenant on discute comment peut on obtenir $\mu$. L'équation (2.67) est exacte donc

$$\begin{aligned}(\mu M)_y &= (\mu N)_x\\ \mu_y M + \mu M_y &= \mu_x N + \mu N_x\\ \mu_x N - \mu_y M &= (M_y - N_x)\,\mu\end{aligned}$$

Bien que $M, N, M_y$, et $N_x$ sont des fonctions connues de $x$ et $y$, la difficulté ici est que pou déterminer l'inconnue $\mu(x, y)$ nous devons résoudre une équation aux dérivées partielles. Puisque nous ne sommes pas prêts à le faire, nous faisons une hypothèse simplificatrice. Supposons que $\mu$ est une fonction qui dépend seulement de variable $x$. Dans ce cas $\mu_x = d\mu/dx$ et $\mu_y = 0$, et l'équation peut être écrite comme

$$\frac{d\mu}{dx} = \left(\frac{M_y - N_x}{N}\right)\mu \tag{2.68}$$

si $\mu$ est une fonction qui dépend seulement de variable $y$. Dans ce cas $\mu_y = d\mu/dy$ et $\mu_x = 0$, et l'équation peut être écrite comme

$$\frac{d\mu}{dy} = \left(\frac{N_x - M_y}{M}\right)\mu \tag{2.69}$$

**Théorème 2.4.** *Si* $\left(\frac{M_y - N_x}{N}\right)$ *est continue et dépend seulement de* $x$, *alors*

$$\mu(x) = \exp\left[\int\left(\frac{M_y - N_x}{N}\right)dx\right]$$

*est un facteur intégrant pour l'équation (2.67).*
*Si* $\left(\frac{N_x - M_y}{M}\right)$ *est continue et dépend seulement de* $y$, *alors*

$$\mu(x) = \exp\left[\int\left(\frac{N_x - M_y}{M}\right)dy\right]$$

*est un facteur intégrant pour l'équation (2.67).*

**Exemple 2.33.** *Intégrer l'équation différentielle suivante* $(2x^2 + y)\,dx + (x^2y - x)\,dy = 0$.

**Solution.** *Une inspection rapide montre que cette équation est ni séparable ni linéaire.*

*Aussi on a*

$$M_y = 1 \neq N_x = 2xy - 1$$

*et donc l'équation n'est pas exacte. Maintenant on calcule*

$$\begin{aligned}\frac{M_y - N_x}{N} &= \frac{1 - (2xy - 1)}{x^2 y - x} \\ &= \frac{2 - 2xy}{x^2 y - x} = -\frac{2}{x}\end{aligned}$$

*qui dépend seulement de* $x$, *donc*

$$\begin{aligned}\mu(x) &= \exp\left[\int \left(\frac{M_y - N_x}{N}\right) dx\right] \\ &= \exp\left[\int -\frac{2}{x} dx\right] = \exp\left[-2\ln x\right] = x^{-2}.\end{aligned}$$

*Quand on multiplie l'équation par* $x^{-2}$ *on trouve*

$$\left(2 + yx^{-2}\right) dx + \left(y - x^{-1}\right) dy = 0$$

*qui est exacte car*

$$M_y = x^{-2} = N_x.$$

*On utilise la technique de cette section pour que nous obtenons finalement la solution implicite*

$$2x - yx^{-1} + y^2/2 = C \tag{2.70}$$

*Notez que la solution* $x \equiv 0$ *a été perdue quand on a multiplié par* $\mu = x^{-2}$. *Donc la solution finale consiste de* $x \equiv 0$ *et (2.70).*

***Exercices***

Déterminer si l'équation différentielle donnée est exacte, et intégrer la si elle est.

**1.** $(2x - 1)dx + (3y + 7)dy = 0$

**2.** $(2x + y)dx - (x + 6y)dy = 0$

**3.** $(5x + 4y)dx + (4x - 8y^3)dy = 0$

**4.** $(\sin y - y\sin x)\,dx + (\cos x - y + x\cos y)\,dy = 0$

**5.** $(2xy^2 - 3)dx + (2x^2y + 4)dy = 0$

**6.** $(x^2 - y^2)dx + (x^2 - 2xy)dy = 0$

**7.** $(1 + \ln x + \dfrac{y}{x})dx = (1 - \ln x)dy$

**8.** $(x - y^3 + y^2\sin x)dx = (3xy^2 + 2y\cos x)dy$

**9.** $(x^3 + y^3)dx + 3xy^2dy = 0$

**10.** $(y\ln y - e^{-xy})dx + \left(\dfrac{1}{y} + x\ln y\right)dy = 0$ %Zill 9Ed p68

**11.** $(\cos x\cos y - 2x)dx + (\sin x\sin y + 2y)\,dy = 0$

**12.** $(e^x\sin y - 3x^2)dx + \left(e^x\cos y + y^{-2/3}/3\right)dy = 0$ %Nagle P62

**13.** $(t/y)dy + (1 + \ln y)\,dt = 0$

**14.** $e^t(y - t)dt + (1 + e^t)\,dy = 0$

**15.** $\cos\theta dr - \left(r\sin\theta - e^\theta\right)d\theta = 0$

**16.** $(ye^{xy} - 1/y)\,dx + (xe^{xy} + x/y^2)\,dy = 0$

**17.** $(1/y)\,dx - (3y - x/y^2)\,dy = 0$

**18.** $[2x + y^2 - \cos(x + y)]\,dx + [2xy - \cos(x + y) - e^y]\,dy = 0$

**19.** $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{ax + by}{bx + cy}$

**20.** $(y/x + 6x)dx + (\ln x - 2)dy = 0,\ x > 0$

Résoudre l'équation avec condition initiale.

**21.** $(2x - y)dx + (2y - x)dy = 0, y(1) = 3$

**22.** $(9x^2 + y - 1)dx - (4y - x)dy = 0,\ y(1) = 0$

**23.** $(1/x + 2y^2x)\,dx + (2yx^2 - \cos y)\,dy = 0,\ y(1) = \pi$

**24.** $(ye^{xy} - 1/y)\,dx + (xe^{xy} + x/y^2)\,dy = 0,\ y(1) = 1$

**25.** $(e^tx + 1)\,dt + (e^t - 1)\,dx = 0,\ x(1) = 1$

Trouver la valeur de $b$ pour laquelle l'équation donnée est exacte, puis résoudre en utilisant cette valeur de $b$.

**26.** $(xy^2 + bx^2y)dx + (x + y)x^2dy = 0$

**27.** $(ye^{2xy} + x)dx + bxe^{2xy}dy = 0$

**28.** Montrer que l'équation n'est pas exacte, mais le devient quand on multiplie par le facteur intégrant donné. Puis, résoudre l'équation.

**29.** $x^2y^3 + x(1+y^2)y' = 0,\ \ m(x,y) = 1/xy^3$

**30.** $\left(\dfrac{\sin y}{y} - 2e^{-x}\sin x\right)dx + \left(\dfrac{\cos y + 2e^{-x}\cos x}{y}\right)dy = 0,\ \ m(x,y) = ye^x$

**31.** $ydx + (2x - ye^y)\,dy = 0,\ \ \ m(x,y) = y$

**32.** $(x+2)\sin yd + x\cos ydy = 0,\ \ \ m(x,y) = xe^x$

**33.** Trouver un facteur intégrant puis résoudre l'équation donnée.

**34.** $(3x^2y + 2xy + y^3)dx + (x^2+y^2)dy = 0$

**35.** $y' = e^{2x} + y - 1$

**36.** $dx + (x/y - \sin y)dy = 0$

**37.** $ydx + (2xy - e^{-2y})dy = 0$

**38.** $e^x dx + (e^x\cot y + 2y\csc y)dy = 0$

**39.** $[4(x^3/y^2) + (3/y)]dx + [3(x/y^2) + 4y]dy = 0$

**40.** $\left(3x + \dfrac{6}{y}\right) + \left(\dfrac{x^2}{y} + 3\dfrac{y}{x}\right)\dfrac{dy}{dx} = 0$

## 2.4 Réduction d'ordre

On a vu dans le premier chapitre qu'une équation différentielles d'ordre $n$ peut être réduite à une équation du premier ordre à l'aide d'une transformation convenable. Dans cette section on considère des cas ou on peut réduire des équations du second ordre à celles du premier ordre.

La forme générale d'une équation du second ordre est

$$F\left(x, y, y', y''\right) = 0 \tag{2.71}$$

où $x$ est la variable indépendante et $y$ est la variable dépendante. Dans le cas ou l'une de ces deux variables n'est pas présente dans (2.71), elle peut être réduite à une une équation du premier ordre.

***Équations différentielles sans la variable dépendante y***

Dans ce cas l'équation est sous la forme

$$F\left(x, y', y''\right) = 0. \tag{2.72}$$

On introduit une nouvelle variable indépendante en laisant $u = y'$ et $u' = y''$. L'équation (2.72) devient une équation du premier ordre

$$F\left(x, u, u'\right) = 0.$$

**Exemple 2.34.** *Utiliser la méthode de réduction d'ordre pour résoudre*

$$xy'' - y' = x^2$$

**Solution.** *Noter que la variable dépendante $y$ n'existe pas dans l'équation. On laisse*

$u = y'$ *et* $u' = y''$. *Donc l'équation devient*

$$xu' - u = x^2$$
$$u' - \frac{1}{x}u = x$$

*qui est linéaire et dont la solution est*

$$u = e^{\int \frac{1}{x}dx}\left[\int e^{\int \frac{-1}{x}dx} x + C\right]$$
$$= x\,(x + C) = x^2 + Cx.$$

*Ainsi, la solution de l'équation originale est*

$$y = \frac{x^3}{3} + C\frac{x^2}{2} + D.$$

**Exemple 2.35.** *Utiliser la méthode de réduction d'ordre pour résoudre*

$$(y')^2 = x^2 y''$$

**Solution.** *Noter que la variable dépendante* $y$ *n'existe pas dans l'équation. On pose* $u = y'$ *et* $u' = y''$. *Donc l'équation devient*

$$u^2 = x^2 u'$$

*qui est séparable*

$$\frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x^2}$$

*qui s'intègre comme*

$$-\frac{1}{u} = -\frac{1}{x} + C \Leftrightarrow$$
$$u = \frac{x}{Dx + 1}$$

*on substituant $u = y'$ et intégrant on trouve*

$$\begin{aligned} y &= \int \frac{x}{1+Dx} dx \\ &= \frac{1}{D} \int \left( \frac{Dx+1}{Dx+1} - \frac{1}{Dx+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{D} \left( x - \frac{1}{D} \ln|Dx+1| \right) + E \end{aligned}$$

*Ainsi, la solution de l'équation originale est*

$$y = \frac{x}{D} - \frac{1}{D^2} \ln|1+Dx| + E.$$

***Équations différentielles sans la variable indépendante x***

Dans ce cas la variable independante $x$ ne figure pas dans l'équation. L'équation est sous l'une des formes

$$F(y, y', y'') = 0 \text{ ou bien } y'' = f(y, y') \tag{2.73}$$

On fait le changement de variable $y' = u$ qui nous donne

$$y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dy}u.$$

Ce changement de variable va réduire notre équation différentielle à une nouvelle équationdu premier ordre. Dans la nouvelle équation on considère $u$ comme une variable dépendante et $y$ comme varable indépendante.

**Exemple 2.36.** *Utiliser la méthode précedente pour résoudre l'équation différentielle*

$$y'' + y = 0.$$

**Solution.** *On note que la varable indépendante ne figure pas dans l'équation. On fait le changement de variables*

$$y' = u, y'' = u\frac{du}{dy}.$$

*L'équation devient une équation à variables séparables*

$$\begin{aligned} u\frac{du}{dy} + y = 0 \\ udu = -ydy \end{aligned}$$

*dont la solution est*

$$\begin{aligned} \frac{u^2}{2} &= -\frac{y^2}{2} + c, c > 0 \\ u^2 &= 2c - y^2 \\ u &= \pm\sqrt{2c - y^2} \\ u &= \pm\sqrt{C - y^2}. \end{aligned}$$

*Maintenant si on resubstitute* $u = dy/dx$ *on obtient*

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \pm\sqrt{C - y^2} \\ \frac{dy}{\sqrt{C - y^2}} &= \pm dx \\ \sin^{-1}\left(\frac{y}{\sqrt{C}}\right) &= \pm x + D \\ \frac{y}{\sqrt{C}} &= \sin\left(\pm x + D\right) \\ y &= \sqrt{C}\sin\left(\pm x + D\right) \end{aligned}$$

*si on utilise les identitées trigonometriques on peut écrire la dernière équation comme*

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{C}\sin\left(\pm x\right)\cos(D) + \sqrt{C}\cos\left(\pm x\right)\sin(D) \\ y &= A\sin\left(x\right) + B\cos\left(x\right) \end{aligned}$$

**Exemple 2.37.** *Utiliser la méthode de réduction d'ordre pour résoudre l'équation différentielle*

$$y'' = y'e^y$$

*avec conditions initiales* $y(0) = 0$ *et* $y'(0) = 1$.

**Solution.** *On note que la varable indépendante ne figure pas dans l'équation. On fait le* *changement de variables*

$$y' = u, y'' = u\frac{du}{dy}.$$

*L'équation devient*

$$\begin{aligned} u\frac{du}{dy} &= ue^y \\ du &= e^y dy \\ u &= e^y + c \end{aligned}$$

*après qu'on utilse* $y' = u$ *l'équation devient*

$$\frac{dy}{dx} = e^y + c$$

et puisque $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ on aura $c = 0$, donc l'équation devient

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= e^y \\ \frac{dy}{e^y} &= dx \\ -e^{-y} &= x + d \end{aligned}$$

que l'on peut écrire comme

$$y = -\ln(-x - d)$$

qui se réduira avec la condition initiale $y(0) = 0$ à

$$y = -\ln(-x + 1).$$

***Exercices***

Utiliser la methode de réduction d'ordre pour résoudre les équations differentielles suivantes.

**1.** $yy'' + (y')^2 = 0$

**2.** $xy'' = y' + (y')^3$

**3.** $y'' - k^2 y = 0$

**4.** $x^2y'' = 2xy' + (y')^2$

**5.** $2yy'' = 1 + (y')^2$

**6.** $yy'' - (y')^2 = 0$

**7.** $xy'' + y' = 4x$

**8.** $xy'' = y' + x(y')^2$

**9.** $y'' = 2x(y')^2$

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants.

**10.** $y'' = x + y^2, y(0) = 1, y'(0) = 1$

**11.** $y'' + y^2 = 1, y(0) = 2, y'(0) = 3$

**12.** $y'' = e^x, y(0) = 0, y'(0) = -1$

Utiliser les deux methodes de réduction d'ordre pour résoudre les équations differentielles suivantes.

**13.** $y'' = 1 + (y')^2$

**14.** $y'' = 1 - (y')^2$

## 2.5 Résumé du chapitre 2

Dans ce chapitre, nous avons discuté les différents types d'équations différentielles du premier ordre. Les plus importantes étaient les équations séparables, linéaires et exactes.

**Équations séparables :** $\dfrac{dy}{dx} = f(x)\,h(y)$. Séparer les variables puis intégrer.

**Équation sous la forme :** $dy/dx = G(ax+by)$. On pose $v = ax+by$, $dy/dx = a + b(dv/dx)$, puis l'équation transformée sera à variables séparables.

**Équation homogène :** $dy/dx = G(y/x)$. On pose $v = y/x$, $dy/dx = v + x(dv/dx)$, puis l'équation transformée sera à variables séparées.

**Équation sous la forme :** $(a_1x+b_1y+c_1)\,dx + (a_2x+b_2y+c_2)\,dy = 0$. Si $a_1b_2 \neq a_2b_1$,on pose $x = u+h$, $y = v+k$, où $h$ et $k$ sont les solution du système

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1 &= 0 \\ a_2x+b_2y+c_2 &= 0 \end{cases}$$

puis l'équation transformée sera homogène.

**Équations linéaires :** $\dfrac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)$. Le facteur intégrant $m(x) = \exp\left[\int P(x)\,dx\right]$ réduit l'équation à

$$\frac{d}{dx}[my] = mQ \Longrightarrow my = \int mQdx + C$$

qui donne la solution générale

$$y = e^{-\int Pdx}\left[\int e^{\int Pdx}Q(x)\,dx + C\right]$$

**Équation de Bernoulli :** $\dfrac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)\,y^n$. Si $n \neq 0, 1$, on pose $v = y^{1-n}$ qui donne $dv/dx = (1-n)\,y^{-n}(dy/dx)$, puis l'équation transformée sera linéaire.

**Équation de Riccati :** $\dfrac{dy}{dx} = f_2(x)\,y^2 + f_1(x)\,y + f_0(x)$ où les fonctions $f_2, f_1$ et $f_0$ sont continues sur $I$.

Si on a une solution particulière $y_0 = y_0(x)$ de l'équation de Riccati, sa solution générale peut être écrite sous la forme

$$y = y_0(x) + \Phi(x)\left[C - \int \Phi(x) f_2(x)\,dx\right]$$

où

$$\Phi(x) = \exp\left\{\int [2f_2(x)\,y_0(x) + f_1(x)]\,dx\right\}.$$

**Équation de Lagrange :** Une équation différentielle de type

$$y = xg(y') + f(y')$$

où $g(y')$ et $f(y')$ sont des fonctions connues et différentiables sur un certain intervalle est appelée équation différentielle de Lagrange. Si on pose $y' = p$ l'équation devient

$$y = xg(p) + f(p)$$

si on dérive la dernière équation par rapport à $x$ on trouve

$$y' = p = g(p) + [xg'(p) + f'(p)]\frac{dp}{dx}$$

qui devient une équation différentielle linéaire après un simple réarrangent

$$\frac{dx}{dp} - \frac{g'(p)}{p - g(p)}x = \frac{f'(p)}{p - g(p)}$$

avec la condition $p - g(p) \neq 0$, dont la solution sera appelée

$$x = F(p, c),\, c \in \mathbb{R}.$$

La solution générale est

$$\begin{aligned} x &= F(p,c),\, c \in \mathbb{R} \\ y &= F(p,c)\,g(p) + f(p) \end{aligned}$$

L'équation de Lagrange peut également avoir une solution singulière quand $g(p) - p =$

$0$. La solution singulière est donnée par l'expression :

$$y = g(c)x + f(c)$$

ou $c$ est la solution de $g(p) - p = 0$.

**Équation de Clairaut :** L'équation de Clairaut est un cas particulier de l'équation de Lagrange quand $g(y') = y'$. Elle a donc la forme :

$$y = xy' + f\left(y'\right)$$

où $f(y')$ est fonction non linéaire. Si on pose $y' = p$ l'équation devient

$$y = xp + f\left(p\right)$$

et si on dérive la dernière équation par rapport à $x$ on trouve

$$y' = p = p + \left[x + f'\left(p\right)\right]\frac{dp}{dx}$$

donc on aura

$$\left[x + f'\left(p\right)\right]\frac{dp}{dx} = 0.$$

Si $\dfrac{dp}{dx} = 0$ on aura $p = c \in \mathbb{R}$, et en remplaçant $p = c$ on obtient la solution générale

$$y = cx + f\left(c\right).$$

En outre si $x + f'\left(p\right) = 0$ on obtient une solution singulière de forme paramétrique

$$\begin{cases} x = -f'\left(p\right), p \in \mathbb{R} \\ y = -f'\left(p\right)p + f\left(p\right) \end{cases}$$

**Équations exactes :** $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$.

Si $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ alors l'équation est exacte et les solutions sont données implicitement par $F\left(x, y\right) = C$ où $F_x = M$ et $F_y = N$.

La solution sera donnée par

$$F = \int Mdx + g(y) \quad \text{où } g'(y) = N - \frac{\partial}{\partial y}\int Mdx \text{ ou bien}$$
$$F = \int Ndx + h(x) \quad \text{où } h'(x) = M - \frac{\partial}{\partial x}\int Ndy.$$

Lorsque l'équation n'est pas séparable, linéaire ou exacte, il est parfois possible de trouver un facteur intégrant ou effectuer une substitution qui nous permettra de résoudre l'équation.

**Facteur intégrants spéciaux :** $mMdx + mNdy = 0$ est exact.
Si $\dfrac{M_y - N_x}{N}$ dépend de $x$ seulement alors $m = \int \dfrac{M_y - N_x}{N}dx$ est un facteur intégrant.
Si $\dfrac{N_x - M_y}{M}$ dépend de $y$ seulement alors $m = \int \dfrac{N_x - M_y}{M}dy$ est un facteur intégrant.

# Chapitre 4

# Équations différentielles du second ordre

## 4.1 Introduction

On a vu dans le premier chapitre qu'une équation différentielle du second ordre à une des formes

$$\begin{aligned} F\left(x,y,y',y''\right) &= 0 \\ a\left(x\right)y''+b\left(x\right)y'+c\left(x\right)y &= f\left(x\right) \qquad (4.1) \\ y''+P\left(x\right)y'+Q\left(x\right)y &= R\left(x\right) \end{aligned}$$

Maintenant on introduit une notation qui très utile pour les équations différentielles. Soit $D$ l'opérateur de dérivation d'ordre 1 : $D\left(y\right)=y'$. De la même manière, on pose $D^2$ représenter l'opérateur de dérivation d'ordre 2 : $D^2\left(y\right)=D\left[D\left(y\right)\right]=y''$. Si

$$L=D^2+P\left(x\right)D+Q\left(x\right).$$

Nous appelons $L$ un opérateur différentiel linéaire du deuxième ordre. On peut écrire (4.2) tout simplement comme

$$L\left(y\right)=f.$$

Dans ce chapitre, l'examen détaillé des méthodes actuelles pour résoudre (4.2) sera limitée, pour la plupart, aux cas particuliers dans lesquels les coefficients $P(x)$ et $Q(x)$

sont des constantes. Il convient également de souligner que la plupart des idées et des procédures que nous discuterons peuvent être généralisées à des équations linéaires d'ordre supérieur, sans aucun changement dans les principes, mais seulement une complexité dans les calculs. En nous limitant aux équations du second ordre, nous auront autant de simplicité possible sans dénaturer les idées principales, et inclure toutes les équations linéaires de plus grand intérêt pour les mathématiques et la physique.

**Exemple 4.1.** *Supposons que* $L = D^2 - xD + x^2$. *Trouver* $L\left(xe^x\right),\ L\left(e^x\right)$ *et* $L\left(e^{2x}\right)$

$$\begin{aligned} L\left(xe^x\right) &= D^2\left(xe^x\right) - xD\left(xe^x\right) + x^2\left(xe^x\right) \\ &= D\left(e^x + xe^x\right) - x\left(e^x + xe^x\right) + x^2\left(xe^x\right) \\ &= \left(2e^x + xe^x\right) - x\left(e^x + xe^x\right) + x^2\left(xe^x\right) \\ &= e^x(2 - x^2 + x^3) \end{aligned}$$

**Solution.**

$$\begin{aligned} L\left(e^x\right) &= D^2\left(e^x\right) - xD\left(e^x\right) + x^2\left(e^x\right) \\ &= e^x - xe^x + x^2e^x = e^x\left(1 - x + x^2\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L\left(e^{2x}\right) &= D^2\left(e^{2x}\right) - xD\left(e^{2x}\right) + x^2\left(e^{2x}\right) \\ &= D\left(2e^{2x}\right) - 2xe^{2x} + x^2e^{2x} \\ &= 4e^{2x} - 2xe^{2x} + x^2e^{2x} \\ &= e^{2x}\left(4 - 2x + x^2\right) \end{aligned}$$

**La propriété de linéarité :** supposons que $y_1$ et $y_2$ sont des des fonctions dérivables et $k$ est une constante, alors on a :

1. $D\left(y_1 + y_2\right) = D\left(y_1\right) + D\left(y_2\right)$
2. $D\left(ky_1\right) = kD\left(y_1\right)$

quand ces propriétés sont satisfaites on dit que $D$ est un opérateur linéaire. Les deux propriétés au dessus peuvent être combiner en une seule notamment

$$D\left(c_1y_1 + c_2y_2\right) = c_1D\left(y_1\right) + c_2D\left(y_2\right)$$

L'opérateur $D^2$ est aussi linéaire car

$$\begin{aligned}
D^2\left(c_1y_1+c_2y_2\right) &= D\left[D\left(c_1y_1+c_2y_2\right)\right]\\
&= D\left[c_1D\left(y_1\right)+c_2D\left(y_2\right)\right]\\
&= D\left[c_1D\left(y_1\right)\right]+D\left[c_2D\left(y_2\right)\right]\\
&= c_1D^2\left(y_1\right)+c_2D^2\left(y_2\right)
\end{aligned}$$

On peut facilement vérifier que toute combinaison linéaire d'opérateurs linéaires est aussi linéaire. Donc l'opérateur différentiel polynomial est linéaire.

**Proposition 4.1.** *L'opérateur*

$$L = D^2 + P\left(x\right)D + Q\left(x\right)$$

*est linéaire. Plus précisément, si $y_1$ et $y_2$ sont au moins deux fois dérivables, $c_1$ et $c_2$ sont des constantes alors*

$$L\left(c_1y_1+c_2y_2\right) = c_1L\left(y_1\right)+c_2L\left(y_2\right)$$

*Démonstration.* Supposons que $y_1$ et $y_2$ sont au moins deux fois dérivables, $c_1$ et $c_2$ sont des constantes

$$\begin{aligned}
L\left(c_1y_1+c_2y_2\right) &= D^2\left(c_1y_1+c_2y_2\right)+P\left(x\right)D\left(c_1y_1+c_2y_2\right)+Q\left(x\right)\left(c_1y_1+c_2y_2\right)\\
&= \left(c_1D^2y_1+c_2D^2y_2\right)+P\left(x\right)\left(c_1Dy_1+c_2Dy_2\right)+Q\left(x\right)\left(c_1y_1+c_2y_2\right)\\
&= c_1\left(D^2y_1+P\left(x\right)Dy_1+Q\left(x\right)y_1\right)+c_2\left(D^2y_2+P\left(x\right)Dy_2+Q\left(x\right)y_2\right)\\
&= c_1L\left(y_1\right)+c_2L\left(y_2\right)
\end{aligned}$$

Donc $L$ préserve addition et multiplication par un scalaire. . □

**Exemple 4.2.** *Supposons que $L = D^2 - xD + x^2$. Utiliser la linéarité de $L$ pour trouver $L\left(5xe^x - 7e^x + 3e^{2x}\right)$.*

**Solution.** *On utilise les résultats de l'exemple précédent pou avoir*

$$\begin{aligned} L\left(5xe^x - 7e^x + 3e^{2x}\right) &= 5L\left(xe^x\right) - 7L\left(e^x\right) + 3L\left(e^{2x}\right) \\ &= 5e^x(2+x) - 5x^2e^x - 7e^x\left(1 - x + x^2\right) + 3e^{2x}\left(5 - 2x\right) \\ &= 3e^x\left(-4x^2 + 4x + 1\right) + 3e^{2x}\left(5 - 2x\right) \end{aligned}$$

Une conséquence importante de la linéarité est que de l'ensemble des solutions de (4.2) a une structure particulièrement simple. Nous commençons la description de cette structure avec le cas particulier où la fonction $f$ est identiquement nulle. Dans ce cas, (4.2) devient

$$L\left(y\right) = 0 \tag{4.2}$$

et nous appellerons l'équation **complémentaire** (ou homogène).

**Remarque 4.1.** *Le terme homogène utilisé ici est différent de celui qu'on a utiliser dans le chapitre précédent* $dy/dx = F\left(y/x\right)$.

**Proposition 4.2** (Principe de superposition)**.** *Supposons que $L$ est un opérateur différentiel linéaire. Alors, l'ensemble des solutions de $Ly = 0$ forme un espace linéaire. Plus précisément, supposons que $y_1$ et $y_2$ sont des solutions de $Ly = 0$ et $c_1$ et $c_2$ sont des scalaires. Alors $c_1y_1 + c_2y_2$ est aussi une solution de $Ly = 0$.*

*Démonstration.* Puisque $L\left(y_1\right) = L\left(y_2\right) = 0$, et en utilisant la proposition précédente, on a

$$L\left(c_1y_1 + c_2y_2\right) = c_1L\left(y_1\right) + c_2L\left(y_2\right) = 0$$

Cela montre que l'ensemble des solutions est fermé sous addition et multiplication par un scalaire, et dons est un espace linéaire. □

**Remarque 4.2.** *Le principe de superposition reste vrais si*

$$L = a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1D + a_0$$

*où $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$, c.a.d. que si $L$ est opérateur différentiel d'ordre $n$ avec coefficients constants et $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont des solutions distinctes de $L\left(y\right) = 0$, alors $\sum_{i=1}^{n} c_iy_i$*

*est aussi une solution car*

$$L\left(\sum_{i=1}^{n} c_i y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i L\left(y_i\right) = 0.$$

**Corollaire 4.1.** *Considérons l'équation complémentaire $L(y) = 0$. alors*

*(a) Si $y_1(x)$ est une solution de $L(y) = 0$, de même $cy_1(x)$ est une solution pour tout $c \in \mathbb{R}$*

*(b) La solution triviale $y = 0$ est toujours une solution de $L(y) = 0$.*

*Démonstration.* (a) $L[cy_1(x)] = cL[y_1(x)] = 0$

(b) Evident. □

**Espace des solutions**

La fonction nulle est toujours une solution de (4.2) ; de plus, si $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont deux solutions de (4.2) et $c_1$ et $c_2$ sont des réels quelconques, la fonction $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ est encore une solution : en d'autres termes, l'ensemble des solutions forme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (c'est en fait un sous espace vectoriel de l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ). On peut montrer que cet espace est toujours de dimension 2. Si on connait deux solutions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ non nulles et non proportionnelles, les fonctions $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ représentent donc toutes les solutions.

Dire que $y_1(x)$ et $y_2(x)$ ne sont pas proportionnelles veut dire qu'il n'existe pas de constante $k$ réelle tel que, pour tout $x, y_1(x) = ky_2(x)$ . Ou bien la seule solution de $c_1y_1 + c_2y_2 = 0$ est $c_1 = c_2 = 0$. En termes d'espace vectoriel, cela signifie que $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont linéairement indépendantes, donc puisque l'espace des solutions est de dimension 2, elles en forment une base. En outre toute solution de $L(y) = 0$ doit être de la forme

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x).$$

**Définition 4.1.** *Une paire de fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont dites linéairement indépendantes sur un intervalle $I$ si et seulement si elles ne sont pas proportionnelles ($y_1(x) \neq ky_2(x)$) sur $I$ . On dit que $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont linéairement dépendantes sur $I$ si elles sont proportionnelles sur $I$ .*

**Définition 4.2** (Wronskien)**.** *Supposons que les fonctions* $y_1(x)$ *et* $y_2(x)$ *sont au moins une fois dérivable alors le déterminant*

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

*est appelé Wronskien des fonctions* $y_1(x)$ *et* $y_2(x)$*.*

**Théorème 4.1** (Abel)**.** *Si* $y_1(x)$ *et* $y_2(x)$ *sont deux solutions sur un intervalle* $I$ *de*

$$L(y) = \left(D^2 + P(x) D + Q(x)\right)(y) = y'' + P(x) y' + Q(x) y = 0$$

*alors*

$$W(y_1, y_2)(x) = Ce^{\int -P(x)dx} \tag{4.3}$$

*en outre, soit* $W(y_1, y_2)(x) = 0$ *pour tout* $x \in I$ *quand* $C = 0$*, ou* $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ *pour tout* $x \in I$*.*

*Démonstration.* Puisque $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont deux solutions de $L(y) = 0$, on a

$$\begin{cases} y_1'' + P(x) y_1' + Q(x) y_1 & = 0 \\ y_2'' + P(x) y_2' + Q(x) y_2 & = 0 \end{cases}$$

si on multiplie la première équation par $-y_2$, la deuxième par $y_1$ et on additionne on trouve

$$(y_2'' y_1 - y_1'' y_2) + P(x)(y_2' y_1 - y_1' y_2) = 0. \tag{4.4}$$

Si on pose $W(x) = (y_1 y_2' - y_2 y_1')(x)$ on trouve que

$$W' = y_2'' y_1 - y_1'' y_2$$

et donc (4.4) devient

$$W' + P(x) W = 0$$

qui est une équation linéaire du premier ordre dont la solution est

$$W(x) = Ce^{\int -P(x)dx}$$

en outre $W = 0$ si et seulement si $C = 0$ sur $I$. Donc si $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$ pour une valeur quelconque de $x_0 \in I$, $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$. □

Maintenant on donne une condition pour que deux solutions de (4.2) soient linéairement indépendantes.

