Equations différentielles
L3 de Mathématiques

Raphaël Danchin

Année 2010–2011

Table des matières

Introduction

On appelle *équation différentielle ordinaire* (*EDO* en abrégé) toute expression du type

$$(S) \qquad X' = F(t, X)$$

où F est une fonction continue définie sur $I \times A$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$ et A une partie de $\mathbb{R}^n$, et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ ou dans[1] $\mathbb{C}^n$. La fonction F a donc n composantes $F_1, \cdots, F_n$ qui sont des fonctions de $I \times A$ dans $\mathbb{K}$ et l'EDO ci-dessus peut donc se récrire

$$\begin{pmatrix} X_1' \\ \vdots \\ X_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(t, X_1, \cdots, X_n) \\ \vdots \\ F_n(t, X_1, \cdots, X_n) \end{pmatrix}.$$

Lorsque $n \geq 2$, pour souligner le fait que l'expression considérée dans (S) comporte plusieurs équations, on parle aussi de *système différentiel* du premier ordre.

Par analogie avec la physique (dont, historiquement, l'étude des équations différentielles est issue), la variable t est souvent appelée "temps". Une EDO est dite autonome (resp. non autonome) si F ne dépend pas de t (resp. F dépend de t).

Définition. On dit que la fonction ϕ définie sur un sous-intervalle J de I et à valeurs dans $\mathbb{K}^n$ est *solution* de l'équation différentielle associée à F si elle est dérivable sur J et vérifie

$$(1) \qquad \forall t \in J, \ \phi(t) \in A \quad \text{et} \quad \phi'(t) = F(t, \phi(t)).$$

Remarque. En intégrant l'expression ci-dessus entre t_0 et t (où t_0 est un élément arbitraire de J) on obtient

$$(2) \qquad \phi(t) = \phi(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(\tau, \phi(\tau))\, d\tau.$$

L'expression

$$(I) \qquad X = X_0 + \int_{t_0}^{t} F(\tau, X)\, d\tau$$

est appelée *équation différentielle intégrée.*

Pour les fonctions assez régulières, les formulations (I) et (S) sont équivalentes. En effet, il est clair que toute solution ϕ de (S) définie près de t_0 vérifie (2). Réciproquement, si ϕ est continue et vérifie (2) près de t_0 alors le théorème de composition (souvenons-nous que F est continue) assure que ϕ est C^1 près de t_0 ; en dérivant on vérifie que ϕ est solution de (S).

[1]Dans la suite, $\mathbb{K}$ désignera indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Remarque. Tout système différentiel non autonome à n équations se ramène à un système différentiel de $n+1$ équations autonome grâce à l'artifice suivant :

$$\begin{pmatrix} X_1' \\ \vdots \\ X_n' \\ T' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(T, X_1, \cdots, X_n) \\ \vdots \\ F_n(T, X_1, \cdots, X_n) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donnons-nous maintenant une fonction f définie et continue sur $I \times A$ et *à valeurs scalaires* (c'est-à-dire dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). L'expression

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \cdots, x^{(n-1)}) \qquad (E)$$

est appelée **équation différentielle scalaire d'ordre n associée à f**. On dit que la fonction φ définie sur un sous-intervalle J de I et à valeurs dans $\mathbb{K}^n$ est solution de l'équation différentielle scalaire associée à f si elle est n fois dérivable sur J et vérifie

$$\forall t \in J,\ (\varphi(t), \varphi'(t), \cdots, \varphi^{n-1}(t)) \in A \quad \text{et} \quad \varphi^{(n)}(t) = f\big(t, \varphi(t), \varphi'(t), \cdots, \varphi^{(n-1)}(t)\big).$$

Remarque. Toute équation différentielle scalaire d'ordre n peut être interprétée comme un système de n équations différentielles. En effet, en posant $X_0 = x$, $X_1 = x'$, etc, on constate que résoudre (E) est équivalent à résoudre

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_{n-2} \\ X_{n-1} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_{n-1} \\ f(t, X_0, X_1, \cdots, X_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

Voici une liste de problèmes importants liés à l'étude d'une EDO et que l'on souhaite aborder dans ce cours introductif.

- Trouver des solutions explicites (mais ce n'est pas toujours possible) et, plus généralement, démontrer l'existence de solutions.
- Étudier le *problème de Cauchy* : est-il possible de trouver une solution prenant une valeur prescrite X_0 au temps t_0 ? Y-a-t-il unicité d'une telle solution ? Quel est le plus grand intervalle $J \subset I$ où une telle solution existe ? La solution correspondante est appelée *solution maximale.*
- Étudier le comportement des solutions maximales aux bornes de J et trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour que $I = J$.
- Étudier la stabilité des solutions : si on perturbe un peu t_0, X_0 ou F, la solution obtenue est-elle très différente de la solution initiale ?
- Trouver des algorithmes permettant de calculer des solutions approchées d'une EDO. Cela est particulièrement intéressant si l'EDO considérée n'admet pas de solution explicite.

Chapitre 1

Équations différentielles linéaires

1.1 Généralités

Définition. On dit que le système différentiel (S) est *linéaire* si pour tout $t \in I$ la fonction $X \mapsto F(t, X)$ est affine : il existe un vecteur $B(t)$ de $\mathbb{K}^n$ et une matrice $A(t)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que

$$\forall (t, X) \in I \times \mathbb{K}^n,\ F(t, X) = B(t) + A(t)X.$$

Dans la suite, on demandera aux fonctions $t \mapsto A(t)$ et $t \mapsto B(t)$ d'être continues.

Un système linéaire est dit *homogène* si la fonction B est identiquement nulle. Le système

$$(S') \qquad X' = A(t)X$$

est appelé système homogène associé à

$$(S) \qquad X' = A(t)X + B(t).$$

Définition. On dit qu'une équation différentielle scalaire d'ordre n est *linéaire* s'il existe $n+1$ fonctions $b,\ a_1, \cdots, a_n$ de $\mathcal{C}(I; \mathbb{K})$ telles que

$$\forall (t, x_1, \cdots, x_n) \in I \times \mathbb{K}^n,\ f(t, x_1, \cdots, x_n) = b(t) + a_1(t)x_1 + \cdots + a_n(t)x_n.$$

On dit que ce système linéaire est **homogène** si la fonction b est identiquement nulle, et l'on définit comme précédemment l'équation différentielle homogène associée en remplaçant b par 0.

> **Proposition.** *Soit (S) un système différentiel linéaire, et (S') le système homogène associé. Soit ϕ_0 une solution de (S). Alors ϕ est solution de (S) si et seulement si $\phi - \phi_0$ est solution de (S').*

Preuve : Si ϕ et ϕ_0 vérifient (S), il est clair que la différence $\phi - \phi_0$ vérifie (S').

Réciproquement, si $\phi - \phi_0$ vérifie $(\phi - \phi_0)' = A(t)(\phi - \phi_0)$ et ϕ_0 vérifie $\phi_0' = A(t)\phi_0 + B(t)$, on a bien $\phi' = A(t)\phi + B(t)$. ■

Remarque : Autrement dit, la solution générale d'un système linéaire (S) s'écrit comme somme des solutions générales du système homogène associé et d'une solution particulière.

1.2 Équations différentielles scalaires linéaires du premier ordre

Théorème. *Soit a une fonction numérique continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et soit $t_0 \in I$. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle scalaire homogène*

$$(E') \qquad x' = a(t)x$$

est le sous-espace vectoriel de dimension 1 de $\mathcal{C}(I;\mathbb{R})$ engendré par la fonction

$$t \mapsto e^{\int_{t_0}^t a(\tau)\,d\tau}.$$

Preuve : Soit φ une fonction dérivable sur I. Posons

$$\psi(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \varphi(t)e^{-\int_{t_0}^t a(\tau)\,d\tau}.$$

Un calcul immédiat donne $\psi'(t) = e^{-\int_{t_0}^t a(\tau)\,d\tau}(\varphi'(t) - a(t)\varphi(t))$. Donc φ est solution de (E') si et seulement si ψ' est la fonction nulle, c'est-à-dire ψ constante, ce qui donne le résultat voulu. ■

Remarque : On observe que si φ solution de (E') n'est pas la fonction nulle, alors elle ne s'annule jamais. De ce fait, elle est solution de $x'/x = a(t)$, qui peut s'intégrer "à vue" puisque x'/x est la dérivée de $\log|x|$.

Exercice : Résoudre $x' + ax = 0$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Théorème. *Soit a et b deux fonctions numériques continues sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors l'équation différentielle scalaire d'ordre 1*

$$(E) \qquad x' = a(t)x + b(t)$$

admet une unique solution prenant la valeur x_0 en t_0. Il s'agit de la fonction

$$\varphi \; : \; \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto e^{\int_{t_0}^t a(\tau)\,d\tau}\Big(x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^\tau a(\tau')\,d\tau'} b(\tau)\,d\tau\Big). \end{cases}$$

Preuve : Soit φ une fonction dérivable sur I. Observons que

$$\frac{d}{dt}\Big(\varphi(t)e^{-\int_{t_0}^t a(\tau)\,d\tau}\Big) = e^{-\int_{t_0}^t a(\tau)\,d\tau}\Big(\varphi'(t) - a(t)\varphi(t)\Big).$$

Donc φ est solution de (E) si et seulement si

$$\frac{d}{dt}\Big(\varphi(t)e^{-\int_{t_0}^t a(\tau)\,d\tau}\Big) = e^{-\int_{t_0}^t a(\tau)\,d\tau} b(t).$$

Cette égalité s'intègre en

$$\varphi(t)e^{-\int_{t_0}^t a(\tau)\,d\tau} = K + \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^\tau a(\tau')\,d\tau'} b(\tau)\,d\tau.$$

La condition $\varphi(t_0) = x_0$ est donc vérifiée si et seulement si $K = x_0$. ■

Exercice : Transformée de Fourier de la Gaussienne : pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

Vérifier que f est C^1 et solution d'une équation différentielle scalaire du premier ordre que l'on déterminera, puis calculer f.

Lemme (de Gronwall)**.** *Soit a et φ deux fonctions continues et positives sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$ et $x_0 \in \mathbb{R}^+$. Supposons que*

$$\forall t \in I,\ \varphi(t) \leq x_0 + \left| \int_{t_0}^{t} a(\tau)\varphi(\tau)\, d\tau \right|. \tag{1.1}$$

Alors on a

$$\forall t \in I,\ \varphi(t) \leq x_0 e^{\left| \int_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau \right|}.$$

Preuve : On considère juste le cas $t \geq t_0$, le cas $t < t_0$ étant laissé en exercice. On pose alors

$$\psi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} a(\tau)\varphi(\tau)\, d\tau.$$

On a $\psi'(t) = a(t)\varphi(t) \leq a(t)\psi(t)$. Soit

$$\Psi(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau}\psi(t).$$

D'après l'inégalité ci-dessus, on a $\Psi' \leq 0$, donc la fonction Ψ est décroissante. Donc, pour $t \geq t_0$, on a

$$\Psi(t) \leq \Psi(t_0) = x_0,$$

d'où après multiplication par $e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau}$,

$$\phi(t) \leq \psi(t) \leq x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau}.$$

C'es bien le résultat souhaité. ■

1.3 Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire et conséquences

Dans toute cette section, on considère un systéme différentiel linéaire

$$X' = A(t)X + B(t) \tag{S}$$

avec $A \in \mathcal{C}(I; \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ et $B \in \mathcal{C}(I; \mathbb{K}^n)$.

Théorème (de Cauchy-Lipschitz linéaire)**.** *Pour tout $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathbb{K}^n$, le système différentiel (S) admet une unique solution ϕ de classe C^1 sur I et telle que $\phi(t_0) = X_0$.*

Preuve : Munissons $\mathbb{K}^n$ d'une norme $\|\cdot\|$ et définissons sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la norme suivante :

$$|||A||| \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{\{X \in \mathbb{K}^n,\, \|X\|=1\}} \|AX\|.$$

(*i*) **Unicité.** Considérons deux solutions ϕ et ψ de (S). Alors $\theta \stackrel{\text{déf}}{=} \phi - \psi$ est solution du système homogène associé à (S), et $\theta(t_0) = 0$. De ce fait, on a

$$\theta(t) = \int_{t_0}^{t} A(\tau)\theta(\tau)\, d\tau,$$

donc $a(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \|\theta(t)\|$ vérifie

$$a(t) \leq \left| \int_{t_0}^{t} |||A(\tau)||| a(\tau)\, d\tau \right|.$$

Le lemme de Gronwall assure donc que $a \equiv 0$ sur I, c'est-à-dire $\phi \equiv \psi$.

(*ii*) **Existence.** On va montrer l'existence d'une fonction ϕ continue sur I telle que

$$\forall t \in I,\ \phi(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} \Big(A(\tau)\phi(\tau) + B(\tau) \Big)\, d\tau. \tag{1.2}$$

Il est alors clair que ϕ est de classe C^1 (car le second membre l'est), vérifie (S) et $\phi(t_0) = X_0$.
Pour résoudre (1.2), on va construire par récurrence une suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de solutions approchées. On choisit $\phi_0(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} B(\tau)\, d\tau$, puis une fois ϕ_n construite, on pose

$$\forall t \in I,\ \phi_{n+1}(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} \Big(A(\tau)\phi_n(\tau) + B(\tau) \Big)\, d\tau. \tag{1.3}$$

On obtient ainsi une suite de fonctions continues sur I. Pour montrer la convergence de cette suite, on borne la différence entre deux termes consécutifs. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\forall t \in I,\ (\phi_{n+1} - \phi_n)(t) = \int_{t_0}^{t} A(\tau)\Big(\phi_n(\tau) - \phi_{n-1}(\tau) \Big)\, d\tau.$$

Donc

$$\|\phi_{n+1}(t) - \phi_n(t)\| \le \left| \int_{t_0}^{t} |||A(\tau)|||\ \|\phi_n(\tau) - \phi_{n-1}(\tau)\|\, d\tau \right|.$$

Plaçons-nous sur un intervalle fermé borné $[\alpha,\beta] \subset I$ arbitraire. Il existe alors un $M \ge 0$ tel que $|||A(\tau)||| \le M$ pour tout $\tau \in [\alpha,\beta]$. En conséquence, l'inégalité ci-dessus entraîne

$$\forall t \in [\alpha,\beta],\ \|\phi_{n+1}(t) - \phi_n(t)\| \le M \left| \int_{t_0}^{t} \|\phi_n(\tau) - \phi_{n-1}(\tau)\|\, d\tau \right|.$$

Soit $K = \sup_{t\in[\alpha,\beta]} \|\phi_1(t) - \phi_0(t)\|$. Une récurrence facile permet d'établir que

$$\forall t \in [\alpha,\beta],\ \|\phi_{n+1}(t) - \phi_n(t)\| \le K \frac{(M|t-t_0|)^n}{n!}.$$

On en déduit que la suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur $[\alpha,\beta]$. Elle converge donc vers une fonction ϕ continue sur $[\alpha,\beta]$. Comme $[\alpha,\beta]$ était un intervalle arbitraire inclus dans I, on conclut que $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction ϕ continue sur I tout entier.
En faisant tendre n vers l'infini dans (1.3), on constate que ϕ vérifie (1.2).

■

Remarque. Le théorème ci-dessus établit l'existence et unicité d'une solution au problème de Cauchy pour les *équations différentielles linéaires.* On verra dans le chapitre 3 un résultat similaire pour des équations différentielles beaucoup plus générales.

Étudions plus précisément la structure de l'ensemble des solutions de (S) dans le cas homogène.

Corollaire 1. *Dans le cas $B = 0$, l'ensemble $\mathcal{E}$ des solutions de (S) est un s.e.v. de dimension n de $\mathcal{C}^1(I;\mathbb{K}^n)$. Plus précisément, si $(X_1,\cdots,X_n)$ est une famille libre de $\mathbb{K}^n$, $t_0 \in I$ et ϕ_i la solution de (S) valant X_i en t_0 alors $(\phi_1,\cdots,\phi_n)$ est une base de $\mathcal{E}$.*

Ce résultat repose sur le lemme suivant :

Lemme. *Soit $(\phi_1,\cdots,\phi_n)$ une famille de solutions du système différentiel (S) avec $B = 0$. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) pour tout $t \in I$, la famille $(\phi_1(t), \cdots, \phi_n(t))$ est libre ;

(ii) il existe $t_0 \in I$ tel que la famille $(\phi_1(t_0), \cdots, \phi_n(t_0))$ soit libre.

Preuve : L'implication directe est triviale. Supposons donc qu'il existe $t_0 \in I$ tel que la famille $(\phi_1(t_0), \cdots, \phi_n(t_0))$ soit libre. Soit $t_1 \in I$ et $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \phi_i(t_1) = 0$. Il est clair que la fonction $\sum_{i=1}^n \lambda_i \phi_i$ vérifie (S) et s'annule en t_1. Comme la fonction nulle vérifie également (S) et s'annule en t_1, la partie unicité du théorème de Cauchy-Lipschitz assure que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \phi_i$ s'annule sur I. En particulier cette fonction s'annule en t_0 et donc

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \phi_i(t_0) = 0.$$

La famille $(\phi_1(t_0), \cdots, \phi_n(t_0))$ étant, par hypothèse, libre, tous les coefficients λ_i sont nuls. Donc $(\phi_1(t_1), \cdots, \phi_n(t_1))$ est également libre. ■

Démonstration du corollaire 1 : Il est évident que $\mathcal{E}$ est non vide –car contient la fonction nulle– constitué de fonctions $\mathcal{C}^1(I; \mathbb{K}^n)$ et stable par combinaisons linéaires. Donc c'est bien un s.e.v. de $\mathcal{C}^1(I; \mathbb{K}^n)$.

Considérons la famille de solutions $(\phi_1, \cdots, \phi_n)$ donnée dans l'énoncé. Le lemme assure qu'elle est libre. Maintenant, si $\phi \in \mathcal{E}$ alors il existe $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$\phi(t_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi_i(t_0).$$

On constate que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \phi_i$ vérifie aussi $\mathcal{E}$ et coïncide avec ϕ en t_0. Donc par unicité

$$\phi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi_i.$$

Donc $(\phi_1, \cdots, \phi_n)$ est génératrice et l'on a bien $\dim \mathcal{E} = n$. □

Dans le cas général non homogène, on déduit de la remarque de la page 7 que l'ensemble des solutions de (S) est un sous-espace affine de dimension n de $\mathcal{C}^1(I; \mathbb{K}^n)$.

Considérons maintenant une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n :

$$(E) \qquad x^{(n)} + a_{n-1}(t) x^{(n-1)} + \cdots + a_0(t) x = b(t),$$

avec a_0, a_1, $\cdots$, a_{n-1} et b fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

En identifiant (E) a un système différentiel du premier ordre (comme expliqué dans l'introduction), on obtient aisément cet énoncé du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire.

Théorème. *Soit $t_0 \in I$ et $(x_0, \cdots, x_{n-1})$ un n-uplet de $\mathbb{K}^n$. L'équation différentielle (E) admet une unique solution φ telle que $\varphi^{(i)}(t_0) = x_i$ pour tout $i \in \{0, \cdots, n-1\}$.*

De plus, l'ensemble $\mathcal{E}'$ des solutions de l'équation différentielle homogène (E') associée à (E) est un sous-espace vectoriel de dimension n de $\mathcal{C}^n(I; K)$.

En conséquence, on peut décrire la structure de l'ensemble des solutions de (E) à l'aide du corollaire suivant.

Corollaire 2. *Dans le cas $b = 0$, l'ensemble $\mathcal{E}$ des solutions de (S) est un s.e.v. de dimension n de $\mathcal{C}^n(I; \mathbb{K}^n)$. Plus précisément, si $(X_1, \cdots, X_n)$ est une famille libre de $\mathbb{K}^n$, $t_0 \in I$ et ϕ_i la solution de (E) telle que*

$$\begin{pmatrix} \phi_i(t_0) \\ \phi_i'(t_0) \\ \vdots \\ \phi_i^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} = X_i$$

alors $(\phi_1, \cdots, \phi_n)$ est une base de $\mathcal{E}$.