**Corollaire 4.2.** *Si $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont deux solutions de l'équation complémentaire*

$$L(y) = \left(D^2 + P(x) D + Q(x)\right)(y) = 0$$

*sur l'intervalle $I$, et si le Wronskien*

$$W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0 \tag{4.5}$$

*pour n'importe quelle $x_0 \in I$, alors $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont linéairement indépendantes sur $I$.*

*Démonstration.* Supposons que $c_1$ et $c_2$ sont des scalaire tels que,

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0 \tag{4.6}$$

pour que $y_1(x)$ et $y_2(x)$ soient linéairement dépendantes on doit montrer que $c_1 = c_2 = 0$. Si on dérive (4.6) on obtient le système des variables $c_1$ et $c_2$ :

$$\begin{cases} c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) & = 0 \\ c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) & = 0 \end{cases}$$

dont le déterminant est égale à $y_1(x) y_2'(x) - y_2(x) y_1'(x) = W(y_1, y_2)(x)$. Puisque $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$ alors $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$ (théorème précédent) et le système a une solution unique soit

$$c_1 = c_2 = 0.$$

Cela montre que $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont linéairement indépendantes □

**Théorème 4.2.** *Si $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation complémentaire*

$$L(y) = \left(D^2 + P(x)D + Q(x)\right)(y) = 0$$

*sur l'intervalle $I$, alors la solution générale de $L(y) = 0$ est sous la forme*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

*où $c_1$ et $c_2$ sont des constantes arbitraires.*

*Démonstration.* Puisque $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont deux solutions linéairement indépendantes, elles forment une base de l'ensemble des solutions. Donc l'ensemble de toutes solution doit être une combinaison linéaire de $y_1(x)$ et $y_2(x)$, donc $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$. □

**Exemple 4.3.** *Montrer que les solutions générales de $L(y) = (D^2 - 2D + 1)y = 0$ sont de la forme $y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x$.*

**Solution.** *On doit montrer que $e^x$ et $xe^x$ sont des solutions linéairement indépendantes de $L(y) = 0$.*

$$\begin{aligned} L(e^x) &= \left(D^2 - 2D + 1\right)e^x = e^x - 2e^x + e^x = 0 \\ L(xe^x) &= \left(D^2 - 2D + 1\right)xe^x = (x+2)e^x - 2(x+1)e^x + xe^x = 0 \end{aligned}$$

*donc $e^x$ et $xe^x$ sont des solutions de $L(y) = 0$, en plus le Wronskien*

$$W(e^x, xe^x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0$$

*donc les solutions sont linéairement indépendantes. La solution générale est donc constituée de la famille de fonctions sous la forme*

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

*où $c_1$ et $c_2$ sont des nombres réels arbitraires.*

Il faut qu'on indique ici l'importance de la proposition précédente, car elle stipule qu'une fois que quelques solutions spécifiques de $Ly = 0$ sont connus, alors toutes les combinaisons linéaires sont également solutions. Cela donne une stratégie pour décrire toutes les solutions de $Ly = 0$ à condition que nous pouvons trouver quelques solutions distingués. La proposition de linéarité donnera également un moyen utile pour décrire toutes les solutions de l'équation différentielle générale $Ly = f$ en la réduisant à l'équation différentielle complémentaire $Ly = 0$, ce qui nous appellerons l'équation différentielle complémentaire associée. Le théorème suivant décrit cette relation.

**Théorème 4.3.** *Supposons que $L$ est un opérateur différentiel linéaire et $f$ est une fonction continue sur un intervalle $I$. Si $y_p$ est une solution particulière fixé de $Ly = f$ et $y_h$ est une solution de l'équation différentielle complémentaire associée $Ly = 0$, alors*

$$y_p + y_h$$

*est une solution de $L(y) = f$. En outre, toute solution de $L(y) = f$ est de la forme*

$$y = y_p + y_h.$$

*Démonstration.* Supposons que $L(y_p) = f$ et que $L(y_h) = 0,$ alors la linéarité de $L$ nous donne

$$L(y_p + y_h) = L(y_p) + L(y_h) = f + 0 = f$$

donc $y_p + y_h$ est une solution de $L(y) = f$.
D'autre part si $y(t)$ est n'importe quelle solution de $L(y) = f$. On pose $y_h = y - y_p$. Par linéarité on obtient que

$$L(y_h) = L(y - y_p) = L(y) - L(y_p) = f - f = 0.$$

Donc $y_h$ est une solution de $L(y) = 0$ et $y = y_p + y_h$. □

Ce théorème nous donne en fait une stratégie efficace pour la description de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants. On formalise cela dans l'algorithme suivant.

**Méthode de solution**

1. Trouver toutes les solutions de l'équation complémentaire associée $Ly = 0$.
2. Trouver une solution particulière $y_p$ de $Ly = f$.
3. Les solutions de $Ly = f$ sont donc $y = y_h + y_p$.

Le théorème suivant résume les relations entre les concepts abordés dans cette section.

**Théorème 4.4.** *Supposons que $P$ et $Q$ sont continues sur l'intervalle $(a, b)$ et soit $y_1$ et $y_2$ des solutions de*

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{4.7}$$

*sur $(a, b)$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes, autrement dit, elles sont toutes vraies ou toutes fausses.*

*(a) La solution générale de (4.7) sur $(a, b)$ est $y = c_1y_1 + c_2y_2$.*

*(b) $\{y_1, y_2\}$ est un ensemble fondamental de solutions de (4.7) on $(a, b)$.*

*(c) $\{y_1, y_2\}$ est linéairement indépendant sur $(a, b)$.*

*(d) Le Wronskien de $\{y_1, y_2\}$ est non nul pour une certaine valeur dans $(a, b)$.*

*(e) Le Wronskien de $\{y_1, y_2\}$ est non nul pour toutes les valeur dans $(a, b)$.*

On peut appliquer ce théorème pour l'équation

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0$$

sur un intervalle $(a, b)$ où $P_0$, $P_1$, et $P_2$ son continues et $P_0$ n'a pas de racine.

**Exemple 4.4.** *Trouver toutes les solutions de $y'' - y' + y = e^{2x}$.*

**Solution.** *On peut écrire l'équation comme*

$$L(y) = \left(D^2 - 2D + 1\right) y = e^{2x}.$$

*On a vue dans l'exemple 4.3 que*

$$y_h(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

*où $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, sont toutes les solutions l'équation complémentaire $L(y) = 0$. On peut facilement vérifier que $L(e^{2x}) = e^{2x}$ qui veut dire que $y_p = e^{2x}$. En utilisant théorème 4.3 on a*

$$y = y_h + y_p = c_1 e^x + c_2 x e^x + e^{2x}$$

*est la solution générale de $L(y) = e^{2x}$, pour tout scalaires $c_1$ et $c_2$.*

**Problème de Cauchy**

Supposons que $L = D^2 + P(x) D + Q(x)$ et que $P(x), Q(x)$ et $f(x)$ sont continues sur un intervalle $I$ contenant $x_0$. L'équation

$$L(y) = f, y(x_0) = y_0 \text{ et } y'(x_0) = y_1$$

est appelé le problème de Cauchy ou une équation différentielle à conditions initiales. Comme dans le cas des équations différentielles du premier ordre étudiées dans le chapitre précédent, après avoir trouver les solutions générales de $L(y) = f$, on utilise les conditions initiales pour trouver les valeurs des constantes.

**Exemple 4.5.** *Trouver la solution générale de*

$$L(y) = \left(D^2 - 2D + 1\right) y = e^{2x}, y(0) = -1 \text{ et } y'(0) = 2.$$

**Solution.** *On a trouvé que*

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + e^{2x}$$

*est la solution de $L(y) = e^{2x}$, pour tout scalaires $c_1$ et $c_2$.*

$$y'(x) = c_1 e^x + c_2 (x+1) e^x + 2e^{2x} \Rightarrow y'(0) = c_1 + c_2 + 2 = -1$$
$$y''(x) = c_1 e^x + c_2 (x+2) e^x + 4e^{2x} \Rightarrow y''(0) = c_1 + 2c_2 + 4 = 2$$

*la solution du système nous donne* $c_1 = -4$ *et* $c_2 = 1$. *Donc*

$$y(x) = -4e^x + xe^x + e^{2x}$$

*est une solution du problème de Cauchy.*

**Théorème 4.5** (existence et unicité ). *Supposons que* $P(x), Q(x)$, *et* $f(x)$ *sont des fonctions réelles continues sur un intervalle* $I$ *contenant* $x_0$. *Il existe une solution réelle unique* $y(x)$ *définie sur* $I$ *satisfaisant*

$$L(y) = \left[D^2 + P(x) D + Q(x)\right](y) = f, \quad y(x_0) = y_0 \text{ et } y'(x_0) = y_1. \tag{4.8}$$

Nous soulignons que le théorème dit trois choses :

1. Le problème de Cauchy a une solution, en d'autres termes, une solution **existe**.
2. Le problème de Cauchy a une seule solution, c'est-à-dire, la solution est **unique**.
3. La solution $y(x)$ est défini sur l'intervalle $I$ où les coefficients sont continus et est au moins deux fois dérivable.

Pour certains problèmes ces affirmations sont faciles à prouver. Par exemple, nous avons trouvé dans l'exemple précédent que le problème de Cauchy

$$L(y) = \left(D^2 - 2D + 1\right) y = e^{2x}, y(0) = -1 \text{ et } y'(0) = 2$$

avait la solution

$$y(x) = -4e^x + xe^x + e^{2x}.$$

Le fait que nous avons trouvé une solution établit certes qu'elle existe. En outre, la solution est deux fois dérivable, en effet infiniment différentiable tout au long de l'intervalle $(-\infty, \infty)$, où les coefficients de l'équation différentielle sont continues. D'autre part, il n'est pas évidente, et il est plus difficile de démontrer, que le problème n'a pas d'autres solutions. Néanmoins, le théorème affirme que cette solution est unique. Pour la plupart des problèmes, il n'est pas possible d'écrire une expression utile pour la solution. C'est une différence majeure entre les équations du premier et deuxième ordre. Par conséquent, toutes les parties du théorème doivent être prouvées par des méthodes générales qui ne nécessitent pas d'avoir une telle expression. La démonstration du théorème est assez difficile, et sera reporter aux annexes. Nous allons, cependant, accepter le théorème comme vrai et en faire usage si nécessaire.

**Exemple 4.6.** *Trouver le plus grand intervalle dans lequel la solution du problème à valeurs initiales*

$$\left(x^2 - 5x\right) y'' - x^2 y' + (x+1)\, y = 0,\ y\,(2) = 5,\ y'\,(2) = 1$$

*existe.*

**Solution.** *Tout d'abord, nous devons écrire l'équation sous forme standard*

$$y'' - \frac{x^2}{x\,(x-5)} y' + \frac{x+1}{x\,(x-5)} y = 0,\ y\,(2) = 5,\ y'\,(2) = 1.$$

*Les seules valeurs où les coefficients sont discontinues sont $x = 0$ et $x = 5$. Donc le plus grand intervalle contenant $x = 2$, sur lequel tous les coefficients sont continues est $(0, 5)$. Donc le théorème 4.5 garantit qu'une solution unique existe sur l'intervalle $(0, 5)$.*

**Exemple 4.7.** *Trouver la solution du problème*

$$y'' + a\,(x)\, y' + b\,(x)\, y = 0,\ y\,(x_0) = 0,\ y'\,(x_0) = 0$$

*où $a$ et $b$ sont continues dans un intervalle ouvert $I$ contenant $x_0$.*

**Solution.** *La fonction $y\,(x) = 0$ pour tout $x$ dans $I$ satisfait certainement l'équation différentielle et conditions initiales. Par la partie d'unicité du Théorème 4.5 , elle est la seule solution du problème donné.*

***Exercices***

**1.** **(a)** Vérifier que $y_1 = e^{2x}$ et $y_2 = e^{5x}$ sont des solutions de

$$y'' - 7y' + 10y = 0 \tag{A}$$

sur $(-\infty, \infty)$.

**(b)** Vérifier que si $c_1$ et $c_2$ sont des constantes arbitraires alors $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{5x}$ est une solution de (A) sur $(-\infty, \infty)$.

**(c)** Résoudre le problème de Cauchy

$$y'' - 7y' + 10y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 1.$$

**(d)** Résoudre le problème de Cauchy

$$y'' - 7y' + 10y = 0, \quad y(0) = k_0, \quad y'(0) = k_1.$$

**2.** **(a)** Vérifier que $y_1 = e^{x} \cos x$ et $y_2 = e^{x} \sin x$ sont des solutions de

$$y'' - 2y' + 2y = 0 \tag{A}$$

sur $(-\infty, \infty)$.

**(b)** Vérifier que si $c_1$ et $c_2$ sont des constantes arbitraires alors $y = c_1 e^{x} \cos x + c_2 e^{x} \sin x$ est une solution de (A) sur $(-\infty, \infty)$.

**(c)** Résoudre le problème de Cauchy

$$y'' - 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -2.$$

**(d)** Résoudre le problème de Cauchy

$$y'' - 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = k_0, \quad y'(0) = k_1.$$

**3.** **(a)** Vérifier que $y_1 = e^x$ et $y_2 = xe^x$ sont des solutions de

$$y'' - 2y' + y = 0 \tag{A}$$

sur $(-\infty, \infty)$.

**(b)** Vérifier que si $c_1$ and $c_2$ sont des constantes arbitraires alors $y = e^x(c_1 + c_2 x)$ est une de (A) sur $(-\infty, \infty)$.

**(c)** Résoudre le problème de Cauchy

$$y'' - 2y' + y = 0, \quad y(0) = 7, \quad y'(0) = 4.$$

**(d)** Résoudre le problème de Cauchy

$$y'' - 2y' + y = 0, \quad y(0) = k_0, \quad y'(0) = k_1.$$

**4.** **(a)** Vérifier que $y_1 = 1/(x-1)$ et $y_2 = 1/(x+1)$ sont des solutions de

$$(x^2 - 1)y'' + 4xy' + 2y = 0 \tag{A}$$

sur $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, et $(1, \infty)$. Quelle est la solution générale de (A) sur chacun de ces intervalles ?

**(b)** Résoudre le problème de Cauchy

$$(x^2 - 1)y'' + 4xy' + 2y = 0, \quad y(0) = -5, \quad y'(0) = 1.$$

**(c)** Quel est l'intervalle de validité de la solution ?

**(d)** Tracer la courbe de la solution du problème avec condition initiale.

**(e)** Vérifier la formule d'Abel pour $y_1$ et $y_2$, avec $x_0 = 0$.

**5.** Calculer les Wronskiens des ensembles de fonctions données.

**(a)** $\{1, e^x\}$

**(b)** $\{e^x, e^x \sin x\}$

**(c)** $\{x + 1, x^2 + 2\}$

**(d)** $\{x^{1/2}, x^{-1/3}\}$

**(e)** $\{\dfrac{\sin x}{x}, \dfrac{\cos x}{x}\}$

**(f)** $\{x \ln|x|, x^2 \ln|x|\}$

**(g)** $\{e^x \cos\sqrt{x}, e^x \sin\sqrt{x}\}$

**6.** Trouver le Wronskien des solutions $\{y_1, y_2\}$ de

$$y''^2 + 1)y' - 2y = 0,$$

sachant que $W(\pi) = 0$.

**7.** Trouver le Wronskien des solutions $\{y_1, y_2\}$ de

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0,$$

sachant que $W(0) = 1$. (Cette équation est appelée : équation de *Legendre*.)

**8.** Trouver le Wronskien des solutions $\{y_1, y_2\}$ de

$$x^2y'' + xy'^2 - \nu^2)y = 0,$$

si $W(1) = 1$. (Cette équation est une équation de *Bessel*.)

**9.** (Cet exercice montre que si on connait une solution non-triviale de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, on peut utiliser la formule d'Abel pour trouver une autre.)

Supposons que $p$ et $q$ sont continues et $y_1$ est une solution de

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{A}$$

qui n'a pas de racines sur $(a, b)$. Laissons $P(x) = \int p(x)\,dx$ une primitive de $p$ sur $(a, b)$.

**(a)** Montre que si $K$ est une constante arbitraire non nulle et $y_2$ satisfait

$$y_1y_2' - y_1'y_2 = Ke^{-P(x)} \tag{B}$$

sur $(a, b)$, alors $y_2$ satisfait (A) sur $(a, b)$, et $\{y_1, y_2\}$ est un ensemble fondamental de solutions de (A) sur $(a, b)$.

**(b)** Conclure de (a) que si $y_2 = uy_1$ où $u' = K\dfrac{e^{-P(x)}}{y_1^2(x)}$, alors $\{y_1, y_2\}$ est un ensemble fondamental de solutions de (A) sur $(a, b)$.

Dans les exercices 10–23 utiliser la méthode de l'exercice 9 pour trouver une seconde solution $y_2$ qui n'est pas proportionnelle a la solution $y_1$. Choisissez $K$ convenablement pour simplifier $y_2$.

**10.** $y'' - 2y' - 3y = 0\,;\quad y_1 = e^{3x}$

**11.** $y'' - 6y' + 9y = 0\,;\quad y_1 = e^{3x}$

**12.** $y'' - 2ay'^2y = 0$ ($a =$ constante) ; $\quad y_1 = e^{ax}$

**13.** $x^2y'' + xy' - y = 0\,;\quad y_1 = x$

**14.** $x^2y'' - xy' + y = 0\,;\quad y_1 = x$

**15.** $x^2y'' - (2a-1)xy'^2y = 0$ ($a \neq 0$ ) ; $x > 0\,;\quad y_1 = x^a$

**16.** $4x^2y'' - 4xy'^2)y = 0\,;\quad y_1 = x^{1/2}e^{2x}$

**17.** $(x-1)y'' - xy' + y = 0\,;\quad y_1 = e^x$

**18.** $x^2y'' - 2xy'^2 + 2)y = 0\,;\quad y_1 = x\cos x$

**19.** $4x^2(\sin x)y'' - 4x(x\cos x + \sin x)y' + (2x\cos x + 3\sin x)y = 0\,;\quad y_1 = x^{1/2}$

**20.** $(3x-1)y'' - (3x+2)y' - (6x-8)y = 0\,;\quad y_1 = e^{2x}$

**21.** $(x^2-4)y'' + 4xy' + 2y = 0\,;\quad y_1 = \dfrac{1}{x-2}$

**22.** $(2x+1)xy''^2 - 1)y' - 4(x+1)y = 0\,;\quad y_1 = \dfrac{1}{x}$

**23.** $(x^2-2x)y''^2)y' + (2x-2)y = 0\,;\quad y_1 = e^x$

**24.** Supposons que $p$ et $q$ sont continues sur l'intervalle $(a,b)$ et $x_0 \in (a,b)$. Utiliser Théorème 4.5 pour montrer que la seule solution du problème de Cauchy

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0$$

sur $(a,b)$ est la solution triviale $y \equiv 0$.

**25.** Supposons que $P_0$, $P_1$, et $P_2$ sont continues sur $(a,b)$ et que $x_0 \in (a,b)$. Montrer que si l'un des deux cas est vraie alors $P_0(x) = 0$ pour un certain $x \in (a,b)$.

**(a)** Le problème de Cauchy

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0, \quad y(x_0) = k_0, \quad y'(x_0) = k_1$$

à plus d'une solution sur $(a,b)$.

**(b)** Le problème de Cauchy

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0, \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0$$

a une solution non triviale sur $(a, b)$.

**26.** Supposons $p$ et $q$ sont continues sur $(a, b)$ et que $y_1$ et $y_2$ sont des solutions de

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{A}$$

sur $(a, b)$. Si

$$z_1 = \alpha y_1 + \beta y_2 \quad \text{and} \quad z_2 = \gamma y_1 + \delta y_2,$$

où $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, et $\delta$ sont des constantes. Montrer que se $\{z_1, z_2\}$ est un ensemble fondamental de solutions de (A) sur $(a, b)$ alors $\{y_1, y_2\}$ l'est aussi.

**27.** Supposons que $p$ et $q$ sont continues sur $(a, b)$ et $\{y_1, y_2\}$ un ensemble fondamental de solutions de

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{A}$$

sur $(a, b)$. Si

$$z_1 = \alpha y_1 + \beta y_2 \quad \text{and} \quad z_2 = \gamma y_1 + \delta y_2,$$

où $\alpha, \beta, \gamma$, et $\delta$ sont des constantes. Montrer que $\{z_1, z_2\}$ un ensemble fondamental de solutions de (A) sur $(a, b)$ si et seulement si $\alpha\gamma - \beta\delta \neq 0$.

**28.** Supposons que $y_1$ est dérivable sur un intervalle $(a, b)$ et que $y_2 = ky_1$, où $k$ est une constante. Montrer que le Wronskien de $\{y_1, y_2\}$ est identiquement nul sur $(a, b)$.

**29.** Laissons

$$y_1 = x^3 \quad \text{and} \quad y_2 = \begin{cases} x^3, & x \geq 0, \\ -x^3, & x < 0. \end{cases}$$

**(a)** Montrer que le Wronskien de $\{y_1, y_2\}$ est défini et identiquement nul sur $(-\infty, \infty)$.

**(b)** Supposons que $a < 0 < b$. Montrer que $\{y_1, y_2\}$ est linéairement indépendants sur $(a, b)$.

(**c**) Utiliser Exercice 25 (b) pour monter que ces résultats ne contredisent pas le théorème 4.2, parce que ni $y_1$ ni $y_2$ peut être une solution d'une équation

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

sur $(a, b)$ si $p$ et $q$ sont continues sur $(a, b)$.

**30.** Supposons que $p$ et $q$ sont continues sur $(a, b)$ et que $\{y_1, y_2\}$ est un ensemble de solutions de

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

sur $(a, b)$ tel que $y_1(x_0) = y_2(x_0) = 0$ ou bien $y_1'(x_0) = y_2'(x_0) = 0$ pour un certain $x_0$ dans $(a, b)$. Montrer que $\{y_1, y_2\}$ est linéairement dépendant sur $(a, b)$.

**31.** Supposons que $p$ et $q$ sont continues sur $(a, b)$ et $\{y_1, y_2\}$ est ensemble fondamental de solutions de

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

sur $(a, b)$. Montrer que si $y_1(x_1) = y_1(x_2) = 0$, ou $a < x_1 < x_2 < b$, alors $y_2(x) = 0$ sur un certain $x$ dans $(x_1, x_2)$.
INDICATION : Montrer que si $y_2$ *n'a pas de racines sur* $(x_1, x_2)$*, alors* $y_1/y_2$ *est soit strictement croissant ou strictement décroissant sur* $(x_1, x_2)$*, et puis déduire une contradiction.*

**32.** Supposons $p$ et $q$ sont continues sur $(a, b)$ et que chaque solution de

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{A}$$

sur $(a, b)$ est une combinaison linéaire des fonctions $\{y_1, y_2\}$. Utiliser Théorème 4.5 pour montrer que $y_1$ et $y_2$ sont elles mêmes des solutions de (A) sur $(a, b)$.

**33.** Supposons $p_1$, $p_2$, $q_1$, et $q_2$ sont continues sur $(a, b)$ et les équations

$$y'' + p_1(x)y' + q_1(x)y = 0 \quad \text{and} \quad y'' + p_2(x)y' + q_2(x)y = 0$$

ont les mêmes solutions sur $(a, b)$. Utiliser la formule d'Abel pour montrer que $p_1 = p_2$ et $q_1 = q_2$ sur $(a, b)$.

**34.** Montrer que si $y_1$ et $y_2$ sont deux fois dérivables sur $(a,b)$ et le Wronskien $W$ de $\{y_1, y_2\}$ n'a pas de zéros sur $(a,b)$ alors l'équation

$$\frac{1}{W}\begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 \\ y' & y_1' & y_2' \\ y'' & y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} = 0$$

peut être écrite comme

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{A}$$

où $p$ et $q$ sont continues sur $(a,b)$ et $\{y_1, y_2\}$ est un ensemble fondamental de solutions de (A) sur $(a,b)$.

INDICATION: *Développer le determinant en cofacteurs de la première colonne.*

**35.** Utiliser la méthode de l'exercice 34 pour trouver une équation linéaire dont les fonctions données forment un ensemble fondamental de solutions sur un certain intervalle.

**(a)** $e^x \cos 2x, \quad e^x \sin 2x$ **(b)** $x, \quad e^{2x}$

**(c)** $x, \quad x \ln x$ **(d)** $\cos(\ln x), \quad \sin(\ln x)$

**(e)** $\cosh x, \quad \sinh x$ **(f)** $x^2 - 1, \quad x^2 + 1$

**36.** Supposons que $p$ et $q$ sont continues sur $(a,b)$ et $\{y_1, y_2\}$ est un ensemble fondamental de solutions de

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{A}$$

sue $(a,b)$. Montrer que si $y$ est une solution de (A) sur $(a,b)$, il existe exactement une façon de choisir $c_1$ et $c_2$ pour que $y = c_1y_1 + c_2y_2$ sur $(a,b)$.

**37.** Supposons $p$ et $q$ sont continues sur $(a,b)$ et que $x_0$ est dans $(a,b)$. Si $y_1$ et $y_2$ sont les solutions de

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{A}$$

tel que

$$y_1(x_0) = 1, \quad y_1'(x_0) = 0 \quad \text{and} \quad y_2(x_0) = 0, \; y_2'(x_0) = 1.$$

(Théorème 4.5 implique que chacun de ces problèmes avec valeurs initiales a une solution unique sur $(a, b)$.)

**(a)** Montrer que $\{y_1, y_2\}$ est linéairement indépendant sur $(a, b)$.

**(b)** Monter qu'une solution arbitraire $y$ de (A) sur $(a, b)$ peut être écrite comme $y = y(x_0)y_1 + y'(x_0)y_2$.

**(c)** Exprimer la solution du problème avec valeurs initiales

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = k_0, \quad y'(x_0) = k_1$$

comme une combinaison linéaire de $y_1$ et $y_2$.

**38.** Trouver les solutions $y_1$ et $y_2$ de l'équation $y'' = 0$ qui satisfait les conditions initiales

$$y_1(x_0) = 1, \quad y_1'(x_0) = 0 \quad \text{and} \quad y_2(x_0) = 0, \quad y_2'(x_0) = 1.$$

Puis utiliser Exercice 37 **(c)** pour trouver la solution du problème avec contions initiales

$$y'' = 0, \quad y(0) = k_0, \quad y'(0) = k_1$$

comme une combinaison linéaire de $y_1$ et $y_2$.

**39.** Soit $x_0$ un nombre réel arbitraire. Si $e^x$ et $e^{-x}$ sont des solutions de $y'' - y = 0$, trouver les solutions $y_1$ et $y_2$ de $y'' - y = 0$ tel que

$$y_1(x_0) = 1, \quad y_1'(x_0) = 0 \quad \text{and} \quad y_2(x_0) = 0, \; y_2'(x_0) = 1.$$

Puis utiliser exercice 37 **(c)** pour trouver la solution du problème de Cauchy

$$y'' - y = 0, \quad y(x_0) = k_0, \quad y'(x_0) = k_1$$

comme une combinaison linéaire de $y_1$ et $y_2$.

**40.** Soit $x_0$ un nombre réel arbitraire. Si $\cos \omega x$ et $\sin \omega x$ sont des solutions de $y'' + \omega^2 y = 0$, trouver les solutions tels que

$$y_1(x_0) = 1, \quad y_1'(x_0) = 0 \quad \text{et} \quad y_2(x_0) = 0,\ y_2'(x_0) = 1$$

.

Puis utiliser exercice 37 **(c)** pour trouver la solution du problème de Cauchy

$$y'' + \omega^2 y = 0, \quad y(x_0) = k_0, \quad y'(x_0) = k_1$$

comme une combinaison linéaire de $y_1$ et $y_2$. Utiliser les identités

$$\begin{aligned} \cos(A+B) &= \cos A \cos B - \sin A \sin B \\ \sin(A+B) &= \sin A \cos B + \cos A \sin B \end{aligned}$$

pour simplifier vos expressions de $y_1$, $y_2$, et $y$.

**41.** Dans l'exercice 4 on a montré que $1/(x-1)$ et $1/(x+1)$ sont des solutions de

$$(x^2-1)y'' + 4xy' + 2y = 0 \tag{A}$$

sur $(-1, 1)$. Trouver les solutions de (A) tel que

$$y_1(0) = 1, \quad y_1'(0) = 0 \quad \text{and} \quad y_2(0) = 0,\ y_2'(0) = 1.$$

Utiliser exercice 37 **(c)** pour écrire la la solution du problème

$$(x^2-1)y'' + 4xy' + 2y = 0, \quad y(0) = k_0, \quad y'(0) = k_1$$

comme combinaison linéaire de $y_1$ et $y_2$.

**42.** **(a)** Vérifier que $y_1 = x^2$ et $y_2 = x^3$ sont des solutions de

$$x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0 \tag{A}$$

sur $(-\infty, \infty)$ et que $\{y_1, y_2\}$ est un ensemble fondamental de solutions de

(A) sur $(-\infty, 0)$ et $(0, \infty)$.

**(b)** Soient $a_1$, $a_2$, $b_1$, et $b_2$ des constantes. Monter que

$$y = \begin{cases} a_1x^2 + a_2x^3, & x \geq 0, \\ b_1x^2 + b_2x^3, & x < 0 \end{cases}$$

est une solution de (A) sur $(-\infty, \infty)$ si et seulement si $a_1 = b_1$.Utiliser cela pour justifier que $y$ est une solution de (A) sur $(-\infty, \infty)$ si et seulement si

$$y = \begin{cases} c_1x^2 + c_2x^3, & x \geq 0, \\ c_1x^2 + c_3x^3, & x < 0, \end{cases}$$

où $c_1$, $c_2$, et $c_3$ sont des constantes arbitraires.

**(c)** Pour quelles valeurs de $k_0$ et $k_1$ le problème

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0, \quad y(0) = k_0, \quad y'(0) = k_1$$

aura t-il des solutions ? Quelles sont ces solutions ?

**(d)** Montrer que si $x_0 \neq 0$ et $k_0, k_1$ des constantes arbitraires, le problème

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0, \quad y(x_0) = k_0, \quad y'(x_0) = k_1 \tag{B}$$

aura une infinité de solutions sur $(-\infty, \infty)$. Sur quel intervalle (B) aura t-elle une solution unique ?

**43.** **(a)** Vérifier que $y_1 = x$ and $y_2 = x^2$ sont des solutions de

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0 \tag{A}$$

sur $(-\infty, \infty)$ et que $\{y_1, y_2\}$ est un ensemble fondamental de solutions de (A) sur $(-\infty, 0)$ et $(0, \infty)$.

**(b)** Soient $a_1$, $a_2$, $b_1$, et $b_2$ des constantes. Monter que

$$y = \begin{cases} a_1x + a_2x^2, & x \geq 0, \\ b_1x + b_2x^2, & x < 0 \end{cases}$$

est une solution de (A) sur $(-\infty, \infty)$ si et seulement si $a_1 = b_1$ et $a_2 = b_2$. De cela, justifier que la solution générale de (A) sur $(-\infty, \infty)$ est $y = c_1x + c_2x^2$, où $c_1$ et $c_2$ sont des constantes arbitraires.

**(c)** Pour quelles valeurs de $k_0$ et $k_1$ le problème

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad y(0) = k_0, \quad y'(0) = k_1$$

aura t-il des solutions ? Quelles sont ces solutions ?

**(d)** Montrer que si $x_0 \neq 0$ et $k_0, k_1$ sont des constates arbitraires alors le problème

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad y(x_0) = k_0, \quad y'(x_0) = k_1$$

aura une solution unique sur $(-\infty, \infty)$.

**44.** **(a)** Vérifier que $y_1 = x^3$ et $y_2 = x^4$ sont des solutions de

$$x^2y'' - 6xy' + 12y = 0 \tag{A}$$

sur $(-\infty, \infty)$, et que $\{y_1, y_2\}$ est un ensemble fondamental de solutions de (A) sur $(-\infty, 0)$ et $(0, \infty)$.

**(b)** Montrer que $y$ est une solution de (A) on $(-\infty, \infty)$ si et seulement si

$$y = \begin{cases} a_1x^3 + a_2x^4, & x \geq 0, \\ b_1x^3 + b_2x^4, & x < 0, \end{cases}$$

où $a_1$, $a_2$, $b_1$, et $b_2$ sont des constantes.

**(c)** Pour quelles valeurs de $k_0$ et $k_1$ le problème de Cauchy

$$x^2y'' - 6xy' + 12y = 0, \quad y(0) = k_0, \quad y'(0) = k_1$$

aura t-il une solution ? Quelles sont ces solutions ?

**(d)** Montrer que si $x_0 \neq 0$ et $k_0, k_1$ sont des constantes arbitraires alors le avec conditions initiales

$$x^2y'' - 6xy' + 12y = 0, \quad y(x_0) = k_0, \quad y'(x_0) = k_1 \tag{B}$$

a une infinité de solutions sur $(-\infty, \infty)$. Sur quel intervalle (B) aura t-elle une solution unique ?

## 4.2 Équations complémentaires avec coefficients constants

Dans cette section on traite les équations différentielles du second ordre à coefficients constants, que l'on peut écrire sous la forme

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{4.9}$$

où $a, b$ et $c$ sont des nombres réels et la fonction $f(x)$ est continue sur un l'intervalle $I$. Nous supposons que $a \neq 0$, sinon (4.9) est du premier ordre.

**Exemple 4.8.** *Supposons que* $L = D^2 - 2D + 1$. *Trouver* $L(xe^x)$ , $L(e^x)$ *et* $L(e^{2x})$

**Solution.** *Si on applique l'opérateur* $L$ *aux fonctions on obtient,*

$$\begin{aligned} L(xe^x) &= D^2(xe^x) - 2D(xe^x) + (xe^x) \\ &= D(e^x + xe^x) - 2(e^x + xe^x) + (xe^x) \\ &= (2e^x + xe^x) - 2(e^x + xe^x) + (xe^x) = 0 \end{aligned}$$

$$L(e^x) = D^2(e^x) - 2D(e^x) + (e^x) = e^x - 2e^x + e^x = 0$$

$$\begin{aligned} L(e^{2x}) &= D^2(e^{2x}) - 2D(e^{2x}) + (e^{2x}) \\ &= D(2e^{2x}) - 4e^{2x} + e^{2x} \\ &= 4e^{2x} - 4e^{2x} + e^{2x} = e^{2x} \end{aligned}$$

On a vu que si $L = aD^2 + bD + c$ la solution de $L(y) = f$ est égale à $y = y_h + y_p$ où $y_h$ est la solution générale de l'équation complémentaire $L(y) = 0$ et $y_p$ est une solution particulière de $L(y) = f$. On peut observer que

$$\begin{aligned} L(e^{rx}) &= \left(aD^2 + bD + c\right)(e^{rx}) \\ &= aD^2(e^{rx}) + bD(e^{rx}) + c(e^{rx}) \\ &= ar^2e^{rx} + be^{rx} + ce^{rx} \\ &= \left(ar^2 + br + c\right)e^{rx} \end{aligned}$$

puisque $e^{rx} > 0$ la solution de $L(e^{rx}) = 0$ est équivalente à

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{4.10}$$

qu'on appelle **équation caractéristique** associée avec l'équation complémentaire (4.9). Les solutions de (4.10) sont tout simplement

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Donc on a les cas suivants :

1. Si $b^2 - 4ac > 0$, l'équation (4.10) admet deux racines réelles et distinctes $r_1$ et $r_2$. Les fonctions $e^{r_1 x}$ et $e^{r_2 x}$ sont des solutions de (4.2) car

$$L(e^{r_i x}) = \left(ar_i^2 + br_i + c\right) e^{r_i x} = 0, i = 1, 2$$

de plus ces solutions sont linéairement indépendantes car le Wronskien

$$W(e^{r_1 x}, e^{r_2 x}) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1) e^{(r_1 + r_2)x} \neq 0$$

donc la solution générale est

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

2. Si le discriminant $b^2 - 4ac = 0$, l'équation (4.10) admet une racine réelle double $r_1 = r_2 = r = \dfrac{-b}{2a} \Rightarrow 2ar + b = 0.$

If est évident que $L(e^{rx}) = 0$. Mais on a aussi

$$\begin{aligned} L(xe^{rx}) &= \left(aD^2 + bD + c\right)(xe^{rx}) \\ &= e^{rx}\left[a\left(2r + xr^2\right) + b(1 + xr) + cx\right] \\ &= e^{rx}\left[x\left(ar^2 + br + c\right) + (2ar + b)\right] \\ &= e^{rx}\left[x(0) + (0)\right] = 0 \end{aligned}$$

donc $e^{rx}$ et $xe^{rx}$ sont deux solutions de $L(y) = 0$, en outre elles sont linéairement indépendantes car le Wronskien

$$W(e^{rx}, xe^{rx}) = \begin{vmatrix} e^{rx} & xe^{rx} \\ re^{rx} & (1+rx)e^{rx} \end{vmatrix} = e^{2rx} \neq 0$$

donc la solution générale (4.2) est

$$y(x) = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$$

**3.** Si le discriminant $b^2 - 4ac < 0$, l'équation (4.10) admet deux racines complexes ($\overline{r_1} = r_2$ conjuguées), $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta$, où $\beta \neq 0$.
La formule d'Euler dit que

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

donc des solutions de $L(y) = 0$ sont données par

$$\begin{aligned} e^{r_1 x} &= e^{\alpha x + i\beta x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) \\ e^{r_2 x} &= e^{\alpha x - i\beta x} = e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) \end{aligned}$$

Puisque l'opérateur $L$ est linéaire alors n'importe qu'elle combinaison linéaire de solutions de $L(y) = 0$ est aussi une solution de $L(y) = 0$. Considérons les combinaisons

$$\frac{e^{r_1 x} + e^{r_2 x}}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x \quad \text{et} \quad \frac{e^{r_1 x} - e^{r_2 x}}{2i} = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

Observons que $L(e^{\alpha x}\cos\beta x) = L(e^{\alpha x}\sin\beta x) = 0$, donc $e^{\alpha x}\cos\beta x$ et $e^{\alpha x}\sin\beta x$ sont deux solutions de $L(y) = 0$, en outre elles sont linéairement indépendantes car le wronskien

$$\begin{aligned} W(e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x) &= \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x) & e^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x) \end{vmatrix} \\ &= \beta e^{2\alpha x} \neq 0 \end{aligned}$$

donc la solution générale (4.9) est

$$y(x) = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$$

**Théorème 4.6.** *Si $p(r) = ar^2 + br + c$ est le polynôme caractéristique de*

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{4.11}$$

*Alors :*

**(a)** *Si $p(r) = 0$ a deux racines réelles distinctes $r_1$ et $r_2$, alors la solution générale de (4.11) est*

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}.$$

**(b)** *Si $p(r) = 0$ a une racine double $r_1$, alors la solution générale de (4.11) est*

$$y = e^{r_1 x}(c_1 + c_2 x).$$

**(c)** *Si $p(r) = 0$ a deux racines complexes $r_1 = \lambda + i\omega$ et $r_2 = \lambda - i\omega$ (ou $\omega > 0$), la solution générale de de (4.11) est*

$$y = e^{\lambda x}(c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x).$$

**Exemple 4.9.** *Trouver la solution générale de $y'' + y' = 0$.*

**Solution.** *L'équation caractéristique de cette équation est $r^2 + r = 0$, dont les racines sont $r = 0$ et $r = -1$. Donc la solution générale est*

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-x}.$$

**Exemple 4.10.** *Trouver la solution du problème de Cauchy*

$$y'' + y' - 2y = 0, \quad y(0) = 3, \; y'(0) = -3.$$

**Solution.** *L'équation caractéristique de cette équation est $r^2 + r - 2 = 0$, dont les racines* *sont* $r = 1$ *et* $r = -2$. *Donc la solution générale est*

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}.$$

*Si on utilise les condition initiales on trouve les système*

$$\begin{aligned} y(0) &= 3 = c_1 + c_2 \\ y'(0) &= -3 = c_1 - 2c_2 \end{aligned}$$

*dont la solution est* $c_1 = 1$ *et* $c_2 = 2$. *Donc la solution de ce problème de Cauchy est* $y(x) = e^x + 2e^{-2x}$.

**Exemple 4.11.** *Résoudre le problème suivant* $y'' - 2y' + y = 0,\ y(1) = -1$ *et* $y'(1) = 2$.

**Solution.** *L'équation caractéristique de cette équation est* $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2 = 0$, *donc on a une racine double* $r = 1$. *La solution générale est*

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x.$$

*Si on utilise les condition initiales on trouve le système*

$$\begin{aligned} y(1) &= -1 = ec_1 + ec_2 \\ y'(1) &= 2 = ec_1 + 2ec_2 \end{aligned}$$

*dont la solution est* $c_1 = -4e^{-1}$ *et* $c_2 = 3e^{-1}$. *Donc la solution de ce problème de Cauchy est* $y(x) = -4e^{x-1} + 3xe^{x-1}$.

**Exemple 4.12.** *Résoudre le problème suivant* $y'' - 6y' + 25y = 0,\ y(0) = 2$ *et* $y'(0) = 12$.

**Solution.** *L'équation caractéristique de cette équation est* $r^2 - 6r + 25 = 0$, *dont les racines sont complexes* $r_1 = 3 + 4i$ *et* $r_2 = 3 - 4i$.

*La solution générale est*

$$y(x) = e^{3x}(c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x).$$

*Si on utilise les condition initiales on trouve le système*

$$y(1) = 2 = c_1$$
$$y'(0) = 12 = 4c_2$$

*dont la solution est* $c_1 = 2$ *et* $c_2 = 3$. *Donc la solution de ce problème de Cauchy est*

$$y(x) = e^{3x}(2\cos 4x + 3\sin 4x).$$

***Exercices***

Dans les exercices 1–12 trouver la solution générale.

**1.** $y'' + 5y' - 6y = 0$

**2.** $y'' - 4y' + 5y = 0$

**3.** $y'' + 8y' + 7y = 0$

**4.** $y'' - 4y' + 4y = 0$

**5.** $y'' + 2y' + 10y = 0$

**6.** $y'' + 6y' + 10y = 0$

**7.** $y'' - 8y' + 16y = 0$

**8.** $y'' + y' = 0$

**9.** $y'' - 2y' + 3y = 0$

**10.** $y'' + 6y' + 13y = 0$

**11.** $4y'' + 4y' + 10y = 0$

**12.** $10y'' - 3y' - y = 0$

Dans les exercices 13–17 résoudre le problème avec conditions initiales.

**13.** $y'' + 14y' + 50y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -17$

**14.** $6y'' - y' - y = 0, \quad y(0) = 10, \quad y'(0) = 0$

**15.** $6y'' + y' - y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 3$

**16.** $4y'' - 4y' - 3y = 0, \quad y(0) = \frac{13}{12}, \quad y'(0) = \frac{23}{24}$

**17.** $4y'' - 12y' + 9y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = \frac{5}{2}$

Dans les exercices 18–21 résoudre le problème avec valeurs initiales et représenter graphiquement la solution.

**18.** $y'' + 7y' + 12y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0$

**19.** $y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$

**20.** $36y'' - 12y' + y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = \frac{5}{2}$

**21.** $y'' + 4y' + 10y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -2$

**22.** **(a)** Supposons que $y$ est une solution de l'équation

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{A}$$

Soit $z(x) = y(x - x_0)$, où $x_0$ un réel arbitraire. Montrer que

$$az'' + bz' + cz = 0.$$

**(b)** Let $z_1(x) = y_1(x-x_0)$ et $z_2(x) = y_2(x-x_0)$, où $\{y_1, y_2\}$ est un ensemble fondamental de solutions de (A). Montrer que $\{z_1, z_2\}$ est aussi un ensemble fondamental de solutions de (A).

**(c)** Théorème 4.6 est pratique pour résoudre un problème avec valeurs initiales

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad y(0) = k_0, \quad y'(0) = k_1,$$

où les conditions initiales sont imposées à $x_0 = 0$. Cependant, si le problème

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad y(x_0) = k_0, \quad y'(x_0) = k_1, \tag{B}$$

où $x_0 \neq 0$, alors trouver les constantes dans

$$y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}, \quad y = e^{r_1x}(c_1 + c_2x), \text{ or } y = e^{\lambda x}(c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x)$$

(selon le cas) est plus compliqué. Utilisez (b) pour reformuler le théorème 4.6 sous une forme plus pratique pour résoudre (B).

Dans les exercices 23–28 utiliser la méthode suggérée dans l'exercice 22 pour résoudre le problème avec conditions initiales.

**23.** $y'' + 3y' + 2y = 0, \quad y(1) = -1, \quad y'(1) = 4$

**24.** $y'' - 6y' - 7y = 0, \quad y(2) = -\dfrac{1}{3}, \quad y'(2) = -5$

**25.** $y'' - 14y' + 49y = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 11$

**26.** $9y'' + 6y' + y = 0, \quad y(2) = 2, \quad y'(2) = -\dfrac{14}{3}$

**27.** $9y'' + 4y = 0, \quad y(\pi/4) = 2, \quad y'(\pi/4) = -2$

**28.** $y'' + 3y = 0, \quad y(\pi/3) = 2, \quad y'(\pi/3) = -1$

**29.** Prouver : Si l'équation caractéristique de

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{A}$$

a une racine double négative ou bien deux racines complexes avec parties réelles négatives, alors chaque solution de (A) tend vers zéro quand $x \to \infty$.

**30.** Supposons que le polynôme caractéristique de $ay'' + by' + cy = 0$ a deux racines réelles distinctes $r_1$ et $r_2$. Utiliser la méthode de l'exercice 22 pour trouver la formule de la solution de l'équation

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad y(x_0) = k_0, \quad y'(x_0) = k_1.$$

**31.** Supposons que le polynôme caractéristique de $ay'' + by' + cy = 0$ a une racine réelle double $r_1$. Utiliser la méthode suggérée dans l'exercice 22 pour trouver la formule de la solution de l'équation

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad y(x_0) = k_0, \quad y'(x_0) = k_1.$$

**32.** Supposons que le polynôme caractéristique de $ay'' + by' + cy = 0$ a deux racines complexes conjuguées $\lambda \pm i\omega$. Utiliser la méthode suggérée dans l'exercice 22 pour trouver la formule de la solution de l'équation

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad y(x_0) = k_0, \quad y'(x_0) = k_1.$$

**33.** Supposons que le polynôme caractéristique de

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{A}$$

a une racine réelle double $r_1$. Temporairement, considérer $e^{rx}$ comme une fonction de deux variables réelles $x$ et $r$.

**(a)** Montrer que

$$a\frac{\partial^2}{\partial^2 x}(e^{rx}) + b\frac{\partial}{\partial x}(e^{rx}) + ce^{rx} = a(r-r_1)^2 e^{rx}. \tag{B}$$

**(b)** Dériver (B) par rapport à $r$ pour obtenir

$$a\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2}{\partial^2 x}(e^{rx})\right)+b\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial x}(e^{rx})\right)+c(xe^{rx}) = [2+(r-r_1)x]a(r-r_1)e^{rx}. \tag{C}$$

**(c)** Reverser l'ordre des dérivées partielles dans les deux premiers termes du coté guauche de (C) pour obtenir

$$a\frac{\partial^2}{\partial x^2}(xe^{rx}) + b\frac{\partial}{\partial x}(xe^{rx}) + c(xe^{rx}) = [2+(r-r_1)x]a(r-r_1)e^{rx}. \tag{D}$$

**(d)** Laissez $r = r_1$ dans (B) et (D) pour avoir $y_1 = e^{r_1 x}$ et $y_2 = xe^{r_1 x}$ comme solutions de (A)

**34.** Dans le cours d'analyse vous avez appris que $e^u$, $\cos u$, et $\sin u$ peuvent être représenter par les séries

$$e^u = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{n!} = 1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \cdots + \frac{u^n}{n!} + \cdots \tag{A}$$

$$\cos u = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{u^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{u^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \tag{B}$$

et

$$\sin u = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!} = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} + \cdots + (-1)^n\frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \tag{C}$$

pour valeur réelle de $u$. Bien que vous avez déjà pris en compte (A) que pour les valeurs réelles de $u$, on peut le faire pour $u = i\theta$, où $\theta$ est réel, pour obtenir

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\theta)^n}{n!}. \tag{D}$$

Compte tenu du contexte approprié dans la théorie de la série infinie de termes complexes, on peut démontrer que la série (D) converge pour tout réel $theta$.

**(a)** Rappelant que $i^2 = -1$, écrivez assez termes de la suite $\{i^n\}$ afin de vous convaincre que la suite est répétitive :

$$1, i, -1, -i, 1, i, -1, -i, 1, i, -1, -i, 1, i, -1, -i, \ cdots.$$

Utilisez cette option pour regrouper les termes de (D)

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4} + \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} + i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

En comparant ce résultat avec (B) et (C), conclure que

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta. \tag{E}$$

Cette formule est celle *Identité d'Euler's*.

**(b)** Commencer par

$$e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2),$$

collecter la partie réelle et la partie imaginaire sur la droite, et d'utiliser les identités trigonométriques

$$\begin{aligned} \cos(\theta_1 + \theta_2) &= \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) &= \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2 \end{aligned}$$

pour vérifier que

$$e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1}e^{i\theta_2},$$

ce que vous attendiez de l'utilisation de la notation exponentielle $e^{i\theta}$.

**(c)** Si $\alpha$ et $\beta$ sont réels, définir

$$e^{\alpha+i\beta} = e^{\alpha}e^{i\beta} = e^{\alpha}(\cos\beta + i\sin\beta). \tag{F}$$

Monter que if $z_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ et $z_2 = \alpha_2 + i\beta_2$ puis

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$

**(d)** Soit $a$, $b$, et $c$ des nombres réels, avec $a \neq 0$. Soit $z = u + iv$ où $u$ et $v$ sont des fonctions réelles de $x$. Alors on dit que $z$ est une solution de

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{G}$$

si $u$ et $v$ sont des solutions of (G). Utiliser Théorème 4.6 (c) pour vérifier que si l'équation caractéristique de (G) a des racine complexes conjuguées $\lambda \pm i\omega$ alors $z_1 = e^{(\lambda+i\omega)x}$ et $z_2 = e^{(\lambda-i\omega)x}$ sont deux solutions de (G).

## 4.3 La méthode des coefficients indéterminés

Considérons l'opérateur différentiel $L = aD^2 + bD + c$. On a vu que la solution générale de $L(y) = f$ est $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$. Dans la section précédente on a montré comment trouver $y_h(x)$, et dans cette section Nous allons montrer comment trouver la solution particulière $y_p(x)$. Notre équation est donc de la forme

$$L(y) = ay'' + by' + cy = f(x) \tag{4.12}$$

avec $a, b$ et $c$ des constantes et en plus $a \neq 0$. Le polynôme caractéristique de cette équation est

$$p(r) = ar^2 + br + c \tag{4.13}$$

La méthode des coefficients indéterminés est une procédure pour trouver $y_p$ quand $f(x)$ est une exponentielle, une sinus ou cosinus, un polynôme, ou une combinaison de ces fonctions. Par exemple, si notre équation est

$$L(y) = ay'' + by' + cy = e^{mx} \tag{4.14}$$

Puisque les dérivés d'une exponentielle tels que $e^{mx}$ donne simplement un multiple de la fonction elle même, il est donc naturel de deviner que

$$y_p(x) = Me^{mx} \tag{4.15}$$

Ici $M$ est le coefficient indéterminé que nous voulons déterminer de manière que (4.15) sera effectivement une solution de (4.14). En substituant (4.15) dans (4.14), nous obtenons

$$M\left(am^2 + bm + c\right)e^{mx} = e^{mx}$$

qui donne

$$M = \frac{1}{am^2 + bm + c} \tag{4.16}$$

Cette valeur de $M$ fera (4.15) une solution de (4.14), sauf lorsque le dénominateur sur la droite de (4.16) est égal à zéro. La source de cette difficulté est facile à comprendre, parce que l'exception se produit lorsque $m$ est une racine de l'équation caractéristique

$$ar^2 + br + c = 0.$$

Dans ce cas on pose comme solution particulière

$$y_p(x) = Mxe^{mx} \tag{4.17}$$

En substituant (4.17) dans (4.14), nous obtenons

$$M\left(am^2 + bm + c\right)xe^{mx} + M(2m + b)e^{mx} = e^{mx}$$

La première expression entre parenthèses est nulle en raison de notre hypothèse selon laquelle $m$ est une racine de l'équation caractéristique, donc on aura que

$$M = \frac{1}{2m + b}$$

On obtient ainsi un coefficient valable pour (4.17), sauf lorsque $m = -b/2$, ce qui arrive quand $m$ est une racine double l'équation caractéristique. Dans ce cas, nous essayons

$$y_p(x) = Mx^2e^{mx} \tag{4.18}$$

En substituant (4.18) dans (4.14), nous obtenons

$$M\left(am^2 + bm + c\right)x^2e^{mx} + 2M(2m + b)xe^{mx} + 2Me^{mx} = e^{mx}.$$

Les deux expressions entre parenthèses sont nulles en raison de notre hypothèse, donc on aura

$$M = \frac{1}{2}.$$

En résumé on a :

- si $p(m) \neq 0$, alors (4.14) à une solution particulière de la forme $Me^{mx}$,
- si $p(m) = 0$ ( $m$ est une racine simple), alors (4.14) n'a pas de solution de la forme $Me^{mx}$ mais aura une sous la forme $Mxe^{mx}$,
- et si $m$ est une racine double, alors (4.14) n'a pas de solution de la forme $Mxe^{mx}$

mais aura une solution de la forme $Mx^2e^{mx}$.

Dans chaque cas, nous avons donné une formule pour $M$, mais seulement dans le but de clarifier les raisons derrière les événements. En pratique, il est plus facile de trouver $M$ par substitution directe dans l'équation .

**Exemple 4.13.** *Trouver la solution générale de* $L(y) = y'' + y' - 2y = e^{3x}$.

*On a vu que la solution générale de l'équation complémentaire associée est*

$$y_h(x) = c_1e^x + c_2e^{-2x}.$$

*Pour la solution particulière on pose*

$$y_p(x) = Ae^{3x}$$

*et don on aura que*

$$\begin{aligned} L(y_p) &= 9Ae^{3x} + 3Ae^{3x} - 2Ae^{3x} \\ &= A(9 + 3 + -2)e^{3x} \\ &= 10Ae^{3x} = e^{3x} \end{aligned}$$

*donc* $A = 1/10$ *et* $y_p(x) = e^{3x}/10$. *La solution générale est donc*

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1e^x + c_2e^{-2x} + e^{3x}/10$$

**Exemple 4.14.** *Trouver la solution générale de* $L(y) = y'' + y' - 2y = e^x$.

*Les solutions de l'équation complémentaire associée sont*

$$y_h(x) = c_1e^x + c_2e^{-2x}.$$

*Puisque* $f(x) = e^x$ *est une des solutions de* $y_h(x)$, *notre* $y_p(x) = Axe^x$ *et donc on aura*

$$\begin{aligned}
L(y_p) &= (Axe^x)'' + (Axe^x)' - 2(Axe^x) \\
&= A(x+2)e^x + A(x+1)e^x - 2Axe^x \\
&= 3Ae^x
\end{aligned}$$

*donc* $A = 1/3$ *et* $y_p(x) = xe^x/3$ *la solution générale sera donc*

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1e^x + c_2e^{-2x} + xe^x/3$$

**Exemple 4.15.** *Résoudre le problème suivant* $L(y) = y'' - 2y' + y = e^x$.

*La solution complémentaire est égale à*

$$y_h(x) = c_1e^x + c_2xe^x.$$

*Puisque* $f(x) = e^x$ *on doit choisir notre* $y_p(x) = Ax^2e^x$

$$\begin{aligned}
L(y_p) &= \left(Ax^2e^x\right)'' - 2\left(Ax^2e^x\right)' + \left(Ax^2e^x\right) \\
&= A\left(x^2 + 4x + 2\right)e^x - 2A\left(x^2 + 2x\right)e^x + Ax^2e^x \\
&= 2Ae^x
\end{aligned}$$

*alors* $A = 1/2$, $y_p(x) = x^2e^x/2$ *et la solution générale*

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1e^x + c_2xe^x + x^2e^x/2$$

Un autre cas important où la méthode des coefficients indéterminés peut être appliquée est celui dans lequel $f(x) = \sin(mx)$ dans l'équation (4.12).

$$L(y) = ay'' + by' + cy = \sin(mx) \tag{4.19}$$

Puisque les dérivés du $\sin(mx)$ sont des multiples $\sin(mx)$ et cos($mx$), nous prenons une solution d'essai de la forme

$$y_p(x) = M\sin(mx) + N\cos(mx) \tag{4.20}$$

Les coefficients indéterminés $M$ et $N$ peuvent maintenant être calculés en substituant (4.20) dans (4.19) et en égalant les coefficients résultant de $\sin(mx)$ et $\sin(mx)$ à gauche et à droite. Ces étapes fonctionnent tout aussi bien si le côté droit de l'équation (12) est remplacé par $\cos(nx)$ ou toute combinaison linéaire $\sin(mx)$ et cos$(mx)$, c'est une fonction de la forme $\alpha\sin(mx) + \beta\cos(mx)$. Comme précédemment, le procésus se décompose si (4.20) est une solution de l'équation complémentaire. Lorsque cela se produit, on essai comme solution particulière

$$y_p(x) = x\left[M\sin(mx) + N\cos(mx)\right].$$

**Exemple 4.16.** *Trouver la solution particulière de* $L(y) = y'' + y = \sin x$.

*La solution générale de l'équation complémentaire est égale à*

$$y_h(x) = c_1\sin x + c_2\cos x.$$

*Puisque* $f(x) = \sin x$, *qui est une des solutions de* $y_h$ *on doit choisir notre* $y_p(x) = x(A\sin x + B\cos x)$

$$\begin{aligned} L(y_p) &= \left[x(A\sin x + B\cos x)\right]'' + x(A\sin x + B\cos x) \\ &= 2A\cos x - 2B\sin x - x(A\sin x + B\cos x) + x(A\sin x + B\cos x) \\ &= 2A\cos x - 2B\sin x \end{aligned}$$

*on doit résoudre l'équation*

$$2A\cos - 2B\sin x = \sin x$$

*qui est satisfaite quand* $A = 0$ *et* $B = -1/2$, *donc*

$$y_p(x) = -\tfrac{1}{2}x\cos x.$$

Le dernier cas qu'on considère est celui ou $f(x)$ est remplacé par un polynôme dans (4.12)

$$L(y) = ay'' + by' + cy = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{4.21}$$

Puisque la dérivée d'un polynôme est aussi un polynôme, nous devons rechercher une solution particulière de la forme

$$y_p = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0 \tag{4.22}$$

Lorsque $c \neq 0$ et (4.22) est remplacée dans (4.21), on peut trouver les valeurs des coefficients indéterminés $A_0, A_1, \ldots, A_n$ en comparant les termes de même puissance.

Si $c = 0$, cette procédure donne $x^{n-1}$ comme la plus grande puissance de $x$ à gauche (4.22), dans ce cas, nous prenons notre solution d'essai sous la forme

$$y_p = x\left(A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0\right) \tag{4.23}$$

Si $c = b = 0$, on aura

$$L(y) = ay'' = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

qui peut être résolue avec une intégration directe.

**Exemple 4.17.** *Trouver la solution générale de* $L(y) = y'' - y' - 2y = 4x^2$.

*L'équation caractéristique est*

$$r^2 - r - 2 = (r-2)(r+1) = 0$$

*donc la solution de* $L(y) = 0$ *est*

$$y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}.$$

*Puisque* $f(x) = 4x^2$, *on doit choisir notre* $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$

$$\begin{aligned} L(y_p) &= \left[Ax^2 + Bx + C\right]'' - \left[Ax^2 + Bx + C\right]' - 2\left[Ax^2 + Bx + C\right] \\ &= 2A - (2Ax + B) - 2\left(Ax^2 + Bx + C\right) \\ &= -2Ax^2 - x(2A + 2B) + (2A - B - 2C) \end{aligned}$$

*on doit résoudre l'équation*

$$-2Ax^2 - x(2A + 2B) + (2A - B - 2C) = 4x^2$$

*qui nous donne le système*

$$\begin{aligned} -2A &= 4 \\ 2A + 2B &= 0 \\ 2A - B - 2C &= 0 \end{aligned}$$

*qui est satisfait quand* $A = -2, B = 2$ *et* $C = -3$, *et nous donne*

$$y_p(x) = -2x^2 + 2x - 3$$

*et la solution générale est donc*

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} - 2x^2 + 2x - 3.$$

Maintenant on fait un exemple ou $f(x)$ est le produit d'un polynôme et d'une exponentielle.

**Exemple 4.18.** *Cherchons les solutions de l'équation* $y'' - y' - 2y = xe^x$.
*Les solutions de l'équation complémentaire associée sont* $y_h(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$.
*Comme* $r = 1$ *n'est pas racine du polynôme caractéristique* $r^2 - r - 2$, *on cherche une solution sous la forme* $y_p(x) = (Ax + B)e^x$.
*Si on dérive on trouve que* $y_p' = (Ax + A + B)e^x$ *et* $y_p'' = (Ax + 2A + B)e^x$.
*En remplaçant dans l'équation initiale, on trouve* $(-2Ax + A - 2B)e^x = xe^x$, *donc*

$A = -1/2$ *et* $B = -1/4$. *La solution générale est donc*

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + (-x/2 - 1/4)\, e^{x}.$$

Considérons l'équation

$$L(y) = ay'' + by' + cy = f(x). \tag{4.24}$$

Dans le tableau suivant nous illustrons quelques exemples spécifiques de $f(x)$ dans (4.12) avec la forme correspondante de la solution particulière. Nous supposons, bien sûr, que $f(x)$ ne contient pas de fonctions qui sont des solutions de l'équation complémentaire.

**Exemple 4.19.** *(a) Trouver la solution générale de*

$$y'' + y = 1. \tag{4.25}$$

*(b) Résoudre le problème avec conditions initiales*

$$y'' + y = 1, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 7. \tag{4.26}$$

**Solution.** *(a) On peut appliquer Théorème 4.5 avec* $(a, b) = (-\infty, \infty)$*, puisque les fonctions* $p \equiv 0$*,* $q \equiv 1$*, et* $f \equiv 1$ *dans* (4.25) *sont continues sur* $(-\infty, \infty)$*. Par inspection on a que* $y_p \equiv 1$ *est une solution particulière de* (4.25)*. Puisque* $y_1 = \cos x$ *et* $y_2 = \sin x$ *forme un ensemble fondamental de solutions de l'équation complémentaire* $y'' + y = 0$*, la solution générale de* (4.25) *est*

$$y = 1 + c_1 \cos x + c_2 \sin x. \tag{4.27}$$

*b Si on pose* $y(0) = 2$ *dans* (4.27) *on aura* $2 = 1 + c_1$*, so* $c_1 = 1$*. Dérivant* (4.27) *on aura*

$$y' = -c_1 \sin x + c_2 \cos x.$$

*En imposant la condition initiale* $y'(0) = 7$ *on trouve que* $c_2 = 7$*, donc la solution de*

(4.26) *est*

$$y = 1 + \cos x + 7 \sin x.$$

**Exemple 4.20.** *(a) Trouver la solution générale*

$$y'' - 2y' + y = -3 - x + x^2. \tag{4.28}$$

*(b) Résoudre le problème de Cauchy*

$$y'' - 2y' + y = -3 - x + x^2, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 1. \tag{4.29}$$

**Solution.** *(a) Le polynôme caractéristique de l'équation*

$$y'' - 2y' + y = 0$$

*est* $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2$*, donc* $y_1 = e^x$ *and* $y_2 = xe^x$ *forme un ensemble fondamental de solutions pour l'équation complémentaire. Pour deviner une forme de la solution particulière de* (4.28)*, on note que si substitue* $y_p = A + Bx + Cx^2$ *dans* (4.28) *on aura un autre polynôme de second degré qui dépend de* $A$*,* $B$*, et* $C$*. On doit choisir* $A$*,* $B$*, et* $C$ *de tel que les polynômes aurons les mêmes coefficients dans* (4.28) *donc, si*

$$y_p = A + Bx + Cx^2 \quad \textit{then} \quad y_p' = B + 2Cx \quad \textit{and} \quad y_p'' = 2C,$$

*alors*

$$\begin{aligned} y_p'' - 2y_p' + y_p &= 2C - 2(B + 2Cx) + (A + Bx + Cx^2) \\ &= (2C - 2B + A) + (-4C + B)x + Cx^2 = -3 - x + x^2. \end{aligned}$$

*donne*

$$\begin{aligned} C &= 1 \\ B - 4C &= -1 \\ A - 2B + 2C &= -3, \end{aligned}$$

*donc $C = 1$, $B = -1 + 4C = 3$, et $A = -3 - 2C + 2B = 1$. Alors $y_p = 1 + 3x + x^2$ est une solution particulière de (4.28) et Théorème 4.5 implique que*

$$y = 1 + 3x + x^2 + e^x(c_1 + c_2x) \tag{4.30}$$

*est la solution générale de (4.28).*

*(b) Imposant la condition initiale $y(0) = -2$ dans (4.30) donne $-2 = 1 + c_1$, donc $c_1 = -3$. Si on dérive (4.30) on aura*

$$y' = 3 + 2x + e^x(c_1 + c_2x) + c_2e^x,$$

*et imposant la condition initiale $y'(0) = 1$ nous donne $1 = 3 + c_1 + c_2$, donc $c_2 = 1$. Par conséquent, la solution de (4.29) est*

$$y = 1 + 3x + x^2 - e^x(3 - x).$$

**Exemple 4.21.** *Trouver la solution générale*

$$x^2y'' + xy' - 4y = 2x^4 \tag{4.31}$$

*on $(-\infty, 0)$ and $(0, \infty)$.*

**Solution.** *On peut vérifier que $y_1 = x^2$ et $y_2 = 1/x^2$ forme un ensemble fondamental de solutions de*

$$x^2y'' + xy' - 4y = 0$$

*sur $(-\infty, 0)$ et $(0, \infty)$. Pour trouver une solution particulière de (4.31), on note que si $y_p = Ax^4$, où $A$ est une constante alors les deux côtés sont de (4.31) sont des multiples de $x^4$ et on peut choisir $A$ de tel sort que les deux côtés sont égaux. Donc on aura*

$$x^2y_p'' + xy_p' - 4y_p = x^2(12Ax^2) + x(4Ax^3) - 4Ax^4 = 12Ax^4 = 2x^4$$

*si $A = 1/6$; alors, $y_p = x^4/6$ une solution particulière de (4.31) on $(-\infty, \infty)$. Le*

*Théorème 4.5 implique que la solution générale de (4.31) sur* $(-\infty, 0)$ *et* $(0, \infty)$ *est*

$$y = \frac{x^4}{6} + c_1 x^2 + \frac{c_2}{x^2}.$$

**Le Principe de Superposition**

Le théorème suivant nous permet de décomposer une équation non homogène en parties plus simples, trouver une solution particulière pour chaque partie, puis de combiner leurs solutions pour obtenir une solution particulière du problème initial.