1.4 Exponentielles de matrices

Nous avons vu à la section 1.2 que la résolution des équations différentielles scalaires d'ordre 1 à coefficient constant était étroitement liée à la fonction exponentielle. Nous verrons que cette propriété remarquable demeure vraie pour les *systèmes linéaires* à coefficients constants mais il nous faut au préalable définir ce qu'est une *exponentielle de matrice.*

1.4.1 Définition

Proposition. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors la série*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et est appelée **exponentielle** *de la matrice A. On note* $\exp A$ *ou* e^A *la somme de cette série.*

Preuve : On munit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ d'une norme $|||\cdot|||$. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie, la convergence de la série ne dépend pas du choix de la norme. Pour simplifier les calculs, on supposera que $|||\cdot|||$ est une *norme d'algèbre* c'est-à-dire que[1]

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ |||AB||| \leq |||A||| |||B|||. \tag{1.4}$$

L'espace vectoriel normé $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), |||\cdot|||)$ est complet puisqu'il est de dimension finie. Pour prouver la convergence de la série ci-dessus, il suffit donc d'établir qu'elle est absolument convergente, c'est-à-dire que

$$\sum_{k=0}^{\infty} |||\frac{A^k}{k!}||| < \infty.$$

A partir de (1.4), une récurrence élémentaire permet de vérifier

$$\forall k \in \mathbb{N},\ |||A^k||| \leq |||A|||^k.$$

De ce fait,

$$\forall K \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{K} |||\frac{A^k}{k!}||| \leq \sum_{k=0}^{K} \frac{|||A|||^k}{k!} \leq e^{|||A|||},$$

d'où la convergence de la série. ■

Remarques :

(*i*) Dans le cas $n = 1$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on retrouve bien la définition de l'exponentielle d'un nombre réel.

(*ii*) L'exponentielle de la matrice nulle est l'identité.

Proposition. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors* $\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}$. *En particulier, e^A est toujours inversible.*

Preuve : Quitte à travailler dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on peut supposer que A est trigonalisable. Notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les racines du polynôme caractéristique χ_A de A comptées avec leur ordre de multiplicité. Alors d'après le théorème de réduction des matrices, A est semblable à une matrice triangulaire supérieure avec $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sur la diagonale. Un calcul aisé montre que pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k est semblable à une matrice triangulaire supérieure avec $\lambda_1^k, \cdots, \lambda_n^k$

[1] La norme $|||A||| \overset{\text{déf}}{=} n \max_{i,j} |a_{ij}|$ vérifie cette propriété.

sur la diagonale, puis que e^A est semblable à une matrice triangulaire supérieure avec $e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_n}$ sur la diagonale. Donc

$$\det e^A = \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i} = \exp\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\Big) = e^{\operatorname{tr} A}.$$

■

Proposition. *Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent. Alors*

$$e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A.$$

Preuve : On renvoie à la section suivante. ■

Attention : Dans le cas général, il n'y a aucune raison pour que $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$.

1.4.2 Comment calculer une exponentielle de matrice

La plupart du temps, calculer une exponentielle de matrice repose sur l'observation suivante : si A et B sont semblables alors il existe P inversible telle que $A = P^{-1}BP$, et on montre facilement (exo : le faire) en revenant à la définition de l'exponentielle d'une matrice que

$$e^A = Pe^B P^{-1}.$$

En conséquence il est facile de calculer e^A une fois connue e^B. Cela est intéressant si le calcul de e^B est "simple". Il y a deux cas particulièrement sympathiques :

- Le cas où B est diagonale. En effet, il est clair que

$$B = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \Longrightarrow e^B = \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_n}).$$

- Le cas où B est nilpotente (c'est le cas par exemple si B est triangulaire supérieure ou inférieure avec des 0 sur la diagonale) car alors $B^k = 0$ pour $k \geq n$, et donc

$$e^B = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{B^k}{k!}.$$

On en déduit que le calcul de l'exponentielle de toute matrice semblable à l'un de ces deux types de matrices est aisé. Par exemple si A est diagonalisable et $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ sont ses valeurs propres comptées avec leur multiplicité, on aura simplement

$$e^A = P\operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_n})P^{-1}$$

où P est la matrice constituée par les vecteurs propres correspondants écrits en colonne.

Remarque : Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ mais pas dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut toujours considérer A comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pour calculer l'exponentielle de A. Même si les calculs intermédiaires peuvent faire intervenir des nombres complexes, on sait que le résultat final e^A est une matrice à coefficients *réels*.

Exercice : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ avec $a > 0$.

(i) Montrer que A a pour spectre $\{ia, -ia\}$ puis que

$$e^A = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}.$$

(ii) Retrouver le résultat en calculant directement A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

En désespoir de cause, si la matrice A n'est ni nilpotente ni diagonalisable, elle est toujours trigonalisable dans $\mathbb{C}$ et l'on peut recourir à la *décomposition de Dunford* pour calculer l'exponentielle : on sait qu'il existe D diagonalisable et N nilpotentes telles que

$$A = D + N \quad \text{avec} \quad DN = ND.$$

Comme D et N sont respectivement diagonalisables et nilpotentes, calculer leur exponentielle n'est pas trop compliqué et comme elles commutent, on aura in fine

$$e^A = e^{D+N} = e^D e^N = e^N e^D.$$

1.5 Le cas linéaire homogène à coefficients constants

1.5.1 Le cas des systèmes

On dit que (S) est un système différentiel linéaire **à coefficients constants** s'il est de la forme

$$X' = AX + B(t)$$

avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et B fonction continue à valeurs dans $\mathbb{K}^n$. On dit qu'il est homogène si $B = 0$.

Nous allons voir que la résolution de tels systèmes revient à calculer des exponentielles de matrice.

Proposition. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors l'application*

$$\phi \ : \ \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ t \longmapsto e^{tA} \end{cases}$$

est de classe C^1 et vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \phi'(t) = Ae^{tA} = e^{tA}A.$$

Preuve : D'après la proposition 1.4.1, la fonction ϕ est la somme de la série de fonctions de terme général $\phi_k(t) = t^k A^k/k!$. Chaque ϕ_k est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \phi_0'(t) = 0 \quad \text{et} \quad \phi_k'(t) = t^{k-1}\frac{A^k}{(k-1)!} \quad \text{si} \quad k \geq 1.$$

Fixons $T > 0$ et choisissons une norme $|||\cdot|||$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant (1.4). Alors on a

$$\forall t \in [-T,T], \forall k \in \mathbb{N}^\star,\ |||\phi_k'(t)||| \leq |||A|||\Big(T|||A|||\Big)^{k-1}/(k-1)!$$

donc la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \phi_k'$ est normalement convergente sur $[-T,T]$. Comme la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \phi_k$ converge vers ϕ sur $[-T,T]$, on en déduit que ϕ est de classe C^1 sur $[-T,T]$, et que

$$\phi'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} t^{k-1}\frac{A^k}{(k-1)!} = A\sum_{k=1}^{\infty} t^{k-1}\frac{A^{k-1}}{(k-1)!} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} t^{k-1}\frac{A^{k-1}}{(k-1)!}\right)A.$$

Le réel T étant arbitraire, on obtient bien

$$\phi' = A\phi = \phi A.$$

■

Théorème. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $X_0 \in \mathbb{K}^n$. *Alors le système différentiel homogène*

$$(S') \qquad X' = AX$$

admet une unique solution ϕ *telle que* $\phi(0) = X_0$. *Cette solution est définie par*

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \phi(t) = e^{tA}X_0.$$

Preuve : Soit ϕ définie par la formule ci-dessus. Il est clair que $\phi(0) = X_0$. Par ailleurs, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^*$, on peut écrire

$$\frac{\phi(t+h) - \phi(t)}{h} = \frac{e^{(t+h)A}X_0 - e^{tA}X_0}{h} = \left(\frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h}\right)X_0.$$

La proposition précédente permet d'affirmer que la fraction apparaissant dans le terme de droite tend vers Ae^{tA} quand h tend vers 0. En conséquence la fonction ϕ est dérivable en t, et sa dérivée vaut $A\phi(t)$.

On en déduit que ϕ est C^1 sur $\mathbb{R}$, et solution de (S'). Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure de plus que c'est l'unique solution de (S') prenant la valeur X_0 en 0. ■

Corollaire. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *Soit* $(X_1, \cdots, X_n)$ *une base de* $\mathbb{K}^n$ *et*

$$\phi_i \ :\ t \longmapsto e^{tA}X_i.$$

Alors la famille de fonctions $(\phi_1, \cdots, \phi_n)$ *est une base de* $\mathcal{E}'$.

Preuve : C'est un cas particulier du théorème correspondant pour les EDO linéaires homogènes générales. ■

Le théorème ci-dessus va aussi nous permettre de démontrer la proposition de la page 13.

Preuve : Soit donc A et B deux matrices qui commutent et $X_0 \in \mathbb{K}^n$ arbitraire. Posons $\phi(t) = e^{At}e^{Bt}X_0$ et $\psi(t) = e^{(A+B)t}X_0$. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, ψ est l'unique solution du système

$$(\Sigma) \qquad \begin{cases} X' = (A+B)X, \\ X(0) = X_0. \end{cases}$$

Par ailleurs,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \phi'(t) = Ae^{At}e^{Bt}X_0 + e^{At}Be^{Bt}X_0.$$

Comme B commute avec A, on établit facilement que B commute également avec les puissances de tA puis avec e^{tA}. En conséquence, on a

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \phi'(t) = (A+B)e^{At}e^{Bt}X_0 = (A+B)\phi(t).$$

Comme $\phi(0) = X_0$, on en déduit que ϕ est également solution de (Σ). Par unicité, on a donc $\phi(t) = \psi(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En prenant $t = 1$, on conclut que $e^{A+B} = e^Ae^B$. Un raisonnement analogue permet de montrer que $e^{A+B} = e^Be^A$. ■

Proposition (Solutions de (S') dans le cas complexe)**.** *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *de spectre* $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_p\}$. *Notons* α_i *la multiplicité de la valeur propre* λ_i. *Alors les composantes des solutions de* (S') *sont combinaisons linéaires* à coefficients complexes *des fonctions*

$$t \longmapsto t^\beta e^{\lambda_i t} \quad \text{avec} \quad 1 \le i \le p \quad \text{et} \quad 0 \le \beta \le \alpha_i - 1.$$

Preuve : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de spectre $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_p\}$ avec λ_i de multiplicité α_i. Dans le cours de L2 sur la réduction des endomorphismes, on a vu qu'il existait une matrice de changement de base P et une matrice diagonale par blocs T du type

$$\begin{pmatrix} T_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & T_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & T_p \end{pmatrix}$$

avec T_i matrice triangulaire supérieure de taille α_i avec des λ_i sur la diagonale, telles que $T = P^{-1}AP$.

Soit ϕ une solution de (S'). Posons $\psi = P^{-1}\phi$. Alors on a

$$\psi' = P^{-1}\phi' = P^{-1}A\phi = P^{-1}AP\psi = T\psi.$$

Étant donné que T est diagonale par blocs, il en est de même de ses puissances et de e^{tT}. Mieux : en revenant à la définition de l'exponentielle, on constate que

$$e^{tT} = \begin{pmatrix} e^{tT_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{tT_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{tT_p} \end{pmatrix}.$$

On sait que $T_i = \lambda_i I_{\alpha_i} + N_i$ avec N_i triangulaire supérieure de taille α_i ayant des 0 sur la diagonale. Donc N_i est nilpotente d'indice au plus α_i. Comme N_i et $\lambda_i I_{\alpha_i}$ commutent, on a de plus

$$e^{tT_i} = e^{tI_{\alpha_i}} e^{tN_i} = e^{t\lambda_i} e^{tN_i}.$$

Enfin, comme N_i est nilpotente, on a

$$e^{tN_i} = \sum_{\beta=0}^{\alpha_i - 1} t^\beta N_i^\beta / \beta! \cdot$$

En conséquence, les coefficients de e^{tA} sont combinaisons linéaires des fonctions

$$t \longmapsto t^\beta e^{\lambda_i t} \quad \text{avec} \quad 1 \leq i \leq p \ \text{ et } \ 0 \leq \beta \leq \alpha_i - 1.$$

Il en est donc de même des composantes de ψ et de ϕ. ∎

Proposition (Solutions de (S') dans le cas réel)**.** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_p\}$ les valeurs propres réelles de A et*

$$\{\mu_1 + i\nu_1, \mu_1 - i\nu_1, \cdots, \mu_q + i\nu_q, \mu_q - i\nu_q\}$$

ses valeurs propres complexes non réelles. Soit α_j la multiplicité de λ_j et β_k la multiplicité (commune) de $\mu_k + i\nu_k$ et $\mu_k - i\nu_k$. Alors les composantes des solutions réelles *de (S') sont des combinaisons linéaires réelles des fonctions :*

- *$t \mapsto t^\alpha e^{\lambda_j t}$ avec $0 \leq \alpha \leq \alpha_j - 1$ et $1 \leq j \leq p$;*
- *$t \mapsto e^{\mu_k t} \cos(\nu_k t)$ et $t \mapsto e^{\mu_k t} \sin(\nu_k t)$ avec $0 \leq \beta \leq \beta_k - 1$ et $1 \leq k \leq q$.*

Preuve : Soit ϕ une solution réelle. D'après la proposition 1.5.1, il existe des vecteurs $b_{j,\alpha}$, $g_{k,\beta}$ et $h_{k,\beta}$ de $\mathbb{C}^n$ tels que

$$\phi(t) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{\alpha=0}^{\alpha_j-1} b_{j,\alpha} t^\alpha e^{\lambda_j t} + \sum_{k=1}^{q} \sum_{\beta=0}^{\beta_k} t^\beta \Big(g_{k,\beta} e^{(\mu_k + i\nu_k)t} + h_{k,\beta} e^{(\mu_k - i\nu_k)t} \Big).$$

Comme ϕ est réelle, on a $\phi = (\phi + \overline{\phi})/2$. Donc l'égalité ci-dessus entraîne que

$$\phi(t) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{\alpha=0}^{\alpha_j-1} \Big(\frac{b_{j,\alpha} + \overline{b_{j,\alpha}}}{2} \Big) t^\alpha e^{\lambda_j t} + \sum_{k=1}^{q} \sum_{\beta=0}^{\beta_k} t^\beta e^{\mu_k t} \Big[\Big(\frac{g_{k,\beta} + \overline{h_{k,\beta}}}{2} \Big) e^{i\nu_k t} + \Big(\frac{h_{k,\beta} + \overline{g_{k,\beta}}}{2} \Big) e^{-i\nu_k t} \Big].$$

Il est clair que les coefficients $\frac{b_{j,\alpha} + \overline{b_{j,\alpha}}}{2}$ sont réels et que

$$\Big(\frac{g_{k,\beta} + \overline{h_{k,\beta}}}{2} \Big) e^{i\nu_k t} + \Big(\frac{h_{k,\beta} + \overline{g_{k,\beta}}}{2} \Big) e^{-i\nu_k t} = \underbrace{\mathcal{R}e\,(g_{k,\beta} + h_{k,\beta})}_{\in\mathbb{R}} \cos \nu_k t + \underbrace{\mathcal{I}m\,(h_{k,\beta} - g_{k,\beta})}_{\in\mathbb{R}} \sin \nu_k t.$$

La proposition est donc démontrée. ■

Attention : On remarquera que l'ensemble des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}^n$ dont les composantes sont combinaisons linéaires des fonctions intervenant dans l'une des deux propositions précédentes est un s.e.v. *de dimension* n^2 alors que l'ensemble des solutions de (S') est de dimension n. En conséquence, les fonctions du type ci-dessus ne sont pas toutes solutions. Pour déterminer lesquelles sont vraiment solutions on peut au choix :

- procéder par identification : on injecte dans l'EDO considérée l'expression générale décrite dans la proposition ci-dessus, et on regarde quelles relations algèbriques doivent être satisfaites par les coefficients ;
- faire un changement d'inconnue : si $A = PBP^{-1}$ avec B matrice "plus simple que A" (par exemple diagonale si A est diagonalisable), on peut comme dans la démonstration ci-dessus poser $\phi = P\psi$, calculer ψ puis en déduire ϕ ;
- calculer e^{tA}.

Exercice : Par la méthode de votre choix, montrer que les solutions réelles de l'EDO

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

sont les fonctions de la forme

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} e^{3t}(a+bt) \\ -e^{3t}(a+b+bt) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Quelle est l'unique solution valant $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en 0 ?

1.5.2 Le cas scalaire d'ordre n

Intéressons-nous maintenant à la résolution des équations différentielles scalaires d'ordre n du type

$$(E') \qquad x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \cdots + a_0 x = 0$$

avec $(a_0, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$.

La proposition suivante permet de ramener (E') à un système différentiel.

Proposition. *La fonction $\varphi \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R};\mathbb{K})$ est solution de (E) si et seulement si la fonction $\Phi \stackrel{\text{déf}}{=} (\varphi, \varphi', \cdots, \varphi^{(n-1)})$ est solution du système différentiel d'ordre n*

$$X' = AX \quad \textit{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Preuve : Soit φ une solution de (E). Posons $\Phi \stackrel{\text{déf}}{=} (\phi, \phi', \cdots, \phi^{(n-1)})$. On a bien

$$\forall j \in \{0, \cdots, n-2\},\ \Phi'_{j+1} = (\varphi^{(j)})' = \varphi^{(j+1)} = \Phi_{j+2},$$
$$\Phi'_n = (\varphi^{(n-1)})' = \varphi^{(n)} = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i \varphi^{(i)} = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i \Phi_{i+1},$$

d'où le résultat. ∎

Définition. On appelle **équation caractéristique associé à** (E') l'équation

$$r^n + c_{n-1} r^{n-1} + \cdots + c_0 = 0.$$

Sachant que la fonction $r \mapsto (-1)^n \big(r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_0\big)$ n'est autre que le polynôme caractéristique de la matrice définie en (1.5), les résultats du paragraphe précédent sur la résolution des systèmes linéaires homogènes à coefficients constants permettent d'en déduire le résultat important suivant[2].

Proposition (Base de solutions de (E') : cas complexe)**.** *Soit $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_p\}$ l'ensemble des racines complexes de l'équation caractéristique associée à (E'). Notons α_i la multiplicité de la racine λ_i. Alors la famille de fonctions*

$$\phi_{i,\beta} \ :\ t \longmapsto t^\beta e^{\lambda_i t} \quad \textit{avec} \quad i \in \{1, \cdots, p\} \quad \textit{et} \quad \beta \in \{0, \cdots, \alpha_i - 1\},$$

est une base de l'ensemble $\mathcal{E}'$ des solutions complexes de (E').

En suivant la même démarche que pour les systèmes, on en déduit :

Proposition (Base de solutions de (E') : cas réel)**.** *Notons*

$$\{\lambda_1, \cdots, \lambda_p,\ \mu_1 + i\nu_1,\ \mu_1 - i\nu_1,\ \cdots,\ \mu_q + i\nu_q,\ \mu_q - i\nu_q\} \quad \textit{avec} \quad \lambda_i \in \mathbb{R},\ \mu_i \in \mathbb{R},\ \nu_i \in \mathbb{R}^*$$

l'ensemble des racines réelles et complexes de l'équation caractéristique associée à (E'). Soit α_j la multiplicité de la racine λ_j, et β_k la multiplicité commune des racines $\mu_k + i\nu_k$ et $\mu_k - i\nu_k$. Alors la famille de fonctions constituée de

$$t \longmapsto t^{p_j} e^{\lambda_j t}, \quad t \longmapsto t^{q_k} e^{\mu_k t} \cos(\nu_k t) \quad \textit{et} \quad t \longmapsto t^{q_k} e^{\mu_k t} \sin(\nu_k t),$$

avec $j \in \{1, \cdots, p\}$, $k \in \{1, \cdots, q\}$, $p_k \in \{0, \cdots, \alpha_k - 1\}$ et $q_k \in \{0, \cdots, \beta_k - 1\}$ est une base de l'ensemble $\mathcal{E}'$ des solutions réelles de (E').

[2] On remarquera que l'ensemble engendré par les fonctions $\phi_{i,\beta}$ définies ci-dessous est un s.e.v de dimension n. C'est donc une base de l'ensemble des solutions.

Exemple important : le cas scalaire d'ordre 2 à coefficients réels constants.

Soit $(b,c)\in\mathbb{R}^2$. On cherche les solutions réelles de

$$(E') \qquad x''+bx'+cx=0.$$

Pour cela, on va appliquer la proposition ci-dessus.

L'équation caractéristique associée à (E') est $r^2+br+c=0$. C'est une équation du second degré de discriminant $\Delta\stackrel{\text{déf}}{=}b^2-4c$. Notons $\delta\stackrel{\text{déf}}{=}\sqrt{|\Delta|}$.

Cas $\Delta>0$: L'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes

$$\lambda_1=\frac{-b-\delta}{2}\quad\text{et}\quad\lambda_2=\frac{-b+\delta}{2},$$

et la solution générale de (E') s'écrit $\varphi(t)=Ae^{\lambda_1 t}+Be^{\lambda_2 t}$ avec $(A,B)\in\mathbb{R}^2$.

Cas $\Delta=0$: L'équation caractéristique a pour racine double $\lambda=-b/2$ et la solution générale de (E') s'écrit $\varphi(t)=(A+Bt)e^{\lambda t}$ avec $(A,B)\in\mathbb{R}^2$.

Cas $\Delta<0$: L'équation caractéristique a deux racines complexes conjuguées distinctes

$$\lambda_-=\frac{-b-i\delta}{2}\quad\text{et}\quad\lambda_+=\frac{-b+i\delta}{2},$$

et la solution générale s'écrit $\varphi(t)=e^{-\frac{b}{2}t}\Big(A\cos(\frac{\delta}{2}t)+B\sin(\frac{\delta}{2}t)\Big)$ avec $(A,B)\in\mathbb{R}^2$.

1.6 La méthode de variation des constantes

Intéressons-nous maintenant à la résolution des systèmes différentiels linéaires généraux

$$(S) \qquad X'=A(t)X+B(t)$$

avec A et B fonctions continues sur un intervalle I.

On a vu que la solution générale d'un tel système est somme d'une solution particulière et de la solution générale du système homogène (S') associé. Dans cette section, on explique comment générer des solutions particulières à partir d'une base de solutions du système homogène. Il s'agit de la *méthode de variation des constantes.*

1.6.1 Le cas des systèmes

La *méthode de variation des constantes* repose sur le lemme suivant.

Lemme. *Soit $\phi_1,\cdots,\phi_n$ des fonctions de $\mathcal{C}^1(I;\mathbb{K}^n)$ telles que, pour tout $t\in I$, la famille $(\phi_1(t),\cdots,\phi_n(t))$ soit libre. Soit $f\in\mathcal{C}^1(I;\mathbb{K}^n)$. Alors il existe un unique n-uplet de fonctions $(u_1,\cdots,u_n)$ de $\mathcal{C}^1(I;\mathbb{K})$ tel que*

$$\forall t\in I,\ f(t)=\sum_{i=1}^n u_i(t)\phi_i(t).$$

Preuve : Pour tout $t\in I$, la famille $(\phi_1(t),\cdots,\phi_n(t))$ est une base de $\mathbb{K}^n$. Donc il existe un unique n-uplet $(u_1(t),\cdots,u_n(t))$ d'éléments de $\mathbb{K}$ tel que

$$f(t)=\sum_{i=1}^n u_i(t)\phi_i(t).$$

Notons $M(t)$ la matrice de colonnes $(\phi_1(t), \cdots, \phi_n(t))$. Les fonctions ϕ_i sont de classe C^1 donc l'application $\Delta = \det M$ (qui est un polynôme par rapport aux coefficients des ϕ_i) est aussi C^1. Par hypothèse, cette application ne s'annule pas sur I. En utilisant la formule

$$[M(t)]^{-1} = {}^t\mathrm{Com}(M(t))/\Delta(t),$$

on conclut que $t \mapsto [M(t)]^{-1}$ est C^1 sur I. Comme

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix} = [M(t)]^{-1} \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix},$$

les fonctions u_i sont bien de classe C^1. ■

Théorème. *Soit $(\phi_1, \cdots, \phi_n)$ une base de solutions de (S') et $f \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{K}^n)$. Notons $(u_1, \cdots, u_n)$ la famille de fonctions de $\mathcal{C}^1(I; \mathbb{K})$ telle que $f = \sum_{j=1}^n u_j \phi_j$. Alors f est solution de (S) si et seulement si*

$$\forall t \in I, \ \sum_{j=1}^n u_j'(t)\phi_j(t) = B(t).$$

Preuve : Soit donc $f \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{K}^n)$ et $(u_1, \cdots, u_n)$ la famille de fonctions telle que $f = \sum_{j=1}^n u_j \phi_j$ donnée par le lemme précédent. Alors f est solution de (S) si et seulement si

$$\Big(\sum_{j=1}^n u_j \phi_j\Big)' = A\Big(\sum_{j=1}^n u_j \phi_j\Big) + B.$$

En utilisant la formule de Leibniz, on voit que l'égalité ci-dessus se récrit

$$\sum_{j=1}^n u_j' \phi_j + \sum_{j=1}^n u_j \phi_j' = \sum_{j=1}^n u_j \Big(A\phi_j\Big) + B.$$

Or par hypothèse $\phi_j' = A\phi_j$ donc f est solution de (S) si et seulement si

$$\sum_{j=1}^n u_j' \phi_j = B.$$

■

Remarque : La connaissance d'une base de solutions de (S') permet donc de résoudre (S) pourvu que l'on sache intégrer les u_j'. On dit que la méthode de variation des constantes permet de résoudre les systèmes linéaires *à quadrature près.*

1.6.2 Le cas scalaire d'ordre n

Il s'agit d'équations différentielles du type

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)x = b(t), \tag{E}$$

avec a_0, a_1, $\cdots$, a_{n-1} et b fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Nous allons voir que, comme dans le cas des systèmes, la connaissance d'une base de solutions $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ de l'équation différentielle homogène (E') associée à (E) permet de résoudre (E) à quadrature près, et ce, à l'aide de la **méthode de variation des constantes**. Rappelons que l'on peut transformer (E) en un système différentiel de taille n en posant

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

et que, par conséquent, la famille $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ de solutions de (E') est une base de solutions si et seulement si la matrice

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \cdots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \cdots & \varphi_n'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

est inversible pour tout $t \in I$.

En conséquence, dans ce nouveau cadre, le lemme 1.6.1 assure que si $f \in \mathcal{C}^n(I;\mathbb{K})$ alors il existe n fonctions u_i de $\mathcal{C}^1(I;\mathbb{K})$ telles que

$$\left\{ \begin{array}{lllllll} f & = & u_1\varphi_1 & + & u_2\varphi_2 & + & \cdots + u_n\varphi_n, \\ f' & = & u_1\varphi_1' & + & u_2\varphi_2' & + & \cdots + u_n\varphi_n', \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f^{(n-1)} & = & u_1\varphi_1^{(n-1)} & + & u_2\varphi_2^{(n-1)} & + & \cdots + u_n\varphi_n^{(n-1)}. \end{array} \right.$$

et on en déduit alors la proposition suivante :

Théorème. *Soit* $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ *une base de solutions de* (E') *et* $f \in \mathcal{C}^n(I;\mathbb{K})$. *Alors* f *est solution de* (E) *si et seulement si il existe une famille* $(u_1, \cdots, u_n)$ *de* n *fonctions de* $\mathcal{C}^1(I;\mathbb{K})$ *telles que* $f = \sum_{j=1}^n u_j\varphi_j$ *et vérifiant pour tout* $t \in I$ *le système linéaire suivant*

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n u_j'(t)\varphi_j(t) = 0, \\ \sum_{j=1}^n u_j'(t)\varphi_j'(t) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{j=1}^n u_j'(t)\varphi_j^{(n-1)}(t) = b(t). \end{array} \right.$$

Attention : Dans le cas d'un système scalaire d'ordre n, la méthode de variation des constantes met en jeu *la fonction inconnue et ses* $(n-1)$ *premières dérivées*. On notera que chercher f sous la forme $f = \sum_{j=1}^n u_j f_j$ ne fournit qu'une seule équation pour n inconnues, et ne permet donc pas de déterminer $u_1, \cdots, u_n$.

1.6.3 Application au cas des coefficients constants

Dans le cas particulier où le système différentiel considéré est *à coefficients constants*, on dispose d'une formule explicite donnant toutes les solutions :

Proposition. *Soit* $t_0 \in I$, $X_0 \in \mathbb{K}^n$ *et* $B \in \mathcal{C}(I;\mathbb{K}^n)$. *Alors le système différentiel*

$$X' = AX + B(t) \tag{S}$$

admet une unique solution ϕ valant X_0 en t_0, donnée par la formule de Duhamel *:*

$$\forall t \in I,\ \phi(t) = e^{(t-t_0)A}X_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}B(s)\,ds. \tag{1.6}$$

Preuve : D'après le théorème 1.3, le système (S) admet une unique solution définie sur I entier. Pour déterminer cette solution ϕ, on utilise la **méthode de variation des constantes**. Sachant que les solutions de (S') sont du type $t \mapsto e^{tA}Y_0$ avec $Y_0 \in \mathbb{K}^n$, on écrit

$$\phi(t) = e^{tA}Y(t).$$

Comme l'application $t \mapsto e^{tA}$ ainsi que son inverse $t \mapsto e^{-tA}$ sont de classe C^1, Y et ϕ sont simultanément de classe C^1. De plus

$$\phi'(t) - A\phi(t) = Ae^{tA}Y(t) + e^{tA}Y'(t) - Ae^{tA}Y(t) = e^{tA}Y'(t),$$

donc ϕ est solution de S si et seulement si

$$\forall t \in I,\ Y'(t) = e^{-tA}B(t),$$

donc si et seulement si il existe $Y_0 \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$\forall t \in I,\ Y(t) = Y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-sA}B(s)\,ds.$$

Comme de plus $Y_0 = Y(t_0) = e^{-t_0A}\phi(t_0) = e^{-t_0A}X_0$, on en déduit la formule (1.6). ■

A titre d'exemple, donnons une méthode de résolution des systèmes différentiels dont le second membre est une "exponentielle-polynôme".

Proposition. *Considérons un système différentiel*

$$X' = AX + R(t)e^{\rho t} \tag{S}$$

tel que les composantes $(R_1, \cdots, R_n)$ de R soient des polynômes de degré au plus d.

Alors (S) admet une solution du type $\phi(t) = P(t)e^{\rho t}$ où les composantes de P sont des polynômes de degré

- *au plus d si ρ n'est pas valeur propre de A,*
- *au plus $d + \alpha$ si ρ est valeur propre de multiplicité α de A.*

Preuve : D'après la proposition 1.5.1, les composantes des solutions du système homogène associé à (S) sont des combinaisons linéaires des fonctions $t \mapsto t^\beta e^{\lambda_i t}$ avec λ_i valeur propre de A de multiplicité α_i, et $\beta \le \alpha_i - 1$.

Comme les colonnes de e^{tA} sont elles-mêmes des solutions de (S'), les coefficients de e^{tA} sont aussi des sommes de fonctions $t \mapsto t^\beta e^{\lambda_i t}$ avec $\beta \le \alpha_i - 1$. La formule (1.6) avec $t_0 = 0$ et $X_0 = 0$ nous assure que $t \mapsto \int_0^t e^{(t-s)A}R(s)e^{\rho s}\,ds$ est une solution particulière de (S).

Les coefficients de $e^{(t-s)A}R(s)$ sont des combinaisons linéaires d'expressions du type $(t-s)^\beta e^{\lambda_i(t-s)}e^{\rho s}s^k$ avec $k \le d$. En développant, on trouve une somme de termes du type

$$t^\gamma s^{k+\beta-\gamma}e^{\lambda_i t}e^{(\rho-\lambda_i)s} \quad \text{avec} \quad \gamma \le \beta.$$

Intégrer cette expression sur $[0, t]$ donne des termes du type

$$t^{k+\beta+1}e^{\rho t}$$

avec $k \le d$, $\beta \le \alpha_i - 1$, ce qui achève la preuve du résultat. ■

Remarque : Pour déterminer les coefficients du polynôme P, on procède par identification.

Pour les équations différentielles d'ordre n, on a :

Proposition. *Considérons une équation différentielle du type suivant :*

$$(E) \qquad x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_0 x = R(t)e^{\rho t}$$

avec R polynôme de degré d.

Alors (E) admet une solution du type $\varphi(t) = P(t)e^{\rho t}$ où P est un polynôme de degré
- *au plus d si ρ n'est pas racine de l'équation caractéristique associée à (E),*
- *au plus $d+\alpha$ si ρ est racine de multiplicité α de l'équation caractéristique.*

Remarque importante : Bien que l'on dispose d'une formule explicite donnant la solution générale des systèmes différentiels (ou des équations différentiels scalaires d'ordre n) à coefficients constants, il est souvent plus rapide d'utiliser la méthode de variation de la constante donnée par le théorème 1.6.1 pour déterminer une solution particulière. En effet, calculer une exponentielle de matrice est, en général, très fastidieux.

1.7 Comportement asymptotique des solutions

Soit A une matrice carrée de taille n à coefficients réels ou complexes. On note $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ les valeurs propres (complexes) deux à deux distinctes de A et α_i leur multiplicité. On rappelle que

- le *sous-espace propre* E_{λ_i} associé à λ_i est l'ensemble de valeurs propres de A pour λ_i c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs colonnes $X \in \mathbb{C}^n$ tels que $AX = \lambda_i X$,
- le *sous-espace caractéristique* associé à λ_i est $E'_{\lambda_i} = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda_i \mathrm{Id})^{\alpha_i}$.

Il est clair que l'on a toujours $E_{\lambda_i} \subset E'_{\lambda_i}$. On rappelle que

$$\mathbb{C}^n = \oplus_{i=1}^p E'_{\lambda_i}$$

et que la matrice A est diagonalisable si et seulement si

$$E_{\lambda_i} = E'_{\lambda_i} \quad \text{pour tout} \;\; i \in \{1, \cdots, p\}.$$

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On appelle
- *sous-espace stable* l'ensemble $E^s_{\mathbb{C}} \stackrel{\text{déf}}{=} \oplus_{\mathcal{R}e\,\lambda_i<0}\; E'_{\lambda_i}$,
- *sous-espace instable* l'ensemble $E^i_{\mathbb{C}} \stackrel{\text{déf}}{=} \oplus_{\mathcal{R}e\,\lambda_i>0}\; E'_{\lambda_i}$,
- *sous-espace neutre* l'ensemble $E^n_{\mathbb{C}} \stackrel{\text{déf}}{=} \oplus_{\mathcal{R}e\,\lambda_i=0}\; E'_{\lambda_i}$.

Remarque : Dans le cas d'une matrice réelle, les valeurs propres non réelles sont conjuguées deux à deux. De ce fait, les ensembles

$$E^s_{\mathbb{R}} \stackrel{\text{déf}}{=} E^s_{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^n, \quad E^i_{\mathbb{R}} \stackrel{\text{déf}}{=} E^i_{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^n \;\;\text{et}\;\; E^n_{\mathbb{R}} \stackrel{\text{déf}}{=} E^n_{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^n$$

vérifient (exo : pourquoi ?)

$$\mathbb{R}^n = E^s_{\mathbb{R}} \oplus E^i_{\mathbb{R}} \oplus E^n_{\mathbb{R}}.$$

Proposition. *Tous les espaces définis ci-dessus sont stables par l'action de e^{tA} et ce pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

Preuve : Les sous-espaces caractéristiques étant stables par A, il en est de même des espaces définis ci-dessus. En conséquence, la même propriété persiste pour les puissances de A puis pour e^{tA} (raisonner sur les sommes partielles puis passer à la limite en utilisant le fait que les s.e.v. de dimension finie sont toujours fermés). ■

Théorème. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :*
- $E^s_{\mathbb{K}}$ *est l'ensemble des vecteurs colonnes X de $\mathbb{K}^n$ tels que*

$$\lim_{t\to+\infty} e^{tA}X = 0;$$

- $E^i_{\mathbb{K}}$ *est l'ensemble des vecteurs colonnes X de $\mathbb{K}^n$ tels que*

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-tA}X = 0;$$

- $E^s_{\mathbb{K}}$ *est l'ensemble des vecteurs colonnes X de $\mathbb{K}^n$ tels que e^{tA} ait un comportement polynômial à l'infini : il existe $C > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que*

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \|e^{tA}X\| \le C(1+|t|)^N. \tag{1.7}$$

Preuve : Considérons le cas des solutions complexes pour simplifier la présentation. Notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_q$ les valeurs propres (deux à deux distinctes) à partie réelle strictement négative. Soit Π_s le projecteur sur $E^s_{\mathbb{C}}$ parallélement à $E^n_{\mathbb{C}} \oplus E^i_{\mathbb{C}}$ et $\widetilde{\Pi}_s$ le projecteur conjugué défini par $\widetilde{\Pi}_s \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Id} - \Pi_s$. On identifie ces projecteurs à leur matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Soit X un vecteur colonne de $\mathbb{C}^n$ et Φ la solution de (S) avec donnée initiale X. En utilisant le fait que $X = \Pi_s X + \widetilde{\Pi}_s X$, et la propriété d'unicité pour le problème de Cauchy, on voit que

$$\Phi = \Phi_s + \widetilde{\Phi}_s$$

où Φ_s et $\widetilde{\Phi}_s$ sont les solutions de (S) avec donnée $\Pi_s X$ et $\widetilde{\Pi}_s X$, respectivement.

La proposition précédente permet d'affirmer de plus que $\Pi_s \Phi_s = \Phi_s$ et $\widetilde{\Pi}_s \widetilde{\Phi}_s = \widetilde{\Phi}_s$. Donc, on peut écrire

$$\Phi_s' = A\Pi_s\Phi_s \quad \text{et} \quad \widetilde{\Phi}_s' = A\widetilde{\Pi}_s\widetilde{\Phi}_s.$$

Il est clair que $\operatorname{Ker} A\Pi_s = E^n_{\mathbb{C}} \oplus E^i_{\mathbb{C}}$ et que l'endomorphisme induit par $A\Pi_s$ sur $E^s_{\mathbb{C}}$ a pour valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_q$ avec multiplicités $\alpha_1, \cdots, \alpha_q$. En conséquence, les composantes de Φ_s sont combinaisons linéaires des fonctions $t \mapsto t^\alpha e^{\lambda_i t}$ avec $0 \le \alpha \le \alpha_i - 1$ et $1 \le i \le q$. En particulier, il est clair que pour tout $\lambda < \min\{|\mathcal{R}e\,\lambda_i| \,/\, 1 \le i \le q\}$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ |\Phi_s(t)| \le Ce^{-\lambda t}.$$

Un raisonnement analogue montre que les composantes de $\widetilde{\Phi}_s$ sont combinaisons linéaires des fonctions $t \mapsto t^\alpha e^{\lambda_i t}$ avec $0 \le \alpha \le \alpha_i - 1$ et $q+1 \le i \le p$. Comme $\mathcal{R}e\,\lambda_i \ge 0$ pour $i \ge q+1$, on en conclut que si $\widetilde{\Phi}_s$ n'est pas nulle (ce qui est équivalent à $\widetilde{\Pi}_s X \ne 0$) alors $\widetilde{\Phi}_s$ ne tend pas vers 0 en $+\infty$.

Sachant que $\Phi = \Phi_s + \widetilde{\Phi}_s$, on peut maintenant conclure que Φ tend vers 0 en $+\infty$ si et seulement si $\widetilde{\Phi}_s$ est nulle, c'est-à-dire si et seulement si $\widetilde{\Pi}_s X = 0$. La première propriété en découle car $\operatorname{Ker} \widetilde{\Pi}_s = E^s_{\mathbb{C}}$.

La preuve des deux autres propriétés est analogue. ■

Remarque : En fait la démonstration donne un résultat plus précis :
- si $X \in E^s_{\mathbb{K}}$ alors pour tout $\lambda < \min\{|\mathcal{R}e\,\lambda_i| \,/\, \mathcal{R}e\,\lambda_i < 0\}$ il existe $C > 0$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \|e^{tA}X\| \le Ce^{-t\lambda};$$

- si $X \in E^i_{\mathbb{K}}$ alors pour tout $\lambda < \min\{\mathcal{R}e\,\lambda_i \,/\, \mathcal{R}e\,\lambda_i > 0\}$ il existe $C > 0$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \|e^{-tA}X\| \le Ce^{-t\lambda};$$

– si $X \in E^n_{\mathbb{K}}$, on peut prendre pour N dans (1.7) la plus grande multiplicité des valeurs propres imaginaires pures.

Le théorème précédent et les résultats des sections précédentes permettent d'affirmer que les solutions de (S) peuvent avoir trois types de comportement suivant la valeur de A et la donnée initiale :

– un comportement de type exponentielle en $\pm\infty$;
– un comportement de type polynômial en $\pm\infty$;
– un comportement périodique (si la matrice est diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont imaginaires pures).

Cela conduit à la définition suivante :

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Nous dirons que la matrice A est

– *hyperbolique* si elle ne possède pas de valeur propre imaginaire pure ;
– *parabolique* si toutes les valeurs propres sont imaginaires pures et A n'est pas diagonalisable ;
– *elliptique* si toutes les valeurs propres sont imaginaires pures et A est diagonalisable.

Proposition. *L'ensemble des matrices hyperboliques est ouvert : si A est hyperbolique alors il existe $\delta > 0$ tel que pour toute matrice B telle que $\|B\| \leq \delta$, la matrice $A + B$ est encore hyperbolique.*

Preuve : Supposons pour simplifier que toutes les valeurs propres complexes de A sont simples. Alors χ_A a n racines simples et le théorème des fonctions implicites permet de montrer que dans cette situation, les racines dépendent continûment des coefficients du polynôme. Comme par ailleurs la valeur des coefficients de χ_A dépend continûment des coefficients de A, on en déduit que les valeurs propres de $A+B$ dépendent continûment des coefficients de $A+B$ si B est dans un voisinage de 0. En particulier, si A est hyperbolique alors il existe $\eta > 0$ tel que pour toute valeur propre λ de A on ait $|\mathcal{R}e\,\lambda| \geq \eta$. La propriété de continuité montre que pour B assez petite, les valeurs propres de $A + B$ seront toutes de partie réelle supérieure à $\eta/2$ ou inférieure à $-\eta/2$, donc non nulles. ■

Terminons cette section par une étude détaillée du cas où A est une matrice 2×2 *à coefficients réels*. Nous nous limitons à l'étude du comportement asymptotique des solutions *réelles*.