**Théorème 4.7** (Le Principe de Superposition)**.** *Supposons que* $y_{p_1}$ *est une solution particulière de*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x)$$

*sur* $(a, b)$ *et* $y_{p_2}$ *est une solution particulière de*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$$

*sur* $(a, b)$*. Alors*

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$$

*est une solution particulière de*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$$

*sur* $(a, b)$*.*

*Démonstration.* Si $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ alors

$$\begin{aligned}
y_p'' + p(x)y_p' + q(x)y_p &= (y_{p_1} + y_{p_2})'' + p(x)(y_{p_1} + y_{p_2})' + q(x)(y_{p_1} + y_{p_2}) \\
&= \left(y_{p_1}'' + p(x)y_{p_1}' + q(x)y_{p_1}\right) + \left(y_{p_2}'' + p(x)y_{p_2}' + q(x)y_{p_2}\right) \\
&= f_1(x) + f_2(x).
\end{aligned}$$

Il est facile de généraliser le théorème 4.7 à l'équation

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{4.32}$$

où

$$f = f_1 + f_2 + \cdots + f_k;$$

donc, si $y_{p_i}$ est une solution particulière de

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_i(x)$$

sur $(a, b)$ pour $i = 1$, 2, ..., $k$, alors $y_{p_1} + y_{p_2} + \cdots + y_{p_k}$ est une solution particulière de (4.32) sur $(a, b)$. De plus, par une preuve similaire à la preuve du théorème 4.7 nous pouvons formuler le principe de superposition en termes d'une équation linéaire s'écrit sous la forme

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = F(x)$$

donc, si $y_{p_1}$ est solution particulière de

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = F_1(x)$$

sur $(a, b)$ et $y_{p_2}$ est solution particulière de

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = F_2(x)$$

sur $(a, b)$, alors $y_{p_1} + y_{p_2}$ est solution particulière de

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = F_1(x) + F_2(x)$$

sur $(a, b)$.

**Exemple 4.22.** *La fonction $y_{p_1} = x^4/15$ est solution particulière de*

$$x^2y'' + 4xy' + 2y = 2x^4 \tag{4.33}$$

*sur $(-\infty, \infty)$ et $y_{p_2} = x^2/3$ est solution particulière de*

$$x^2y'' + 4xy' + 2y = 4x^2 \tag{4.34}$$

*sur $(-\infty, \infty)$. Utiliser le principe de superposition pour trouver la solution particulière* *de*

$$x^2y'' + 4xy' + 2y = 2x^4 + 4x^2 \tag{4.35}$$

*sur* $(-\infty, \infty)$.

**Solution.** *Le cote droit de* $F(x) = 2x^4 + 4x^2$ *dans* (4.35) *est la somme*

$$F_1(x) = 2x^4 \quad \textit{and} \quad F_2(x) = 4x^2.$$

*in* (4.33) *and* (4.34). *Donc le principe de superposition implique que*

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = \frac{x^4}{15} + \frac{x^2}{3}$$

*est une solution particulière de* (4.35).

### *Exercices*

Dans les exercices 1–6 trouver la solution particulière $y_p$.

**1.** $y'' - 7y' + 12y = 4e^{2x}; \quad y_p = Ae^{2x}$

**2.** $y'' - 7y' + 12y = 5e^{4x}; \quad y_p = Axe^{4x}$

**3.** $y'' - 8y' + 16y = 2e^{4x}; \quad y_p = Ax^2e^{4x}$

**4.** $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(-1 + 2x + x^2), \quad y_p = e^{3x}(A + Bx + Cx^2)$

**5.** $y'' - 4y' + 3y = e^{3x}(6 + 8x + 12x^2), \quad y_p = e^{3x}(Ax + Bx^2 + Cx^3)$

**6.** $4y'' + 4y' + y = e^{-x/2}(-8 + 48x + 144x^2), \quad y_p = e^{-x/2}(Ax^2 + Bx^3 + Cx^4)$

Dans les exercices 7–12 trouver une solution particulière par la méthode utilisée dans Exemple 4.21.

**7.** $x^2y'' + 7xy' + 8y = \dfrac{6}{x}$

**8.** $x^2y'' - 7xy' + 7y = 13x^{1/2}$

**9.** $x^2y'' - xy' + y = 2x^3$

**10.** $x^2y'' + 5xy' + 4y = \dfrac{1}{x^3}$

**11.** $x^2y'' + xy' + y = 10x^{1/3}$

**12.** $x^2y'' - 3xy' + 13y = 2x^4$

Dans les exercices 13–18 trouver une solution particulière. Ensuite, trouver la solution générale ou bien, résoudre le problème avec valeurs initiales.

**13.** $y'' + 5y' - 6y = 22 + 18x - 18x^2$

**14.** $y'' - 4y' + 5y = 1 + 5x$

**15.** $y'' + 8y' + 7y = -8 - x + 24x^2 + 7x^3$

**16.** $y'' - 4y' + 4y = 2 + 8x - 4x^2$

**17.** $y'' + 2y' + 10y = 4 + 26x + 6x^2 + 10x^3, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 9$

**18.** $y'' + 6y' + 10y = 22 + 20x, \quad y(0) = 2, \; y'(0) = -2$

**19.** Monter que $y'' + y' = 1 + 2x + x^2$; n'a pas de solution particulière de la forme $y_p = A + Bx + Cx^2$, où $A$, $B$, et $C$ sont des constantes.

Dans les exercices 20–33 trouver une solution particulière.

**20.** $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(1 + x)$

**21.** $y'' - 6y' + 5y = e^{-3x}(35 - 8x)$

**22.** $y'' - 2y' - 3y = e^{x}(-8 + 3x)$

**23.** $y'' + 2y' + y = e^{2x}(-7 - 15x + 9x^2)$

**24.** $y'' + 4y = e^{-x}(7 - 4x + 5x^2)$

**25.** $y'' - y' - 2y = e^{x}(9 + 2x - 4x^2)$

**26.** $y'' - 4y' - 5y = -6xe^{-x}$

**27.** $y'' - 3y' + 2y = e^{x}(3 - 4x)$

**28.** $y'' + y' - 12y = e^{3x}(-6 + 7x)$

**29.** $2y'' - 3y' - 2y = e^{2x}(-6 + 10x)$

**30.** $y'' + 2y' + y = e^{-x}(2 + 3x)$

**31.** $y'' - 2y' + y = e^{x}(1 - 6x)$

**32.** $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}(1 - 3x + 6x^2)$

**33.** $9y'' + 6y' + y = e^{-x/3}(2 - 4x + 4x^2)$

Dans les exercices 34–38 trouver une solution générale.

**34.** $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(1 + x)$

**35.** $y'' - 6y' + 8y = e^{x}(11 - 6x)$

**36.** $y'' + 6y' + 9y = e^{2x}(3 - 5x)$

**37.** $y'' + 2y' - 3y = -16xe^{x}$

**38.** $y'' - 2y' + y = e^{x}(2 - 12x)$

Résoudre le problème de Cauchy.

**39.** $y'' - 4y' - 5y = 9e^{2x}(1 + x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -10$

**40.** $y'' + 3y' - 4y = e^{2x}(7 + 6x), \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 8$

**41.** $y'' + 4y' + 3y = -e^{-x}(2 + 8x), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$

**42.** $y'' - 3y' - 10y = 7e^{-2x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -17$

Utiliser le principe de superposition pour trouver une solution particulière.

**43.** $y'' + y' + y = xe^x + e^{-x}(1 + 2x)$

**44.** $y'' - 7y' + 12y = -e^x(17 - 42x) - e^{3x}$

**45.** $y'' - 8y' + 16y = 6xe^{4x} + 2 + 16x + 16x^2$

**46.** $y'' - 3y' + 2y = -e^{2x}(3 + 4x) - e^x$

**47.** $y'' - 2y' + 2y = e^x(1 + x) + e^{-x}(2 - 8x + 5x^2)$

**48.** $y'' + y = e^{-x}(2 - 4x + 2x^2) + e^{3x}(8 - 12x - 10x^2)$

## 4.4 La méthode de variation des paramètres

Considérons l'équation linéaire standard du second ordre

$$y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = R(x)\,. \tag{4.36}$$

La méthode des coefficients indéterminés pour déterminer une solution particulière de l'équation non complémentaire a deux limitations majeures, car elle ne peut être utilisée que lorsque :

1. $P(x)$ et $Q(x)$ sont des constantes.
2. $R(x)$ est une forme particulièrement simple.

La méthode de variation des paramètres est une méthode plus puissante qui fonctionne toujours indépendamment de la nature de $P, Q, R$ à condition qu'on a la solution générale de l'équation complémentaire

$$y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = 0. \tag{4.37}$$

Supposons donc que

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \tag{4.38}$$

est la solution générale de (4.37). Supposons maintenant que la solution particulière de (4.36) est de la forme

$$y_p(x) = v_1(x)\,y_1(x) + v_2(x)\,y_2(x) \tag{4.39}$$

où $v_1(x)$ et $v_2(x)$ sont des fonctions inconnues que nous devons trouver.

$$\begin{aligned} y_p' &= v_1' y_1 + v_1 y_1' + v_2' y_2 + v_2 y_2' \\ &= [v_1 y_1' + v_2 y_2'] + [v_1' y_1 + v_2' y_2]\,. \end{aligned}$$

Une autre dérivation nous donnera des secondes dérivées des éléments inconnus $v_1$ et $v_2$. Nous évitons cette complication en exigeant que la seconde expression entre parenthèses soit nulle. Donc on a

$$v_1' y_1 + v_2' y_2 \equiv 0 \tag{4.40}$$

Donc

$$y_p' = v_1 y_1' + v_2 y_2' \tag{4.41}$$

qui nous donne que

$$y_p'' = \left[v_1' y_1' + v_1 y_1''\right] + \left[v_2' y_2' + v_2 y_2''\right]. \tag{4.42}$$

Maintenant, nous substituons (4.39),(4.40) et (4.42) dans (4.36) pour avoir

$$v_1\left(y_1'' + P y_1' + Q y_1\right) + v_2\left(y_2'' + P y_2' + Q y_2\right) + v_1' y_1' + v_2' y_2' = R.$$

Puisque $y_1$ et $y_2$ sont des solutions de (4.37), on obtient

$$v_1' y_1' + v_2' y_2' = R.$$

Donc pour trouver $v_1$ et $v_2$ nous devons résoudre les équations

$$\begin{aligned} v_1' y_1 + v_2' y_2 &= 0 \\ v_1' y_1' + v_2' y_2' &= R. \end{aligned}$$

Nous devons trouver $v_1'$ et $v_2'$, puis les intégrer pour trouver $v_1$ et $v_2$.

$$W\left(y_1, y_2\right) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}, W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ R & y_2' \end{vmatrix} = -y_2 R, , W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & R \end{vmatrix} = y_1 R$$

$v_1' = \dfrac{-y_2 R}{W} \Longrightarrow v_1 = \int \dfrac{-y_2 R}{W} dx$, et $v_2' = \dfrac{y_1 R}{W} \Longrightarrow v_2 = \int \dfrac{y_1 R}{W} dx$

Donc

$$\begin{aligned} y_p(x) &= v_1(x) y_1(x) + v_2(x) y_2(x) \\ &= -y_1(x) \int \frac{-y_2(x) R(x)}{W} dx + y_2(x) \int \frac{y_1(x) R(x)}{W} dx \end{aligned}$$

**Exemple 4.23.** *Trouver la solution générale de*

$$L(y) = y'' + y = \csc x$$

**Solution.** *La solution générale de l'équation complémentaire est*

$$y_h(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x.$$

*On suppose que*

$$y_p(x) = v_1(x) \sin x + v_2(x) \cos x.$$

*Pour trouver $y_p(x)$ on doit résoudre le système*

$$\begin{aligned} v_1' \sin x + v_2' \cos x &= 0, \\ v_1' \cos x - v_2' \sin x &= \csc x, \end{aligned}$$

*dont les solutions sont données par*

$$v_1'(x) = \cot x \quad \textit{et} \quad v_2'(x) = -1,$$

*et après intégration on trouve que*

$$v_1(x) = \ln|\sin x| \quad \textit{et} \quad v_2(x) = -x.$$

*Le résultat final pour $y_p(x)$ est donc*

$$y_p(x) = \ln|\sin x|(\sin x) - x(\cos x)$$

*et la solution générale est*

$$\begin{aligned} y(x) = y_h(x) + y_p(x) &= c_1 \sin x + c_2 \cos x + \ln|\sin x|(\sin x) - x(\cos x) \\ &= \sin x\left[c_1 + \ln|\sin x|\right] + \cos x\left[c_2 - x\right]. \end{aligned}$$

**Exemple 4.24.** *Trouver la solution générale de* $L(y) = y'' - y' - 2y = 4x^2$ *avec la* *méthode de variation des paramètres.*

**Solution.** *On a résolu ce problème avec la méthode des coefficients indéterminés et on a trouver que*

$$y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}.$$

*Maintenant on suppose que*

$$y_p(x) = v_1(x) e^{2x} + v_2(x) e^{-x}.$$

*On doit résoudre le système*

$$\begin{aligned} v_1' e^{2x} + v_2' e^{-x} &= 0, \\ 2v_1' e^{2x} - v_2' e^{-x} &= 4x^2. \end{aligned}$$

*Le résultat est*

$$v_1'(x) = \frac{4}{3} x^2 e^{-2x} \quad \textit{et} \quad v_2'(x) = -\frac{4}{3} x^2 e^{x}$$

*On utilise intégration par parties pour trouver que*

$$v_1(x) = \int \frac{4}{3} x^2 e^{-2x}\, dx = -\frac{1}{3} e^{-2x} \left(2x^2 + 2x + 1\right)$$

*et*

$$v_2(x) = \int -\frac{4}{3} x^2 e^{x} dx = -\frac{4}{3} e^{x} \left(x^2 - 2x + 2\right).$$

*Donc*

$$\begin{aligned} y_p(x) &= -\frac{1}{3}\left(2x^2 + 2x + 1\right) - \frac{4}{3}\left(x^2 - 2x + 2\right) \\ &= -2x^2 + 2x - 3 \end{aligned}$$

*et*

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + \left(-2x^2 + 2x - 3\right).$$

**Exemple 4.25.** *Trouver une solution particulière $y_p$ de*

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^{9/2}, \tag{4.43}$$

*sachant que* $y_1 = x$ *et* $y_2 = x^2$ *sont des solutions de*

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

*Trouver la solution générale de* (4.43).

**Solution :** On pose

$$y_p = u_1x + u_2x^2,$$

où

$$\begin{aligned} u_1'x + \quad u_2'x^2 &= 0 \\ u_1' \quad + 2u_2'x &= \frac{x^{9/2}}{x^2} = x^{5/2}. \end{aligned}$$

De la première équation, $u_1' = -u_2'x$. Remplaçant cela dans la seconde équation nous donne $u_2'x = x^{5/2}$, so $u_2' = x^{3/2}$ et alors $u_1' = -u_2'x = -x^{5/2}$. Après Intégration on aura

$$u_1 = -\frac{2}{7}x^{7/2} \quad \text{and} \quad u_2 = \frac{2}{5}x^{5/2}.$$

Donc

$$y_p = u_1x + u_2x^2 = -\frac{2}{7}x^{7/2}x + \frac{2}{5}x^{5/2}x^2 = \frac{4}{35}x^{9/2},$$

et la solution générale de (4.43) est

$$y = \frac{4}{35}x^{9/2} + c_1x + c_2x^2.$$

***Exercices***

Dans les exercices 1–6 utiliser la variation des paramètres pour trouver une solution particulière.

**1.** $y'' + 9y = \tan 3x$

**2.** $y'' + 4y = \sin 2x \sec^2 2x$

**3.** $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{4}{1 + e^{-x}}$

**4.** $y'' - 2y' + 2y = 3e^x \sec x$

**5.** $y'' - 2y' + y = 14x^{3/2}e^x$

**6.** $y'' - y = \dfrac{4e^{-x}}{1 - e^{-2x}}$

Dans les exercices 7–29 utiliser la variation des paramètres pour trouver une solution particulière, étant données les solutions $y_1$, $y_2$ de l'équation complémentaire.

**7.** $x^2y'' + xy' - y = 2x^2 + 2; \quad y_1 = x, \quad y_2 = \dfrac{1}{x}$

**8.** $xy'' + (2 - 2x)y' + (x - 2)y = e^{2x}; \quad y_1 = e^x, \quad y_2 = \dfrac{e^x}{x}$

**9.** $4x^2y''+(4x-8x^2)y'+(4x^2-4x-1)y = 4x^{1/2}e^x, \quad x > 0\,; y_1 = x^{1/2}e^x, \ y_2 = x^{-1/2}e^x$

**10.** $y'' + 4xy' + (4x^2 + 2)y = 4e^{-x(x+2)}; \quad y_1 = e^{-x^2}, \quad y_2 = xe^{-x^2}$

**11.** $x^2y'' - 4xy' + 6y = x^{5/2}, \ x > 0; \quad y_1 = x^2, \ y_2 = x^3$

**12.** $x^2y'' - 3xy' + 3y = 2x^4 \sin x; \quad y_1 = x, \ y_2 = x^3$

**13.** $(2x + 1)y'' - 2y' - (2x + 3)y = (2x + 1)^2e^{-x}; \quad y_1 = e^{-x}, \quad y_2 = xe^x$

**14.** $4xy'' + 2y' + y = \sin\sqrt{x}; \quad y_1 = \cos\sqrt{x}, \quad y_2 = \sin\sqrt{x}$

**15.** $xy'' - (2x + 2)y' + (x + 2)y = 6x^3e^x; \quad y_1 = e^x, \quad y_2 = x^3e^x$

**16.** $x^2y'' - (2a - 1)xy' + a^2y = x^{a+1}; \quad y_1 = x^a, \quad y_2 = x^a \ln x$

**17.** $x^2y'' - 2xy' + (x^2 + 2)y = x^3 \cos x; \quad y_1 = x\cos x, \quad y_2 = x\sin x$

**18.** $xy'' - y' - 4x^3y = 8x^5; \quad y_1 = e^{x^2}, \ y_2 = e^{-x^2}$

**19.** $(\sin x)y'' + (2\sin x - \cos x)y' + (\sin x - \cos x)y = e^{-x}; \quad y_1 = e^{-x}, \quad y_2 = e^{-x}\cos x$

**20.** $4x^2y'' - 4xy' + (3 - 16x^2)y = 8x^{5/2}; \quad y_1 = \sqrt{x}e^{2x}, \ y_2 = \sqrt{x}e^{-2x}$

**21.** $4x^2y'' - 4xy' + (4x^2 + 3)y = x^{7/2}; \quad y_1 = \sqrt{x}\sin x, \ y_2 = \sqrt{x}\cos x$

**22.** $x^2y'' - 2xy' - (x^2-2)y = 3x^4;\quad y_1 = xe^x,\ y_2 = xe^{-x}$

**23.** $x^2y'' - 2x(x+1)y' + (x^2+2x+2)y = x^3e^x;\quad y_1 = xe^x,\quad y_2 = x^2e^x$

**24.** $x^2y'' - xy' - 3y = x^{3/2};\quad y_1 = 1/x,\quad y_2 = x^3$

**25.** $x^2y'' - x(x+4)y' + 2(x+3)y = x^4e^x;\quad y_1 = x^2,\quad y_2 = x^2e^x$

**26.** $x^2y'' - 2x(x+2)y' + (x^2+4x+6)y = 2xe^x;\quad y_1 = x^2e^x,\quad y_2 = x^3e^x$

**27.** $x^2y'' - 4xy' + (x^2+6)y = x^4;\quad y_1 = x^2\cos x,\quad y_2 = x^2\sin x$

**28.** $(x-1)y'' - xy' + y = 2(x-1)^2e^x;\quad y_1 = x,\quad y_2 = e^x$

**29.** $4x^2y'' - 4x(x+1)y' + (2x+3)y = x^{5/2}e^x;\quad y_1 = \sqrt{x},\quad y_2 = \sqrt{x}e^x$

Dans les exercices 30–32 utiliser la variation des paramètres pour trouver une solution particulière, étant données les solutions $y_1, y_2$ de l'équation complémentaire.

**30.** $(3x-1)y'' - (3x+2)y' - (6x-8)y = (3x-1)^2e^{2x},\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 2\,;$

$y_1 = e^{2x},\ y_2 = xe^{-x}$

**31.** $(x-1)^2y'' - 2(x-1)y' + 2y = (x-1)^2,\quad y(0) = 3,\quad y'(0) = -6\,;$

$y_1 = x-1,\ y_2 = x^2-1$

**32.** $(x-1)^2y'' - (x^2-1)y' + (x+1)y = (x-1)^3e^x,\quad y(0) = 4,\quad y'(0) = -6\,;$

$y_1 = (x-1)e^x,\quad y_2 = x-1$

Dans les exercices 33–35 utiliser la variation des paramètres pour trouver une solution particulière, étant données les solutions $y_1, y_2$ de l'équation complémentaire.

**33.** $(x^2-1)y'' + 4xy' + 2y = 2x,\quad y(0) = 0,\ y'(0) = -2;\quad y_1 = \dfrac{1}{x-1},\ y_2 = \dfrac{1}{x+1}$

**34.** $x^2y'' + 2xy' - 2y = -2x^2,\quad y(1) = 1,\ y'(1) = -1;\quad y_1 = x,\ y_2 = \dfrac{1}{x^2}$

**35.** $(x+1)(2x+3)y'' + 2(x+2)y' - 2y = (2x+3)^2,\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 0\,;$

$y_1 = x+2,\quad y_2 = \dfrac{1}{x+1}$

**36.** Supposons que

$$y_p = \overline{y} + a_1y_1 + a_2y_2$$

est une solution particulière de

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = F(x), \tag{A}$$

où $y_1$ et $y_2$ sont des solutions de l'équation

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0.$$

Monter que $\overline{y}$ est aussi une solution de (A).

**37.** Supposons que $p$, $q$, et $f$ sont continues sur $(a, b)$ et que $x_0$ est dans $(a, b)$. Soient $y_1$ et $y_2$ des solutions de

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

tels que

$$y_1(x_0) = 1, \quad y_1'(x_0) = 0, \quad y_2(x_0) = 0, \quad y_2'(x_0) = 1.$$

Utiliser la méthode de variation des paramètres pour montrer que la solution du problème

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad y(x_0) = k_0,\ y'(x_0) = k_1,$$

est

$$\begin{aligned} y(x) &= k_0y_1(x) + k_1y_2(x) \\ &\quad + \int_{x_0}^{x} (y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t))\, f(t) \exp\left(\int_{x_0}^{t} p(s)\, ds\right) dt. \end{aligned}$$

INDICATION: *Utiliser la formule d'Abel's du Wronskien de* $\{y_1, y_2\}$*, et intégrer* $u_1'$ *et* $u_2'$ *de* $x_0$ *à* $x$. Montrer aussi

$$\begin{aligned} y'(x) &= k_0y_1'(x) + k_1y_2'(x) \\ &\quad + \int_{x_0}^{x} (y_1(t)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(t))\, f(t) \exp\left(\int_{x_0}^{t} p(s)\, ds\right) dt. \end{aligned}$$

**38.** Supposons que $f$ est continue sur un intervalle ouvert contenant $x_0 = 0$. Utiliser la variation des paramètres pour trouver une formule pour la solution de problème

$$y'' - y = f(x), \quad y(0) = k_0, \quad y'(0) = k_1.$$

**39.** Supposons que $f$ est continue sur $(a, \infty)$, où $a < 0$, et $x_0 = 0$ dans $(a, \infty)$.

**(a)** Utiliser la méthode des variations de paramètres pour trouver la solution du problème

$$y'' + y = f(x), \quad y(0) = k_0, \quad y'(0) = k_1.$$

INDICATION: *Utiliser les formules :*

$$\begin{aligned} \sin(A+B) &= \sin A \cos B + \cos A \sin B \\ \cos(A+B) &= \cos A \cos B - \sin A \sin B. \end{aligned}$$

Pour le reste de exercice supposons que l'intégrale impropre $\int_0^\infty f(t)\,dt$ est absolument convergente.

**(a)** Montrer que si $y$ est une solution de

$$y'' + y = f(x) \tag{A}$$

sur $(a, \infty)$, alors

$$\lim_{x\to\infty} (y(x) - A_0 \cos x - A_1 \sin x) = 0 \tag{B}$$

et

$$\lim_{x\to\infty} (y'(x) + A_0 \sin x - A_1 \cos x) = 0, \tag{C}$$

où

$$A_0 = k_0 - \int_0^\infty f(t) \sin t\,dt \quad \text{and} \quad A_1 = k_1 + \int_0^\infty f(t) \cos t\,dt.$$

INDICATION: *Rappel que si* $\int_0^\infty f(t)\,dt$ *converge absolument, alors* $\lim_{x\to\infty} \int_x^\infty |f(t)|\,dt = 0$.

**(b)** Monter que si $A_0$ et $A_1$ sont des constantes arbitraires, alors il existe une solution unique pour $y'' + y = f(x)$ on $(a, \infty)$ qui satisfait (B) et (C).

## 4.5 Réduction d'ordre

Dans cette section, nous donnons une méthode qui utilise une solution connue pour trouver une autre afin de trouver la solution générale de

$$L(y) = \left[D^2 + P(x)D + Q(x)\right](y) = y'' + P(x)y' + Q(x) = R(x) \tag{4.44}$$

si nous connaissons une solution non triviale $y_1$ de l'équation complémentaire

$$L(y) = \left[D^2 + P(x)D + Q(x)\right](y) = y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{4.45}$$

Comme nous l'avons vu, il est facile de trouver la solution générale de l'équation complémentaire lorsque nous connaissons deux solutions linéairement indépendantes $y_1(x)$ et $y_2(x)$.

Mais comment pouvons-nous trouver $y_1$ et $y_2$ ?

Malheureusement, il n'existe pas de méthode générale pour le faire. Cependant, il existe une procédure standard pour déterminer $y_2$ quand $y_1$ est connue. La méthode est appelée **réduction d'ordre**. Ceci est d'une importance considérable, car dans de nombreux cas, une seule solution de (4.45) peut être trouvée par inspection ou par une autre méthode.

Pour développer cette méthode, nous supposons que $y_1(x)$ est une solution non nulle connu de (4.45), et on suppose que $y_2(x) = v(x)\, y_1(x)$ pour une fonction $v(x)$qu'on veut déterminer. Pour cela on doit calculer $L(y_2)$ ,

$$\begin{aligned}
L(y_2) = L(vy_1) &= \left[D^2 + P(x)D + Q(x)\right](vy_1) \\
&= D^2(vy_1) + P(x)D(vy_1) + Q(x)(vy_1) \\
&= [v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1''] + P(x)[v'y_1 + vy_1'] + Q(x)(vy_1) \\
&= v\left[\underbrace{y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1}\right] + [v''y_1] + v'[2y_1' + P(x)y_1] \\
&= 0 + [v''y_1] + v'[2y_1' + P(x)y_1]
\end{aligned}$$

Si on considère l'équation complémentaire (4.45) on obtient une équation différentielle séparable

$$[v''y_1] + v'[2y_1' + P(x)\,y_1] = 0$$

$$\frac{v''}{v'} = -2\frac{y_1'}{y_1} - P(x)$$

qui donne après intégration

$$\ln v' = -2\ln y_1 - \int P(x)\,dx$$

qui est équivalente à

$$v' = \frac{1}{y_1^2}e^{-\int P(x)dx}$$

en appliquant intégration une dernière fois, on obtient

$$v = \int \frac{1}{y_1^2}e^{-\int P(x)dx}\,dx$$

et

$$y_2 = y_1 v = y_1\left[\int \frac{1}{y_1^2}e^{-\int P(x)dx}\,dx\right].$$

Pour vraiment comprendre la méthode appliquons la sur des exemples.

**Exemple 4.26.** *Trouver la solution générale de* $y'' - 2ay' + a^2y = 0, a \neq 0.$

**Solution.** *L'équation caractéristique de cette équation est*

$$r^2 - 2ar + a^2 = (r-a)^2 = 0$$

*donc* $y_1(x) = e^{ax}$ *est une solution de l'équation différentielle. Pour trouver la seconde solution on pose* $y_2(x) = v(x)\,y_1(x)$*. En utilisant la méthode ci-dessus on a*

$$v = \int e^{-2ax}e^{\int 2adx}\,dx = \int e^{-2ax}e^{2ax}\,dx = \int\,dx = x$$

*donc* $y_2(x) = xe^{ax}$ *et la solution générale est*

$$y(x) = c_1e^{ax} + c_2xe^{ax}.$$

*Cela donne la justification pour notre réponse dans la section 4.2 pour les racines doubles.*

**Exemple 4.27.** *Vérifier que $y_1(x) = x$ est une solution de*

$$L(y) = x^2 y'' + xy' - y = 0, \quad \text{pour } x > 0$$

*est trouver l'autre solution $y_2(x)$.*

**Solution.** *Puisque $y_1'' = 0$ et $y_1' = 1$, on aura*

$$L(y_1) = x^2 y_1'' + x y_1' - y_1 = 0 + x - x = 0$$

*donc effectivement $y_1(x) = x$ est une solution de $L(y) = 0$. La forme standard de l'équation est*

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = 0$$

*donc $P(x) = \dfrac{1}{x}$ et on aura*

$$\begin{aligned} v &= \int \frac{1}{x^2} e^{-\int \frac{1}{x} dx}\, dx \\ &= \int \frac{1}{x^2} e^{-\ln x}\, dx \\ &= \int \frac{1}{x^3}\, dx \\ &= -\frac{1}{2x^2} \end{aligned}$$

*en conclusion $y_2 = v y_1 = -1/2x$ et donc la solution générale est*

$$y(x) = c_1 x + c_2 \left( \frac{-1}{2x} \right) = Ax + Bx^{-1}. \tag{4.46}$$

*Le Wronskien*

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} x & x^{-1} \\ 1 & -x^{-2} \end{vmatrix} = -2x^{-1} \neq 0. \tag{4.47}$$

**Solution** (Alternative)**.** *On donne ici une autre solution.*

*Supposons que* $y = xv$, *alors* $y' = v + xv'$ *et* $y'' = 2v' + xv''$, *on a donc*

$$x^2y'' + xy' - y = x^2(2v' + xv'') + x(v + xv') - xv = x^3v'' + 3x^2v' = 0.$$

*L'équation est donc séparable*

$$\begin{aligned} \frac{v''}{v'} &= -\frac{3}{x} \\ v' &= C_1x^{-3} \\ v &= C_1x^{-2} + C_2 \\ y &= xv = C_1x^{-1} + C_2x \end{aligned} \tag{4.48}$$

*On remarque que la solution dans* (4.48) *est similaire a la solution* (4.46).

**Exemple 4.28.** *Trouver la solution générale de*

$$xy'' - (2x + 1)y' + (x + 1)y = x^2, \tag{4.49}$$

*sachant que* $y_1 = e^x$ *est une solution de*

$$xy'' - (2x + 1)y' + (x + 1)y = 0. \tag{4.50}$$

**Solution.** *Si* $y = ue^x$, *alors* $y' = u'e^x + ue^x$ *et* $y'' = u''e^x + 2u'e^x + ue^x$, *donc*

$$\begin{aligned} xy'' - (2x + 1)y' + (x + 1)y &= x(u''e^x + 2u'e^x + ue^x) \\ &\quad -(2x + 1)(u'e^x + ue^x) + (x + 1)ue^x \\ &= (xu'' - u')e^x. \end{aligned}$$

*Donc* $y = ue^x$ *est une solution de* (4.49) *si et seulement si*

$$(xu'' - u')e^x = x^2,$$

*qui est une équation du premier ordre par rapport à* $u'$. *La forme standard de l'équation* *est*

$$u'' - \frac{u'}{x} = xe^{-x}. \tag{4.51}$$

*On pose* $z = u'$*, donc* (4.51) *devient*

$$z' - \frac{z}{x} = xe^{-x}. \tag{4.52}$$

*qui est linéaire, et dont la solution est*

$$u' = z = -xe^{-x} + C_1 x.$$

*Après intégration on obtient*

$$u = (x+1)e^{-x} + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2.$$

*La solution générale est donc*

$$y = ue^x = x + 1 + \frac{C_1}{2}x^2e^x + C_2e^x \tag{4.53}$$

*qu'on peut réécrire comme*

$$y = x + 1 + c_1e^x + c_2x^2e^x.$$

**Exemple 4.29.** *Trouver la solution de*

$$x^2y'' + xy' - y = x^2 + 1, \quad y(1) = 2,\ y'(1) = -3. \tag{4.54}$$

*sachant que* $y_1 = x$ *est une solution de*

$$x^2y'' + xy' - y = 0. \tag{4.55}$$

**Solution.** Si $y = ux$, alors $y' = u'x + u$ et $y'' = u''x + 2u'$, donc

$$\begin{aligned} x^2y'' + xy' - y &= x^2(u''x + 2u') + x(u'x + u) - ux \\ &= x^3u'' + 3x^2u'. \end{aligned}$$

Donc $y = ux$ est une solution de (4.54) si et seulement si

$$x^3u'' + 3x^2u' = x^2 + 1,$$

qui est une équation du premier ordre par rapport à $u'$. On peut la réécrire comme

$$u'' + \frac{3}{x}u' = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}. \tag{4.56}$$

On pose $z = u'$, donc (4.56) devient

$$z' + \frac{3}{x}z = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}. \tag{4.57}$$

La solution de (4.57) est

$$z = \frac{1}{3} + \frac{1}{x^2} + \frac{C_1}{x^3} = u'.$$

Donc

$$u = \frac{x}{3} - \frac{1}{x} - \frac{C_1}{2x^2} + C_2.$$

Donc la solution générale de (4.54) est

$$y = ux = \frac{x^2}{3} - 1 - \frac{C_1}{2x} + C_2x. \tag{4.58}$$

On conclu que $y_1 = x$ and $y_2 = 1/x$ forme un ensemble fondamental de solutions de (4.55).