Les valeurs propres λ_1 et λ_2 (comptées avec leur multiplicité) sont les solutions du polynôme caractéristique de A, à savoir $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr} A\,\lambda + \det A$. Comme la matrice A est réelle, les racines de A sont ou bien réelles ou bien complexes conjuguées.

Premier cas : λ_1 et λ_2 sont réelles et distinctes

Dans ce cas la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Plus précisément, il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

et l'on a donc

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

– Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, alors toutes les solutions tendent vers 0 en $+\infty$ à la vitesse (au moins) $e^{t\lambda_2}$. On parle de *nœud attractif*.
– Si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, alors toutes les solutions tendent vers 0 en $-\infty$ à la vitesse (au moins) $e^{t\lambda_1}$. On parle de *nœud répulsif*.
– Si $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, alors toutes les solutions tendent vers l'infini en $\pm\infty$, sauf celles qui sont colinéaires à un vecteur propre de A. On parle de *point selle*.

– L'une des deux valeurs propres est nulle. Alors les solutions de (S) sont bornées sur $\mathbb{R}^+$ ou sur $\mathbb{R}^-$ suivant le signe de la valeur propre non nulle.

Notons que les trois premiers cas décrits ci-dessus, la partie réelle des valeurs propres est non nulle et donc la matrice est hyperbolique.

Deuxième cas : λ_1 et λ_2 sont réelles et confondues

On note λ la valeur commune des valeurs propres. Il y a alors deux cas de figure.

– Premier sous-cas : la matrice est diagonalisable.
  On a nécessairement $A = \lambda I_2$ et donc
  $$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda} \end{pmatrix}$$
  et le comportement des solutions de (S) en $\pm\infty$ est donc évident. Si $\lambda < 0$, on parle de *puits* et si $\lambda > 0$, de *source*.
– Deuxième sous-cas : la matrice n'est pas diagonalisable.
  Alors A est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, et donc il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que
  $$e^{tA} = e^{t\lambda} P \begin{pmatrix} 1 & at \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Si $\lambda > 0$ (resp. $\lambda < 0$), on parle de *nœud impropre répulsif* (resp. *nœud impropre attractif*).

Dans le cas particulier où $\lambda = 0$, on parle de matrice *parabolique*. (si $\lambda \neq 0$ elle est bien sûr hyperbolique).

Troisième cas : λ_1 et λ_2 sont complexes conjuguées et non réelles

Il existe donc $\theta \neq 0$ et $\rho \in \mathbb{R}$ tels que
$$\lambda_1 = \rho - i\theta \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \rho + i\theta.$$
Ces deux valeurs propres étant distinctes, la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Plus précisément il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que
$$P^{-1}AP = \Delta \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} \rho - i\theta & 0 \\ 0 & \rho + i\theta \end{pmatrix}.$$
Remarquons que la matrice
$$B \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} \rho & -\theta \\ \theta & \rho \end{pmatrix}$$
est également semblable à Δ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (pourquoi ?)

En conséquence A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et donc aussi dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (pourquoi ?) : il existe $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = R^{-1}AR$.

Le calcul de e^{tB} est aisé car
$$B = \rho I_2 + \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}.$$
On en déduit que
$$e^{tA} = e^{t\rho} R \begin{pmatrix} \cos(t\theta) & -\sin(t\theta) \\ \sin(t\theta) & \cos(t\theta) \end{pmatrix} R^{-1}.$$

On retrouve que le comportement asymptotique des solutions de (S) est dicté par la partie réelle des valeurs propres (ici c'est ρ). Plus précisément, les solutions tendent vers 0 en $+\infty$ (resp. $-\infty$) à la vitesse $e^{t\rho}$ si et seulement si $\rho < 0$ (resp. $\rho > 0$). Si $\rho < 0$ (resp. $\rho > 0$), on parle de *foyer attractif* (resp. *foyer répulsif*).

Dans le cas limite $\rho = 0$, on constate que les solutions sont *périodiques* de période $2\pi/\theta$. On dit que le système (S) ou la matrice A est *elliptique* et que le point $(0, 0)$ est un *centre*.

Chapitre 2

Contrôle des EDO linéaires

Dans tout ce chapitre, on munit $\mathbb{R}^n$ de la structure euclidienne canonique : pour $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $(x \mid y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ désigne le produit scalaire de x et y, et $\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$, la norme associée.

On identifie les éléments de $\mathbb{R}^n$ à des vecteurs colonnes ou à des matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et pour $x \in \mathbb{R}^n$, la notation ${}^t\!x$ désigne le vecteur (ou matrice) ligne de mêmes composantes que x. Par conséquent, on a $(x \mid y) = {}^t\!yx$ pour tout couple (x, y) d'éléments de $\mathbb{R}^n$. On rappelle également que si $F \subset \mathbb{R}^n$ alors $F^\perp$ désigne l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ qui sont orthogonaux à tous les éléments de F et que si F et G sont deux s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ alors

$$F \subset G \iff G^\perp \subset F^\perp.$$

Enfin, si A est une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ alors on note encore A l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ de matrice A par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathbb{R}^m$. Ainsi $\operatorname{Ker} A$ désigne l'ensemble des vecteurs colonnes X de $\mathbb{R}^n$ tels que $AX = 0$ et $\operatorname{Im} A$ désigne l'ensemble des vecteurs colonnes Y de $\mathbb{R}^m$ tels qu'il existe $X \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $AX = Y$.

2.1 Problèmes de commandabilité

Dans les systèmes physiques pouvant être modélisés par des EDO, il est fréquent que l'expérimentateur puisse agir sur une partie de l'EDO. Considérons par exemple un train sur une voie, repéré par sa position $x(t)$ à l'instant t. Le conducteur souhaite amener le train à la gare d'arrivée (repérée par la position $x = 0$) à vitesse nulle, au temps $T > 0$. Pour cela il ne peut qu'agir sur l'accélération du train (à savoir $x''(t)$) au moyen d'une force $u(t)$. D'après le principe fondamental de la dynamique, si l'on néglige les forces de frottement, x obéit donc à l'EDO

$$x'' = u(t). \tag{2.1}$$

Un calcul simple montre que quelle que soit la position initiale x_0, la vitesse initiale v_0 et le temps de référence $T > 0$, il est possible de choisir u continue de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $x(T) = x'(T) = 0$. En effet, en intégrant deux fois (2.1), il vient

$$x'(t) = v_0 + \int_0^t u(s)\, ds \quad \text{et} \quad x(t) = x_0 + v_0 t + \int_0^t \int_0^s u(s')\, ds'\, ds.$$

Il suffit donc de choisir u de telle sorte que

$$v_0 + \int_0^T u(s)\, ds = 0 \quad \text{et} \quad x_0 + v_0 T + \int_0^T \int_0^s u(s')\, ds'\, ds = 0.$$

Par le calcul, on constate qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u : t \mapsto at + b$ vérifie les deux conditions ci-dessus.

Dans cette section, on étudie pour quels types de systèmes l'exemple ci-dessus peut s'étendre. Pour simplifier, on se limite aux EDO linéaires à coefficients constants du type

$$(S) \qquad X' = AX + Bu(t)$$

où les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ sont données.

On se pose la question suivante : étant donnés un temps $T > 0$ un état initial $X_0 \in \mathbb{R}^n$ et un état final $X_T \in \mathbb{R}^n$, est-t-il possible de trouver une fonction continue $u : [0, T] \to \mathbb{R}^m$ appelée *commande* telle que la solution de (S) avec donnée initiale X_0 vaille X_T au temps T.

Si cela est toujours possible, on dit que la paire (A, B) est *commandable en temps* T.

En fait, nous verrons plus loin que dans le cadre des EDO linéaires à coefficients constants la propriété de commandabilité ne dépend pas de T. De ce fait, on peut se limiter au cas où $X_0 = 0$ (pourquoi ?) et donner la définition suivante :

Définition. Les matrices A et B étant fixées, ainsi que $T > 0$ on dit que l'état X_T est atteignable en temps T s'il existe $u : [0, T] \to \mathbb{R}^m$ continue et telle que la solution de (S) valant 0 en $t = 0$ vaille X_T au temps $t = T$. On note alors $\mathcal{A}_T(A, B)$ l'ensemble des états atteignables en temps T.

D'après ce qui a été dit ci-dessus, la paire (A, B) est commandable en temps T si et seulement si $\mathcal{A}_T(A, B) = \mathbb{R}^n$.

Exercice : Vérifier que $\mathcal{A}_T(A, B)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Avant de donner le résultat principal de cette section, le *critère de commandabilité de Kalman*, observons que, par la formule de Duhamel, la solution Φ de (S) avec donnée initiale nulle est donnée par

$$(2.2) \qquad \forall t \in \mathbb{R},\ \Phi(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} Bu(s)\, ds.$$

Théorème (de Kalman)**.** *Soit $C \in \mathcal{M}_{n,mn}(\mathbb{R})$ la matrice par blocs définie par*

$$C = \left[B\ AB\ \cdots\ A^{n-1}B\right].$$

Alors $\mathcal{A}_T(A, B) = \operatorname{Im} C$.

Preuve : Il suffit de montrer que $\mathcal{A}_T(A, B) \subset \operatorname{Im} C$ puis que $(\mathcal{A}_T(A, B))^\perp \subset (\operatorname{Im} C)^\perp$.

Commençons par montrer que $\mathcal{A}_T(A, B) \subset \operatorname{Im} C$.

Soit donc $x \in \mathcal{A}_T(A, B)$ et u une commande amenant 0 en x en temps T. On a, grâce à (2.2), à la définition de e^{tA} et au théorème d'interversion des limites (qu'on peut appliquer car la série de fonctions considérée converge uniformément (et même normalement) sur $[0, T]$) :

$$\begin{aligned} x &= \int_0^T \left(\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=0}^{p} \frac{(T-s)^k A^k}{k!}\, Bu(s)\, ds \right), \\ &= \lim_{p\to+\infty} \sum_{k=0}^{p} \int_0^T \frac{(T-s)^k A^k}{k!}\, Bu(s)\, ds, \\ &= \lim_{p\to+\infty} \sum_{k=0}^{p} A^k B \int_0^T \frac{(T-s)^k}{k!}\, u(s)\, ds. \end{aligned}$$

Le terme général de la suite figurant à la dernière ligne appartient à $\operatorname{Im} C$.

En effet, écrivons la division euclidienne du polynôme X^k par le polynôme caractéristique χ_A de A :

$$X^k = P\chi_A + R \quad \text{avec} \quad (P, R) \quad \text{polynômes} \quad \text{et} \quad \deg R < n.$$

En substituant A à X dans la formule ci-dessus et en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, on obtient

$$A^k = P(A)\chi_A(A) + R(A) = R(A).$$

Le polynôme de matrice $R(A)$ est combinaison linéaire de $(I_n, A, \cdots, A^{n-1})$ car $\deg R < n$. Et donc pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, on a bien $A^k By \subset \operatorname{Im} C$.
Enfin, comme $\operatorname{Im} C$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie, on peut conclure que la limite de la suite ci-dessus appartient aussi à $\operatorname{Im} C$. On a donc montré que $x \in \operatorname{Im} C$, comme voulu.

Montrons maintenant que $(\mathcal{A}_T(A,B))^\perp \subset (\operatorname{Im} C)^\perp$. Soit donc $y \in (\mathcal{A}_T(A,B))^\perp$. Alors y est en particulier orthogonal à l'état obtenu à l'aide de la commande $v : t \mapsto {}^tBe^{(T-t)^tA}y$. D'après la formule (2.2), cet état vaut

$$\int_0^T e^{(T-s)A}Bv(s)\,ds = \int_0^t e^{(T-s)A}B^tBe^{(T-t)^tA}y\,ds.$$

En conséquence

$$\int_0^T \|{}^tBe^{(T-s)^tA}y\|^2\,ds = \int_0^T {}^tye^{(T-s)A}B^tBe^{(T-t)^tA}y\,ds = 0.$$

Donc la fonction $s \mapsto {}^tBe^{(T-s)^tA}y$ est identiquement nulle sur $[0,T]$.
Bien sûr, la fonction transposée : $s \mapsto {}^tye^{(T-s)A}B$ est également nulle sur $[0,T]$. En calculant ses dérivées d'ordre $0, 1\cdots, n-1$ en $s = T$, on trouve donc ${}^tyA^kB = 0$ pour $k = 0, 1\cdots, n-1$. En conséquence, $y \in \big(\operatorname{Im} C\big)^\perp$ et on a donc bien $(\mathcal{A}_T(A,B))^\perp \subset (\operatorname{Im} C)^\perp$. ∎

Remarque : Puisque $\operatorname{Im} C$ est indépendant de T, le théorème ci-dessus assure que $\mathcal{A}_T(A,B)$ et la notion de commandabilité sont indépendants de T.

Corollaire (Critère de commandabilité de Kalman)**.** *La paire (A,B) est commandable si et seulement si*

$$\operatorname{rg}\big[B\ AB\ \cdots\ A^{n-1}B\big] = n.$$

Exemple. On reprend l'exemple du train régi par $x'' = u(t)$. Cette EDO scalaire d'ordre 2 est équivalente au système d'ordre 2 suivant :

$$X' = AX + Bu(t) \quad \text{avec} \quad A \overset{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ \text{ et } \ B \overset{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de commandabilité C associée est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Elle est de rang 2, donc le critère de commandabilité de Kalman permet de retrouver que l'EDO considérée est commandable.

Dans la suite de cette section, on cherche (dans le cas (A,B) commandable) à déterminer quelle est la commande v permettant de passer de l'état 0 à l'état x en temps T et qui minimise la *fonctionnelle d'énergie* c'est-à-dire

$$\int_0^T \|u(s)\|^2\,ds$$

parmi toutes les fonctions $u : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ continues amenant l'état 0 à l'état x en temps T. Pour ce faire, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme. *Soit* D *la matrice symétrique de taille* $n \times n$ *définie par*

$$D = \int_0^T e^{(T-s)A} B {}^tB e^{(T-s){}^tA}\, ds.$$

Alors $\mathcal{A}_T(A, B) = \operatorname{Im} D$.

Preuve : Soit $y \in \mathbb{R}^n$. On constate que Dy n'est autre que l'état atteint à partir de 0 par le contrôle $t \mapsto {}^tBe^{(T-t){}^tA}y$. Donc $Dy \in \mathcal{A}_T(A, B)$. On a donc montré que $\operatorname{Im} D \subset \mathcal{A}_T(A, B)$.

Afin de montrer l'inclusion réciproque, utilisons le fait que comme D est symétrique, on a $(\operatorname{Im} D)^\perp = \operatorname{Ker} D$. En effet,

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{Ker} D &\iff \forall y \in \mathbb{R}^n,\ (Dx \mid y) = 0,\\ &\iff \forall y \in \mathbb{R}^n,\ (x \mid Dy) = 0,\\ &\iff x \in (\operatorname{Im} D)^\perp. \end{aligned}$$

En conséquence, dans notre cas, en passant au supplémentaire orthogonal montrer que $\mathcal{A}_T(A, B) \subset \operatorname{Im} D$ revient à montrer que $\operatorname{Ker} D \subset (\mathcal{A}_T(A, B))^\perp$.

Soit donc $y \in \operatorname{Ker} D$. On a

$$\int_0^T e^{(T-s)A} B {}^tB e^{(T-s){}^tA} y = 0.$$

En multipliant à gauche par ${}^ty$, il vient

$$\int_0^T \|{}^tBe^{(T-s){}^tA}y\|^2\, ds = 0.$$

On conclut comme dans la démonstration du théorème de Kalman que ${}^tyA^kB = 0$ pour $k = 0, 1, \cdots, n-1$ puis que $y \in (\operatorname{Im} C)^\perp = (\mathcal{A}_T(A, B))^\perp$. ■

Théorème. *Supposons la paire* (A, B) *commandable. Alors la matrice*

$$D \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^T e^{(T-s)A} B {}^tB e^{(T-s){}^tA}\, ds$$

est inversible et, pour tout $x_T \in \mathbb{R}^n$, *la commande*

$$v(t) \stackrel{\text{déf}}{=} {}^tBe^{(T-s){}^tA} D^{-1} x_T$$

transforme l'état nul en l'état x_T *au temps* T *et minimise l'énergie : pour toute commande* u *amenant* 0 *en* x_T *au temps* T, *et distincte de* v, *on a*

$$\int_0^T \|u(s)\|^2\, ds > \int_0^t \|v(s)\|^2\, ds.$$

Preuve : Comme (A, B) est commandable, le lemme précédent assure que $\operatorname{Im} D = \mathbb{R}^n$. Donc D est inversible.

Notons Φ la solution de (S) nulle en 0 et correspondant à la commande v. D'après la formule (2.2) et la définition de D, on a

$$\begin{aligned} \Phi(T) &= \int_0^T e^{(T-s)A} B {}^tB e^{(T-s){}^tA} D^{-1} x_T\, ds,\\ &= \Big(\int_0^T e^{(T-s)A} B {}^tB e^{(T-s){}^tA}\, ds\Big) D^{-1} x_T,\\ &= DD^{-1}x_T = x_T. \end{aligned}$$

Reste à vérifier que v minimise l'énergie. Par définition de v, on a pour tout $s \in [0, T]$:

$$\begin{aligned}\Big(v(s)\Big|\big(v(s)-u(s)\big)\Big) &= \Big({}^tBe^{(T-s)^tA}D^{-1}x_T\Big|\big(v(s)-u(s)\big)\Big),\\ &= \Big(D^{-1}x_T\Big|e^{(T-s)A}B\big(v(s)-u(s)\big)\Big).\end{aligned}$$

Donc en intégrant, il vient

$$\int_0^T \Big(v(s)\Big|\big(v(s)-u(s)\big)\Big)\,ds = \Big(D^{-1}x_T\Big|\int_0^T e^{(T-s)A}B\big(v(s)-u(s)\big)\,ds\Big).$$

D'après (2.2), l'intégrale du membre de droite est nulle car les contrôles u et v amènent tous les deux 0 en x_T en temps T. Donc

$$\int_0^T \Big(v(s)\Big|\big(v(s)-u(s)\big)\Big)\,ds = 0.$$

Comme la norme considérée est euclidienne, on a

$$\int_0^T \|u(s)\|^2\,ds = \int_0^T \|v(s)\|^2 + \int_0^T \|u(s)-v(s)\|^2\,ds + 2\int_0^T \Big(v(s) \mid u(s)-v(s)\Big)\,ds.$$

On vient d'établir que le dernier terme était nul. Il est donc clair que

$$\int_0^T \|u(s)\|^2\,ds \geq \int_0^T \|v(s)\|^2\,ds$$

avec égalité si et seulement si $u = v$. ■

Exercice : Reprendre l'exemple du train et déterminer la commande d'énergie minimale.

2.2 Stabilisation par retour d'état

Dans cette partie, on s'intéresse aux contrôles dépendant linéairement de la solution X. Plus précisément, on suppose que $u = KX$ où $K \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. De tels contrôles sont appelés *retours d'état* (en anglais *feedbacks*).