On peut réécrire (4.58) comme

$$y = \frac{x^2}{3} - 1 + c_1x + \frac{c_2}{x}. \tag{4.59}$$

Si on dérive (4.59) on obtient

$$y' = \frac{2x}{3} + c_1 - \frac{c_2}{x^2}. \tag{4.60}$$

Laissons $x = 1$ dans (4.59) et (4.60) et $y(1) = 2$ et $y'(1) = -3$ nous donne

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= \frac{8}{3} \\ c_1 - c_2 &= -\frac{11}{3}. \end{aligned}$$

La solution de ce système nous donne $c_1 = -1/2$, $c_2 = 19/6$. Finalement la solution de (4.54) est

$$y = \frac{x^2}{3} - 1 - \frac{x}{2} + \frac{19}{6x}.$$

***Exercices***

Sachant que $y_1$ une solution de l'équation complémentaire, trouver la solution générale ainsi que l'ensemble fondamental des solutions de l'équation complémentaire.

**1.** $(2x+1)y'' - 2y' - (2x+3)y = (2x+1)^2; \quad y_1 = e^{-x}$

**2.** $x^2y'' + xy' - y = \frac{4}{x^2}; \quad y_1 = x$

**3.** $x^2y'' - xy' + y = x; \quad y_1 = x$

**4.** $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^{-x}}; \quad y_1 = e^{2x}$

**5.** $y'' - 2y' + y = 7x^{3/2}e^x; \quad y_1 = e^x$

**6.** $4x^2y'' + (4x - 8x^2)y' + (4x^2 - 4x - 1)y = 4x^{1/2}e^x(1+4x); \quad y_1 = x^{1/2}e^x$

**7.** $y'' - 2y' + 2y = e^x \sec x; \quad y_1 = e^x \cos x$

**8.** $y'' + 4xy' + (4x^2+2)y = 8e^{-x(x+2)}; \quad y_1 = e^{-x^2}$

**9.** $x^2y'' + xy' - 4y = -6x - 4; \quad y_1 = x^2$

**10.** $x^2y'' + 2x(x-1)y' + (x^2 - 2x + 2)y = x^3e^{2x}; \quad y_1 = xe^{-x}$

**11.** $x^2y'' - x(2x-1)y' + (x^2 - x - 1)y = x^2e^x; \quad y_1 = xe^x$

**12.** $(1-2x)y'' + 2y' + (2x-3)y = (1 - 4x + 4x^2)e^x; \quad y_1 = e^x$

**13.** $x^2y'' - 3xy' + 4y = 4x^4; \quad y_1 = x^2$

**14.** $2xy'' + (4x+1)y' + (2x+1)y = 3x^{1/2}e^{-x}; \quad y_1 = e^{-x}$

**15.** $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = -e^x; \quad y_1 = e^x$

**16.** $4x^2y'' - 4x(x+1)y' + (2x+3)y = 4x^{5/2}e^{2x}; \quad y_1 = x^{1/2}$

**17.** $x^2y'' - 5xy' + 8y = 4x^2; \quad y_1 = x^2$

**18.** $y'' + y = 0; \quad y_1 = \sin(x)$

**19.** $y'' - y = 0; \quad y_1 = e^x$

**20.** $xy'' + 3y' = 0\,; \quad y_1(x) = 1$

**21.** $x^2y'' + xy' - 4y = 0\,; \quad y_1 = x^2$

Dans les exercices 22–34 trouver un ensemble fondamental de solutions, sachant que $y_1$ est une solution.

**22.** $xy'' + (2-2x)y' + (x-2)y = 0; \quad y_1 = e^x$

**23.** $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0; \quad y_1 = x^2$

**24.** $x^2(\ln|x|)^2y'' - (2x\ln|x|)y' + (2+\ln|x|)y = 0; \quad y_1 = \ln|x|$

**25.** $4xy'' + 2y' + y = 0; \quad y_1 = \sin\sqrt{x}$

**26.** $xy'' - (2x+2)y' + (x+2)y = 0; \quad y_1 = e^x$

**27.** $x^2y'' - (2a-1)xy' + a^2y = 0; \quad y_1 = x^a$

**28.** $x^2y'' - 2xy' + (x^2+2)y = 0; \quad y_1 = x\sin x$

**29.** $xy'' - (4x+1)y' + (4x+2)y = 0; \quad y_1 = e^{2x}$

**30.** $4x^2(\sin x)y'' - 4x(x\cos x + \sin x)y' + (2x\cos x + 3\sin x)y = 0; \quad y_1 = x^{1/2}$

**31.** $4x^2y'' - 4xy' + (3-16x^2)y = 0; \quad y_1 = x^{1/2}e^{2x}$

**32.** $(2x+1)xy'' - 2(2x^2-1)y' - 4(x+1)y = 0; \quad y_1 = 1/x$

**33.** $(x^2-2x)y'' + (2-x^2)y' + (2x-2)y = 0; \quad y_1 = e^x$

**34.** $xy'' - (4x+1)y' + (4x+2)y = 0; \quad y_1 = e^{2x}$

Dans les exercices 35–37 résoudre le Problème de Cauchy, sachant que $y_1$ satisfait l'équation complémentaire.

**35.** $x^2y'' - 3xy' + 4y = 4x^4, \quad y(-1) = 7, \quad y'(-1) = -8; \quad y_1 = x^2$

**36.** $(3x-1)y'' - (3x+2)y' - (6x-8)y = 0, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 3; \quad y_1 = e^{2x}$

**37.** $(x+1)^2y'' - 2(x+1)y' - (x^2+2x-1)y = (x+1)^3e^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1;$ $y_1 = (x+1)e^x$

**38.** $x^2y'' + 2xy' - 2y = x^2, \quad y(1) = \frac{5}{4},\ y'(1) = \frac{3}{2}; \quad y_1 = x$

**39.** $(x^2-4)y'' + 4xy' + 2y = x+2, \quad y(0) = -\frac{1}{3}, \quad y'(0) = -1; \quad y_1 = \frac{1}{x-2}$

**40.** L'équation de Legendre est donnée par

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0.$$

Pour le cas spécial quand $p = 1$ l'équation deviens

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

et a $y_1 = x$ comme une des solutions. Trouver la solution générale.

**41.** L'équation de Bessel est donnée par

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0.$$

Pour le cas spécial quand $p = 1/2$ l'équation deviens

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0$$

qui a $y_1 = x^{-1/2}\sin(x)$ comme une des solutions. Trouver la solution générale.

**42.** Pour les équations différentielles suivantes, trouver la solution générale sachant que $y_1 = x$ est une des solutions.

(a) $y'' - \dfrac{x}{x-1}y' + \dfrac{1}{x-1} = 0$

(b) $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$

(c) $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0$

**43.** Trouver la solution générale de l'équation différentielle

$$y'' - xf(x)y' + f(x)y = 0$$

**44.** Vérifier que $y_1 = e^x$ est une des solutions de $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0$, et trouver la solution générale.

## 4.6 Équations de Cauchy-Euler

Généralement, il est difficile de trouver les solutions d'une équation différentielle avec coefficients non constants. Cependant une classe d'équations différentielles linéaires avec coefficients non constants, appelées équations de Cauchy-Euler, ont des solutions qui sont faciles à obtenir. Si $a, b, c$ sont réels et $a \neq 0$, l'équation homogène de Cauchy-Euler a la forme

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0, \text{ (forme générale)} \tag{4.61}$$

$$y'' + \frac{b}{ax}y' + \frac{c}{ax^2}y = 0, \text{ (forme standard)} \tag{4.62}$$

Ainsi, le théorème d'existence et d'unicité garanti que des solutions existent dans l'un des intervalles $(-\infty, 0)$ ou $(0, \infty)$. Pour travailler dans un intervalle spécifique, nous supposerons $x > 0$.

Pour résoudre l'équation homogène de Cauchy-Euler , pour $x > 0$, nous supposons que la solution est de la forme $y = x^r$. On aura donc, $y' = rx^{r-1}$ et $y'' = r(r-1)x^{r-2}$. Si on remplace ces relations dans (4.61) on obtient

$$[ar^2 + (b-a)r + c]x^r = 0$$

qui nous donne l'équation caractéristique associée

$$ar^2 + (b-a)r + c = 0 \tag{4.63}$$

Il y a trois cas différents à prendre en compte, selon que les racines de cette équation quadratique sont réelles et distinctes, réelles et égales, ou complexes. Dans le dernier cas, les racines apparaissent comme une paire de racines conjuguées.

**Cas no. 1 : Racines réelles distinctes**

Si $r_1 \neq r_2$ alors $y_1 = x^{r_1}$ et $y_2 = x^{r_2}$ forment un ensemble fondamental de solutions. Donc la solutions générale de l'équation homogène de Cauchy-Euler est

$$y_h(x) = c_1x^{r_1} + c_2x^{r_2} \tag{4.64}$$

**Exemple 4.30.** *Résoudre l'équation* $x^2y'' - 2xy' - 4y = 0$*.*

**Solution :** *Si on suppose que* $y = x^m$*, alors* $y' = rx^{r-1}$ *et* $y'' = r(r-1)x^{r-2}$*. Substituons cela dans l'équation originale on obtient*

$$r(r-1)x^r - 2rx^r - 4x^r = 0$$

*qui nous donne l'équation caractéristique associée*

$$r^2 - 3r - 4 = 0$$

*dont les solutions sont* $r = -1, 4$*, donc la solution générale est*

$$y_h(x) = c_1x^{-1} + c_2x^4.$$

**Cas no. 2 : Racine double**

Si l'équation caractéristique associée $ar^2 + (b-a)r + c = 0$ a une racine double elle doit être égale à $r = \frac{-(b-a)}{2a}$ et $y_1 = x^r$ est certainement une solution de (4.61). Pour trouver la deuxième solution on utilise la méthode de réduction d'ordre

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2} dx$$

où $P(x)$ est le coefficient de $y'$ dans la forme standard de l'équation

$$y'' + \frac{b}{ax}y' + \frac{c}{ax^2}y = 0$$

donc $P\left(x\right) = b/ax$, et

$$\begin{aligned} y_2 &= x^r \int \frac{e^{-\int \frac{b}{ax}dx}}{x^{2r}} dx \\ &= x^r \int \frac{e^{-\frac{b}{a}\ln x}}{x^{2r}} dx \\ &= x^r \int \frac{x^{-\frac{b}{a}}}{x^{\frac{a-b}{a}}} dx \\ &= x^r \int \frac{1}{x} dx = x^r \ln x. \end{aligned}$$

La solution générale est donc

$$y_h(x) = c_1 x^r + c_2 x^r \ln x = (c_1 + c_2 \ln x) x^r$$

**Exemple 4.31.** *Résoudre l'équation différentielle* $4x^2y'' + 8xy' + y = 0$

**Solution.** *Si on pose* $y = x^r$ *on obtient*

$$\begin{aligned} 4x^2y'' + 8xy' + y &= 4x^2 r(r-1)x^{r-2} + 8xrx^{r-1} + x^r \\ &= x^r\left(4r^2 + 4r + 1\right) \\ &= x^r (2r+1)^2 \end{aligned}$$

*donc* $r = -1/2$ *est une racine double de l'équation caractéristique et la solution générale est*

$$y(x) = (c_1 + c_2 \ln x)\, x^{-1/2}$$

**Cas no. 3 : Racines complexes**

Si les racines sont complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ la solution générale est

$$y(x) = c_1 x^{\alpha + i\beta} + c_2 x^{\alpha - i\beta} = x^\alpha \left(c_1 x^{i\beta} + c_2 x^{-i\beta}\right)$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} x^{i\beta} &= e^{i\beta \ln x} = \cos(\beta \ln x) + i \sin(\beta \ln x) \\ \frac{x^{i\beta} + x^{-i\beta}}{2} &= \cos(\beta \ln x) \\ \frac{x^{i\beta} - x^{-i\beta}}{2i} &= \sin(\beta \ln x) \end{aligned}$$

si on pose

$$y_1 = x^{\alpha + i\beta}, y_2 = x^{\alpha - i\beta}$$

certainement $\{y_1, y_2\}$ est un ensemble fondamental de solution de l'équation. On peut montrer que

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = x^\alpha \cos(\beta \ln x), \frac{y_1 - y_2}{2i} = x^\alpha \sin(\beta \ln x)$$

est aussi un ensemble fondamental de solution, et donc la solution générale peut être écrite comme

$$y(x) = x^{\alpha}[c_1 \cos(\beta \ln x) + c_2 \sin(\beta \ln x)]$$

**Exemple 4.32.** *Résoudre* $4x^2y'' + 17y = 0, y(1) = -1, y'(1) = -1/2$

**Solution.** *La substitution* $y = x^r$ *nous donnes*

$$\begin{aligned} 4x^2y'' + 17y &= 4x^2r(r-1)x^{r-2} + 17x^r \\ &= x^r\left(4r^2 - 4r + 17\right) = 0. \end{aligned}$$

*L'équation caractéristique* $4r^2 - 4r + 17 = 0$ *a les solutions* $r_1 = \frac{1}{2} + 2i$ *et* $r_2 = \frac{1}{2} - 2i$. *Donc la solution générale est*

$$y(x) = x^{1/2}[c_1 \cos(2 \ln x) + c_2 \sin(2 \ln x)].$$

*Les conditions initiales nous donnes* $c_1 = -1$ *et* $c_2 = 0$. *Donc la solution finale est*

$$y(x) = -x^{1/2} \cos(2 \ln x).$$

**Exemple 4.33.** *Résoudre* $x^2y'' - 3xy' + 3y = 2x^4e^x$

***Solution.*** *Puisque cette équation est non homogène, sa solution générale sera*

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

*ou* $y_h(x)$ *est solution de l'équation homogène et* $y_p(x)$ *est la solution particulière.*

*L'équation caractéristique associée de cette équation est*

$$r(r-1) - 3r + 3 = r^2 - 4r + 3 = (r-1)(r-3)$$

*donc*

$$y_h(x) = c_1x + c_2x^3.$$

*On peut trouver la solution particulière en utilisant la méthode de variation de para-*

*mètres, après avoir écrit l'équation sous forme standard.*

$$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{3}{x^2}y = 2x^2e^x$$

*ou* $P(x) = \dfrac{-3}{x}, Q(x) = \dfrac{3}{x^2}$ *et* $R(x) = 2x^2e^x$ *;*

$$y_p(x) = v_1(x)\, y_1(x) + v_2(x)\, y_2(x)$$

*où* $y_1(x)$ *et* $y_2(x)$ *sont les solutions de l'équation homogène. Pour trouver* $v_1$ *et* $v_2$ *nous devons résoudre les équations*

$$\begin{aligned} v_1'y_1 + v_2'y_2 &= 0 \\ v_1'y_1' + v_2'y_2' &= R. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^3 \\ 1 & 3x^2 \end{vmatrix} = 2x^3 \\ W_1 &= \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ R & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x^3 \\ 2x^2e^x & 3x^2 \end{vmatrix} = -2x^5e^x \\ W_2 &= \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & 2x^2e^x \end{vmatrix} = 2x^3e^x \end{aligned}$$

*donc on aura*

$$\begin{aligned} v_1' &= \frac{W_1}{W} = \frac{-2x^5e^x}{2x^3} = -x^2e^x \Longrightarrow v_1 = \int -x^2e^x dx = -e^x\left(x^2 - 2x + 2\right) \\ v_2' &= \frac{W_2}{W} = \frac{2x^3e^x}{2x^3} = e^x \Longrightarrow v_2 = \int e^x dx = e^x. \end{aligned}$$

*La solution particulière est donc*

$$\begin{aligned} y_p(x) &= v_1(x)\, y_1(x) + v_2(x)\, y_2(x) \\ &= -xe^x\left(x^2-2x+2\right) + x^3e^x \\ &= 2x^2e^x - 2xe^x \\ &= 2xe^x(x-1). \end{aligned}$$

*Finalement la solution générale de l'équation différentielle est*

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1x + c_2x^3 + 2xe^x(x-1).$$

**Exemple 4.34.** *Résoudre* $x^2y'' - xy' + y = \ln x$

**Solution.** *Si on fait le changement de variable* $x = e^t$ *ou* $t = \ln x$, *on aura*

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) \\ &= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) \\ &= \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right). \end{aligned}$$

*Si on substitue dans l'équation différentielle on aura une nouvelle équation différentielle avec coefficients constants*

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y = t$$

*dont la solution générale de son équation complémentaire est égale a*

$$y_h(t) = c_1e^t + c_2te^t.$$

*On peut trouver la solution particulière en utilisant la méthode des coefficients indéterminés. On pose* $y_p(t) = At+B$ *qui donne après substitution dans l'équation différentielle*

$$\begin{aligned} \frac{d^2y_p}{dt^2} - 2\frac{dy_p}{dt} + y_p &= t \\ -2A + At + B &= t \end{aligned}$$

*qui nous donnes* $A = 1$ *et* $B = 2$. *Donc la solution générale en fonction de la variable* $t$ *est*

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + (t + 2).$$

*Finalement la solution générale en fonction de la variable* $x$ *est*

$$y(x) = c_1 x + c_2 x \ln x + (2 + \ln x).$$

***Exercices***

Résoudre l'équation différentielle.

**1.** $x^2y'' - 2y = 0$

**2.** $4x^2y'' + y = 0$

**3.** $x^2y'' + xy' + 4y = 0$

**4.** $x^2y'' + xy' + 3y = 0$

**5.** $x^2y'' - 3xy' - 2y = 0$

**6.** $x^2y'' + 3xy' - 4y = 0$

**7.** $25x^2y'' + 25xy' + y = 0$

**8.** $4x^2y'' + 4xy' - y = 0$

**9.** $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$

**10.** $x^2y'' + 8xy' + 6y = 0$

**11.** $3x^2y'' + 6xy' + y = 0$

**12.** $x^2y'' - 7xy' + 41y = 0$

**13.** $x^3y''' - 6y = 0$

**14.** $x^3y''' + xy' - y = 0$

Résoudre l'équation différentielle en utilisant la méthode de variations de paramètres.

**15.** $2x^2y'' + 5xy' + y = x^2 - x$

**16.** $x^2y'' - xy' + y = 2x$

**17.** $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^4e^x$

**18.** $x^2y'' + xy' - y = \ln x$

**19.** $x^2y'' + xy' - y = \dfrac{1}{x+1}$

**20.** $xy'' - 4y' = x^4$

Résoudre l'équation différentielle avec conditions initiales.

**21.** $x^2y'' + 3xy' = 0,\ y(1) = 0,\ y'(1) = 4$

**22.** $x^2y'' - 5xy' + 8y = 0,\ y(2) = 32,\ y'(2) = 0$

**23.** $x^2y'' + xy' + y = 0,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 2$

**24.** $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0,\ y(1) = 5,\ y'(1) = 3$

**25.** $x^2y'' + y' = x,\ y(1) = 1,\ y'(1) = -1/2$

**26.** $x^2y'' - 5xy' + 8y = 8x^6,\ y(1/2) = 0,\ y'(1/2) = 0$

Utiliser la transformation $x = e^t$ pour résoudre l'équation différentielle.

**27.** $x^2y'' + 9xy' - 20y = 0$

**28.** $x^2y'' - 9xy' + 25y = 0$

**29.** $x^2y'' + 10xy' + 8y = x^2$

**30.** $x^2y'' - 4xy' + 6y = \ln x^2$

**31.** $x^2y'' - 3xy' + 13y = 4 + 3x$

**32.** $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 3 + \ln x^3$

## 4.7 Quelques équations non linéaires

L'étude des équations différentielles non linéaires est généralement plus difficile car il y a très peut de méthodes qui donnent des solutions analytiques. Deux des méthodes de résolution considérées dans cette section emploient un changement de variable pour réduire une équation du second ordre à une du premier ordre.

Il existe plusieurs différences importantes entre les équations différentielles linéaires et non linéaires . Nous avons vu que les équations linéaires homogènes d'ordre deux ou plus ont la propriété qu'une combinaison linéaire de solutions est aussi une solution. Les équations non linéaires ne possèdent pas cette propriété. Nous pouvons trouver des solutions générales des équations linéaires du premier ordre et d'ordre supérieur avec coefficients constants . Même si nous pouvons résoudre une équation différentielle non linéaire du premier ordre sous la forme d'une famille avec un paramètre, cette famille n'est pas une solution générale. En d'autres termes , les équations non linéaires du premier ordre peuvent posséder des solutions singulières, tandis que les équations linéaires ne peuvent pas. Mais la principale différence entre les équations linéaires et non linéaires est dans le domaine de la solvabilité . Compte tenu d'une équation linéaire, il y a une chance que nous pouvons trouver une certaine forme de solution explicite ou sous la forme d'une série infinie. D'autre part , il est rare de trouver des solutions analytiques pour les équations différentielles non linéaires. Bien que cela puisse sembler décourageant, il y a encore des choses qui peuvent être faites. Nous pouvons toujours analyser l'équation différentielle non linéaire qualitativement et numériquement . Nous devons clairement signaler dès le départ que les équations différentielles non linéaires sont importantes, même plus importante que les équations linéaires. En pratique la majorité des modèles mathématique sont non linéaires.

Nous commençons par illustrer une méthode qui nous permet de temps en temps de trouver des solutions explicites / implicites de types particuliers d'équations différentielle non linéaire du second ordre.

**Exemple 4.35.** *Équation sans la variable dépendante $y$, $F(x, y', y'')$=0.*
*Résoudre $y'' = 2x(y')^2$.*

**Solution.** *Posons $u = y'$, alors $\frac{du}{dx} = y''$. Après la transformation cette équation différentielle non linéaire du second ordre devient une une équation différentielle non linéaire du premier ordre*

$$\frac{du}{dx} = 2xu^2.$$

*Donc on aura*

$$\begin{aligned}
u^{-2}du &= 2xdx \\
\int u^{-2}du &= \int 2xdx \\
-u^{-1} &= -\frac{1}{y'} = x^2 + c_1^2 \\
y' &= -\frac{1}{x^2 + c_1^2} \\
y &= -\frac{1}{c_1}\tan^{-1}\left(\frac{x}{c_1}\right) + c_2
\end{aligned}$$

Ensuite, nous montrons comment résoudre une équation sans la variable dépendante $x$, c.a.d une équation sous la forme $F(y, y', y'') = 0$. Une fois de plus nous laissons $u = y'$, mais parce que la variable indépendante $x$ ne figure pas dans l'équation, nous utilisons cette substitution pour transformer l'équation différentielle en une équation où la variable indépendante est $y$ et la variable dépendante est $u$. Nous utilisons la dérivée des fonctions composées pour calculer la dérivée seconde de $y$.

$$y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = u\frac{du}{dy}.$$

Dans ce cas on doit résoudre l'équation différentielle du premier ordre

$$F\left(y, u, u\frac{du}{dy}\right).$$

**Exemple 4.36.** *Équation sans la variable dépendante $x$, $F(y, y', y'')$=0.*
*Résoudre $yy'' = (y')^2$.*
**Solution.** *Si on pose $u = y'$ on aura la nouvelle équation*

$$y\left(u\frac{du}{dy}\right) = u^2$$

*dont la solution est donnée par*

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{u}du &= \frac{1}{y}dy \\
\ln|u| &= \ln|y'| = \ln|c_1 y| \\
u &= y' = \frac{dy}{dx} = c_1 y \\
\frac{dy}{y} &= c_1 dx \\
\ln|y| &= c_1 x + c_2 \\
y &= e^{c_1 x + c_2} = c_3 e^{c_1 x}.
\end{aligned}
$$

## 4.8 Résumé du chapitre 4

$$\textbf{Forme Générale : } a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = g(x) \tag{4.65}$$

$$\textbf{Forme Homogène : } a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \tag{4.66}$$

$$\textbf{Forme Standard : } y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x) \tag{4.67}$$

La **solution générale** de (4.65) ou (4.67) est de la forme

$$y = y_h(x) + y_p(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_p(x) \tag{4.68}$$

où $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont des solutions linéairement indépendantes de (4.66).

**Indépendance linaire et le Wronskien**

Si $y_1$ et $y_2$ sont deux solutions de (4.66) alors

$$\textbf{Wronskien : } W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) \tag{4.69}$$

$$\textbf{Formule d'Abel : } W(x) = Ce^{-\int p(x)dx} \tag{4.70}$$

et les propositions suivantes sont équivalentes :

**1.** $\{y_1, y_2\}$ sont linéairement indépendantes.

**2.** $\{y_1, y_2\}$ est un ensemble fondamental de solutions.

**3.** $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$ pour une certaine valeur $x_0$.

**4.** $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ pour tout $x$.

**Problème de Cauchy**

$$\begin{cases} y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1 \end{cases} \tag{4.71}$$

### Équation linéaire avec coefficients constants

$$\textbf{Homogène : } ay'' + by' + cy = 0 \tag{4.72}$$

$$\textbf{Non homogène : } ay'' + by' + cy = g(x) \tag{4.73}$$

$$\textbf{Équation caractéristique : } ar^2 + br + c = 0 \tag{4.74}$$

$$\textbf{Racines : } r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{4.75}$$

La solution de (4.72) est :

$$\textbf{Racines distinctes}(r_1 \neq r_2) : y_h = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \tag{4.76}$$

$$\textbf{Racine double}(r_1 = r_2) : y_h = (c_1 + c_2 t) e^{r_1 x} \tag{4.77}$$

$$\textbf{Racines complexes}(r = \alpha \pm i\beta) : y_h = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) \tag{4.78}$$

La solution de (4.73) est $y = y_p + y_h$ où $y_h$ est donnée par (4.76)–(4.78) et la solution particulière $y_p$ peut être trouvée en utilisant les méthodes des **coefficients indéterminés, variation des paramètres** ou bien **réduction d'ordre**.

### Méthode des coefficients indéterminés

| Si $f(x) =$ | alors on choisi $y_p =$ |
|---|---|
| $P_n(x)$ | $x^s(A_0 + A_1 x + \cdots + A_n x^n)$ |
| $P_n(x)e^{ax}$ | $x^s(A_0 + A_1 x + \cdots + A_n x^n)e^{ax}$ |
| $P_n(X)e^{ax}\{\sin(bx), \cos(bx)\}$ | $x^s e^{ax}[Q_n(x)\cos(bx) + R_n(x)\sin(bx)]$ |

### Principe de Superposition

Si $y_{p1}(x)$ une solution de $ay'' + by' + cy = f_1(x)$ et

si $y_{p2}(x)$ une solution de $ay'' + by' + cy = f_2(x)$ et

alors $y(x) = y_{p1}(x) + y_{p2}(x)$ est une solution de $ay'' + by' + cy = f_1(x) + f_2(x)$

### Méthode de variation des paramètres

Considérons l'équation linéaire standard du second ordre

$$y'' + P(x)\, y' + Q(x)\, y = R(x)\,.$$

Supposons que la solution particulière a la forme

$$y_p(x) = v_1(x)\,y_1(x) + v_2(x)\,y_2(x)$$

où $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont les solutions de l'équation homogène. Pour trouver $v_1$ et $v_2$ nous devons résoudre les équations

$$\begin{aligned} v_1' y_1 + v_2' y_2 &= 0 \\ v_1' y_1' + v_2' y_2' &= R. \end{aligned}$$

Nous devons trouver $v_1'$ et $v_2'$, puis les intégrer pour trouver $v_1$ et $v_2$.

La solution particulière est donc de la forme

$$y_p(t) = -y_1(t)\int \frac{y_2(t)f(t)}{W(t)}dt + y_2(t)\int \frac{y_1(t)f(t)}{W(t)}dt \tag{4.79}$$

**Méthode de réduction d'ordre**

Si on connait une solution fondamentale $y_1$ de (4.66) , alors on peut trouver $y_2$ par résoudre

$$y_1 y_2' - y_1' y_2 = Ce^{-\int P(x)dx} \tag{4.80}$$

la deuxième solution $y_2$ est donnée par

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)dx}dx}{y_1(x)^2} \tag{4.81}$$

**Équation de Cauchy-Euler**

$$\textbf{Forme générale : } ax^2y'' + bxy' + cy = 0 \tag{4.82}$$

$$\textbf{Équation caractéristique : } ar(r-1) + br + c = 0 \tag{4.83}$$

Les solutions de (4.82) dépendent des racines $r_{1,2}$ de (4.83) :

$$\textbf{Racines distinctes :}\ y = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2} \tag{4.84}$$

$$\textbf{Racine double :}\ y = c_1 x^{r} + c_2 x^{r} \ln x \tag{4.85}$$

$$\textbf{Racines complexes :}\ y = x^{\alpha}[c_1 \cos(\beta \ln x) + c_2 \sin(\beta \ln x)] \tag{4.86}$$

Dans (4.86) $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, où $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$

# Chapitre 6

# Équations différentielles d'ordre supérieur

Dans ce chapitre, nous étendons les concepts que nous avons appris dans le chapitre des équations linéaires d'ordre 2 à celles d'ordre supérieur à deux.

## 6.1 Introduction aux équations linéaires d'ordre $n$

Une équation différentielle d'ordre $n$ est dite *linéaire* si on peut l'écrire sous la forme

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = f(x). \tag{6.1}$$

On a considéré des équations sous cette forme pour la valeur de $n = 1$ dans le chapitre 2 et pour $n = 2$ dans le chapitre 4. Dans ce chapitre $n$ est un un nombre naturel arbitraire.

Dans cette section nous étudions la théorie générale des équations différentielles linéaires d'ordre $n$. Puisque cette théorie a déjà été discuté pour $n = 2$ on omettra les démonstrations.

Pour plus de commodité, nous considérons les équations différentielles linéaires sous la forme

$$P_0(x)y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_n(x)y = F(x), \tag{6.2}$$

qui peuvent être réécrites comme (6.1) sur n'importe quel intervalle sur lequel $P_0 \neq$

0, avec $p_1 = P_1/P_0$, ..., $p_n = P_n/P_0$ et $f = F/P_0$. Pour simplicité, tout au long de ce chapitre, nous abrègerons le côté gauche de eqref eq : 9.1.2 par $Ly$ ; c'est a dire

$$Ly = P_0 y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + \cdots + P_n y.$$

On dit que l'équation $Ly = F$ est *normale* sur $(a, b)$ si $P_0$, $P_1$, ..., $P_n$ et $F$ sont continues sur $(a, b)$ et $P_0 \neq 0$ sur $(a, b)$. Si cela est satisfait, alors $Ly = F$ peut être écrite comme (6.1) avec $p_1$, ..., $p_n$ et $f$ continues sur $(a, b)$.

Le prochain théorème est l'analogue du Théorème 4.5.

**Théorème 6.1.** *Supposons que $Ly = F$ est normal sur $(a, b)$, soit $x_0$ dans $(a, b)$, et sot $k_0$, $k_1$, ..., $k_{n-1}$ des constantes réelles arbitraires. Alors, le problème avec condition initiale*

$$Ly = F, \quad y(x_0) = k_0, \quad y'(x_0) = k_1, \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = k_{n-1}$$

*a une solution unique dans $(a, b)$.*

**Equations Homogènes**

Eqn. (6.2) est dite *homogène* si $F \equiv 0$ sinon elle est dite *non-homogène*. Comme $y \equiv 0$ est toujours une solution de $Ly = 0$, on l'appelle la solution *triviale*. Toute autre solution est dite *non-triviale*.