On cherche à déterminer s'il existe une matrice $K \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ telle que toute solution de

$$X' = AX + B(KX)$$

soit asymptotiquement stable, c'est-à-dire tende vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

Une paire (A, B) vérifiant cette propriété est dite *stabilisable.*

Le résultat principal de cette section est le suivant :

Théorème 1. *Toute paire commandable est stabilisable.*

Ce théorème repose sur le résultat suivant que nous admettons provisoirement :

Théorème (de placement des pôles)**.** *Soit (A, B) une paire commandable. Alors pour tout polynôme F de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n$, il existe $K \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ tel que F soit égal au polynôme caractéristique de $A + BK$.*

Démonstration du théorème 1 : Si l'on suppose (A, B) commandable, le théorème de placement des pôles assure l'existence d'une matrice K telle que, par exemple,

$$\chi_{A+BK} = (-1)^n (X+1)^n.$$

Ce polynôme a pour unique valeur propre -1 (avec multiplicité n). Les résultats de la section 1.7 permettent donc d'affirmer que toutes les solutions de $X' = AX + B(KX)$ sont asymptotiquement stables. Donc (A, B) est stabilisable. ■

Démonstration du théorème de placement des pôles : Nous nous limiterons au cas $m = 1$ ce qui permet d'identifier la matrice colonne B au vecteur $(b_1, \cdots, b_n)$. Soit C la matrice de commandabilité associée à la paire (A, B). On remarque que $\operatorname{Im} C = \operatorname{Vect}(b, \cdots, A^{n-1}b)$. Comme (A, B) est commandable par hypothèse, on a donc

$$\operatorname{Im} C = \operatorname{Vect}(b, \cdots, A^{n-1}b) = \mathbb{R}^n. \tag{2.3}$$

On en déduit en particulier que $A^n b$ est combinaison linéaire de $(b, \cdots, A^{n-1}b)$. Autrement dit, il existe $(a_0, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$A^n b = a_0 b + \cdots + a_{n-1} A^{n-1} b.$$

On pose $f_n = b$ et l'on définit $(f_{n-1}, \cdots, f_1)$ par la relation de récurrence $f_j = Af_{j+1} - a_j f_n$ pour $1 \leq j \leq n-1$.
Par définition de f_{n-1}, on a

$$\operatorname{Vect}(f_n, f_{n-1}) = \operatorname{Vect}(f_n, Af_n - a_{n-1}f_n) = \operatorname{Vect}(f_n, Af_n).$$

Ensuite par définition de f_{n-2}, et le calcul qui précède,

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Vect}(f_n, f_{n-1}, f_{n-2}) & = & \operatorname{Vect}(f_n, Af_n, Af_{n-1} - a_{n-2}f_n), \\ & = & \operatorname{Vect}(f_n, Af_n, A^2 f_n - a_{n-1}Af_n), \\ & = & \operatorname{Vect}(f_n, Af_n, A^2 f_n). \end{array}$$

Une récurrence descendante élémentaire permet de démontrer que

$$\operatorname{Vect}(f_n, \cdots, f_1) = \operatorname{Vect}(f_n, \cdots, A^{n-1}f_n)$$

Puisque $f_n = b$, la propriété (2.3) assure que la famille $(f_1, \cdots, f_n)$ est génératrice. Comme elle comporte n éléments, c'est une base de $\mathbb{R}^n$ et la matrice P de colonnes $f_1, \cdots, f_n$ est inversible.
Soit $\widetilde{B} = P^{-1}B$ et u l'endomorphisme de matrice A par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit $\widetilde{A}$ la matrice de u par rapport à la base $(f_1, \cdots, f_n)$. En reprenant la définition de $(f_1, \cdots, f_n)$, on constate que $u(f_{j+1}) = f_j + a_j f_n$ pour $j = 1, \cdots, n-1$ et que $u(f_1) = A^n f_n - a_{n-1}A^{n-1}f_n - \cdots - a_1 A f_n = a_0 f_n$. En conséquence,

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \widetilde{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $F = (-1)^n (X^n - p_{n-1}X^{n-1} - \cdots - p_0)$ le polynôme donné dans l'énoncé. Pour toute matrice ligne $\widetilde{K} = (k_1 \cdots k_n)$, on a

$$\widetilde{A} + \widetilde{B}\widetilde{K} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 + k_1 & a_1 + k_2 & \cdots & a_{n-2} + k_{n-1} & a_{n-1} + k_n \end{pmatrix}.$$

On reconnaît ci-dessus une matrice de Frobenius. Un calcul classique montre que le polynôme caractéristique de $\widetilde{A}+\widetilde{B}\widetilde{K}$ est

$$(-1)^n\big(X^n-(a_{n-1}+k_n)X^{n-1}-\cdots-(a_0+k_1)\big).$$

Si l'on choisit $k_j=p_{j-1}-a_{j-1}$ pour $j=1,\cdots,n$, le polynôme caractéristique obtenu est donc égal à F.
Choisissons $\widetilde{K}$ comme ci-dessus, et posons $K=\widetilde{K}P^{-1}$. Vu que P est la matrice de changement de base entre la base canonique et $(f_1,\cdots,f_n)$, on a $\widetilde{A}=P^{-1}AP$, et donc

$$A+BK=P(\widetilde{A}+\widetilde{B}\widetilde{K})P^{-1}.$$

Donc F est aussi le polynôme caractéristique de $A+BK$. ■

2.3 Problèmes d'observabilité

En pratique, lorsque l'on étudie un problème modélisé par une EDO de type

$$(S)\qquad X'=AX$$

il n'est pas toujours possible de connaître toute la fonction X en tout temps, mais seulement *une partie* de cette fonction (certaines de ses composantes par exemple). Typiquement, l'observateur n'aura accès qu'à une mesure $Y\in\mathbb{R}^p$ de $X\in\mathbb{R}^n$ de type

$$Y=CX\quad\text{avec}\quad C\in\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}).$$

Connaissant $Y(t)$ pour tout temps $t\in[0,T]$ est-il néanmoins possible de déterminer $X(0)$ de façon univoque ? C'est ce que l'on appelle le problème de *l'observabilité*.

Si la réponse à cette question est toujours affirmative, on dit que la paire (A,C) est *observable*. Plus généralement, on définit l'*espace d'inobservabilité* $\mathcal{I}(A,C)$ de la paire (A,C) comme étant l'ensemble des données initiales $X(0)$ pour lesquelles la fonction Y est nulle sur $[0,T]$. Clairement, si $V\in\mathcal{I}(A,C)$ alors les fonctions Y_1 et Y_2 correspondant aux données initiales $X(0)$ et $X(0)+V$ seront égales.

Proposition. *La paire (A,C) est observable si et seulement si $\mathcal{I}(A,C)=\{0\}$.*

Preuve : Supposons (A,C) observable. Soit X une solution de (S) avec donnée initiale $X_0\in\mathbb{R}^n$ telle que CX soit nulle sur $[0,T]$. Clairement, la solution nulle de (S) vérifie cette dernière propriété. Comme (A,C) est observable, on peut donc en conclure que l'on doit avoir $X_0=0$. Donc $\mathcal{I}(A,C)=\{0\}$.

Réciproquement, supposons que $\mathcal{I}(A,C)=\{0\}$ et considérons deux données initiales $X(0)$ et $\widetilde{X}(0)$ (correspondant aux solutions X et $\widetilde{X}$ de (S)) telles que $C\widetilde{X}=CX$ sur $[0,T]$. Alors la fonction $C(\widetilde{X}-X)$ associée à la solution $\widetilde{X}-X$ de (S) est nulle. Comme $\mathcal{I}(A,C)$ est réduit à $\{0\}$, cela signifie que $\widetilde{X}(0)-X(0)=0$. Donc la paire (A,C) est observable. ■

Théorème. *L'espace d'inobservabilité de la paire (A,C) est égal au noyau de la matrice (par blocs) de taille $pn\times n$ suivante :*

$$\mathcal{O}\overset{\text{déf}}{=}\begin{pmatrix}C\\CA\\\vdots\\CA^{n-1}\end{pmatrix}.$$

Preuve : Commençons par remarquer que

$$X_0 \in \operatorname{Ker} \mathcal{O} \iff CX_0 = CAX_0 = \cdots = CA^{n-1}X_0 = 0.$$

Montrons que $\operatorname{Ker} \mathcal{O} \subset \mathcal{I}(A, C)$. Soit X_0 appartenant au noyau de la matrice $\mathcal{O}$. Rappelons que $X : t \mapsto e^{tA}X_0$ est la solution de (S) avec donnée initiale X_0. Nous avons déjà vu lors de la démonstration du théorème de Kalman, que e^{tA} était combinaison linéaire de $(I_n, A, \cdots, A^{n-1})$. En conséquence,

$$Ce^{tA}X_0 \in \operatorname{Vect}(CX_0, CAX_0, \cdots, CA^{n-1}X_0).$$

Tous les vecteurs du membre de droite sont nuls car $X_0 \in \operatorname{Ker} \mathcal{O}$. En conséquence, la fonction $Y \stackrel{\text{déf}}{=} CX$ est nulle pour tout temps et donc $X_0 \in \mathcal{I}(A, B)$.
Réciproquement, supposons que $X_0 \in \mathcal{I}(A, C)$. Alors

$$Ce^{tA}X_0 = 0 \quad \text{pour tout} \quad t \in [0, T].$$

La dérivée k-ième du membre de gauche en $t = 0$ vaut CA^kX_0. En conséquence, on peut affirmer que $CA^kX_0 = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Cela entraîne que $X_0 \in \operatorname{Ker} \mathcal{O}$. ■

En combinant ce résultat avec le théorème du rang, on en déduit le critère d'observabilité de Kalman :

Corollaire (Critère d'observabilité de Kalman). *La paire (A, C) est observable si et seulement si la matrice $\mathcal{O}$ est de rang n.*

Remarque 1. La paire (A, C) est observable si et seulement si la paire $({}^tA, {}^tC)$ est commandable.

Remarque 2. Le problème de l'observabilité est aussi pertinent pour les systèmes linéaires du type

$$X' = AX + Bu(t) \quad \text{avec} \quad B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$$

où la commande $u : [0, T] \to \mathbb{R}^m$ est connue, lorsque la quantité observée est

$$Y = CX + Du(t) \quad \text{avec} \quad D \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{R}).$$

On constate alors que si la paire (A, C) est observable alors la connaissance de Y sur $[0, T]$ permet de déterminer $X(0)$ de façon univoque.

En effet, la commande u et la matrice D étant connues, la connaissance de Y sur $[0, T]$ implique aussi celle de la fonction CX. Comme (A, C) est observable, cela permet d'en déduire la valeur de la solution de $X' = AX + Bu(t)$ à l'instant initial, donc $X(0)$.

Chapitre 3

Équations différentielles non linéaires

3.1 Le théorème de Cauchy-Lipschitz

Dans cette section, on cherche à résoudre les équations différentielles du type

$$(S) \qquad X' = F(t, X)$$

où F est une fonction continue définie sur $I \times \Omega$ (avec I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{K}^n$) et à valeurs dans $\mathbb{K}^n$.

Comme dans le cas linéaire, on s'intéresse au *problème de Cauchy* : étant donnés $t_0 \in I$ et $x_0 \in I$, existe-t-il une solution de (S) définie au voisinage de t_0 et prenant la valeur x_0 en t_0, et cette solution est-elle unique ?

Dans tout ce qui suit, $\|\cdot\|$ désigne une norme sur $\mathbb{K}^n$. Le résultat suivant qui est une généralisation naturelle du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire donne une première réponse à cette question.

Théorème (de Cauchy-Lipschitz). *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{K}^n$ et I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On suppose que*
- *F est continue de $I \times \Omega$ dans $\mathbb{K}^n$;*
- *il existe une fonction L intégrable sur tout sous-intervalle fermé borné de I telle que*

$$\forall t \in I,\ \forall (x, y) \in \Omega^2\,,\ \|F(t, x) - F(t, y)\| \leq L(t)\|x - y\|.$$

Alors pour tout point (t_0, x_0) de $I \times \Omega$, il existe un intervalle ouvert $J \subset I$ contenant t_0 et une fonction $\phi : J \to \Omega$ de classe C^1 vérifiant (S) sur J et telle que $\phi(t_0) = x_0$.

Cette solution est unique au sens suivant : s'il existe une autre fonction ψ de classe C^1 sur un sous-intervalle J' de I contenant t_0, vérifiant (S) sur J' et telle que $\psi(t_0) = x_0$ alors $\psi \equiv \phi$ sur $J \cap J'$.

Preuve : Vu les hypothèses sur F il est équivalent de montrer qu'il existe une unique fonction ϕ continue sur un intervalle J contenant t_0 et telle que

$$(3.1) \qquad \phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(t', \phi(t'))\, dt' \quad \text{pour tout } \ t \in J.$$

Soit $r_0 > 0$ tel que la boule fermée $\overline{B}(x_0, r_0)$ de centre x_0 et de rayon r_0 soit incluse dans Ω et J, un intervalle ouvert contenant t_0. On choisit J de longueur suffisamment petite pour que

$$\int_J \|F(t, x_0)\|\, dt \leq \frac{r_0}{2} \quad \text{et} \quad \int_J L(t)\, dt \leq \frac{1}{2}.$$

On considère une fonction $\phi \in \mathcal{C}(J; \overline{B}(x_0, r_0))$. Alors

$$\psi : \begin{cases} J & \rightarrow & E \\ t & \mapsto & x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} F(t', \phi(t'))\, dt' \end{cases}$$

est une fonction continue sur J *et à valeurs dans* $\overline{B}(x_0, r_0)$. En effet, pour tout $t \in J$, on a

$$\begin{aligned} \|\psi(t) - x_0\| &\leq \int_J \|F(t, \phi(t))\|\, dt \\ &\leq \int_J \|F(t, \phi(t)) - F(t, x_0)\|\, dt + \int_J \|F(t, x_0)\|\, dt \\ &\leq r_0 \int_J L(t)\, dt + \int_J \|F(t, x_0)\|\, dt \\ &\leq r_0. \end{aligned}$$

Il en résulte que l'on peut définir la suite $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{C}(J; \overline{B}(x_0, r_0))$ par

$$\phi_0(t) \equiv x_0 \quad \text{et} \quad \phi_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(t', \phi_n(t'))\, dt'. \tag{3.2}$$

Démontrons que la suite $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathcal{C}(J; \overline{B}(x_0, r_0))$. Pour cela, on écrit que si

$$\rho_n \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{t \in J,\, p \in \mathbb{N}} \|\phi_{n+p}(t) - \phi_n(t)\|,$$

alors on a

$$\begin{aligned} \rho_{n+1} &\leq \sup_{p \in \mathbb{N}} \int_J \|F(t, \phi_{n+p}(t)) - F(t, \phi_n(t))\|\, dt \\ &\leq \sup_{p \in \mathbb{N}} \int_J L(t) \|\phi_{n+p}(t) - \phi_n(t)\|\, dt \\ &\leq \rho_n \int_J L(t)\, dt \\ &\leq \frac{1}{2} \rho_n. \end{aligned}$$

En conséquence la suite $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0. La suite $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc de Cauchy dans l'espace complet $\mathcal{C}(J; \overline{B}(x_0, r_0))$. Elle converge donc uniformément vers une fonction ϕ qui appartient aussi à $\mathcal{C}(J; \overline{B}(r_0, x_0))$. Par passage à la limite dans (3.2), on trouve que ϕ est solution de (3.1).

Reste à prouver l'unicité. Considérons donc deux solutions ϕ et ψ de (3.1) définies sur deux intervalles ouverts J et J' et telles que $\phi(t_0) = \psi(t_0)$. On a pour tout $(t, t_1) \in (J \cap J')^2$,

$$\psi(t) - \phi(t) = \int_{t_1}^{t} \big(F(\tau, \psi(\tau)) - F(\tau, \phi(\tau))\big)\, d\tau. \tag{3.3}$$

Si $\int_{J \cap J'} L(t) < 1$, une adaptation immédiate de la preuve de la convergence de la suite $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ permet d'obtenir $\psi \equiv \phi$ sur $J \cap J'$, mais on peut en fait fort bien se passer de cette condition sur J. En effet, soit $K = \big\{t \in J \cap J' \,|\, \phi(t) = \psi(t) \ \text{ sur } [t_0, t] \cup [t, t_0]\big\}$. L'ensemble K est un sous-intervalle de $J \cap J'$ par construction. Cet intervalle n'est pas vide car contient t_0. Soit t_+ la borne supérieure de K. Supposons par l'absurde que $t_+ < \sup J \cap J'$. Alors $\phi - \psi \equiv 0$ sur $[t_0, t_+[$ et donc sur $[t_0, t_+]$ aussi par continuité de $\phi - \psi$. Donc $t_+ \in K$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que

$$]t_+ - \varepsilon, t_+ + \varepsilon[\subset J \cap J' \quad \text{et} \quad \int_{t_+-\varepsilon}^{t_++\varepsilon} L(t)\,dt \leq \frac{1}{2}.$$

De (3.3), on tire

$$\sup_{|t-t_+|<\varepsilon} \|\psi(t) - \phi(t)\| \leq \frac{1}{2} \sup_{|t-t_+|<\varepsilon} \|\psi(t) - \phi(t)\|.$$

Donc $]t_+ - \varepsilon, t_+ + \varepsilon[\subset K$. Cela contredit la définition de t_+. Donc $t_+ = \sup J \cap J'$. Un raisonnement analogue est valable pour la borne inférieure. Donc $K = J \cap J'$. Autrement dit $\psi \equiv \phi$ sur $J \cap J'$. ∎

Remarque 1. La deuxième hypothèse du théorème de Cauchy-Lipschitz –le caractère lipschitzien par rapport à la variable d'espace– est vérifiée dès que F est différentiable par rapport à x, à différentielle bornée. C'est une conséquence immédiate de l'inégalité des accroissements finis (voir par exemple [3]).

Insistons également sur le fait que le théorème de Cauchy-Lipschitz est à la fois local en temps et en espace. C'est-à-dire qu'il suffit en fait d'exiger que l'hypothèse Lipschitz soit vérifiée au voisinage de tout point de Ω pour une fonction L pouvant dépendre du point et du voisinage considérés.

Remarque 2. Par la transformation habituelle, du théorème de Cauchy-Lipschitz pour les systèmes différentiels on déduit un théorème analogue pour les équations différentielles scalaires d'ordre n du type

$$(E) \qquad x^{(n)} = f(t, x, x', \cdots, x^{(n-1)}).$$

La fonction $f : I \times \Omega \to \mathbb{K}$ doit être continue et vérifier

$$|f(t, y_0, \cdots, y_{n-1}) - f(t, x_0, \cdots, x_{n-1})| \leq L(t) \max_{0 \leq i \leq n-1} |y_i - x_i|$$

pour une fonction L localement intégrable sur I.

On prendra garde au fait que pour résoudre le problème de Cauchy associé à (E) il faut imposer en t_0 la valeur de la fonction *et de ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à* $n-1$.

Remarque 3. Si l'on exige simplement que la fonction F soit continue, alors on a encore existence d'une solution pour le problème de Cauchy (c'est le théorème d'Arzela-Peano voir par exemple [5]) mais on peut perdre l'unicité. Pour s'en convaincre on cherchera à résoudre l'équation différentielle $x' = 2\sqrt{|x|}$.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz ne fournit l'existence d'une solution que sur un sous-intervalle de I contenant t_0 suffisamment petit. On peut se demander s'il n'est pas possible de prolonger cette solution sur un intervalle de temps *plus grand* (pour les EDO linéaires on pouvait toujours prendre $J = I$). Le lemme ci-dessous nous aidera à répondre à cette question.

Lemme (de recollement)**.** *Soit F vérifiant les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz et $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$. Soit ϕ_1 et ϕ_2 deux solutions de (S) définies sur des sous-intervalles I_1 et I_2 de I contenant t_0. Alors $\phi_1 \equiv \phi_2$ sur $I_1 \cap I_2$ et la fonction ϕ définie sur $I_1 \cup I_2$ par*

$$\phi(t) = \begin{cases} \phi_1(t) & si \quad t \in I_1, \\ \phi_2(t) & si \quad t \in I_2, \end{cases}$$

vérifie $\phi(t_0) = x_0$ et (S) sur $I_1 \cup I_2$.

Preuve : Le fait que ϕ_1 et ϕ_2 coïncident sur $I_1 \cap I_2$ est donné par le théorème de Cauchy-Lipschitz. Cela assure que la définition de ϕ est licite. Le reste est alors immédiat. ■

Définition. On dit que la solution ϕ du problème de Cauchy

$$(C) \qquad \begin{cases} X' = F(t, X), \\ X_{|t=t_0} = x_0 \end{cases}$$

est *maximale* si on ne peut pas la prolonger en une solution de (C) définie sur un intervalle strictement plus grand.

Théorème. *Sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, pour tout* $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$ *le problème de Cauchy* (C) *admet une unique solution maximale. De plus, l'intervalle de définition de cette solution est ouvert.*

Preuve : <u>Existence</u> : on considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des solutions de (C) et, pour ϕ dans $\mathcal{E}$, on note J_ϕ l'intervalle de définition de ϕ. On définit alors la fonction ψ sur l'intervalle ouvert $J := \bigcup_{\phi \in \mathcal{E}} J_\phi$ par

$$\psi(x) = \phi(x) \quad \text{si} \quad x \in J_\phi.$$

Cette définition est licite en vertu de la partie unicité du théorème de Cauchy-Lipschitz, et la fonction ψ ainsi construite est clairement un prolongement de toutes les fonctions ϕ considérées.

<u>Unicité</u> : si ϕ_1 et ϕ_2 sont deux solutions maximales alors leurs intervalles de définition sont les mêmes sinon le lemme de recollement permettrait de construire un prolongement sur l'intervalle (plus grand) $I_1 \cup I_2$.