Si $y_1$, $y_2$, ..., $y_n$ sont définies sur $(a, b)$ et $c_1$, $c_2$, ..., $c_n$ sont constantes, alors

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n \tag{6.3}$$

est une *combinaison linéaire* de $\{y_1, y_2 \ldots, y_n\}$. On peut facilement montrer que si $y_1$, $y_2$, ..., $y_n$ sont des solutions de $Ly = 0$ sur $(a, b)$, alors n'importe qu'elle combinaison linéaire de $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ est aussi une solution de $Ly = 0$. On dit que $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ est un ensemble fondamental de solutions de $L(y) = 0$ sur $(a, b)$ si chaque solution de $Ly = 0$ sur $(a, b)$ est une combinaison linéaire de $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Dans ce cas on dit que (6.3) est la *solution générale* de $Ly = 0$ sur $(a, b)$.

On dit que $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ est *linéairement indépendant* sur $(a, b)$ si et seulement si les seules constantes $c_1$, $c_2$, ..., $c_n$ telle que

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) = 0, \quad a < x < b, \tag{6.4}$$

sont $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. Si (6.4) est vraie pour des constantes non nulles $c_1$, $c_2$, ..., $c_n$, alors $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ est *linéairement dépendant* on $(a, b)$

**Théorème 6.2.** *Si $Ly = 0$ est normale sur $(a, b)$, alors un ensemble $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ de $n$ solutions de $Ly = 0$ sur $(a, b)$ est fondamentale si et seulement si il est linéairement indépendant sur $(a, b)$.*

**Exemple 6.1.** L'équation

$$x^3y''' - x^2y'' - 2xy' + 6y = 0 \tag{6.5}$$

est normale et possède les solutions $y_1 = x^2$, $y_2 = x^3$, et $y_3 = 1/x$ sur $(-\infty, 0)$ et $(0, \infty)$. Montrer que $\{y_1, y_2, y_3\}$ est linéairement indépendant sur $(-\infty, 0)$ et $(0, \infty)$. Trouver la solution générale de (6.5) sur $(-\infty, 0)$ et $(0, \infty)$.

**Solution.** *Supposons*

$$c_1x^2 + c_2x^3 + \frac{c_3}{x} = 0 \tag{6.6}$$

*sur $(0, \infty)$. On doit montrer que $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Si on dérive (6.6) deux fois on trouve le système*

$$\begin{aligned} c_1x^2 + c_2x^3 + \frac{c_3}{x} &= 0 \\ 2c_1x + 3c_2x^2 - \frac{c_3}{x^2} &= 0 \\ 2c_1 + 6c_2x + \frac{2c_3}{x^3} &= 0. \end{aligned} \tag{6.7}$$

*Si (6.7) sont satisfaite pour tout $x$ dans $(0, \infty)$, alors elles doivent être satisfaites pour $x = 1$ ; alors,*

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 0 \\ 2c_1 + 3c_2 - c_3 &= 0 \\ 2c_1 + 6c_2 + 2c_3 &= 0. \end{aligned} \tag{6.8}$$

*Le système a la solution triviale $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ ; cependant, pour notre propos, il est plus utile de rappeler le résultat de l'algèbre linéaire, qu'un système linéaire homogène de $n$ équations à $n$ inconnues n'a que la solution triviale si son déterminant est non nul.*

*Etant donné que le déterminant de* (6.8) *est*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 12,$$

*donc* (6.8) *a seulement la solution triviale, so* $\{y_1, y_2, y_3\}$ *est linéairement indépendant sur* $(0, \infty)$. *Maintenant Theorem* 6.2 *implique que*

$$y = c_1 x^2 + c_2 x^3 + \frac{c_3}{x}$$

*est la solution générale de* (6.5) *sur* $(0, \infty)$. *Pour voir ce que cela est également vrai sur* $(-\infty, 0)$*, supposons que* (6.6) *est vraie sur* $(-\infty, 0)$. *Posons* $x = -1$ *dans* (6.7) *pour avoir*

$$\begin{aligned} c_1 - \quad c_2 - \quad c_3 &= 0 \\ -2c_1 + 3c_2 - \quad c_3 &= 0 \\ 2c_1 - 6c_2 - 2c_3 &= 0. \end{aligned}$$

*Puisque le déterminant de ce système est*

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -6 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -12,$$

*il s'ensuit que* $c_1 = c_2 = c_3 = 0$*; donc,* $\{y_1, y_2, y_3\}$ *est linéairement indépendant sur* $(-\infty, 0)$.

**Exemple 6.2.** Trouver la solution générale de

$$y^{(4)} + y''' - 7y'' - y' + 6y = 0 \tag{6.9}$$

si $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$, $y_3 = e^{2x}$ et $y_4 = e^{-3x}$ sont des solutions sur $(-\infty, \infty)$. Montrer que $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ est linéairement indépendant sur $(-\infty, \infty)$.

**Solution.** *Supposons que $c_1$, $c_2$, $c_3$, et $c_4$ sont des constantes telles que*

$$c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3e^{2x} + c_4e^{-3x} = 0 \tag{6.10}$$

*pour tout $x$. On doit montrer que $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$. Si on dérive (6.10) trois fois donne le système*

$$\begin{aligned} c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3e^{2x} + c_4e^{-3x} &= 0 \\ c_1e^x - c_2e^{-x} + 2c_3e^{2x} - 3c_4e^{-3x} &= 0 \\ c_1e^x + c_2e^{-x} + 4c_3e^{2x} + 9c_4e^{-3x} &= 0 \\ c_1e^x - c_2e^{-x} + 8c_3e^{2x} - 27c_4e^{-3x} &= 0. \end{aligned} \tag{6.11}$$

*Si (6.11) est vraie pour tout $x$, alors cela doit être vraie pour $x = 0$. Alors*

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 + c_4 &= 0 \\ c_1 - c_2 + 2c_3 - 3c_4 &= 0 \\ c_1 + c_2 + 4c_3 + 9c_4 &= 0 \\ c_1 - c_2 + 8c_3 - 27c_4 &= 0. \end{aligned}$$

*Le déterminant de ce système est*

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & 8 & -27 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & -2 & 7 & -28 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & 8 \\ -2 & 7 & -28 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & 8 \\ 0 & 6 & -24 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 6 & -24 \end{vmatrix} = 240, \end{aligned} \tag{6.12}$$

*donc le système a seulement la solution triviale $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$. Le Theorem 6.2 implique que*

$$y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3e^{2x} + c_4e^{-3x}$$

*est la solution générale de (6.9).*

### Le Wronskien

*On peut utiliser la méthode utilisée dans les Exemples 6.1 et 6.2 pour tester l'indépendance des $n$ solutions $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ d'une équation d'ordre $n$, $Ly = 0$ sur un intervalle $(a, b)$ sur lequel l'équation est normale. Donc, si $c_1$, $c_2$ ,. . ., $c_n$ sont constantes telles que*

$$c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n = 0, \quad a < x < b,$$

*si on dérive $n - 1$ fois on obtient le $n \times n$ système d'équations*

$$\begin{array}{rcl} c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + & \cdots & +c_ny_n(x) = 0 \\ c_1y_1'(x) + c_2y_2'(x) + & \cdots & +c_ny_n'(x) = 0 \\ & \vdots & \\ c_1y_1^{(n-1)}(x) + c_2y_2^{(n-1)}(x) + & \cdots & +c_ny_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{array} \tag{6.13}$$

*pour $c_1$, $c_2$, . . ., $c_n$. Pour un $x$ quelconque , le déterminant de ce système est égal à*

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

*On appelle ce déterminant le Wronskien de $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Si $W(x) \neq 0$ pour un certain $x$ dans $(a, b)$ alors le système (6.13) a seulement la solution triviale $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$, et Theorem 6.2 implique que*

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$$

*est la solution générale de $Ly = 0$ sur $(a, b)$.*

*Le prochain theorem généralise Théorème 4.1 d'Abel.*

**Théorème 6.3.** *Supposons que l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre $n$*

$$P_0(x)y^{(n)} + P_1(x)y^{n-1} + \cdots + P_n(x)y = 0 \tag{6.14}$$

*est normale sur $(a, b)$. Soient $y_1$, $y_2$, ..., $y_n$ des solutions de (6.14) sur $(a, b)$, et soit $x_0 \in (a, b)$. Alors le Wronskien de $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ est égal à*

$$W(x) = W(x_0) \exp\left\{-\int_{x_0}^{x} \frac{P_1(t)}{P_0(t)}\, dt\right\}, \quad a < x < b. \tag{6.15}$$

*en outre, soit $W$ est non nul sur $(a, b)$ ou bien $W \equiv 0$ sur $(a, b)$.*

*La formule (6.15) s'appelle la formule d'Abel .*

*Le prochain théorème est l'analogue de Theorem 4.4..*

**Théorème 6.4.** *Supposons que $Ly = 0$ est normale sur $(a, b)$ et soient $y_1$, $y_2$, ..., $y_n$ des solutions de $Ly = 0$ sur $(a, b)$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

**(a)** *La solution générale de $Ly = 0$ sur $(a, b)$ est égale à $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$.*

**(b)** *$\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ est un ensemble fondamental de solutions de $Ly = 0$ sur $(a, b)$.*

**(c)** *$\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ est linéairement indépendant sur $(a, b)$.*

**(d)** *Le Wronskien de $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ est non nul pour une certaine valeur dans $(a, b)$.*

**(e)** *Le Wronskien de $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ est non nul pour toute valeur dans $(a, b)$.*

**Exemple 6.3.** Dans l'exemple 6.1 on a montrer que les solutions $y_1 = x^2$, $y_2 = x^3$, et $y_3 = 1/x$ de

$$x^3y''' - x^2y'' - 2xy' + 6y = 0$$

étaient linéairement indépendantes sur $(-\infty, 0)$ et $(0, \infty)$. Calculer le Wronskien de $\{y_1, y_2, y_3\}$.

**Solution.** *Si $x \neq 0$, alors*

$$W(x) = \begin{vmatrix} x^2 & x^3 & \dfrac{1}{x} \\ 2x & 3x^2 & -\dfrac{1}{x^2} \\ 2 & 6x & \dfrac{2}{x^3} \end{vmatrix} = 12x,$$

*Donc $W(x) \neq 0$ sur $(-\infty, 0)$ et $(0, \infty)$.*

**Exemple 6.4.** Dans l'example 6.2 on a montrer que les solutions $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$, $y_3 = e^{2x}$, et $y_4 = e^{-3x}$ de

$$y^{(4)} + y''' - 7y'' - y' + 6y = 0$$

étaient linéairement indépendantes sur n'importe quel intervalle. Calculer le Wronskien de $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$.

**Solution.** *Pour tout $x$,*

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & e^{2x} & e^{-3x} \\ e^x & -e^{-x} & 2e^{2x} & -3e^{-3x} \\ e^x & e^{-x} & 4e^{2x} & 9e^{-3x} \\ e^x & -e^{-x} & 8e^{2x} & -27e^{-3x} \end{vmatrix} = 240e^{-x} > 0.$$

**Remarque 6.1.** *Sous les conditions de Theorème 6.4, il n'est pas nécessaire d'obtenir une formula de $W(x)$. Il faut juste calculer $W(x)$ pour une valeur dans $(a, b)$, comme on a fait dans les exemples 6.1 et 6.2.*

## 6.2 Solution générale de l'équation non-homogène

*Le prochain théorème est l'analogue du Théorème 4.3. Il nous montre comment trouver la solution générale de $Ly = F$ si on a une solution particulière de $Ly = F$ ainsi qu'un ensemble fondamental de solutions de $Ly = 0$.*

**Théorème 6.5.** *Supposons que $Ly = F$ est normale sur $(a, b)$. Soit $y_p$ une solution particulière de $Ly = F$ sur $(a, b)$, et soit $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ un ensemble fondamental de solutions de $Ly = 0$ sur $(a, b)$. Alors $y$ est une solution de $Ly = F$ sur $(a, b)$ si et seulement si*

$$y = y_p + y_h = y_p + c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n,$$

*où $c_1, c_2, \dots, c_n$ sont des constantes.*

*Le prochain théorème est l'analogue de théorème 4.7.*

**Théorème 6.6.** [*Le principe de Superposition*] *Supposons que pour chaque* $i = 1, 2, \ldots$, $r$*, la fonction* $y_{p_i}$ *est une solution particulière de* $Ly = F_i$ *sur* $(a, b)$*. Alors*

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + \cdots + y_{p_r}$$

*est une solution particulière de*

$$Ly = F_1(x) + F_2(x) + \cdots + F_r(x)$$

*sur* $(a, b)$.

***Exercices***

1. *Vérifier que la fonction donnée est la solution du problème avec conditions initiales.*

   **(a)** $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = -\dfrac{24}{x}, \quad y(-1) = 0,\ y'(-1) = 0, \quad y''(-1) = 0$;
   $y = -6x - 8x^2 - 3x^3 + \dfrac{1}{x}$

   **(b)** $y''' - \dfrac{1}{x}y'' - y' + \dfrac{1}{x}y = \dfrac{x^2-4}{x^4}, \quad y(1) = \dfrac{3}{2}, \quad y'(1) = \dfrac{1}{2},\ y''(1) = 1$;
   $y = x + \dfrac{1}{2x}$

   **(c)** $xy''' - y'' - xy' + y = x^2, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 5, \quad y''(1) = -1$;
   $y = -x^2 - 2 + 2e^{(x-1)} - e^{-(x-1)} + 4x$

   **(d)** $4x^3y''' + 4x^2y'' - 5xy' + 2y = 30x^2, \quad y(1) = 5, \quad y'(1) = \dfrac{17}{2}$;
   $y''(1) = \dfrac{63}{4}; \quad y = 2x^2\ln x - x^{1/2} + 2x^{-1/2} + 4x^2$

   **(e)** $x^4y^{(4)} - 4x^3y''' + 12x^2y'' - 24xy' + 24y = 6x^4, \quad y(1) = -2,$
   $y'(1) = -9, \quad y''(1) = -27, \quad y'''(1) = -52$;
   $y = x^4\ln x + x - 2x^2 + 3x^3 - 4x^4$

   **(f)** $xy^{(4)} - y''' - 4xy'' + 4y' = 96x^2, \quad y(1) = -5, \quad y'(1) = -24$
   $y''(1) = -36; \quad y'''(1) = -48; \quad y = 9 - 12x + 6x^2 - 8x^3$

2. *Résoudre le problème de Cauchy*

$$x^3y''' - x^2y'' - 2xy' + 6y = 0, \quad y(-1) = -4, \quad y'(-1) = -14, \quad y''(-1) = -20.$$

   INDICATION: *See Example 6.1.*

3. *Résoudre le problème de Cauchy*

$$y^{(4)} + y''' - 7y'' - y' + 6y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = -6, \quad y''(0) = 10, \quad y'''(0) - 36.$$

   INDICATION: *Voir exemple 6.2.*

4. *Trouver les solutions $y_1$, $y_2$, ..., $y_n$ de l'équation $y^{(n)} = 0$ avec conditions initiales*

$$y_i^{(j)}(x_0) = \begin{cases} 0, & j \neq i-1, \\ 1, & j = i-1, \end{cases} \quad 1 \leq i \leq n.$$

**5.** **(a)** *Vérifier que la fonction*

$$y = c_1 x^3 + c_2 x^2 + \frac{c_3}{x}$$

*satisfait*

$$x^3 y''' - x^2 y'' - 2xy' + 6y = 0 \tag{A}$$

*si* $c_1$*,* $c_2$*, et* $c_3$ *sont constantes.*

**(b)** *Utiliser* **(a)** *pour trouver les solutions* $y_1$*,* $y_2$*, et* $y_3$ *de (A) tel que*

$$\begin{aligned} y_1(1) &= 1, \quad y_1'(1) = 0, \quad y_1''(1) = 0 \\ y_2(1) &= 0, \quad y_2'(1) = 1, \quad y_2''(1) = 0 \\ y_3(1) &= 0, \quad y_3'(1) = 0, \quad y_3''(1) = 1. \end{aligned}$$

**(c)** *Utiliser* **(b)** *pour trouver la solution de (A) tels que*

$$y(1) = k_0, \quad y'(1) = k_1, \quad y''(1) = k_2.$$

**6.** *Vérifier que les fonctions données sont des solutions de l'équation, et montrer qu'elles forment un ensemble fondamental de solutions sur n'importe quel intervalle sur lequel l'équation est normale.*

**(a)** $y''' + y'' - y' - y = 0; \quad \{e^x,\, e^{-x},\, xe^{-x}\}$

**(b)** $y''' - 3y'' + 7y' - 5y = 0; \quad \{e^x,\, e^x \cos 2x,\, e^x \sin 2x\}.$

**(c)** $xy''' - y'' - xy' + y = 0; \quad \{e^x,\, e^{-x},\, x\}$

**(d)** $x^2 y''' + 2xy'' - (x^2+2)y = 0; \quad \{e^x/x,\, e^{-x}/x,\, 1\}$

**(e)** $(x^2 - 2x + 2)y''' - x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0; \quad \{x,\, x^2,\, e^x\}$

**(f)** $(2x-1)y^{(4)} - 4xy''' + (5-2x)y'' + 4xy' - 4y = 0; \quad \{x,\, e^x,\, e^{-x}, e^{2x}\}$

**(g)** $xy^{(4)} - y''' - 4xy' + 4y' = 0; \quad \{1, x^2,\, e^{2x},\, e^{-2x}\}$

**7.** *Calculer le Wronskien* $W$ *des solutions de*

$$y''' + 2xy'' + e^x y' - y = 0,$$

*sachant que* $W(0) = 2$.

**8.** *Calculer le Wronskien $W$ des solutions de*

$$y^{(4)} + (\tan x)y''' + x^2y'' + 2xy = 0,$$

*sachant que $W(\pi/4) = K$.*

**9.** **(a)** *Calculer le Wronskien $W$ de $\{e^x,\, xe^x,\, x^2e^x\}$. Calculer $W(0)$.*

**(b)** *Vérifier que $y_1$, $y_2$, et $y_3$ sont des solutions de*

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0. \tag{A}$$

**(c)** *Utiliser $W(0)$ de* **(a)** *et la formule d'Abel pour calculer $W(x)$.*

**(d)** *Trouver la solution générale de (A) ?*

**10.** *Calculer le Wronskien des fonctions données .*

**(a)** $\{1,\, e^x,\, e^{-x}\}$ **(b)** $\{e^x,\, e^x \sin x,\, e^x \cos x\}$

**(c)** $\{2,\, x+1,\, x^2+2\}$ **(d)** $x,\, x\ln x,\, 1/x\}$

**(e)** $\{1,\, x,\, \frac{x^2}{2!},\, \frac{x^3}{3!},\cdots,\, \frac{x^n}{n!}\}$ **(f)** $\{e^x,\, e^{-x},\, x\}$

**(g)** $\{e^x/x,\, e^{-x}/x,\, 1\}$ **(h)** $\{x,\, x^2,\, e^x\}$

**(i)** $\{x,\, x^3,\, 1/x,\, 1/x^2\}$ **(j)** $\{e^x,\, e^{-x},\, x,\, e^{2x}\}$

**(k)** $\{e^{2x},\, e^{-2x},\, 1,\, x^2\}$

**11.** *Supposons que $Ly = 0$ est normale sur $(a, b)$ et que $x_0 \in (a, b)$. Utiliser Théorème 6.1 pour montrer que $y \equiv 0$ est la seule solution du problème*

$$Ly = 0, \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

*on $(a, b)$.*

**12.** *Montrer : Si $y_1$, $y_2$, …, $y_n$ sont des solutions de $Ly = 0$ et les fonctions*

$$z_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j, \quad 1 \le i \le n,$$

*forment un ensemble fondamental de solutions de $Ly = 0$, alors $y_1$, $y_2$, …, $y_n$ forment aussi un ensemble fondamental de solutions de $Ly = 0$.*

**13.** *Montrer : Si*

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ky_k + y_p$$

*est une solution de l'équation* $Ly = F$ *pour n'importe quel chois des constantes* $c_1$, $c_2$ ,…, $c_k$, *alors* $Ly_i = 0$ *pour* $1 \leq i \leq k$.

**14.** *Supposons que* $Ly = 0$ *est normale sur* $(a, b)$ *et que* $x_0 \in (a, b)$. *Pour* $1 \leq i \leq n$, *soit* $y_i$ *la solution du problème*

$$Ly_i = 0, \quad y_i^{(j)}(x_0) = \begin{cases} 0, & j \neq i-1, \\ 1, & j = i-1, \end{cases} \quad 1 \leq i \leq n,$$

*où* $x_0 \in (a, b)$. *Montrer que n'importe quelle solution de* $Ly = 0$ *sur* $(a, b)$, *est sous la forme*

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n,$$

*avec* $c_j = y^{(j-1)}(x_0)$.

**15.** *Supposons* $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ *est un ensemble fondamental de solutions de*

$$P_0(x)y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_n(x)y = 0$$

*sur* $(a, b)$, *et soit*

$$\begin{aligned} z_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ z_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ \vdots \quad & \quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ z_n &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n, \end{aligned}$$

*où les* $\{a_{ij}\}$ *sont constantes. Montrer que* $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ *est un ensemble fondamental de solutions de (A) si et seulement si le déterminant*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

*est non nul.* INDICATION: *Le déterminant du produit de* $n \times n$ *matrices est égale au* *produit des déterminants.*

**16.** *Montrer que* $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ *est linéairement dépendant sur* $(a, b)$ *si et seulement si au moins une des fonctions* $y_1$, $y_2$, ..., $y_n$ *est une combinaison linéaire des autres sur* $(a, b)$.

**17.** *Démontrer : Si*

$$A(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{vmatrix},$$

*alors*

$$A(u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n) = A(u_1, u_2, \ldots, u_n) + A(v_1, v_2, \ldots, v_n).$$

**18.** *Soit*

$$F = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix},$$

*où* $f_{ij}$ $(1 \leq i,\ j \leq n)$ *est dérivable. Montrer que*

$$F' = F_1 + F_2 + \cdots + F_n,$$

*où* $F_i$ *est le déterminant obtenu en dérivant la* $i$*-ème ligne de* $F$.

**19.** *Utiliser l'exercice 18 pour montrer que si* $W$ *est le Wronskien des fonctions* $n$*-fois* *dérivables $y_1$, $y_2$, …, $y_n$, alors*

$$W' = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

**20.** *Utiliser les exercices 17 et 19 pour montrer que si $W$ est le Wronskien des solutions $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ d'une l'équation normale*

$$P_0(x)y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_n(x)y = 0, \tag{A}$$

*alors $W' = -P_1W/P_0$. Trouver la formule d'Abel's (Eqn. (6.15)).*

INDICATION: *Utiliser A) pour écrire $y^{(n)}$ en fonction de $y, y', \dots, y^{(n-1)}$.*

**21.** *Montrer que si le Wronskien des fonctions $n$-fois dérivables $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ est non nul sur $(a, b)$, alors l'équation différentielle obtenue quand on calcule le déterminant*

$$\begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y' & y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y^{(n)} & y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0,$$

*par rapport aux cofacteurs de la première colonne est normale et a comme solutions $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ sur $(a, b)$.*

**22.** *Utiliser exercice 21 pour trouver l'équation différentielle dont les solutions sont données.*

**(a)** $\{x, x^2 - 1, x^2 + 1\}$ **(b)** $\{e^x, e^{-x}, x\}$

**(c)** $\{e^x,\ xe^{-x},\ 1\}$ **(d)** $\{x,\ x^2,\ e^x\}$

**(e)** $\{x,\ x^2,\ 1/x\}$ **(f)** $\{x + 1,\ e^x,\ e^{3x}\}$

**(g)** $\{x,\ x^3,\ 1/x,\ 1/x^2\}$ **(h)** $\{x,\ x\ln x,\ 1/x,\ x^2\}$

**(i)** $\{e^x,\ e^{-x},\ x,\ e^{2x}\}$ **(j)** $\{e^{2x},\ e^{-2x},\ 1,\ x^2\}$

## 6.3 Équations homogènes d'ordre supérieur avec coefficients constants

*Si $a_0$, $a_1$, ..., $a_n$ sont des constantes et $a_0 \neq 0$, alors*

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = F(x)$$

*est dite équation avec coefficients constants . Dans cette section on considère l'équation homogène avec coefficients constants*

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0. \tag{6.16}$$

*Puisque (6.16) est normale sur $(-\infty, \infty)$, les théorèmes de la section précédente sont applicable avec $(a, b) = (-\infty, \infty)$.*

$$p(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n \tag{6.17}$$

*est le polynôme caractéristique de (6.16). On a vu dans le chapitre des équations différentielles du second ordre que lorsque $n = 2$ les solutions de (6.16) sont déterminées par les racines du polynôme caractéristique. C'est aussi le cas lorsque $n > 2$, mais la situation est un peut plus compliquer. Conséquemment, nous prenons une approche différente.*

*Si $k$ est un nombre naturel, soit $D^k$ représente l'opérateur de dérivation d'ordre $k$ ; donc*

$$D^k y = y^{(k)}.$$

*si*

$$q(r) = b_0 r^m + b_1 r^{m-1} + \cdots + b_m$$

*est un polynôme arbitraire, on définie*

$$q(D) = b_0 D^m + b_1 D^{m-1} + \cdots + b_m$$

*tel que*

$$q(D)y = (b_0 D^m + b_1 D^{m-1} + \cdots + b_m)y = b_0 y^{(m)} + b_1 y^{(m-1)} + \cdots + b_m y$$

*lorsque $y$ est une fonction dérivable $m$ fois. On appelle $q(D)$ un opérateur polynômial operator.*

*Avec $p$ comme dans (6.17),*

$$p(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n,$$

*donc (6.16) être écrite comme $p(D)y = 0$. Si $r$ est une constante alors*

$$\begin{aligned} p(D)e^{rx} &= \left(a_0 D^n e^{rx} + a_1 D^{n-1} e^{rx} + \cdots + a_n e^{rx}\right) \\ &= (a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n)e^{rx}; \end{aligned}$$

*c.a.d.*

$$p(D)(e^{rx}) = p(r)e^{rx}.$$

*Cela montre que $y = e^{rx}$ est une solution de (6.16) si $p(r) = 0$. Dans le cas le plus simple, quand $p$ a $n$ racines réelles distinctes $r_1$, $r_2$,. . ., $r_n$, cet argument donne $n$ solutions*

$$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}, \ldots, \quad y_n = e^{r_n x}.$$

*On eut montrer que le Wronskien de $\{e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \ldots, e^{r_n x}\}$ est non nul if $r_1$, $r_2$, . . ., $r_n$ sont distinctes ; donc, $\{e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \ldots, e^{r_n x}\}$ est un ensemble fondamentale de solutions de $p(D)y = 0$.*

**Exemple 6.5.**

**(a)** Trouver la solution générale de

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0. \tag{6.18}$$

**(b)** Résoudre le problème avec conditions initiales

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 5, \quad y''(0) = 9. \tag{6.19}$$

**Solution.**

**(a)** Le polynôme caractéristique de (6.18) est égale à

$$p(r) = r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = (r-1)(r-2)(r-3).$$

Donc $\{e^x, e^{2x}, e^{3x}\}$ est un ensemble fondamental de solutions de (6.18). Le Wronskien est

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = e^{6x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2e^{6x} \neq 0.$$

Donc la solution générale de (6.18) est

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}. \tag{6.20}$$

**(b)** On doit déterminer les valeurs de $c_1$, $c_2$ et $c_3$ dans (6.20) tel que $y$ satisfait les conditions initiales dans (6.19). En dérivant (6.20) deux fois on trouve

$$\begin{aligned} y' &= c_1 e^x + 2c_2 e^{2x} + 3c_3 e^{3x} \\ y'' &= c_1 e^x + 4c_2 e^{2x} + 9c_3 e^{3x}. \end{aligned} \tag{6.21}$$

Posons $x = 0$ dans (6.20) et (6.21) et imposer les conditions initiales nous donne

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 4 \\ c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= 5 \\ c_1 + 4c_2 + 9c_3 &= 9. \end{aligned}$$

La sotion de ce système est $c_1 = 4$, $c_2 = -1$, $c_3 = 1$. Dons la solution de (6.19) est

$$y = 4e^x - e^{2x} + e^{3x}$$

*Maintenant on considère le cas où le polynôme caractéristique (6.17) n'a pas $n$ racines réelles distinctes. Pour cela, il est utile de définir ce que nous entendons par une factorisation d'un opérateur polynômial. Nous commençons par un exemple.*

**Exemple 6.6.** Considérons le polynôme

$$p(r) = r^3 - r^2 + r - 1$$

et son opérateur polynômial associé

$$p(D) = D^3 - D^2 + D - 1.$$

Puisque on peut factoriser $p(r)$

$$p(r) = (r-1)(r^2+1) = (r^2+1)(r-1),$$

il est raisonnable de s'attendre que $p(D)$ soit aussi factorisable

$$p(D) = (D-1)(D^2+1) = (D^2+1)(D-1). \tag{6.22}$$

Toutefois, avant que nous puissions faire cette affirmation, nous devons définir quand est ce que deux opérateurs sont égaux, et comment interpréter les produits des opérateurs dans (6.22). Nous disons que deux opérateurs sont égaux s'ils donnent toujours le même résultat quand on les appliquent aux mêmes fonctions.

La définition des produits dans (6.22) est : si $y$ est une fonction dérivables aux moins trois fois alors

**(a)** $(D-1)(D^2+1)y$ est la fonction obtenue par premièrement appliquer $D^2+1$ à $y$ et puis appliquer $D-1$ au résultat

**(b)** $(D^2+1)(D-1)y$ est la fonction obtenue par premièrement appliquer $D-1$ à $y$ et puis appliquer $D^2+1$ 'a ce résultat.

$$\begin{aligned}(D-1)(D^2+1)y &= (D-1)[(D^2+1)y] \\ &= (D-1)(y''+y) = D(y''+y)-(y''+y) \\ &= (y'''+y')-(y''+y) \\ &= y'''-y''+y'-y = (D^3-D^2+D-1)y.\end{aligned} \tag{6.23}$$

Cela implique que

$$(D-1)(D^2+1) = (D^3-D^2+D-1).$$

$$\begin{aligned}(D^2+1)(D-1)y &= (D^2+1)[(D-1)y] \\ &= (D^2+1)(y'-y) = D^2(y'-y)+(y'-y) \\ &= (y'''-y'')+(y'-y) \\ &= y'''-y''+y'-y = (D^3-D^2+D-1)y,\end{aligned} \tag{6.24}$$

$$(D^2+1)(D-1) = (D^3-D^2+D-1),$$

qui complète la justification (6.22).

**Exemple 6.7.** En utilisant le résultat de l'exemple 6.6 pour trouver la solution générale de

$$y'''-y''+y'-y = 0. \tag{6.25}$$

**Solution.** En utilisant (6.23), on peut réécrire (6.25) comme

$$(D-1)(D^2+1)y = 0,$$

et donc n'importe quelle solution de $(D^2+1)y = 0$ est une solution de (6.25). Alors $y_1 = \cos x$ et $y_2 = \sin x$ sont des solutions de (6.25).

Utilisant (6.24), on peut réécrire (6.25) comme

$$(D^2+1)(D-1)y = 0,$$

ce qui implique que la solution de $(D-1)y = 0$ est aussi une solution de (6.25). Donc $y_3 = e^x$ est une solution de (6.25).

Le Wronskien de $\{e^x, \cos x, \sin x\}$ est égale à

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x & e^x \\ -\sin x & \cos x & e^x \\ -\cos x & -\sin x & e^x \end{vmatrix}.$$

Puisque

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

alors $\{\cos x, \sin x, e^x\}$ est linéairement indépendant et

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 e^x$$

est la solution générale de (6.25).