<u>Intervalle de définition ouvert</u> : Si tel n'est pas le cas alors cet intervalle J contient (par exemple) sa borne supérieure t^*. En particulier $(t^*, \phi(t^*)) \in I \times \Omega$ et l'on peut donc résoudre (S) avec donnée $\phi(t^*)$ en t^*. La solution maximale ψ ainsi obtenue coïncide avec ϕ en t^* donc est égale à ϕ. Son intervalle de définition est donc J. Mais ψ est définie au-delà de t^* en vertu du théorème de Cauchy-Lipschitz. Donc $t^* < \sup J$, ce qui est contraire à nos hypothèses. ■

3.2 Quelques propriétés qualitatives des solutions

3.2.1 Critères d'existence globale

Le théorème de Cauchy-Lipschitz donne l'existence et l'unicité pour les équations différentielles ordinaires. C'est un théorème *local* dans la mesure où il ne donne l'existence d'une solution que sur un sous-intervalle de I. Dans le cas d'une équation différentielle *linéaire*, nous avons vu qu'il y avait existence globale, c'est-à-dire que les solutions maximales étaient toujours définies sur I tout entier. Dans le cas général, cela n'est pas forcément le cas, *même si la fonction* F *est très régulière et définie sur* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *tout entier.* Le lecteur pourra s'en persuader en cherchant à résoudre l'équation différentielle

$$x' = x^2.$$

Ci-dessous, nous donnons une condition nécessaire pour qu'une solution maximale ne soit pas définie sur l'intervalle I tout entier. Pour simplifier la présentation, on suppose que F est définie sur $I \times \mathbb{R}^n$ (i.e. $\Omega = \mathbb{R}^n$) avec I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Proposition. *Soit F une fonction de $I\times\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ satisfaisant les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz au voisinage de tout point de $I\times\mathbb{R}^n$. Soit ϕ une solution maximale de (S) et $]T_\star,T^\star[$ son intervalle de définition. Alors*

$$T_\star > \inf I \Longrightarrow \limsup_{t\overset{>}{\to}T_\star}\|\phi(t)\| = \infty \quad \textit{et} \quad T^\star < \sup I \Longrightarrow \limsup_{t\overset{<}{\to}T^\star}\|\phi(t)\| = \infty.$$

Preuve : On montre juste le résultat pour la borne supérieure. Soit $t_0\in I$. Supposons que ϕ soit bornée sur $[t_0,T^*[$ et que (par l'absurde) $T^*<\sup I$. L'ensemble $A:=\{\phi(t)\,/\,t\in[t_0,T^*[\}$ est un borné de $\mathbb{R}^n$. Comme F est continue sur le compact $[t_0,T^*]\times\overline{A}$, on en déduit que qu'il existe $M\in\mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall t\in[t_0,T^*[,\ \|F(t,\phi(t))\|\leq M.$$

En conséquence, pour tout $(t,t')\in[t_0,T^*[^2$, on a d'après l'inégalité des accroissements finis

$$\|\phi(t)-\phi(t')\|\leq M|t-t'|.$$

Donc ϕ vérifie le critère de Cauchy en T^*. L'espace $\mathbb{R}^n$ étant complet, il existe donc $x_{T^*}\in\mathbb{R}^n$ tel que

$$\lim_{t\overset{<}{\to}T^*}\phi(t)=x_{T^*}.$$

Comme par ailleurs

$$\phi'(t)=F(t,\phi(t)) \quad \text{pour tout} \quad t\in[t_0,T^*[,$$

on en déduit que $\phi'(t)$ admet pour limite $F(T^*,x_{T^*})$ en T^*. En conséquence, la fonction ϕ se prolonge par continuité en T^*, le prolongement est dérivable jusqu'en T^* et l'équation différentielle (S) est vérifiée en $t=T^*$. Comme ϕ est une solution maximale, on conclut que T^* est dans l'intervalle de définition de ϕ. Mais on a vu que cet intervalle était ouvert, donc il ne peut pas contenir sa borne supérieure T^*, d'où la contradiction. ■

Corollaire 1. *Sous les hypothèses de la proposition précédente, si l'on a de plus*

$$\forall t\in I,\ \forall x\in\mathbb{R}^n,\ \|F(t,x)\|\leq M\|x\|^2,$$

alors si l'intervalle maximal de définition est $]T_\star,T^\star[$ et $t_0\in]T_\star,T^\star[$, on a

$$T_\star>\inf I\Longrightarrow\int_{T_\star}^{t_0}\|\phi(t)\|\,dt=+\infty \quad \textit{et} \quad T^\star<\sup I\Longrightarrow\int_{t_0}^{T^\star}\|\phi(t)\|\,dt=+\infty.$$

Preuve : La solution ϕ vérifie pour tout $t\in[t_0,T^\star[$,

$$\phi(t)=\phi(t_0)+\int_{t_0}^{t}F(t',\phi(t'))\,dt'.$$

Donc, vu l'hypothèse sur F, on a

$$\|\phi(t)\|\leq\|\phi(t_0)\|+M\int_{t_0}^{t}\|\phi(t')\|^2\,dt'.$$

Le lemme de Gronwall implique que

$$\|\phi(t)\|\leq\|\phi(t_0)\|\exp\Big(M\int_{t_0}^{t}\|\phi(t')\|\,dt'\Big).$$

Donc, tant que l'intégrale ci-dessus est finie, la fonction ϕ reste bornée, et la proposition précédente permet donc de conclure au résultat voulu. ■

Le corollaire suivant permet de retrouver que pour les équations linéaires, l'intervalle de définition des solutions maximales est toujours égal à I.

Corollaire 2. *Sous les hypothèses de la proposition précédente, s'il existe deux fonctions α et β localement intégrables de I dans $\mathbb{R}^+$ et telle que*

$$\|F(t,x)\| \le \alpha(t) + \beta(t)\|x\| \quad \textit{pour tout} \quad (t,x) \in I \times \mathbb{R}^n$$

alors toutes les solutions maximales sont définies sur I.

Preuve : Soit ϕ une solution maximale et J son intervalle ouvert de définition. En utilisant le fait que

$$\phi(t) = \phi(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(t', \phi(t'))\, dt',$$

les hypothèses sur F puis le lemme de Gronwall, il vient pour tout $t \in J$:

$$\|\phi(t)\| \le \left(\|\phi(t_0)\| + \left|\int_{t_0}^{t} \alpha(t')\, dt'\right|\right) \exp\left(\left|\int_{t_0}^{t} \beta(t')\, dt'\right|\right).$$

Donc, si $\sup J < \sup I$ alors ϕ est bornée sur $[t_0, \sup J[$. De même, si $\inf J > \inf I$ alors ϕ est bornée sur $]\inf J, t_0]$. La proposition ci-dessus permet donc de conclure que $\inf J = \inf I$ et que $\sup J = \sup I$. ■

Dans le cas général où F n'est définie que sur $I \times \Omega$ avec Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, on dispose du résultat suivant (démontré dans [1] par exemple).

Proposition. *Soit F vérifiant les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz et ϕ une solution maximale de (S). Notons $I =]a, b[$ et $J =]T_*, T^*[$ l'intervalle ouvert de définition de ϕ. Alors*

- *ou bien $T^* = b$,*
- *ou bien $\phi(t)$ sort de tout compact de Ω quand $t \to T^*$.*

Résultat analogue pour T_*.

3.2.2 Dépendance par rapport aux paramètres et conditions initiales

Dans les applications, on ne connaît pas toujours exactement la valeur des données (t_0, x_0) ni même de la fonction F. Il est donc important de savoir dans quelle mesure une petite erreur sur ces quantités influera sur la valeur de la solution donnée par le théorème de Cauchy-Lipschitz. Cela nous amène naturellement à étudier le problème de la *dépendance par rapport aux paramètres et aux conditions initiales.*

Lemme. *Soit F vérifiant les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, J un sous-intervalle fermé borné de I et K un compact inclus dans Ω. Il existe un réel positif M tel que si $(t_0, t_1) \in J^2$, si ϕ_0, ϕ_1 sont deux solutions de (S) définies sur J à valeurs dans K et si $\phi_0(t_0) = x_0$ et $\phi_1(t_1) = x_1$ alors*

$$\forall t \in J^2,\ \|\phi_1(t) - \phi_0(t)\| \le \Big(M|t_1 - t_0| + \|x_1 - x_0\|\Big) \exp\left|\int_{t_0}^{t} L(t')\, dt'\right|.$$

Preuve : En utilisant la version intégrale de (S), on voit que pour tout $t \in J$,

$$\phi_1(t) - \phi_0(t) = x_1 - x_0 + \int_{t_0}^{t} \Big(F(t', \phi_1(t')) - F(t', \phi_0(t'))\Big)\, dt' + \int_{t_1}^{t_0} F(t', \phi_1(t'))\, dt'.$$

Comme $J \times K$ est un compact de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et comme F est continue, on en déduit qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall (t,x) \in J \times K,\ \|F(t,x)\| \le M.$$

En particulier, comme ϕ_1 et à valeurs dans K, on a donc

$$\forall t' \in J,\ \|F(t', \phi_1(t'))\| \leq M.$$

Le résultat voulu découle alors directement du lemme de Gronwall. ■

Nous pouvons maintenant énoncer un résultat général de dépendance par rapport à un paramètre et aux conditions initiales. Le cadre est le suivant : on se donne une fonction $F : I \times \Omega \times \Omega' \to \mathbb{R}^n$ continue avec I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$ et Ω' ouvert de $\mathbb{R}^p$ telle qu'il existe une fonction L intégrable sur tout sous-intervalle fermé borné de I vérifiant

$$\forall t \in I,\ \forall (x,y) \in \Omega^2,\ \forall \lambda \in \Omega',\ \|F(t,x,\lambda) - F(t,y,\lambda)\| \leq L(t)\|x-y\|$$

et on s'intéresse à la résolution de la famille d'EDO

$$(S_\lambda) \qquad X' = F_\lambda(t, X)$$

avec $F_\lambda(t,X) := F(t,X,\lambda)$ et $\lambda \in \Omega'$.

Théorème. *Soit $(t_0, x_0, \lambda_0) \in I \times \Omega \times \Omega'$. Il existe un intervalle ouvert J contenant t_0, un voisinage U de x_0 et un voisinage U' de λ_0 tels que pour tout $(t_1, x_1, \lambda_1) \in J \times U \times U'$ l'équation (S_{λ_1}) admette une unique solution ϕ_{t_1,x_1,λ_1} définie et C^1 sur J et telle que $\phi_{t_1,x_1,\lambda_1}(t_1) = x_1$.*

De plus l'application $(t_1, x_1, \lambda_1) \mapsto \phi_{t_1,x_1,\lambda_1}$ est continue de $J \times U \times U'$ dans $\mathcal{C}(J; \mathbb{R}^n)$.

Preuve : Notons que l'on peut se ramener au cas sans paramètre grâce à l'artifice suivant : pour $(t, X, \lambda) \in I \times \Omega \times \Omega'$, on pose

$$G(t, (X, \lambda)) = \begin{pmatrix} F(t, X, \lambda) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En effet : ϕ est solution de (S_λ) si et seulement si $\psi := (\phi, \lambda)$ vérifie

$$Y' = G(t, Y).$$

La nouvelle fonction G vérifie bien les hypothèses de l'énoncé avec $\mathbb{R}^n$ remplacé par $\mathbb{R}^{n+p}$ et Ω remplacé par $\Omega \times \Omega'$.

Supposons donc désormais que F ne dépende pas de λ. Soit r_0 tel que $\overline{B}(x_0, r_0) \subset \Omega$. En utilisant la continuité de F par rapport à x, on voit que l'on peut choisir un intervalle ouvert J contenant t_0 tel que

$$\int_J L(t')\, dt' \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \int_J \|F(t, x_0)\| \leq \frac{r_0}{4}.$$

Pour $\phi \in \mathcal{C}(J; \overline{B}(x_0, r_0))$, on constate alors que la fonction ψ définie par

$$\psi(t) = x_1 + \int_{t_1}^t F(\tau, \phi(\tau))\, d\tau$$

est dans $\mathcal{C}(J; \overline{B}(x_0, r_0))$.

Cela découle d'une majoration facile dans la décomposition

$$\psi(t) - x_0 = x_1 - x_0 + \int_{t_1}^t \big(F(\tau, \phi(\tau)) - F(\tau, x_0)\big)\, d\tau + \int_{t_1}^t F(\tau, x_0)\, d\tau.$$

En reprenant mot pour mot la démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz il est alors facile de conclure que pour tout $x_1 \in \overline{B}(x_0, r_0/4)$ et $t_1 \in J$, le système (S) a une solution ϕ_{t_1,x_1} définie sur J à valeurs dans $\overline{B}(x_0, r_0)$ et vérifiant $\phi_{t_1,x_1}(t_1) = x_1$. La continuité par rapport à (t_1, x_1) est alors une conséquence immédiate du lemme précédent. ■

3.2.3 Le flot

Définition. Soit $F : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ vérifiant les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz. L'application définie sur $I \times \Omega$ et qui à (t_0, x_0) associe la solution maximale ϕ_{t_0,x_0} de (S) prenant la valeur x_0 en t_0 est appelé *flot* associé à F.

Notation. Il sera parfois commode de considérer le flot comme une fonction de *trois variables* plutôt que comme une famille de fonctions dépendant des paramètres t_0 et x_0. On notera alors

$$\phi(t, t_0, x_0) := \phi_{t_0,x_0}(t).$$

Proposition. *Pour tout* $(t, t_0, t_1, x_0) \in I^3 \times \Omega$, *les expressions* $\phi(t, t_0, x_0)$ *et* $\phi(t, t_1, \phi(t_1, t_0, x_0))$ *sont définies simultanément, et l'on a*

$$\phi(t, t_1, \phi(t_1, t_0, x_0)) = \phi(t, t_0, x_0).$$

Preuve : C'est une conséquence immédiate de la définition du flot et de la partie unicité du théorème de Cauchy-Lipschitz. En effet, les deux fonctions coïncident en t_1 et vérifient la même EDO. ∎

Remarque. En particulier, la proposition ci-dessus assure que

$$\phi(t_0, t_1, \phi(t_1, t_0, x_0)) = x_0.$$

En conséquence, il existe un voisinage de x_0 tel que l'application $x \mapsto \phi(t_1, t_0, x)$ soit bijective. Le théorème d'inversion globale et le théorème ci-dessous assurent en fait que cette application est un difféomorphisme. Pour le montrer nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme. *Soit* $F : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ *vérifiant les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz et* ϕ *une solution de* (S) *sur un sous-intervalle* J *de* I. *Soit* $\varepsilon > 0$ *et* $\phi_\varepsilon : J \to \mathbb{R}^n$ *une fonction* C^1, *solution approchée de* ϕ *au sens suivant :*

- *il existe* $t_0 \in J$ *tel que* $\phi_\varepsilon(t_0) = \phi(t_0)$,
- *pour tout* $t \in J$, *on a* $\|\phi'_\varepsilon(t) - F(t, \phi_\varepsilon(t))\| \le \varepsilon$.

Alors on a

$$\forall t \in J,\ \|\phi_\varepsilon(t) - \phi(t)\| \le \varepsilon |t - t_0| e^{\left|\int_{t_0}^t L(\tau)\, d\tau\right|}.$$

Preuve : Il suffit de remarquer que pour tout $t \in J$, on a

$$\phi_\varepsilon(t) - \phi(t) = \int_{t_0}^t \Big(\phi'_\varepsilon(\tau) - F(\tau, \phi_\varepsilon(\tau))\Big)\, d\tau + \int_{t_0}^t \Big(F(\tau, \phi_\varepsilon(\tau)) - F(\tau, \phi(\tau))\Big)\, d\tau.$$

En conséquence, en utilisant les hypothèses sur F et ϕ_ε, il vient

$$\|\phi_\varepsilon(t) - \phi(t)\| \le \varepsilon |t - t_0| + \left|\int_{t_0}^t L(\tau) \|\phi_\varepsilon(\tau) - \phi(\tau)\|\, d\tau\right|,$$

et le lemme de Gronwall permet de conclure. ∎

Théorème. *Soit* F *une fonction continue de* $I \times \Omega$ *dans* $\mathbb{R}^n$, *différentiable par rapport à* x *et telle que* $D_x F$ *soit continue sur* $I \times \Omega$. *Alors le flot est différentiable par rapport à* x *et la matrice jacobienne* $D_x \phi(\cdot, t_0, x_0)$ *vérifie l'équation différentielle linéaire (à valeurs matricielles) suivante sur l'intervalle de définition de* ϕ_{t_0,x_0} :

$$(L) \qquad \begin{cases} \Phi' = D_x F(t, \phi_{t_0,x_0}(t)) \cdot \Phi, \\ \Phi_{|t=t_0} = I_n. \end{cases}$$

Preuve : Pour $h \in \mathbb{R}^n$ assez petit, on peut trouver un intervalle fermé borné J contenant t_0 tel que t_0 soit intérieur à J, et sur lequel ϕ_{t_0,x_0} et ϕ_{t_0,x_0+h} sont définies (c'est une conséquence du théorème de dépendance par rapport aux conditions initiales). On a alors pour tout $t \in J$,

$$\begin{aligned}\phi'_{t_0,x_0}(t) &= F(t, \phi_{t_0,x_0}(t)),\\ \phi'_{t_0,x_0+h}(t) &= F(t, \phi_{t_0,x_0+h}(t)).\end{aligned}$$

Donc, par différence, et en utilisant le fait que F est différentiable par rapport à x,

$$\Delta'(t,h) = D_xF(t, \phi_{t_0,x_0}(t)) \cdot \Delta(t,h) + \varepsilon(t,h)$$

avec $\Delta(t,h) = \phi_{t_0,x_0+h}(t) - \phi_{t_0,x_0}(t)$ et

$$\varepsilon(t,h) = F(t, \phi_{t_0,x_0+h}(t)) - F(t, \phi_{t_0,x_0}(t)) - D_xF(t, \phi_{t_0,x_0}(t)) \cdot \Delta(t,h).$$

Remarquons que ε est continue, vérifie $\varepsilon(t_0,h) = \varepsilon(t,0) = 0$ et que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|\varepsilon(t,h)\|}{\|h\|} = 0 \quad \text{uniformément par rapport à } \ t \in J.$$

En effet, si F est C^2 par rapport à x et telle que $(t,x) \mapsto D^2F(t,x)$, c'est une conséquence du théorème de Taylor-Lagrange qui entraîne l'existence de $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $t \in J$, et h assez petit, on ait

$$\|\varepsilon(t,h)\| \leq M\|h\|^2.$$

Si l'on a seulement D_xF continue, on peut utiliser l'égalité des accroissements finis qui assure que pour chaque composante ε^i de ε, il existe $\theta \in [0,1]$ tel que

$$\varepsilon^i(t,h) = \Big(D_xF^i\big(t, \theta\phi_{t_0,x_0+h}(t) + (1-\theta)\phi_{t_0,x_0}(t)\big) - D_xF^i(t, \phi_{t_0,x_0}(t))\Big) \cdot \Delta(t,h).$$

Le théorème de dépendance par rapport aux conditions initiales assure qu'il existe $r > 0$, un intervalle J contenant t_0 et $M \geq 0$ tels que $\|\Delta(t,h)\| \leq M\|h\|$. En conséquence, étant donné que D_xF est continue, on peut conclure que pour tout $\eta > 0$ il existe $r > 0$ tel que

$$\forall t \in J, \forall h \in B(0,r),\ \|\varepsilon(t,h)\| \leq \eta\|h\|.$$

Donc $t \mapsto \Delta(t,h)$ est une solution $\eta\|h\|$-approchée (au sens du lemme précédent) de l'équation linéaire

$$X' = D_xF(t, \phi_{t_0,x_0}(t)) \cdot X, \qquad X(t_0) = h. \tag{3.4}$$

Si l'on note $t \mapsto L(t,h)$ la solution de cette équation, on en déduit qu'il existe une constante K telle que pour tout $t \in J$ et $h \in B(0,r)$, on a

$$\|\Delta(t,h) - L(t,h)\| \leq K\varepsilon\|h\|.$$

Enfin, l'équation (3.4) étant linéaire, l'application $h \mapsto L(\cdot,h)$ est également linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathcal{C}(J, \mathbb{R}^n)$, et on peut vérifier qu'elle est continue à l'aide de l'équation. En conséquence, le flot est bien différentiable en (t, t_0, x_0) par rapport à x, pour $t \in J$ et sa différentielle vérifie l'équation (L). ■

Remarque. Plus généralement, si F est C^k sur son domaine de définition alors le flot est également C^k par rapport aux trois variables.

3.3 Exemples d'équations différentielles non linéaires

3.3.1 Equations différentielles du type $x'\partial_x f + \partial_t f = 0$

Soit f une fonction C^1 de deux variables définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On s'intéresse à la résolution de l'équation différentielle généralisée

$$(E) \qquad x'\partial_x f(t,x) + \partial_t f(t,x) = 0.$$

Elle se ramène bien sûr à une équation différentielle ordinaire au voisinage de tout point (t_0, x_0) tel que $\partial_x f(t_0, x_0) \neq 0$ (il suffit de diviser par $\partial_x f(t,x)\ldots$)

Le résultat suivant montre que la résolution de (E) se ramène à celle d'une équation implicite.

Proposition. *Soit φ une fonction de classe C^1 sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ tel que $I \times \varphi(I) \subset U$. Alors φ est solution de (E) si et seulement si il existe un réel C tel que*

$$(3.5) \qquad \forall t \in I,\ f(t, \varphi(t)) = C.$$

Preuve : Si φ vérifie (3.5) alors, en dérivant puis en appliquant le théorème de composition, on constate que φ vérifie bien (E).

Réciproquement, si φ vérifie (E) alors, pour tout $t \in I$, on a

$$\frac{d}{dt}\big(f(t,\varphi(t))\big) = \partial_t f(t,\varphi(t)) + \varphi'(t)\partial_x f(t,\varphi(t)) = 0,$$

donc en intégrant, on trouve (3.5) pour une constante C adéquate. ■

Exemple. Équations à *variables séparées.* Elles sont du type

$$(S) \qquad x'b(x) + a(t) = 0$$

avec a et b fonctions continues sur des intervalles I et J de $\mathbb{R}$.

Si l'on fixe A une primitive de a et B une primitive de b, il est clair que l'équation considérée est du type (E) avec $f(t,x) = A(t) + B(x)$ et $\Omega = I \times J$. Les solutions φ sont donc définies implicitement par

$$A(t) + B(\varphi(t)) = C$$

avec C constante arbitraire.

Plus généralement, certaines équations différentielles du type

$$(\widetilde{E}) \qquad x'Q(t,x) + P(t,x) = 0$$

peuvent se ramener à des équations du type (E) pourvu que l'on puisse trouver un *facteur intégrant* c'est-à-dire une fonction λ définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ tel qu'il existe une fonction f de classe C^1 définie sur le même ouvert et telle que

$$\partial_t f = \lambda P \quad \text{et} \quad \partial_x f = \lambda Q.$$

En effet, en multipliant $(\widetilde{E})$ par λ, on obtiendra encore une équation du type (E).

Remarquons que si P et Q ne s'annulent pas alors λ et f sont liés par la relation

$$\lambda = \frac{\partial_t f}{P} = \frac{\partial_x f}{Q}\cdot$$

Remarque. Les équations $(\widetilde{E})$ peuvent se réinterpréter en termes de formes différentielles : si l'on pose

$$\alpha = P(t,x)\,dt + Q(t,x)\,dx$$

alors résoudre (E) revient à trouver une fonction ϕ de classe C^1 sur un intervalle de $\mathbb{R}$ telle que $\phi^*\alpha = 0$.

Exemple. Équations homogènes. Elles sont du type

$$(H) \qquad x' = f(x/t)$$

avec f fonction numérique continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Pour les résoudre sur $]-\infty, 0[$ ou sur $]0, +\infty[$, on pose $x = ty$ et on obtient

$$ty' + y = f(y).$$

Cette équation a pour solutions particulières les fonctions constantes égales à y_0 avec y_0 tel que $f(y_0) = y_0$. Le théorème de Cauchy Lipschitz assure que si y est une solution prenant une fois la valeur y_0 alors cette fonction sera constante.

Limitons-nous désormais aux fonctions qui ne prennent jamais de telles valeurs. Alors on peut écrire

$$\frac{y'}{f(y)-y} = \frac{1}{t}\cdot$$

Il s'agit d'une équation à variables séparées.

3.3.2 Équation de Bernoulli

Ce sont des EDO du type

$$(B) \qquad x' = a(t)x + b(t)x^\alpha$$

avec a et b fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et $\alpha \in \mathbb{R}$.

On sait déjà traiter les cas $\alpha \in \{0,1\}$ car (B) est alors une équation différentielle scalaire linéaire d'ordre 1. Si $\alpha \notin \{0,1\}$ et si l'on se restreint aux solutions strictement positives de (B) alors on se ramène à la résolution d'une EDO linéaire en posant $y = x^{1-\alpha}$. En effet, on constate alors que x vérifie (B) si et seulement si y vérifie

$$y' = (1-\alpha)a(t)y + (1-\alpha)b(t).$$

Dans le cas où $\alpha \in \mathbb{N}$, l'équation de Bernoulli garde un sens pour les solutions non strictement positives, et la partie unicité du théorème de Cauchy-Lipschitz assure que les solutions non identiquement nulles ne s'annulent jamais. On peut donc appliquer la méthode précédente pour trouver toutes les solutions non nulles. Cela s'applique également (sans condition de signe) si α est un entier négatif.

3.3.3 Équation de Ricatti

Il s'agit d'EDO du type

$$(R) \qquad x' = a(t)x^2 + b(t)x + c(t)$$

avec a, b et c fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Supposons que l'on connaisse déjà une solution φ_0 de (R). On cherche alors la solution générale x de (R) en posant $x = \varphi_0 + y$. Un calcul immédiat montre que x est solution de (R) si et seulement si

$$y' = \big(2a(t)\varphi_0(t) + b(t)\big)y + a(t)y^2.$$

Il s'agit d'une équation de type Bernoulli avec $\alpha = 2$. Clairement, la fonction nulle est solution (on le savait déjà puisque φ_0 est solution de (R) par hypothèse). Les autres solutions ne s'annulent jamais. On peut donc les chercher sous la forme $y = 1/z$ avec z vérifiant

$$z' = -\big(2a(t)\varphi_0(t) + b(t)\big)z - a(t).$$

3.3.4 Exemples d'équations non linéaires d'ordre supérieur

Considérons une équation différentielle scalaire "générale" d'ordre n :

$$(E) \qquad x^{(n)} = f(t, x, x', \cdots, x^{(n-1)}).$$

Il est clair que plus n est grand, plus la résolution est difficile. On donne ci-dessous quelques exemples de situations où l'on peut transformer (E) en une équation différentielle d'ordre $n-1$ moyennant un changement d'inconnue astucieux.

Intégration "à vue"

On parle d'intégration à vue lorsqu'il existe une fonction g telle que pour toute fonction x n fois dérivable, on ait

$$x^{(n)} - f(t, x, x', \cdots, x^{(n-1)}) = \frac{d}{dt} g(t, x, \cdots, x^{(n-1)}).$$

En intégrant, on voit que les solutions de (E) vérifient l'équation implicite *d'ordre* $n-1$

$$g(t, x, \cdots, x^{(n-1)}) = C$$

avec C constante arbitraire.

Le théorème des fonctions implicites permet de récrire cette équation sous la forme

$$x^{(n-1)} = h(t, x, x', \cdots, x^{(n-2)})$$

au voisinage de tout point où la dérivée partielle de g par rapport à la dernière variable ne s'annule pas. Sous cette condition, on a donc transformé la résolution de (E) en la résolution d'une famille d'EDO d'ordre $n-1$.

Remarque : De nombreuses EDO peuvent s'intégrer à vue après multiplication par un facteur intégrant adéquat.

Exemple. Équation de Newton.

$$y'' = f(y) \quad \text{avec } f \text{ fonction continue.}$$

Cette équation ne s'intègre pas à vue, mais y' est clairement un facteur intégrant. En effet, en multipliant l'équation par y' puis en intégrant à vue, on constate qu, au voisinage d'un point où y' ne s'annule pas, y est solution de l'équation de Newton si et seulement si il existe une primitive F de f telle que

$$(y')^2 = 2F(y).$$

Sous certaines hypothèses (qui dépendent de F), on peut alors prendre la racine carrée et résoudre l'EDO localement.

Équations différentielles homogènes de degré 1 par rapport à $x, \cdots, x^{(n-1)}$.

On suppose que pour tout $\lambda > 0$, on a

$$f(t, \lambda x_0, \cdots, \lambda x_{n-1}) = \lambda f(t, x_0, \cdots, x_{n-1}).$$

Formellement, l'EDO s'écrit donc

$$\frac{x^{(n)}}{x} = f\left(t, 1, \frac{x'}{x}, \cdots, \frac{x^{(n-1)}}{x}\right).$$

Par récurrence, on vérifie que $x^{(k)}/x$ peut s'exprimer à l'aide des dérivées d'ordre 0 à $k-1$ de x'/x. Cela suggère de poser $y = x'/x$ afin de se ramener à une équation du type

$$y^{(n-1)} = g(t, y, \cdots, y^{(n-2)}).$$

Pour revenir à x, il ne reste plus qu'à résoudre l'équation différentielle linéaire $x' = xy$.

Exemple. Par ce changement d'inconnue, l'EDO $xx'' + 2x'^2 = 0$ se transforme en $y' + 3y^2 = 0$ qui s'intègre à vue.

Variables manquantes

Si f ne dépend pas de x, on peut interpréter (E) comme une équation différentielle d'ordre $n-1$ *par rapport à* x'.

Si f ne dépend pas de t, c'est un peu plus compliqué, mais on peut aussi se ramener à une EDO d'ordre $n-1$. On considère dans un premier temps x' comme une fonction de la variable x. On pose donc $z(x(t)) = x'(t)$. Ce changement de variable est valable localement si x' ne s'annule pas près du point considéré. On peut alors écrire

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{dt} = z\frac{dz}{dx}, \qquad \frac{d^3x}{dt^3} = z\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + z^2\frac{d^2z}{dx^2}, \qquad \text{etc}$$

et l'on trouve que z vérifie bien une EDO d'ordre $n-1$. Pour revenir à x, il faut alors résoudre

$$x'(t) = z(x(t)).$$

Cela s'intègre à vue si l'on introduit une primitive de la fonction $1/z$.

Exemple. Par ce nouveau changement d'inconnue, l'EDO $xx'' + 2x'^2 = 0$ se transforme en l'EDO linéaire $xz' + 2z = 0$.

Chapitre 4

Equations différentielles autonomes

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux propriétés qualitatives des équations différentielles *autonomes* c'est-à-dire du type

$$(S) \qquad X' = F(X)$$

où F est une fonction Lipschitzienne (ou au moins localement lipschitzienne) sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Rappelons que considérer ce type d'équations différentielles n'est pas vraiment restrictif dans la mesure où tout système différentiel non autonome d'ordre n peut être vu comme un système différentiel autonome d'ordre $n+1$.

Rappelons également que le théorème de Cauchy-Lipschitz assure que le problème de Cauchy associé à (S) admet toujours une unique solution maximale. Dans la suite on supposera toujours que F est C^1.

4.1 Champs de vecteurs

L'étude des équations différentielles autonomes est étroitement liée à celle des champs de vecteurs que nous définissons maintenant.

Définition. On appelle *champ de vecteurs* sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ toute fonction C^1 de Ω dans $\mathbb{R}^n$. On dit que le champ de vecteurs est *complet* si toutes les solutions maximales du système (S) associé sont globales (c'est-à-dire définies sur $\mathbb{R}$ entier).

Remarque. Dans le cas d'une équation différentielle scalaire d'ordre n du type

$$x^{(n)} = f(x, x', \cdots, x^{(n-1)}),$$

on dira que le champ de vecteurs associé est $(x', x'', \cdots, f(x, x', \cdots, x^{(n-1)}))$.

Remarquons que dans le cas d'une équation différentielle autonome, l'ensemble des solutions est invariant par translation temporelle, c'est-à-dire que ϕ est la solution maximale de (S) définie sur I et telle que $\phi(t_0) = x_0$ si et seulement si la fonction ψ définie sur $I - t_0$ par

$$\psi(t) = \phi(t + t_0)$$

est la solution maximale de (S) telle que $\psi(0) = x_0$. C'est une conséquence immédiate de la propriété d'unicité des solutions donnée par le théorème de Cauchy-Lipschitz.

De ce fait, on se limitera dans ce qui suit à l'étude du problème de Cauchy en $t_0 = 0$. Cela motive la définition suivante de *flot d'un champ de vecteurs* :

Définition. Si F est un champ de vecteurs sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, on appelle flot associé à F l'application ϕ qui à tout $x \in \Omega$ associe la solution maximale ϕ_x de (S) telle que $\phi_x(0) = x$.

Suivant que l'on s'intéresse à la solution issue de x ou à sa dépendance par rapport à x à l'instant t, on utilisera les notations $\phi_t(x) = \phi(t, x) = \phi_x(t)$.

Définition. Les sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ de la forme $\{\phi(t)\,;\, t \in I\}$ où ϕ est une solution maximale de (S) définie sur I sont appelées *courbes intégrales* du champ de vecteurs F.

Remarque. Deux courbes intégrales passant par le même point coïncident. En effet, elles correspondent à deux solutions maximales ϕ et ψ de (S) définies sur des intervalles ouverts I et J et telles qu'il existe $t_0 \in I$ et $t_1 \in J$ vérifiant $\psi(t_1) = \phi(t_0)$. En conséquence, si l'on note $T = t_1 - t_0$, on constate que la fonction $\theta : t \mapsto \psi(t + T)$ vérifie (S) et $\theta(t_0) = \psi(t_1) = \phi(t_0)$. Donc $\theta = \phi$ sur $I \cap (J - T)$. Comme ϕ est maximale, on doit de plus avoir $J - T \subset I$. En échangeant les rôles de ϕ et de ψ, on démontre l'inclusion réciproque. On peut donc conclure que

$$I = J - T \quad \text{et} \quad \psi(\cdot + T) = \phi \quad \text{sur} \quad I.$$

Cette remarque permet de donner la définition suivante :

Définition. Pour $x_0 \in \Omega$, la courbe intégrale passant par x_0 est appelée *orbite* de x_0 pour le champ de vecteurs F (ou courbe intégrale issue de x_0).

La remarque ci-dessus montre que deux orbites ayant un point commun coïncident. Par ailleurs, le théorème de Cauchy-Lipschitz assure que pour tout point x_0 de Ω, il existe une orbite de F passant par x_0.

En conséquence l'ensemble des orbites correspondant à un champ de vecteurs donné constitue une partition de l'ouvert où est défini notre champ de vecteurs F. Cette partition est appelée *portrait de phase.*

Lorsque l'on ne sait pas résoudre explicitement l'équation différentielle considérée, il est souvent quand même possible d'obtenir des informations très précises sur les orbites (et donc sur les solutions). Dans la définition ci-dessous, nous décrivons quatre types d'orbites particulières que l'on rencontre fréquemment.

Définition. Soit F un champ de vecteurs sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, x_0 un point de Ω et $(\phi_t(x_0))_{t\in\mathbb{R}}$ une orbite passant par x_0 *et définie pour tout* $t \in \mathbb{R}$.

- On dit que le point x_0 est *stationnaire/fixe/critique* ou encore est un *point d'équilibre* de F si la fonction $t \mapsto \phi_t(x_0)$ est constante.
- On dit que l'orbite $(\phi_t(x_0))_{t\in\mathbb{R}}$ est un *cycle* si la fonction $t \mapsto \phi_t(x_0)$ est périodique.
- On dit que l'orbite $(\phi_t(x_0))_{t\in\mathbb{R}}$ est *hétérocline* si elle relie deux points fixes x_- et x_+ *distincts*, c'est-à-dire

$$F(x_-) = F(x_+) = 0, \quad \lim_{t\to-\infty} \phi_t(x_0) = x_- \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} \phi_t(x_0) = x_+.$$

- Si $x_- = x_+$, on dit que l'orbite est *homocline.*

Exemples. (*i*) Pour l'équation $x'' + x = 0$, tout point (x_0, x_0') est un cycle. Si $(x_0, x_0') = (0, 0)$ ce cycle est réduit à un point. C'est donc un point stationnaire.

(*ii*) Considérons l'équation de Bernoulli :

$$(B) \qquad\qquad x' = x^2 - x.$$

Les points fixes correspondants sont 0 et 1. La fonction nulle est clairement solution et l'argument habituel montre que les autres solutions ne s'annulent jamais. Pour les trouver, on peut donc poser $y = 1/x$. On obtient alors $y' = y - 1$ qui se résout explicitement. En revenant à x, on en déduit que les solutions non nulles de (B) sont du type

$$x(t) = \frac{1}{1 + ae^t} \quad \text{avec} \quad a \neq -1.$$

En prenant $a = 1$, on constate que l'orbite passant par $1/2$ est hétérocline (puisqu'elle relie les valeurs 1 en $-\infty$ à la valeur 0 en $+\infty$. C'est la seule orbite hétérocline pour cette équation (pourquoi ?)

(iii) De façon générale, une équation différentielle scalaire d'ordre 1 n'admet jamais d'orbite homocline non stationnaire (exo : pourquoi ?)

(iv) Considérons finalement l'équation non linéaire d'ordre deux suivante :

$$x'' = x - 2x^3.$$

Il est clair que le champ de vecteurs correspondant $F(x, x') = (x', x - 2x^3)$ a trois points critiques, à savoir $(0,0)$, $(-\sqrt{2}/2, 0)$ et $(\sqrt{2}/2, 0)$. Un calcul facile montre que la fonction $t \mapsto 1/\mathrm{ch}\, t$ correspond à une orbite homocline pour le point critique $(0,0)$.

Proposition. *Soit F un champ de vecteurs sur Ω. Le point x_0 de Ω est critique si et seulement si $F(x_0) = 0$.*

Preuve : Le sens direct est trivial, et la réciproque résulte de la partie unicité du théorème de Cauchy-Lipschitz. ■

Le critère suivant permet de déterminer les solutions périodiques et donc les cycles.

Proposition. *Soit F un champ de vecteurs (pas nécessairement complet) sur Ω et ϕ une solution maximale de (S). Alors ϕ est périodique si et seulement si il existe deux temps distincts t_1 et t_2 tels que $\phi(t_1) = \phi(t_2)$.*

Preuve : La partie directe est triviale. Réciproquement, notons I l'intervalle de définition de ϕ et supposons qu'il existe deux temps t_1 et t_2 avec $t_1 < t_2$ tels que $\phi(t_1) = \phi(t_2)$. Soit $T = t_2 - t_1$. On constate que la fonction ψ définie sur $I - T$ par

$$\psi(t) = \phi(t + T)$$

est solution de (S) et égale à ϕ pour $t = t_1$. En conséquence, elle coïncide avec ϕ sur $I \cap I - T$. Comme ϕ est une solution maximale, on en déduit que $I - T \subset I$ (et donc la borne inférieure de I est $-\infty$. Un raisonnement analogue avec la fonction $t \mapsto \phi(t - T)$ permet d'établir que $\sup I = +\infty$. En conséquence $I = \mathbb{R}$ et $\phi = \psi$ sur $\mathbb{R}$. Autrement dit, ϕ est T-périodique. ■

Proposition. *Supposons le champ de vecteurs F complet et C^1. Alors toute application ϕ_t est un C^1 difféormorphisme de Ω dans lui-même et vérifie les propriétés suivantes :*

(i) $\phi_0 = \mathrm{Id}$,

(ii) $\phi_t \circ \phi_{-t} = \phi_{-t} \circ \phi_t = \mathrm{Id}$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$,

(iii) $\phi_t \circ \phi_s = \phi_s \circ \phi_t = \phi_{t+s}$ *pour tout* $(s,t) \in \mathbb{R}^2$.

Autrement dit l'ensemble $\{\phi_t\, ,\, t \in \mathbb{R}\}$ est un groupe commutatif pour la composition.

Preuve : Les égalités ci-dessus et la bijectivité de Ω dans $\phi_t(\Omega)$ résultent des propriétés du flot établies dans le cas général dans le chapitre précédent.

Ces égalités entraînent manifestement que $\phi_t(\Omega) = \Omega$. Enfin le caractère C^1 provient du résultat du chapitre précédent sur la régularité du flot. En particulier, pour tout $t \in \mathbb{R}$, les fonctions ϕ_t et ϕ_{-t} sont C^1 et bijections réciproques l'une de l'autre. Donc ϕ_t est un C^1 difféomorphisme sur Ω, de difféomorphisme réciproque ϕ_{-t}. ■

Le fait que les résultats ci-dessus nécessitent que le champ de vecteurs soit complet peut paraître un peu restrictif. En fait, si l'on s'intéresse au flot *en tant qu'objet géométrique* c'est-à-dire aux orbites ou au portrait de phase, il n'en est rien grâce à la proposition suivante qui montre que seule la direction du champ de vecteurs considéré détermine les courbes intégrales :

Proposition. *Soit F un champ de vecteurs C^1 sur Ω. Alors pour toute fonction λ de Ω dans $\mathbb{R}_*^+$ et de classe C^1 et tout $x_0 \in \mathbb{R}$, la courbe intégrale de λF issue de x_0 coïncide avec la courbe intégrale de F issue de x_0.*

Preuve : Notons ϕ la solution maximale de $X' = F(X)$ telle que $\phi(0) = x_0$ et ψ la solution maximale de $X' = (\lambda F)(X)$ telle que $\psi(0) = x_0$. Soit I et J les intervalles ouverts de définition de ϕ et ψ. On a

$$\forall t \in I,\ \phi'(t) = F(\phi(t)) \quad \text{et} \quad \forall s \in J,\ \psi'(s) = \lambda(\psi(s))F(\psi(s)).$$

On souhaite faire le changement de variable temporel $t = T(s)$ avec T nulle en 0 et solution de l'équation différentielle scalaire

$$T' = (\lambda \circ \phi)(T). \tag{4.1}$$

Notons $K =]s_-, s_+[$ l'intervalle de définition de la solution maximale T de cette équation différentielle. Comme λ et ϕ sont C^1, la fonction $\lambda \circ \phi$ est C^1 sur l'intervalle de définition de ϕ et le théorème de Cauchy-Lipschitz permet d'affirmer qu'il existe une unique solution maximale T nulle en 0 à l'équation ci-dessus. Notons que l'hypothèse $\lambda > 0$ assure que T est strictement croissante. Donc $T(K) =]T(s_-), T(x_+)[$.