**Exemple 6.8.** Trouver la solution générale de

$$y^{(4)} - 16y = 0. \tag{6.26}$$

**Solution.** *Le polynôme caractéristique de* (6.26) *est*

$$p(r) = r^4 - 16 = (r^2 - 4)(r^2 + 4) = (r - 2)(r + 2)(r^2 + 4).$$

*En utilisant des arguments similaires à ceux utilisés dans les exemples 6.6 et 6.7, on peut montrer que* (6.26) *peut être réécrite comme*

$$(D^2 + 4)(D + 2)(D - 2)y = 0$$

*ou bien*

$$(D^2 + 4)(D - 2)(D + 2)y = 0$$

*ou bien*

$$(D - 2)(D + 2)(D^2 + 4)y = 0.$$

*Donc $y$ est une solution de (6.26) si elle est une solution de l'une des trois équations*

$$(D-2)y=0, \quad (D+2)y=0, \quad (D^2+4)y=0.$$

*Donc, $\{e^{2x}, e^{-2x}, \cos 2x, \sin 2x\}$ est un ensemble de solutions de (6.26). Le Wronskien de cet ensemble est égale à*

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-2x} & \cos 2x & \sin 2x \\ 2e^{2x} & -2e^{-2x} & -2\sin 2x & 2\cos 2x \\ 4e^{2x} & 4e^{-2x} & -4\cos 2x & -4\sin 2x \\ 8e^{2x} & -8e^{-2x} & 8\sin 2x & -8\cos 2x \end{vmatrix}.$$

*Puisque*

$$W(0)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & -4 & 0 \\ 8 & -8 & 0 & -8 \end{vmatrix} = -512,$$

*alors, $\{e^{2x}, e^{-2x}, \cos 2x, \sin 2x\}$ est linéairement indépendant, et*

$$y_1 = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + c_3\cos 2x + c_4\sin 2x$$

*est la solution générale de (6.26).*

*Il est connut des cours d'algèbre que chaque polynôme*

$$p(r)=a_0r^n + a_1r^{n-1} + \cdots + a_n$$

*avec des coefficients réels peut être factoriser comme*

$$p(r)=a_0p_1(r)p_2(r)\cdots p_k(r),$$

*de telle sorte que n'importe quelle paire de polynômes $p_1$, $p_2$, ..., $p_k$ n'a pas de facteur commun et chaque polynôme est sous une des deux formes*

$$p_j(r)=(r-r_j)^{m_j}, \tag{6.27}$$

*où $r_j$ est réel et $m_j$ est un nombre naturel, ou bien*

$$p_j(r) = \left[(r-\lambda_j)^2 + \omega_j^2\right]^{m_j}, \tag{6.28}$$

*où $\lambda_j$ et $\omega_j$ sont réels, $\omega_j \neq 0$, et $m_j$ est un nombre naturel. Si (6.27) est vraie alors $r_j$ est une racine réelle de $p$, hors que si (6.28) est vraie alors $\lambda + i\omega$ et $\lambda - i\omega$ sont des racines complexes conjuguées de $p$. Dans chaque cas, $m_j$ représente la multiplicité de la racine.*

*En utilisant des arguments similaires à ceux utilisés dans nos exemples, on peut montrer que*

$$p(D) = a_0 p_1(D) p_2(D) \cdots p_k(D) \tag{6.29}$$

*Alors, si $p_j(D)y = 0$ pour une certaine valeur de $j$ alors $p(D)y = 0$. Donc le problème de trouver les solutions de $p(D)y = 0$ avec $p$ comme dans (6.29) se réduit a trouver les solutions de chacune des ces équations*

$$p_j(D)y = 0, \quad 1 \leq j \leq k,$$

*où $p_j$ est un polynôme du premier degré avec une puissance ou bien un polynôme du deuxième degré avec racines complexes. Pour trouver l'ensemble fondamental de solutions $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ de $p(D)y = 0$, on doit trouver l'ensemble fondamental de chaque équation puis prendre l'union de tous ces ensembles fondamentaux pour avoir $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$.*

*Pour appliquer cette procédure, on doit trouver les ensembles fondamentaux de solutions des équations de la forme*

$$(D-a)^m y = 0$$

*et*

$$\left[(D-\lambda)^2 + \omega^2\right]^m y = 0,$$

*où $m$ un nombre naturel arbitraire. Les deux théorèmes suivant nous montrent comment si prendre.*

**Théorème 6.7.** *Si $m$ est entier positif, alors*

$$\{e^{ax}, xe^{ax}, \ldots, x^{m-1}e^{ax}\} \tag{6.30}$$

*est un ensemble fondamental de solutions de*

$$(D-a)^m y = 0. \tag{6.31}$$

*Démonstration.* On va démontrer que si

$$f(x) = c_1 + c_2 x + \cdots + c_m x^{m-1}$$

est un polynôme arbitraire de degré $\leq m-1$, alors $y = e^{ax}f$ est une solution de (6.31). Premièrement notons que si $g$ est une fonction dérivable alors

$$(D-a)e^{ax}g = De^{ax}g - ae^{ax}g = ae^{ax}g + e^{ax}g' - ae^{ax}g,$$

donc

$$(D-a)e^{ax}g = e^{ax}g'. \tag{6.32}$$

Alors

$$\begin{array}{lcll}
(D-a)e^{ax}f & = & e^{ax}f' & \text{(utiliser (6.32) avec } g = f) \\
(D-a)^2 e^{ax}f & = & (D-a)e^{ax}f' = e^{ax}f'' & \text{(utiliser (6.32) avec } g = f') \\
(D-a)^3 e^{ax}f & = & (D-a)e^{ax}f'' = e^{ax}f''' & \text{(utiliser (6.32) avec } g = f'') \\
 & \vdots & & \\
(D-a)^m e^{ax}f & = & (D-a)e^{ax}f^{(m-1)} = e^{ax}f^{(m)} & \text{(utiliser (6.32) avec } g = f^{(m-1)}).
\end{array}$$

Puisque $f^{(m)} = 0$, la dernière équation implique que $y = e^{ax}f$ est une solution de (6.31) si $f$ est un polynôme de degré $\leq m-1$. En particulier, chaque fonction dans (6.30) est une solution de (6.31). Pour voire que (6.30) est linéairement indépendant (et donc un ensemble fondamental de solutions de (6.31)), noter que si

$$c_1 e^{ax} + c_2 xe^{ax} + c \cdots + c_{m-1}x^{m-1}e^{ax} = 0$$

pour tout $x$ dans un intervalle $(a, b)$, alors

$$c_1 + c_2 x + c \cdots + c_{m-1} x^{m-1} = 0$$

pour tout $x$ in $(a, b)$. Cependant, nous savons de l'algèbre que si ce polynôme a plus que $m - 1$ zéros alors $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.

**Exemple 6.9.** Trouver la solution générale de

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0. \tag{6.33}$$

**Solution.** *Le polynôme caractéristique de* (6.33) *est*

$$p(r) = r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = (r + 1)^3.$$

*Alors* (6.33) *peut être écrite comme*

$$(D + 1)^3 y = 0,$$

*donc Théorème* 6.7 *implique que la solution générale de* (6.33) *is*

$$y = e^{-x}(c_1 + c_2 x + c_3 x^2).$$

**Théorème 6.8.** *Si $\omega \neq 0$ et $m$ est un entier positif, alors*

$$\begin{aligned} \{e^{\lambda x} \cos \omega x, x e^{\lambda x} \cos \omega x, &\quad \ldots, x^{m-1} e^{\lambda x} \cos \omega x, \\ e^{\lambda x} \sin \omega x, x e^{\lambda x} \sin \omega x, &\quad \ldots, x^{m-1} e^{\lambda x} \sin \omega x\} \end{aligned}$$

*est un ensemble fondamental de solutions de*

$$[(D - \lambda)^2 + \omega^2]^m y = 0.$$

**Exemple 6.10.** Trouver la solution générale de

$$(D^2 + 4D + 13)^3 y = 0. \tag{6.34}$$

**Solution.** *Le polynôme caractéristique de (6.34) est*

$$p(r) = (r^2 + 4r + 13)^3 = \left((r+2)^2 + 9\right)^3.$$

*Donc (6.34) peut être écrite comme*

$$[(D+2)^2 + 9]^3 y = 0,$$

*et le Théorème 6.8 implique que la solution générale de (6.34) is*

$$y = (a_1 + a_2x + a_3x^2)e^{-2x}\cos 3x + (b_1 + b_2x + b_3x^2)e^{-2x}\sin 3x.$$

**Exemple 6.11.** Trouver la solution générale de

$$y^{(4)} + 4y''' + 6y'' + 4y' = 0. \tag{6.35}$$

**Solution.** *Le polynôme caractéristique de (6.35) est*

$$\begin{aligned} p(r) &= r^4 + 4r^3 + 6r^2 + 4r \\ &= r(r^3 + 4r^2 + 6r + 4) \\ &= r(r+2)(r^2 + 2r + 2) \\ &= r(r+2)[(r+1)^2 + 1]. \end{aligned}$$

*Par conséquent (6.35) peut être écrit comme*

$$[(D+1)^2 + 1](D+2)Dy = 0.$$

*Les ensembles Fondamentaux de solutions de*

$$\left[(D+1)^2 + 1\right] y = 0, \quad (D+2)y = 0, \quad \textit{et} \quad Dy = 0.$$

*sont donnés par*

$$\{e^{-x}\cos x, e^{-x}\sin x\}, \quad \{e^{-2x}\}, \quad \textit{et} \quad \{1\},$$

*respectivement. Par conséquent la solution générale de* (6.35) *est*

$$y = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + c_3 e^{-2x} + c_4.$$

**Exemple 6.12.** Trouver un ensemble fondamental de solution de

$$[(D+1)^2+1]^2(D-1)^3(D+1)D^2y = 0. \tag{6.36}$$

**Solution.** *Un ensemble fondamental de solutions de* (6.36) *peut être obtenu en combinant les ensembles fondamentaux de solutions de*

$$\left[(D+1)^2+1\right]^2 y = 0, \quad (D-1)^3 y = 0,$$
$$(D+1)y = 0, \quad \textit{et} \quad D^2 y = 0.$$

*Les ensembles fondamentaux de solutions de ces équations sont donnés par*

$$\{e^{-x}\cos x, xe^{-x}\cos x, e^{-x}\sin x, xe^{-x}\sin x\}, \quad \{e^x, xe^x, x^2e^x\},$$
$$\{e^{-x}\}, \ \textit{et} \ \{1, x\},$$

*respectivement. Ces dix fonctions forment un ensemble fondamental de solutions de* (6.36).

***Exercices***

*Dans les exercices 1–14 trouver la solution générale.*

**1.** $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

**2.** $y^{(4)} + 8y'' - 9y = 0$

**3.** $y''' - y'' + 16y' - 16y = 0$

**4.** $2y''' + 3y'' - 2y' - 3y = 0$

**5.** $y''' + 5y'' + 9y' + 5y = 0$

**6.** $4y''' - 8y'' + 5y' - y = 0$

**7.** $27y''' + 27y'' + 9y' + y = 0$

**8.** $y^{(4)} + y'' = 0$

**9.** $y^{(4)} - 16y = 0$

**10.** $y^{(4)} + 12y'' + 36y = 0$

**11.** $16y^{(4)} - 72y'' + 81y = 0$

**12.** $6y^{(4)} + 5y''' + 7y'' + 5y' + y = 0$

**13.** $4y^{(4)} + 12y''' + 3y'' - 13y' - 6y = 0$

**14.** $y^{(4)} - 4y''' + 7y'' - 6y' + 2y = 0$

*Dans les exercices 15–27 résoudre le problème avec conditions initiales.*

**15.** $y''' - 2y'' + 4y' - 8y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -2,\ y''(0) = 0$

**16.** $y''' + 3y'' - y' - 3y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 14, \quad y''(0) = -40$

**17.** $y''' - y'' - y' + y = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 9, \quad y''(0) = 4$

**18.** $y''' - 2y' - 4y = 0, \quad y(0) = 6, \quad y'(0) = 3, \quad y''(0) = 22$

**19.** $3y''' - y'' - 7y' + 5y = 0, \quad y(0) = \frac{14}{5}, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 10$

**20.** $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = -4$

**21.** $2y''' - 11y'' + 12y' + 9y = 0, \quad y(0) = 6, \quad y'(0) = 3, \quad y''(0) = 13$

**22.** $8y''' - 4y'' - 2y' + y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -3, \quad y''(0) = -1$

**23.** $y^{(4)} - 16y = 0, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = -2,\ y'''(0) = 0$

**24.** $y^{(4)} - 6y''' + 7y'' + 6y' - 8y = 0, y(0) = -2, y'(0) = -8, y''(0) = -14, y'''(0) = -62$

**25.** $4y^{(4)} - 13y'' + 9y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3, \quad y''(0) = 1, \quad y'''(0) = 3$

**26.** $y^{(4)} + 2y''' - 2y'' - 8y' - 8y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = -2, \quad y''(0) = 6, \quad y'''(0) = 8$

**27.** $4y^{(4)} + 8y''' + 19y'' + 32y' + 12y = 0, y(0) = 3, y'(0) = -3, y''(0) = -\frac{7}{2}, y'''(0) = \frac{31}{4}$

*Trouver un ensemble fondamental de solutions de l'équation donnée, et vérifiez qu'il s'agit d'un ensemble fondamental en calculant son Wronskien pour $x = 0$.*

**28.** $(D-1)^2(D-2)y=0$

**29.** $(D^2+4)(D-3)y=0$

**30.** $(D^2+2D+2)(D-1)y=0$

**31.** $D^3(D-1)y=0$

**32.** $(D^2-1)(D^2+1)y=0$

**33.** $(D^2-2D+2)(D^2+1)y=0$

*Dans les exercises 34–43 trouver un ensemble fondamental de solutions.*

**34.** $(D^2+6D+13)(D-2)^2D^3y=0$

**35.** $(D-1)^2(2D-1)^3(D^2+1)y=0$

**36.** $(D^2+9)^3D^2y=0$

**37.** $(D-2)^3(D+1)^2Dy=0$

**38.** $(D^2+1)(D^2+9)^2(D-2)y=0$

**39.** $(D^4-16)^2y=0$

**40.** $(4D^2+4D+9)^3y=0$

**41.** $D^3(D-2)^2(D^2+4)^2y=0$

**42.** $(4D^2+1)^2(9D^2+4)^3y=0$

**43.** $[(D-1)^4-16]\,y=0$

## 6.4 Solution particulière : méthode des coefficients indéterminés

*Dans cette section on considère l'équation avec coefficients constants*

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_ny = F(x), \tag{6.37}$$

*où* $n \geq 3$ *et* $F$ *est une combinaison linéaire de fonctions sous la forme*

$$e^{\alpha x}\left(p_0 + p_1x + \cdots + p_kx^k\right)$$

*ou bien*

$$e^{\lambda x}\left[\left(p_0 + p_1x + \cdots + p_kx^k\right)\cos\omega x + \left(q_0 + q_1x + \cdots + q_kx^k\right)\sin\omega x\right].$$

*La solution générale de (6.37) est* $y = y_p + y_c$*, où* $y_p$ *est la solution particulière de (6.37) et* $y_c$ *est la solution générale de l'équation complémentaire*

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_ny = 0.$$

*Dans la section précédente on a vu comment trouver* $y_c$*. Dans cette section on apprendra comment trouver* $y_p$ *quand la fonction* $F$ *est sous la forme mentionnée dessus. La procédure que l'on utilisera est une une généralisation de la méthode des coefficients indéterminés utilisée pour les équations différentielles du second ordre. Puisque les idées sont les mêmes, on donne ici une présentation informelle basée sur des exemples.*

- $F(x)$ *sous la forme* $e^{\alpha x}\left(p_0 + p_1x + \cdots + p_kx^k\right)$

*En premier lieu on considère les équations sous la forme*

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_ny = e^{\alpha x}\left(p_0 + p_1x + \cdots + p_kx^k\right).$$

**Exemple 6.13.** Trouver la solution particulière de

$$y''' + 3y'' + 2y' - y = e^x(21 + 24x + 28x^2 + 5x^3). \tag{6.38}$$

**Solution.** *En substituant*

$$\begin{aligned} y &= ue^x, \\ y' &= e^x(u' + u), \\ y'' &= e^x(u'' + 2u' + u), \\ y''' &= e^x(u''' + 3u'' + 3u' + u) \end{aligned}$$

*dans* (6.38) *et en simplifiant* $e^x$ *on aura*

$$(u''' + 3u'' + 3u' + u) + 3(u'' + 2u' + u) + 2(u' + u) - u = 21 + 24x + 28x^2 + 5x^3,$$

*ou*

$$u''' + 6u'' + 11u' + 5u = 21 + 24x + 28x^2 + 5x^3. \tag{6.39}$$

*Puisque la variable* $u$ *apparait à gauche, la solution particulière de* (6.39) *doit être de la forme*

$$u_p = A + Bx + Cx^2 + Dx^3.$$

*Donc*

$$\begin{aligned} u_p' &= B + 2Cx + 3Dx^2 \\ u_p'' &= 2C + 6Dx \\ u_p''' &= 6D. \end{aligned}$$

*Substituant à partir des quatre équations dans*(6.39) *donne*

$$\begin{aligned} u_p''' + 6u_p'' + 11u_p' + 5u_p &= 6D + 6(2C + 6Dx) + 11(B + 2Cx + 3Dx^2) \\ &\quad +5(A + Bx + Cx^2 + Dx^3) \\ &= (5A + 11B + 12C + 6D) + (5B + 22C + 36D)x \\ &\quad +(5C + 33D)x^2 + 5Dx^3. \end{aligned}$$

*En comparant les coefficients des termes similaires de l'équation et* (6.39) *on trouve que* $u_p$ *doit satisfaire* (6.39) *si*

$$\begin{aligned} 5D &= 5 \\ 5C + 33D &= 28 \\ 5B + 22C + 36D &= 24 \\ 5A + 11B + 12C + \ \ 6D &= 21. \end{aligned}$$

*Si nous résolvons ces équations successivement on aura* $D = 1$, $C = -1$, $B = 2$, $A = 1$. *Donc*

$$u_p = 1 + 2x - x^2 + x^3$$

*est une solution particulière de* (6.39), *donc*

$$y_p = e^x u_p = e^x(1 + 2x - x^2 + x^3)$$

*est une solution particulière de* (6.38).

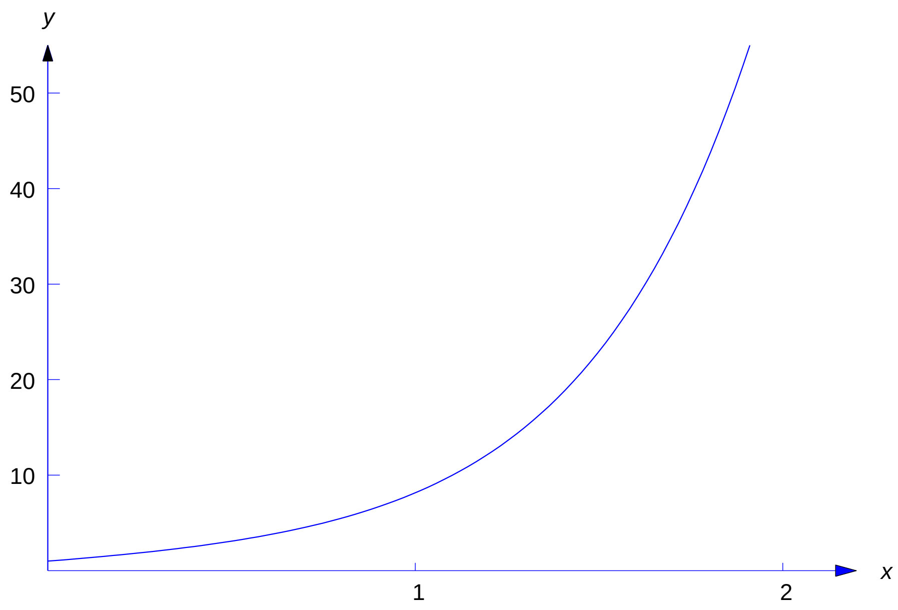



*Figure 6.1 : Graphe de* $y_p = e^x(1 + 2x - x^2 + x^3)$.

**Exemple 6.14.** *Trouver la solution particulière de*

$$y^{(4)} - y''' - 6y'' + 4y' + 8y = e^{2x}(4 + 19x + 6x^2). \tag{6.40}$$

**Solution.** *En substituant*

$$\begin{aligned} y &= ue^{2x}, \\ y' &= e^{2x}(u' + 2u), \\ y'' &= e^{2x}(u'' + 4u' + 4u), \\ y''' &= e^{2x}(u''' + 6u'' + 12u' + 8u), \\ y^{(4)} &= e^{2x}(u^{(4)} + 8u''' + 24u'' + 32u' + 16u) \end{aligned}$$

*dans* (6.40) *et en simplifiant* $e^{2x}$ *on aura*

$$\begin{aligned} &(u^{(4)} + 8u''' + 24u'' + 32u' + 16u) - (u''' + 6u'' + 12u' + 8u) \\ &-6(u'' + 4u' + 4u) + 4(u' + 2u) + 8u = 4 + 19x + 6x^2, \end{aligned}$$

*ou bien*

$$u^{(4)} + 7u''' + 12u'' = 4 + 19x + 6x^2. \tag{6.41}$$

*Puisque ni $u$ ni $u'$ apparaissent dans le coté gauche, on voit que (6.41) doit avoir une solution particulière de la forme*

$$u_p = Ax^2 + Bx^3 + Cx^4. \tag{6.42}$$

*Donc*

$$\begin{aligned} u_p' &= 2Ax + 3Bx^2 + 4Cx^3 \\ u_p'' &= 2A + 6Bx + 12Cx^2 \\ u_p''' &= 6B + 24Cx \\ u_p^{(4)} &= 24C. \end{aligned}$$

*En remplaçant $u_p''$, $u_p'''$, et $u_p^{(4)}$ dans (6.41) on obtient*

$$\begin{aligned} u_p^{(4)} + 7u_p''' + 12u_p'' &= 24C + 7(6B + 24Cx) + 12(2A + 6Bx + 12Cx^2) \\ &= (24A + 42B + 24C) + (72B + 168C)x + 144Cx^2. \end{aligned}$$

*En comparant les coefficients des termes similaires dans (6.41) on trouve que $u_p$ satisfait (6.41) si*

$$\begin{aligned} 144C &= 6 \\ 72B + 168C &= 19 \\ 24A + 42B + 24C &= 4. \end{aligned}$$

*La solution de ce système est $C = 1/24$, $B = 1/6$, $A = -1/6$. Si substitue ces valeurs dans (6.42) on trouve que*

$$u_p = \frac{x^2}{24}(-4 + 4x + x^2)$$

*est une solution particulière de (6.41), donc*

$$y_p = e^{2x}u_p = \frac{x^2e^{2x}}{24}(-4 + 4x + x^2)$$

*est une solution particulière de (6.40).*

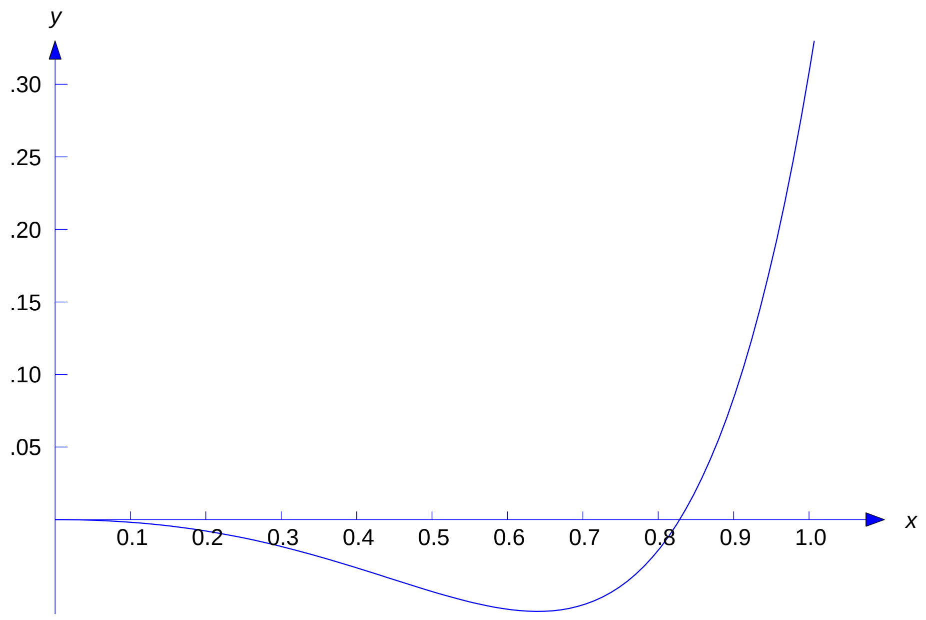



*Figure 6.2 : Graphe de* $y_p = \dfrac{x^2e^{2x}}{24}(-4+4x+x^2)$.

- $F(x)$ *sous la forme* $e^{\lambda x}\left(P(x)\cos\omega x + Q(x)\sin\omega x\right)$

*Considérons les équations sous la forme*

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_ny = e^{\lambda x}\left(P(x)\cos\omega x + Q(x)\sin\omega x\right),$$

*où* $P$ *et* $Q$ *des polynômes.*

**Exemple 6.15.** Trouver la solution particulière

$$y''' + y'' - 4y' - 4y = e^x[(5-5x)\cos x + (2+5x)\sin x]. \tag{6.43}$$

**Solution.** *En substituant*

$$\begin{aligned} y &= ue^x, \\ y' &= e^x(u'+u), \\ y'' &= e^x(u''+2u'+u), \\ y''' &= e^x(u'''+3u''+3u'+u) \end{aligned}$$

*dans* (6.43) *et en simplifiant* $e^x$ *on trouve*

$$(u''' + 3u'' + 3u' + u) + (u'' + 2u' + u) - 4(u' + u) - 4u = (5 - 5x)\cos x + (2 + 5x)\sin x,$$

*ou*

$$u''' + 4u'' + u' - 6u = (5 - 5x)\cos x + (2 + 5x)\sin x. \tag{6.44}$$

*Puisque* $\cos x$ *et* $\sin x$ *ne sont pas des solutions de l'équation complémentaire*

$$u''' + 4u'' + u' - 6u = 0,$$

*l'équation* (6.44) *a une solution particulière de la forme*

$$u_p = (A_0 + A_1 x)\cos x + (B_0 + B_1 x)\sin x. \tag{6.45}$$

*Donc*

$$\begin{aligned}
u_p' &= (A_1 + B_0 + B_1 x)\cos x + (B_1 - A_0 - A_1 x)\sin x,\\
u_p'' &= (2B_1 - A_0 - A_1 x)\cos x - (2A_1 + B_0 + B_1 x)\sin x,\\
u_p''' &= -(3A_1 + B_0 + B_1 x)\cos x - (3B_1 - A_0 - A_1 x)\sin x,
\end{aligned}$$

*alors*

$$\begin{aligned}
u_p''' + 4u_p'' + u_p' - 6u_p \quad &= \quad -[10A_0 + 2A_1 - 8B_1 + 10A_1 x]\cos x\\
&\quad\quad -[10B_0 + 2B_1 + 8A_1 + 10B_1 x]\sin x.
\end{aligned}$$

*En comparant les coefficients de* $x\cos x$, $x\sin x$, $\cos x$, *et* $\sin x$ *avec ceux dans* (6.44) *on trouve que* $u_p$ *est une solution de* (6.44) *si*

$$\begin{aligned}
-10A_1 &= -5\\
-10B_1 &= 5\\
-10A_0 - 2A_1 + 8B_1 &= 5\\
-10B_0 - 2B_1 - 8A_1 &= 2.
\end{aligned}$$

*La solution du système nous donne* $A_1 = 1/2$, $B_1 = -1/2$. *Si on remplace ces valeurs* *dans les deux dernières équations on aura*

$$\begin{aligned} -10A_0 &= 5 + 2A_1 - 8B_1 = 10 \\ -10B_0 &= 2 + 2B_1 + 8A_1 = 5, \end{aligned}$$

*donc* $A_0 = -1$*,* $B_0 = -1/2$*. En remplaçant* $A_0 = -1$*,* $A_1 = 1/2$*,* $B_0 = -1/2$*,* $B_1 = -1/2$ *dans* (6.45) *on obtient que*

$$u_p = -\frac{1}{2}\left[(2-x)\cos x + (1+x)\sin x\right]$$

*est une solution particulière de* (6.44)*, donc*

$$y_p = e^x u_p = -\frac{e^x}{2}\left[(2-x)\cos x + (1+x)\sin x\right]$$

*est une solution particulière de* (6.43).

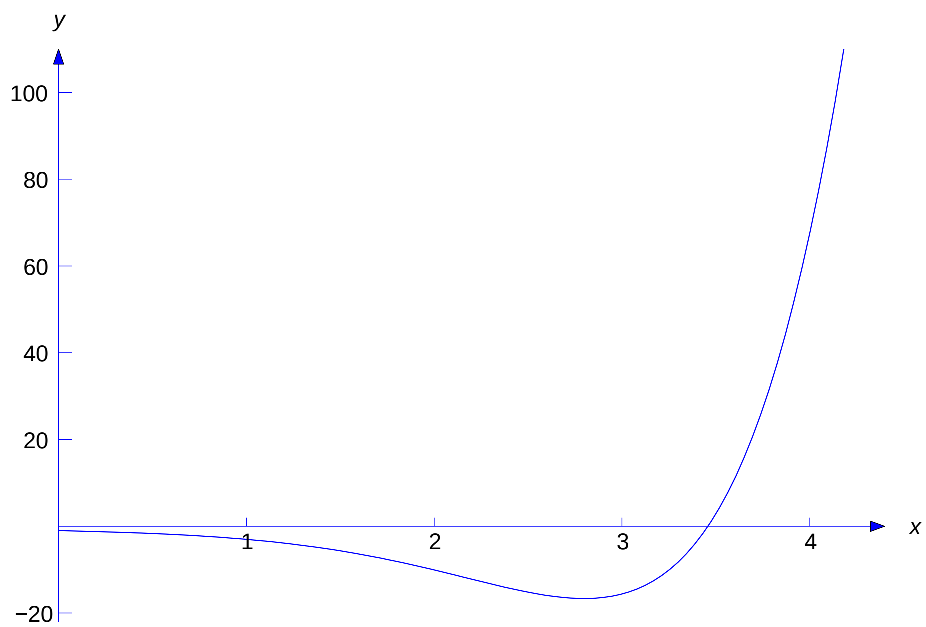



*Figure 6.3 : Graphe de* $y_p = e^x u_p = -\frac{e^x}{2}\left[(2-x)\cos x + (1+x)\sin x\right]$.

**Exemple 6.16.** Trouver une solution particulière de

$$y''' + 4y'' + 6y' + 4y = e^{-x}\left[(1-6x)\cos x - (3+2x)\sin x\right]. \tag{6.46}$$

**Solution.** *Substituant*

$$\begin{aligned} y &= ue^{-x}, \\ y' &= e^{-x}(u' - u), \\ y'' &= e^{-x}(u'' - 2u' + u), \\ y''' &= e^{-x}(u''' - 3u'' + 3u' - u) \end{aligned}$$

*dans* (6.46) *et simplifiant* $e^{-x}$ *donne*

$$(u''' - 3u'' + 3u' - u) + 4(u'' - 2u' + u) + 6(u' - u) + 4u = (1 - 6x)\cos x - (3 + 2x)\sin x,$$

*or*

$$u''' + u'' + u' + u = (1 - 6x)\cos x - (3 + 2x)\sin x. \tag{6.47}$$

*Puisque* $\cos x$ *et* $\sin x$ *sont des solutions de l'équation complémentaire*

$$u''' + u'' + u' + u = 0,$$

(6.47) *a une solution particulière de la forme*

$$u_p = (A_0 x + A_1 x^2)\cos x + (B_0 x + B_1 x^2)\sin x. \tag{6.48}$$

*alors*

$$\begin{aligned} u_p' &= [A_0 + (2A_1 + B_0)x + B_1 x^2]\cos x + [B_0 + (2B_1 - A_0)x - A_1 x^2]\sin x, \\ u_p'' &= [2A_1 + 2B_0 - (A_0 - 4B_1)x - A_1 x^2]\cos x \\ &\quad + [2B_1 - 2A_0 - (B_0 + 4A_1)x - B_1 x^2]\sin x, \\ u_p''' &= -[3A_0 - 6B_1 + (6A_1 + B_0)x + B_1 x^2]\cos x \\ &\quad - [3B_0 + 6A_1 + (6B_1 - A_0)x - A_1 x^2]\sin x, \end{aligned}$$

*so*

$$\begin{aligned} u_p''' + u_p'' + u_p' + u_p &= -[2A_0 - 2B_0 - 2A_1 - 6B_1 + (4A_1 - 4B_1)x] \cos x \\ &\quad -[2B_0 + 2A_0 - 2B_1 + 6A_1 + (4B_1 + 4A_1)x] \sin x. \end{aligned}$$

*Comparons les coefficients de* $x\cos x$*,* $x\sin x$*,* $\cos x$*, et* $\sin x$ *avec ceux dans* (6.47) *montre que* $u_p$ *est une solution de* (6.47) *si*

$$\begin{aligned} -4A_1 + 4B_1 &= -6 \\ -4A_1 - 4B_1 &= -2 \\ -2A_0 + 2B_0 + 2A_1 + 6B_1 &= 1 \\ -2A_0 - 2B_0 - 6A_1 + 2B_1 &= -3. \end{aligned}$$

*La solution des deux premières équations donne* $A_1 = 1$*,* $B_1 = -1/2$*. Substituant dans les autres équations nous donne*

$$\begin{aligned} -2A_0 + 2B_0 &= 1 - 2A_1 - 6B_1 = 2 \\ -2A_0 - 2B_0 &= -3 + 6A_1 - 2B_1 = 4, \end{aligned}$$

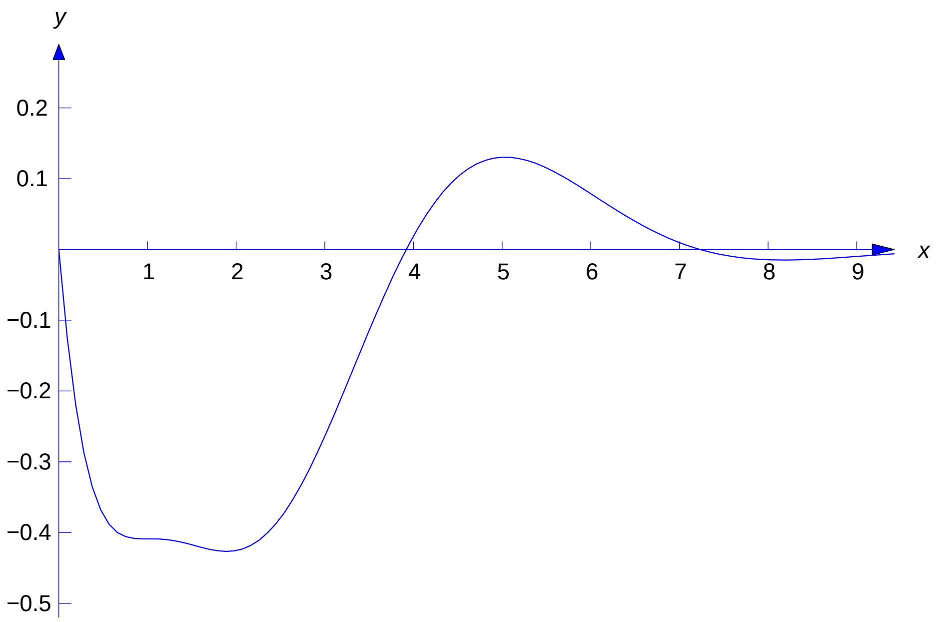



FIGURE 6.4 – $y_p = -\dfrac{xe^{-x}}{2}\left[(3 - 2x)\cos x + (1 + x)\sin x\right]$

*donc* $A_0 = -3/2$ *et* $B_0 = -1/2$*. Substituant* $A_0 = -3/2$*,* $A_1 = 1$*,* $B_0 = -1/2$*,* $B_1 = -1/2$ *dans* (6.48) *montre*

$$u_p = -\frac{x}{2}\left[(3 - 2x)\cos x + (1 + x)\sin x\right]$$

*est une solution particulière de* (6.47)*, donc*

$$y_p = e^{-x}u_p = -\frac{xe^{-x}}{2}\left[(3 - 2x)\cos x + (1 + x)\sin x\right]$$

*(Figure 6.4) est une solution de* (6.46).

## *Exercices*

*Dans les exercices 1–59 trouver une solution particulière.*

**1.** $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = -e^{-x}(4 + 76x - 24x^2)$

**2.** $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = e^{-3x}(32 - 23x + 6x^2)$

**3.** $4y''' + 8y'' - y' - 2y = -e^{x}(4 + 45x + 9x^2)$

**4.** $y''' + 3y'' - y' - 3y = e^{-2x}(2 - 17x + 3x^2)$

**5.** $y''' + 3y'' - y' - 3y = e^{x}(-1 + 2x + 24x^2 + 16x^3)$

**6.** $y''' + y'' - 2y = e^{x}(14 + 34x + 15x^2)$

**7.** $4y''' + 8y'' - y' - 2y = -e^{-2x}(1 - 15x)$

**8.** $y''' - y'' - y' + y = e^{x}(7 + 6x)$

**9.** $2y''' - 7y'' + 4y' + 4y = e^{2x}(17 + 30x)$

**10.** $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = 2e^{3x}(11 - 24x^2)$

**11.** $y''' - 7y'' + 8y' + 16y = 2e^{4x}(13 + 15x)$

**12.** $8y''' - 12y'' + 6y' - y = e^{x/2}(1 + 4x)$

**13.** $y^{(4)} + 3y''' - 3y'' - 7y' + 6y = -e^{-x}(12 + 8x - 8x^2)$

**14.** $y^{(4)} + 3y''' + y'' - 3y' - 2y = -3e^{2x}(11 + 12x)$

**15.** $y^{(4)} + 8y''' + 24y'' + 32y' = -16e^{-2x}(1 + x + x^2 - x^3)$

**16.** $4y^{(4)} - 11y'' - 9y' - 2y = -e^{x}(1 - 6x)$

**17.** $y^{(4)} - 2y''' + 3y' - y = e^{x}(3 + 4x + x^2)$

**18.** $y^{(4)} - 4y''' + 6y'' - 4y' + 2y = e^{2x}(24 + x + x^4)$

**19.** $2y^{(4)} + 5y''' - 5y' - 2y = 18e^{x}(5 + 2x)$

**20.** $y^{(4)} + y''' - 2y'' - 6y' - 4y = -e^{2x}(4 + 28x + 15x^2)$

**21.** $2y^{(4)} + y''' - 2y' - y = 3e^{-x/2}(1 - 6x)$

**22.** $y^{(4)} - 5y'' + 4y = e^{x}(3 + x - 3x^2)$

**23.** $y^{(4)} - 2y''' - 3y'' + 4y' + 4y = e^{2x}(13 + 33x + 18x^2)$

**24.** $y^{(4)} - 3y''' + 4y' = e^{2x}(15 + 26x + 12x^2)$

**25.** $y^{(4)} - 2y''' + 2y' - y = e^x(1+x)$

**26.** $2y^{(4)} - 5y''' + 3y'' + y' - y = e^x(11+12x)$

**27.** $y^{(4)} + 3y''' + 3y'' + y' = e^{-x}(5 - 24x + 10x^2)$

**28.** $y^{(4)} - 7y''' + 18y'' - 20y' + 8y = e^{2x}(3 - 8x - 5x^2)$

**29.** $y''' - y'' - 4y' + 4y = e^{-x}\left[(16+10x)\cos x + (30-10x)\sin x\right]$

**30.** $y''' + y'' - 4y' - 4y = e^{-x}\left[(1-22x)\cos 2x - (1+6x)\sin 2x\right]$

**31.** $y''' - y'' + 2y' - 2y = e^{2x}[(27 + 5x - x^2)\cos x + (2 + 13x + 9x^2)\sin x]$

**32.** $y''' - 2y'' + y' - 2y = -e^x[(9 - 5x + 4x^2)\cos 2x - (6 - 5x - 3x^2)\sin 2x]$

**33.** $y''' + 3y'' + 4y' + 12y = 8\cos 2x - 16\sin 2x$

**34.** $y''' - y'' + 2y = e^x[(20+4x)\cos x - (12+12x)\sin x]$

**35.** $y''' - 7y'' + 20y' - 24y = -e^{2x}[(13-8x)\cos 2x - (8-4x)\sin 2x]$

**36.** $y''' - 6y'' + 18y' = -e^{3x}[(2-3x)\cos 3x - (3+3x)\sin 3x]$

**37.** $y^{(4)} + 2y''' - 2y'' - 8y' - 8y = e^x(8\cos x + 16\sin x)$

**38.** $y^{(4)} - 3y''' + 2y'' + 2y' - 4y = e^x(2\cos 2x - \sin 2x)$

**39.** $y^{(4)} - 8y''' + 24y'' - 32y' + 15y = e^{2x}(15x\cos 2x + 32\sin 2x)$

**40.** $y^{(4)} + 6y''' + 13y'' + 12y' + 4y = e^{-x}[(4-x)\cos x - (5+x)\sin x]$

**41.** $y^{(4)} + 3y''' + 2y'' - 2y' - 4y = -e^{-x}(\cos x - \sin x)$

**42.** $y^{(4)} - 5y''' + 13y'' - 19y' + 10y = e^x(\cos 2x + \sin 2x)$

**43.** $y^{(4)} + 8y''' + 32y'' + 64y' + 39y = e^{-2x}[(4-15x)\cos 3x - (4+15x)\sin 3x]$

**44.** $y^{(4)} - 5y''' + 13y'' - 19y' + 10y = e^x[(7+8x)\cos 2x + (8-4x)\sin 2x]$

**45.** $y^{(4)} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = -2e^{-x}(\cos x - 2\sin x)$

**46.** $y^{(4)} - 8y''' + 32y'' - 64y' + 64y = e^{2x}(\cos 2x - \sin 2x)$

**47.** $y^{(4)} - 8y''' + 26y'' - 40y' + 25y = e^{2x}[3\cos x - (1+3x)\sin x]$

**48.** $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = e^{2x} - 4e^x - 2\cos x + 4\sin x$

**49.** $y''' - y'' + y' - y = 5e^{2x} + 2e^x - 4\cos x + 4\sin x$

**50.** $y''' - y' = -2(1+x) + 4e^x - 6e^{-x} + 96e^{3x}$

**51.** $y''' - 4y'' + 9y' - 10y = 10e^{2x} + 20e^x\sin 2x - 10$

**52.** $y''' + 3y'' + 3y' + y = 12e^{-x} + 9\cos 2x - 13\sin 2x$

**53.** $y''' + y'' - y' - y = 4e^{-x}(1 - 6x) - 2x\cos x + 2(1 + x)\sin x$

**54.** $y^{(4)} - 5y'' + 4y = -12e^{x} + 6e^{-x} + 10\cos x$

**55.** $y^{(4)} - 4y''' + 11y'' - 14y' + 10y = -e^{x}(\sin x + 2\cos 2x)$

**56.** $y^{(4)} + 2y''' - 3y'' - 4y' + 4y = 2e^{x}(1 + x) + e^{-2x}$

**57.** $y^{(4)} + 4y = \sinh x \cos x - \cosh x \sin x$

**58.** $y^{(4)} + 5y''' + 9y'' + 7y' + 2y = e^{-x}(30 + 24x) - e^{-2x}$

**59.** $y^{(4)} - 4y''' + 7y'' - 6y' + 2y = e^{x}(12x - 2\cos x + 2\sin x)$

*Dans les exercices 60–68 trouver la solution générale.*

**60.** $y''' - y'' - y' + y = e^{2x}(10 + 3x)$

**61.** $y''' + y'' - 2y = -e^{3x}(9 + 67x + 17x^2)$

**62.** $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = e^{2x}(5 - 4x - 3x^2)$

**63.** $y''' + 2y'' + y' = -2e^{-x}(7 - 18x + 6x^2)$

**64.** $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^{x}(1 + x)$

**65.** $y^{(4)} - 2y'' + y = -e^{-x}(4 - 9x + 3x^2)$

**66.** $y''' + 2y'' - y' - 2y = e^{-2x}\left[(23 - 2x)\cos x + (8 - 9x)\sin x\right]$

**67.** $y^{(4)} - 3y''' + 4y'' - 2y' = e^{x}\left[(28 + 6x)\cos 2x + (11 - 12x)\sin 2x\right]$

**68.** $y^{(4)} - 4y''' + 14y'' - 20y' + 25y = e^{x}\left[(2 + 6x)\cos 2x + 3\sin 2x\right]$

*Dans les exercices 69–74 trouver la solution du problème de Cauchy.*

**69.** $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 2e^{x}(1 - 6x), \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 7, \quad y''(0) = 9$

**70.** $y''' - y'' - y' + y = -e^{-x}(4 - 8x), \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0$

**71.** $4y''' - 3y' - y = e^{-x/2}(2 - 3x), \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 15, \quad y''(0) = -17$

**72.** $y^{(4)} + 2y''' + 2y'' + 2y' + y = e^{-x}(20 - 12x),\ y(0) = 3,\ y'(0) = -4,\ y''(0) = 7,\ y'''(0) = -22$

**73.** $y''' + 2y'' + y' + 2y = 30\cos x - 10\sin x, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -4, \quad y''(0) = 16$

**74.** $y^{(4)} - 3y''' + 5y'' - 2y' = -2e^{x}(\cos x - \sin x),\ y(0) = 2,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = -1,\ y'''(0) = -5$

## 6.5 Solution particulière : méthode de variation des paramètres

***Dérivation de la méthode***

*Nous supposons tout au long de cette section qui l'équation non homogène*

$$P_0(x)y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_n(x)y = F(x) \tag{6.49}$$

*est normal sur un intervalle $(a, b)$. Nous allons abréger cette équation comme $Ly = F$, où*

$$Ly = P_0(x)y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_n(x)y.$$

*Quand nous parlons des solutions de cette équation et de son équation complémentaire $Ly = 0$, nous voulons des solutions sur $(a, b)$. Nous allons montrer comment utiliser la méthode de variation des paramètres pour trouver une solution particulière de $Ly = F$, pourvu que nous sachions un ensemble fondamental de solutions $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ de $Ly = 0$.*

*Nous cherchons une solution particulière de $Ly = F$ sous la forme*

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2 + \cdots + u_ny_n \tag{6.50}$$

*où $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ est un ensemble fondamental connu de solutions de l'équation complémentaire*

$$P_0(x)y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_n(x)y = 0$$

*et $u_1$, $u_2$, ..., $u_n$ sont des fonctions à déterminer. Nous commençons en imposant les $n-1$ conditions sur $u_1, u_2, \ldots, u_n$ :*

$$\begin{aligned} u_1'y_1 + u_2'y_2 + & \cdots & +u_n'y_n = 0 \\ u_1'y_1' + u_2'y_2' + & \cdots & +u_n'y_n' = 0 \\ & \vdots & \\ u_1'y_1^{(n-2)} + u_2'y_2^{(n-2)} + & \cdots & +u_n'y_n^{(n-2)} = 0. \end{aligned} \tag{6.51}$$

*Ces conditions conduisent à des formules simples pour les premières $(n-1)$ dérivées de*

$y_p$ :

$$y_p^{(r)} = u_1 y_1^{(r)} + u_2 y_2^{(r)} \cdots + u_n y_n^{(r)},\ 0 \le r \le n-1. \tag{6.52}$$

*Ces formules sont faciles à retenir, puisqu'elles sont comme si nous avons obtenu les dérivées* (6.50) $(n-1)$ *fois tout en traitant les* $u_1$, $u_2$, $u_n$, $\ldots$*comme constantes. Pour voir cela* (6.51) *implique* (6.52), *on dérive* (6.50) *pour obtenir*

$$y_p' = u_1 y_1' + u_2 y_2' + \cdots + u_n y_n' + u_1' y_1 + u_2' y_2 + \cdots + u_n' y_n,$$

*qui ce réduit à*

$$y_p' = u_1 y_1' + u_2 y_2' + \cdots + u_n y_n'$$

*en raison de la première équation dans* (6.51). *En dérivant on obtient*

$$y_p'' = u_1 y_1'' + u_2 y_2'' + \cdots + u_n y_n'' + u_1' y_1' + u_2' y_2' + \cdots + u_n' y_n',$$

*qui ce réduit a*

$$y_p'' = u_1 y_1'' + u_2 y_2'' + \cdots + u_n y_n''$$

*en raison de la deuxième équation dans* (6.51). *En continuant de cette façon on aura* (6.52).

*La dernière équation dans* (6.52) *est*

$$y_p^{(n-1)} = u_1 y_1^{(n-1)} + u_2 y_2^{(n-1)} + \cdots + u_n y_n^{(n-1)}.$$

*Après dérivation on aura*

$$y_p^{(n)} = u_1 y_1^{(n)} + u_2 y_2^{(n)} + \cdots + u_n y_n^{(n)} + u_1' y_1^{(n-1)} + u_2' y_2^{(n-1)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-1)}.$$

*Substituant* (6.52) *dans* (6.49) *donne*

$$u_1 L y_1 + u_2 L y_2 + \cdots + u_n L y_n + P_0(x) \left( u_1' y_1^{(n-1)} + u_2' y_2^{(n-1)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-1)} \right) = F(x).$$

*Puisque $Ly_i = 0$ $(1 \leq i \leq n)$, cela ce réduit*

$$u_1' y_1^{(n-1)} + u_2' y_2^{(n-1)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-1)} = \frac{F(x)}{P_0(x)}.$$

*Combinant cette équation avec (6.51) montre que*

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots + u_n y_n$$

*est une solution de (6.49) si*

$$\begin{aligned}
u_1' y_1 + u_2' y_2 + \quad \cdots \quad + u_n' y_n &= 0 \\
u_1' y_1' + u_2' y_2' + \quad \cdots \quad + u_n' y_n' &= 0 \\
&\vdots \\
u_1' y_1^{(n-2)} + u_2' y_2^{(n-2)} + \quad \cdots \quad + u_n' y_n^{(n-2)} &= 0 \\
u_1' y_1^{(n-1)} + u_2' y_2^{(n-1)} + \quad \cdots \quad + u_n' y_n^{(n-1)} &= F/P_0,
\end{aligned}$$

*qu'on peut écrire sous forme de matrice*

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ \vdots \\ u_{n-1}' \\ u_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ F/P_0 \end{bmatrix}. \tag{6.53}$$

*Le déterminant de ce système est le Wronskien $W$ de l'ensemble fondamental de solutions $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, qui est non nul sur $(a, b)$, par Théorème 6.4. Solvant (6.53) donne*

$$u_j' = (-1)^{n-j} \frac{FW_j}{P_0 W}, \quad 1 \leq j \leq n, \tag{6.54}$$

*où $W_j$ est le Wronskien de l'ensemble des fonctions obtenues en supprimant les $y_j$ de $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ et en gardant les fonctions restantes dans le même ordre. De manière équivalente, $W_j$ est le déterminant obtenu en supprimant la dernière ligne $j$-ème colonne de $W$.*

*Ayant obtenu $u_1'$, $u_2', \ldots, u_n'$, on intègre pour obtenir $u_1, u_2, \ldots, u_n$. On prendre les constantes d'intégrations nulle, et nous laissons tomber toute combinaison linéaire de $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ qui apparaissent dans $y_p$.*

**Remarque 6.2.** *Pour plus d'efficacité, il est préférable de calculer $W_1$, $W_2$, $W_n$, $\ldots$ tout d'abord et ensuite calculer $W$ en le développant par rapport aux cofacteurs de la dernière ligne ; ainsi,*

$$W = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n-j} y_j^{(n-1)} W_j.$$

***Équations d'ordre 3***

*Si $n = 3$, alors*

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}.$$

*Alors*

$$W_1 = \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ y_2' & y_3' \end{vmatrix}, \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ y_1' & y_3' \end{vmatrix}, \quad W_3 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix},$$

*et (6.54) devient*

$$u_1' = \frac{FW_1}{P_0W}, \quad u_2' = -\frac{FW_2}{P_0W}, \quad u_3' = \frac{FW_3}{P_0W}. \tag{6.55}$$

**Exemple 6.17.** Trouver une solution particulière de

$$xy''' - y'' - xy' + y = 8x^2e^x, \tag{6.56}$$

étant donné que $y_1 = x$, $y_2 = e^x$, et $y_3 = e^{-x}$ est un un ensemble fondamental de solutions de l'équation complémentaire. Puis trouver la solution générale de (6.56).

**Solution.** *Nous cherchons une solution particulière de (6.56) de la forme*

$$y_p = u_1x + u_2e^x + u_3e^{-x}.$$

*Le Wronskien of* $\{y_1, y_2, y_3\}$ *est*

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & e^x & e^{-x} \\ 1 & e^x & -e^{-x} \\ 0 & e^x & e^{-x} \end{vmatrix},$$

*donc*

$$\begin{aligned} W_1 &= \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2, \\ W_2 &= \begin{vmatrix} x & e^{-x} \\ 1 & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^{-x}(x+1), \\ W_3 &= \begin{vmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{vmatrix} = e^x(x-1). \end{aligned}$$

*Expansion de* $W$ *par rapport aux cofacteurs de la dernière ligne donne*

$$W = 0W_1 - e^x W_2 + e^{-x} W_3 = 0(-2) - e^x \left(-e^{-x}(x+1)\right) + e^{-x} e^x (x-1) = 2x.$$

*Puisque* $F(x) = 8x^2 e^x$ *et* $P_0(x) = x$*,*

$$\frac{F}{P_0 W} = \frac{8x^2 e^x}{x \cdot 2x} = 4e^x.$$

*Alors, a partir* (6.55)

$$\begin{aligned} u_1' &= \quad 4e^x W_1 = \quad 4e^x(-2) = -8e^x, \\ u_2' &= -4e^x W_2 = -4e^x \left(-e^{-x}(x+1)\right) = 4(x+1), \\ u_3' &= \quad 4e^x W_3 = \quad 4e^x \left(e^x(x-1)\right) = 4e^{2x}(x-1). \end{aligned}$$

*Intégrer et prendre les constantes d'intégration pour être zéro donne*

$$u_1 = -8e^x, \quad u_2 = 2(x+1)^2, u_3 = e^{2x}(2x-3).$$

*Donc,*

$$\begin{aligned} y_p &= u_1y_1 + u_2y_2 + u_3y_3 \\ &= (-8e^x)x + e^x(2(x+1)^2) + e^{-x}\left(e^{2x}(2x-3)\right) \\ &= e^x(2x^2 - 2x - 1). \end{aligned}$$

*Puisque $-e^x$ est une solution de l'équation complémentaire , on redéfini*

$$y_p = 2xe^x(x-1).$$

*donc la solution générale de (6.56) is*

$$y = 2xe^x(x-1) + c_1x + c_2e^x + c_3e^{-x}.$$

### *Équations d'ordre 4*

*Si $n = 4$, alors*

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ y_1' & y_2' & y_3' & y_4' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & y_4'' \\ y_1''' & y_2''' & y_3''' & y_4''' \end{vmatrix},$$

*Alors*

$$W_1 = \begin{vmatrix} y_2 & y_3 & y_4 \\ y_2' & y_3' & y_4' \\ y_2'' & y_3'' & y_4'' \end{vmatrix}, \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & y_3 & y_4 \\ y_1' & y_3' & y_4' \\ y_1'' & y_3'' & y_4'' \end{vmatrix},$$

$$W_3 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_4 \\ y_1' & y_2' & y_4' \\ y_1'' & y_2'' & y_4'' \end{vmatrix}, \quad W_4 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix},$$

*et* (6.54) *devient*

$$u_1' = -\frac{FW_1}{P_0W}, \quad u_2' = \frac{FW_2}{P_0W}, \quad u_3' = -\frac{FW_3}{P_0W}, \quad u_4' = \frac{FW_4}{P_0W}. \tag{6.57}$$

**Exemple 6.18.** Trouver une solution particulière de

$$x^4y^{(4)} + 6x^3y''' + 2x^2y'' - 4xy' + 4y = 12x^2, \tag{6.58}$$

given that $y_1 = x$, $y_2 = x^2$, $y_3 = 1/x$ et $y_4 = 1/x^2$ form a fundamental set of solutions of the complementary equation. Then find the general solution of (6.58) on $(-\infty, 0)$ et $(0, \infty)$.

**Solution.** *On veut trouver une solution particulière de* (6.58) *sous la forme*

$$y_p = u_1x + u_2x^2 + \frac{u_3}{x} + \frac{u_4}{x^2}.$$

*Le Wronskien de* $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ *est*

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1/x & -1/x^2 \\ 1 & 2x & -1/x^2 & -2/x^3 \\ 0 & 2 & 2/x^3 & 6/x^4 \\ 0 & 0 & -6/x^4 & -24/x^5 \end{vmatrix},$$

*donc*

$$W_1 = \begin{vmatrix} x^2 & 1/x & 1/x^2 \\ 2x & -1/x^2 & -2/x^3 \\ 2 & 2/x^3 & 6/x^4 \end{vmatrix} = -\frac{12}{x^4},$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} x & 1/x & 1/x^2 \\ 1 & -1/x^2 & -2/x^3 \\ 0 & 2/x^3 & 6/x^4 \end{vmatrix} = -\frac{6}{x^5},$$

$$W_3 = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1/x^2 \\ 1 & 2x & -2/x^3 \\ 0 & 2 & 6/x^4 \end{vmatrix} = \frac{12}{x^2},$$

$$W_4 = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1/x \\ 1 & 2x & -1/x^2 \\ 0 & 2 & 2/x^3 \end{vmatrix} = \frac{6}{x}.$$

*Expansion de $W$ en cofacteurs par rapport a la dernière ligne donne*

$$\begin{aligned} W &= -0W_1 + 0W_2 - \left(-\frac{6}{x^4}\right) W_3 + \left(-\frac{24}{x^5}\right) W_4 \\ &= \frac{6}{x^4}\frac{12}{x^2} - \frac{24}{x^5}\frac{6}{x} = -\frac{72}{x^6}. \end{aligned}$$

*Puisque $F(x) = 12x^2$ et $P_0(x) = x^4$,*

$$\frac{F}{P_0 W} = \frac{12x^2}{x^4}\left(-\frac{x^6}{72}\right) = -\frac{x^4}{6}.$$

*Alors, à partir de* (6.57),

$$\begin{aligned} u_1' &= -\left(-\frac{x^4}{6}\right)W_1 = \frac{x^4}{6}\left(-\frac{12}{x^4}\right) = -2, \\ u_2' &= \quad -\frac{x^4}{6}W_2 = -\frac{x^4}{6}\left(-\frac{6}{x^5}\right) = \frac{1}{x}, \\ u_3' &= -\left(-\frac{x^4}{6}\right)W_3 = \frac{x^4}{6}\frac{12}{x^2} = 2x^2, \\ u_4' &= \quad -\frac{x^4}{6}W_4 = -\frac{x^4}{6}\frac{6}{x} = -x^3. \end{aligned}$$

*si on intègre et on laisse les constantes nulles, cela nous donne*

$$u_1 = -2x, \quad u_2 = \ln|x|, \quad u_3 = \frac{2x^3}{3}, u_4 = -\frac{x^4}{4}.$$

*Donc,*

$$\begin{aligned} y_p &= u_1y_1 + u_2y_2 + u_3y_3 + u_4y_4 \\ &= (-2x)x + (\ln|x|)x^2 + \frac{2x^3}{3}\frac{1}{x} + \left(-\frac{x^4}{4}\right)\frac{1}{x^2} \\ &= x^2\ln|x| - \frac{19x^2}{12}. \end{aligned}$$

*Puisque* $-19x^2/12$ *est la solution de l'équation complémentaire , we redéfinie*

$$y_p = x^2\ln|x|.$$

*Alors*

$$y = x^2\ln|x| + c_1x + c_2x^2 + \frac{c_3}{x} + \frac{c_4}{x^2}$$

*est la solution générale de* (6.58) *sur* $(-\infty, 0)$ *et* $(0, \infty)$.

## Exercices

*Dans les exercices 1–21 trouver une solution particulière, étant donné l'ensemble fondamental de solutions de l'équation complémentaire.*

**1.** $x^3y''' - x^2(x+3)y'' + 2x(x+3)y' - 2(x+3)y = -4x^4$; $\{x,\, x^2,\, xe^x\}$

**2.** $y''' + 6xy'' + (6+12x^2)y' + (12x+8x^3)y = x^{1/2}e^{-x^2}$; $\{e^{-x^2},\, xe^{-x^2},\, x^2e^{-x^2}\}$

**3.** $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 2x$; $\{x, x^2, x^3\}$

**4.** $x^2y''' + 2xy'' - (x^2+2)y' = 2x^2$; $\{1,\, e^x/x,\, e^{-x}/x\}$

**5.** $x^3y''' - 3x^2(x+1)y'' + 3x(x^2+2x+2)y' - (x^3+3x^2+6x+6)y = x^4e^{-3x}$;
$\{xe^x,\, x^2e^x,\, x^3e^x\}$

**6.** $x(x^2-2)y''' + (x^2-6)y'' + x(2-x^2)y' + (6-x^2)y = 2(x^2-2)^2$; $\{e^x,\, e^{-x},\, 1/x\}$

**7.** $xy''' - (x-3)y'' - (x+2)y' + (x-1)y = -4e^{-x}$; $\{e^x,\, e^x/x,\, e^{-x}/x\}$

**8.** $4x^3y''' + 4x^2y'' - 5xy' + 2y = 30x^2$; $\{\sqrt{x},\, 1/\sqrt{x},\, x^2\}$

**9.** $x(x^2-1)y''' + (5x^2+1)y'' + 2xy' - 2y = 12x^2$; $\{x,\, 1/(x-1),\, 1/(x+1)\}$

**10.** $x(1-x)y''' + (x^2-3x+3)y'' + xy' - y = 2(x-1)^2$; $\{x,\, 1/x, e^x/x\}$

**11.** $x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2$; $\{x,\, x^2,\, 1/x\}$

**12.** $xy''' - y'' - xy' + y = x^2$; $\{x,\, e^x,\, e^{-x}\}$

**13.** $xy^{(4)} + 4y''' = 6\ln|x|$; $\{1,\, x,\, x^2,\, 1/x\}$

**14.** $16x^4y^{(4)} + 96x^3y''' + 72x^2y'' - 24xy' + 9y = 96x^{5/2}$; $\{\sqrt{x},\, 1/\sqrt{x},\, x^{3/2},\, x^{-3/2}\}$

**15.** $x(x^2-6)y^{(4)} + 2(x^2-12)y''' + x(6-x^2)y'' + 2(12-x^2)y' = 2(x^2-6)^2$;
$\{1,\, 1/x,\, e^x,\, e^{-x}\}$

**16.** $x^4y^{(4)} - 4x^3y''' + 12x^2y'' - 24xy' + 24y = x^4$; $\{x,\, x^2,\, x^3,\, x^4\}$

**17.** $x^4y^{(4)} - 4x^3y''' + 2x^2(6-x^2)y'' + 4x(x^2-6)y' + (x^4-4x^2+24)y = 4x^5e^x$;
$\{xe^x,\, x^2e^x,\, xe^{-x},\, x^2e^{-x}\}$

**18.** $x^4y^{(4)} + 6x^3y''' + 2x^2y'' - 4xy' + 4y = 12x^2$; $\{x, x^2, 1/x, 1/x^2\}$

**19.** $xy^{(4)} + 4y''' - 2xy'' - 4y' + xy = 4e^x$; $\{e^x,\, e^{-x},\, e^x/x,\, e^{-x}/x\}$

**20.** $xy^{(4)} + (4-6x)y''' + (13x-18)y'' + (26-12x)y' + (4x-12)y = 3e^x$;
$\{e^x,\, e^{2x},\, e^x/x,\, e^{2x}/x\}$

**21.** $x^4y^{(4)} - 4x^3y''' + x^2(12 - x^2)y'' + 2x(x^2 - 12)y' + 2(12 - x^2)y = 2x^5$; $\{x,\, x^2,\, xe^x,\, xe^{-x}\}$

*Daans les exercices 22–33 trouver une solution du problème de Cauchy, étant donné l'ensemble fondamental de solutions de l'équation complémentaire.*

**22.** $x^3y''' - 2x^2y'' + 3xy' - 3y = 4x, \quad y(1) = 4, \quad y'(1) = 4, \quad y''(1) = 2$; $\{x,\, x^3,\, x\ln x\}$

**23.** $x^3y''' - 5x^2y'' + 14xy' - 18y = x^3, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1, \quad y''(1) = 7$; $\{x^2,\, x^3,\, x^3\ln x\}$

**24.** $(5 - 6x)y''' + (12x - 4)y'' + (6x - 23)y' + (22 - 12x)y = -(6x - 5)^2e^x$
$y(0) = -4, \quad y'(0) = -\dfrac{3}{2}, \quad y''(0) = -19$; $\{e^x,\, e^{2x},\, xe^{-x}\}$

**25.** $x^3y''' - 6x^2y'' + 16xy' - 16y = 9x^4, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 1, \quad y''(1) = 5$; $\{x,\, x^4,\, x^4\ln|x|\}$

**26.** $(x^2 - 2x + 2)y''' - x^2y'' + 2xy' - 2y = (x^2 - 2x + 2)^2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 5$, $y''(0) = 0$; $\{x,\, x^2,\, e^x\}$

**27.** $x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = x(x + 1), \quad y(-1) = -6, \quad y'(-1) = \dfrac{43}{6}, \quad y''(-1) = -\dfrac{5}{2}$;
$\{x,\, x^2,\, 1/x\}$

**28.** $(3x - 1)y''' - (12x - 1)y'' + 9(x + 1)y' - 9y = 2e^x(3x - 1)^2, \quad y(0) = \dfrac{3}{4}$, $y'(0) = \dfrac{5}{4}, \quad y''(0) = \dfrac{1}{4}$; $\{x + 1,\, e^x,\, e^{3x}\}$

**29.** $(x^2 - 2)y''' - 2xy'' + (2 - x^2)y' + 2xy = 2(x^2 - 2)^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -5$, $y''(0) = 5$; $\{x^2,\, e^x,\, e^{-x}\}$

**30.** $x^4y^{(4)} + 3x^3y''' - x^2y'' + 2xy' - 2y = 9x^2, \quad y(1) = -7, \quad y'(1) = -11, \quad y''(1) = -5$, $y'''(1) = 6; \quad \{x,\, x^2,\, 1/x,\, x\ln x\}$

**31.** $(2x - 1)y^{(4)} - 4xy''' + (5 - 2x)y'' + 4xy' - 4y = 6(2x - 1)^2, \quad y(0) = \dfrac{55}{4}, \quad y'(0) = 0$, $y''(0) = 13, \quad y'''(0) = 1$; $\{x,\, e^x,\, e^{-x},\, e^{2x}\}$

**32.** $4x^4y^{(4)} + 24x^3y''' + 23x^2y'' - xy' + y = 6x$, $y(1) = 2, \quad y'(1) = 0, \quad y''(1) = 4, \quad y'''(1) = -\dfrac{37}{4}$; $\{x, \sqrt{x}, 1/x, 1/\sqrt{x}\}$

**33.** $x^4y^{(4)} + 5x^3y''' - 3x^2y'' - 6xy' + 6y = 40x^3, \quad y(-1) = -1,\ y'(-1) = -7$, $y''(-1) = -1, \quad y'''(-1) = -31$; $\{x,\, x^3,\, 1/x,\, 1/x^2\}$