On définit $\chi = \phi \circ T$ et on calcule :

$$\chi'(s) = \phi'(T(s))T'(s) = F(\phi(T(s)))\lambda(\phi(T(s)) = F(\chi(s))\lambda(\chi(s)).$$

On constate que $\chi(0) = \psi(0)$ et que χ et ψ vérifient la même équation différentielle. Par unicité de la solution maximale, on peut conclure que $K \subset J$ et que $\phi \circ T = \psi$ sur K. En conséquence, on a

$$T(s) = \int_0^s \lambda(\psi(s'))\, ds' \quad \text{pour} \quad s \in K.$$

En particulier $T(K) \subset I$. De plus, si par exemple $T(s_+) < \sup I$ alors on peut résoudre l'équation différentielle (4.1) à partir du temps s_+ avec la valeur $T(s_+)$ et obtenir ainsi un prolongement de T. En conséquence $T(s_+) \geq \sup I$. De même $T(s_-) \leq \inf I$. Donc

$$I = T(K) \subset T(J).$$

En échangeant les rôles de ϕ et ψ, on montre également que $T(J) \subset I$. Donc les courbes intégrales issues de x_0 des champs F et λF coïncident. Passer de l'une à l'autre revient juste à "changer la vitesse de parcours". ■

Exercice : Établir un résultat analogue dans le cas d'une fonction λ à valeurs *strictement négatives.*

Corollaire. *Si F est un champ de vecteurs C^1 sur $\mathbb{R}^n$, il existe un champ de vecteurs* com-plet *G ayant les mêmes courbes intégrales que F.*

Preuve : Il suffit d'appliquer le résultat précédent. avec $\lambda(x) := 1/(1 + \|F(x)\|^2)$ (où $\|\cdot\|$ est une norme euclidienne).

Le champ de vecteurs $G := \lambda F$ étant borné, les résultats du chapitre précédent assurent que toutes ses solutions maximales sont définies sur $\mathbb{R}$. ■

Définition. On appelle *intégrale première* d'un champ de vecteurs F défini sur Ω (ou de l'équation différentielle (S)) toute fonction $\mathcal{H}$ constante le long de toute courbe intégrale de F, c'est-à-dire telle que pour toute solution maximale ϕ définie sur I la fonction $t \mapsto \mathcal{H}(\phi(t))$ soit constante.

Du théorème de composition, on déduit facilement le résultat suivant :

Proposition. *Une fonction $\mathcal{H}$ définie et différentiable sur Ω est une intégrale première de F si et seulement si*

$$\forall x \in \Omega,\ d\mathcal{H}(x) \cdot F(x) = 0.$$

Remarque. L'existence d'une intégrale première facilite grandement l'étude des orbites et du portrait de phase d'un champ de vecteurs. En effet, il est clair que les orbites sont incluses dans les lignes de niveau des intégrales premières (l'inclusion pouvant être stricte). Plus précisément, si $\mathcal{H}$ est une intégrale première de F et ϕ une solution de (S) alors il existe une constante C telle que sur tout l'intervalle de définition I de ϕ, on ait

$$\mathcal{H}(\phi_1(t), \cdots, \phi_n(t)) = C.$$

Dans les cas non dégénérés, c'est-à-dire au voisinage de tout temps t_0 tel que $\nabla\mathcal{H}(\phi(t_0)) \neq 0$, le théorème des fonctions implicites permet d'exprimer une des composantes de ϕ en fonction des autres. Cela est particulièrement intéressant si $n = 2$ car la courbe intégrale peut alors être calculée explicitement. Pour $n \geq 3$, on peut encore se ramener à cette situation si l'on dispose de $n-1$ intégrales premières $\mathcal{H}_1, \cdots, \mathcal{H}_{n-1}$ indépendantes en $\phi(t_0)$, c'est-à-dire telles que la famille $(\nabla\mathcal{H}_1(\phi(t_0)), \cdots, \nabla\mathcal{H}_{n-1}(\phi(t_0)))$ soit libre.

La notion d'intégrale première est aussi pertinente pour les équations différentielles scalaires d'ordre n du type

$$x^{(n)} = f(x', x'', \cdots, x^{(n-1)}).$$

À l'aide de l'argument habituel consistant à récrire (E) comme un système de type (S), on voit que, dans ce cadre, une intégrale première est une fonction telle que pour toute solution ϕ de (E), la fonction $t \mapsto \mathcal{H}(\phi(t), \phi'(t), \cdots, \phi^{(n-1)}(t))$ soit constante.

Au voisinage de tout temps t_0 tel que la dérivée de la fonction $X \mapsto \mathcal{H}(X)$ en $\phi(t_0)$ par rapport à la dernière variable ne s'annule pas, le théorème des fonctions implicites permet de voir ϕ comme la solution d'une équation différentielle scalaire d'ordre $n-1$.

Exemple 1. Équation de Newton $x'' = -g(x)$. La fonction "énergie"

$$\mathcal{H}(x, x') := \frac{1}{2}x'^2 + G(x)$$

avec G primitive de g, est une intégrale première.

D'un point de vue physique, le premier terme représente l'énergie cinétique et $G(x)$, l'énergie potentielle.

Exemple 2. Considérons l'équation du pendule pesant :

$$x'' + \sin x = 0.$$

Le champ de vecteurs associé est borné, donc toutes les solutions sont globales. De plus, d'après l'exemple précédent, $\mathcal{H}(x, x') = \frac{1}{2}x'^2 - \cos x$ est une intégrale première. En conséquence, les orbites sont incluses dans les courbes d'équation

$$\frac{1}{2}x'^2 = C + \cos x. \tag{4.2}$$

Comme le membre de gauche est positif et $\cos x \in [-1, 1]$, on voit qu'il faut se restreindre à $C \geq -1$ pour avoir des courbes de niveau non vides. Il est clair que le portrait de phase est 2π périodique en x (interprétation physique ?) Les points fixes sont $(x_0, x_0') = (k\pi, 0)$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Les solutions sont toutes globales (voir le chapitre précédent).

- Pour $C = -1$, l'orbite correspondante est réduite au point $(x_0, x_0') = (0, 0)$ (modulo 2π pour l'abscisse). Physiquement il s'agit de la position d'équilibre stable du pendule.
- Pour $C = 1$, les orbites correspondantes sont ou bien réduites au point $(x_0, x_0') = (\pi, 0)$ (modulo 2π pour l'abscisse) (physiquement il s'agit de la position d'équilibre instable du pendule) ou bien des orbites hétéroclines joignant deux point fixes de ce type successifs.
- Pour $C \in]-1, 1[$, les orbites sont des cycles. En effet, x est astreint à vérifier $\cos x \geq -C > -1$ et donc reste à valeurs dans un intervalle du type $](2k-1)\pi, (2k+1)\pi[$ en vertu du théorème des valeurs intermédiaires. En particulier x est bornée. Par ailleurs, x ne saurait être monotone sur $\mathbb{R}$ ou même $\mathbb{R}^+$ car admettrait alors une limite ℓ en $+\infty$; et l'égalité (4.2) entraînerait alors $x'(t) \to 0$ puis $x''(t) \to 0$. L'équation vérifiée par x donnerait donc $\sin \ell = 0$, ce qui est incompatible avec la condition $\cos \ell \geq -C > -1$. Donc x n'est pas monotone et il existe t_0 et t_1 distincts tels que $x(t_0) = x(t_1)$. Donc x est périodique.
- Pour $C > 1$, x' ne s'annule jamais et $|x'|$ admet une borne inférieure strictement positive. En conséquence $x(t)$ va de $-\infty$ à $+\infty$ ou de $+\infty$ à $-\infty$.

4.2 Stabilité des solutions stationnaires

L'exemple du pendule montre que les points fixes/stationnaires peuvent être stables ou instables. Dans cette section on établit plusieurs critères assurant la stabilité des points stationnaires. Mais il convient avant tout de définir précisément cette notion de stabilité.

Dans toute cette section, on suppose que F est un champ de vecteurs complet de classe C^1 défini sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. On a vu que supposer que F est complet n'est pas restrictif si l'on s'intéresse uniquement aux orbites et portrait de phase.

Définition. Soit x_0 un point critique/stationnaire de F. On dit que ce point est

- *stable* si toute solution maximale issue d'un point proche de x_0 est définie sur $\mathbb{R}^+$ et reste proche de x_0 pour tout temps positif :
  il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que le flot ϕ de F soit défini sur $\mathbb{R}^+ \times B(x_0, \varepsilon_0)$ et tel que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta \in]0, \varepsilon_0]$ tel que

$$\|\phi_t(x) - x_0\| \leq \varepsilon \quad \text{pour tout} \quad t \in \mathbb{R}^+ \quad \text{et} \quad x \in \mathbb{R}^n \quad \text{tel que} \quad \|x - x_0\| \leq \eta;$$

- *asymptotiquement stable* si ϕ est défini sur $\mathbb{R}^+ \times B(x_0, \varepsilon_0)$ pour ε_0 assez petit et si de plus $\lim_{t \to +\infty} \phi_t(x) = x_0$ pour tout x dans un voisinage de x_0.

Remarque. Il est clair que la stabilité asymptotique entraîne la stabilité.

Exemple. Cas des systèmes linéaires homogènes à coefficients constants :

$$X' = AX \quad \text{avec} \quad A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

D'après le chapitre 1, le point 0 est aysmptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres (complexes) de A sont à partie réelle strictement négative. C'est par exemple le cas pour l'équation différentielle scalaire

$$x'' + kx' + x = 0 \quad \text{avec} \quad k > 0.$$

Le point 0 est stable si et seulement si toutes les valeurs propres sont à partie réelle négative et la multiplicité des valeurs propres imaginaires pures est égale à la dimension des sous-espaces propres correspondants. C'est par exemple le cas pour l'équation

$$x'' + x = 0$$

dont toutes les solutions sont périodiques, mais aussi pour l'équation du pendule pesant avec donnée initiale proche de $(0, 0)$.

Définition. Soit F un champ de vecteurs C^1 défini sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, x_0 un point de Ω et V un voisinage de x_0 inclus dans Ω. On dit que $L : V \to \mathbb{R}$ est une *fonction de Lyapunov* pour F au voisinage de x_0 si L est décroissante le long de toute courbe intégrale de F issue d'un point de V.

Remarque. Un calcul immédiat montre que $L : V \to \mathbb{R}$ est une fonction de Lyapunov pour F au voisinage de x_0 si et seulement si

$$\forall x \in V,\ dL(x) \cdot F(x) \leq 0.$$

Exemple. *Équation de Newton amortie $x'' + kx' + g(x) = 0$ avec $k > 0$.*

La fonction "énergie" $L(x) = \frac{1}{2}x'^2 + G(x)$ avec G primitive de g vérifie pour toute solution ϕ,

$$\frac{d}{dt}L(\phi(t)) = \phi'(t)\phi''(t) + \phi'(t)g(\phi(t)) = -k\phi'^2(t).$$

C'est donc une fonction de Lyapunov.

Ci-dessous on munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme euclidienne.

Théorème (de Lyapunov)**.** *Soit F un champ de vecteurs C^1 défini sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, x_0 un point stationnaire de F et V un voisinage de x_0 inclus dans Ω. Soit L une fonction de Lyapunov de classe C^1 sur V et deux fois différentiable en x_0.*

1. *Si on suppose de plus que*
   - *x_0 est un minimum local de L,*
   - *$d^2L(x_0)$ est une forme bilinéaire définie positive,*

   alors x_0 est un point stable.
2. *Si outre les hypothèses précédentes, on suppose qu'il existe $\beta > 0$ tel que*

$$\forall x \in V,\ dL(x) \cdot F(x) \leq -\beta(L(x) - L(x_0))$$

   alors x_0 est asymptotiquement stable.

Preuve : Pour simplifier les calculs, on suppose que $x_0 = 0$. Cela revient à considérer le champ $G : x \mapsto F(x + x_0)$ avec x proche de x_0. On notera en effet que les courbes intégrales de F se déduisent de celles de G par translation de vecteur x_0. Quitte à changer L en $L - L(0)$, on peut aussi supposer que $L(0) = 0$. Remarquons enfin que $dL(0) = 0$ puisque L est différentiable et admet un minimum en 0. Enfin, comme par hypothèse $d^2L(0)$ est une forme bilinéaire définie positive, la matrice associée est diagonalisable dans une base orthonormale et toutes les valeurs propres associées sont strictement positives. En conséquence, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall h \in \mathbb{R}^n,\ d^2L(0)(h, h) \geq 4\alpha\|h\|^2. \tag{4.3}$$

Comme L est de classe C^2 et vérifie $L(0) = 0$, $dL(0) = 0$ et (4.3), la formule de Taylor à l'ordre 2 entraîne qu'il existe $M > 0$ et $\eta > 0$ tels que $B(0, \eta) \subset V$ et

$$\|x\| \leq \eta \Longrightarrow \alpha\|x\|^2 \leq L(x) \leq M\|x\|^2. \tag{4.4}$$

Considérons un élément x de $B(0, \eta)$ et l'ensemble I_x des temps t positifs tels que

$$\forall s \in [0, t],\ \|\phi_s(x)\| \leq \eta.$$

L'ensemble I_x est clairement un sous-intervalle fermé non vide de $\mathbb{R}^+$. Nous allons montrer qu'il existe $\eta' > 0$ tel que si $\|x\| \leq \eta'$ alors $I_x = \mathbb{R}^+$. Pour cela, considérons $T \in I_x$. Alors, vu que $L(\phi_T(x)) \leq L(x)$ on peut écrire que

$$\alpha\|\phi_T(x)\|^2 \leq L(\phi_T(x)) \leq L(x) \leq M\|x\|^2.$$

En conséquence, si l'on choisit η' tel que

$$\sqrt{M/\alpha}\,\eta' < \eta$$

alors on a

$$\|\phi_T(x)\| \leq \sqrt{M/\alpha}\|x\| < \eta.$$

Donc T n'est pas égal à la borne supérieure de I. Cela montre que, sous cette condition, on a $I = \mathbb{R}^+$ et

$$\forall x \in B(0, \eta'), \forall t \in \mathbb{R}^+, \|\phi_t(x)\| \leq \sqrt{M/\alpha}\|x\|.$$

Autrement dit, 0 est stable.

Démontrons maintenant la deuxième partie du théorème. On sait déjà qu'il existe $\eta' > 0$ tel que $\phi_t(B(0, \eta')) \subset B(0, \eta) \subset V$ pour tout $t \geq 0$. Donc, si $x \in B(0, \eta')$, on peut écrire que

$$\frac{d}{dt}(L(\phi_t(x)) = dL(\phi_t(x)) \cdot F(\phi_t(x)) \leq -\beta L(\phi_t(x)).$$

Donc, par intégration,

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ L(\phi_t(x)) \leq L(x)e^{-\beta t}.$$

Mais d'après (4.4), on a

$$L(\phi_t(x)) \geq \alpha\|\phi_t(x)\|^2.$$

En conséquence, l'inégalité ci-dessus montre que $\phi_t(x)$ tend vers 0 (avec un taux de convergence exponentiel). ■

Exemple. *Équation de Newton amortie $x'' + kx' + g(x) = 0$ avec $k > 0$.*

On considère encore la fonction énergie $L(x, x') = \frac{1}{2}x'^2 + G(x)$. Le champ de vecteurs associé à l'équation est $F(x, x') = (x', -kx' - g(x))$. On suppose que $g(0) = 0$ de telle sorte que $(0, 0)$ soit critique.

On applique le théorème précédent afin de déterminer des conditions suffisantes sur g pour que $(0, 0)$ soit stable ou asymptotiquement stable.

Pour étudier la stabilité, on calcule

$$DL(x, x') = (g(x), x') \quad \text{et} \quad D^2L(x, x') = \begin{pmatrix} g'(x) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La condition de stabilité en $(0, 0)$ donnée par le théorème de Lyapunov est donc équivalente à $g'(0) > 0$.

Pour étudier la stabilité asymptotique, on calcule

$$DL(x,x')\cdot F(x,x') = -kx'^2 = -2kL(x,x') + 2kG(x).$$

La condition de stabilité aysmptotique est donc vérifiée si et seulement si il existe $\alpha>0$ tel que $G(x)\leq(1-\alpha)L(x,x')$ pour tout (x,x') proche de $(0,0)$. Clairement, cette condition ne peut pas être satisfaite, donc le critère de stabilité asymptotique ne s'applique pas dans ce cas (ce qui ne signifie pas que $(0,0)$ n'est pas asymptotiquement stable, voir plus loin).

Rappelons que pour une équation linéaire à coefficients constants, 0 est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres sont à partie réelle strictement négative. Le théorème ci-dessous montre que, dans une certaine mesure, ce résultat perdure au voisinage d'un point stationnaire pour une EDO non linéaire autonome.

Théorème. *Soit F un champ de vecteurs C^1 défini sur un ouvert Ω contenant le point stationnaire x_0. Supposons que toutes les valeurs propres de $DF(x_0)$ soient à partie réelle strictement négative.*

Alors le point x_0 est asymptotiquement stable. Plus précisément, pour tout réel μ strictement supérieur à toutes les parties réelles des valeurs propres de $DF(x_0)$, il existe $r>0$ tel que pour tout $x_0\in B(0,r)$ et solution ϕ de (S) avec donnée initiale x_0, on ait

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-\mu t}\phi(t)=0.$$

Preuve : Notons μ_0 la borne supérieure de toutes les parties réelles, et fixons $\mu\in]\mu_0,0[$.

Par définition de la différentielle de F en x_0, il existe une fonction k tendant vers 0 en 0 et telle que pour tout h assez petit, on ait

$$F(x_0+h)=dF(x_0)\cdot h+\|h\|k(h). \tag{4.5}$$

Pour simplifier les calculs, on suppose dans la suite que $x_0=0$ (on a déjà vu dans la preuve précédente que ce n'était pas restrictif). On fixe $\mu>\mu_0$ puis $\widetilde{\mu}\in]\mu_0,\mu[$ et on introduit la fonction auxiliaire

$$\phi_{\widetilde{\mu}}(t):=e^{-t\widetilde{\mu}}\phi(t)$$

où ϕ est une solution de (S) telle que $\phi(0)=x$, et x un point de Ω.

Remarquons que $\phi_{\widetilde{\mu}}$ vérifie

$$\phi_{\widetilde{\mu}}'(t)=e^{-t\widetilde{\mu}}\big(\phi'(t)-\widetilde{\mu}\phi(t)\big).$$

Donc, si l'on pose $A=DF(0)$, on obtient d'après (4.5), tant que $\phi(t)$ est suffisamment petit,

$$\phi_{\widetilde{\mu}}'(t)=(A-\widetilde{\mu}I_n)\phi_{\widetilde{\mu}}(t)+\|\phi_{\widetilde{\mu}}(t)\|k(\phi(t)),$$

d'où, en vertu de la formule de Duhamel,

$$\phi_{\widetilde{\mu}}(t)=e^{(A-\widetilde{\mu}I_n)t}x+\int_0^t e^{(t-\tau)(A-\mu I_n)}\|\phi_{\widetilde{\mu}}(\tau)\|k(\phi(\tau))\,d\tau.$$

Remarquons que les valeurs propres de la matrice $A-\widetilde{\mu}I_n$ sont encore à partie réelle strictement négative. En conséquence, il existe $C>0$ telle que

$$\forall t\in\mathbb{R}^+,\ \forall y\in\mathbb{R}^n,\ \|e^{t(A-\widetilde{\mu}I_n)}y\|\leq C\|y\|.$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\eta > 0$ tel que $\|y\| \leq \eta$ implique $\|k(y)\| \leq \varepsilon$. De la formule de Duhamel, on déduit donc que tant que $\|\phi(t)\| \leq \eta$, on a

$$\|\phi_{\widetilde{\mu}}(t)\| \leq C\|x\| + \int_0^t C\varepsilon\|\phi_{\widetilde{\mu}}(\tau)\|\,d\tau.$$

Le lemme de Gronwall entraîne donc que, tant que $\|\phi(t)\| \leq \eta$,

$$\|\phi_{\widetilde{\mu}}(t)\| \leq C\|x\|e^{C\varepsilon t},$$

ou encore

$$\|\phi(t)\| \leq Ce^{(C\varepsilon+\widetilde{\mu})t}\|x\|.$$

Choisissons ε assez petit pour que $(C+1)\varepsilon + \widetilde{\mu} \leq 0$ puis $\eta' = \eta/C$. Alors, pour $\|x\| < \eta'$, le raisonnement précédent donne

$$\|\phi(t)\| \leq Ce^{-\varepsilon t}\|x\| < \eta$$

tant que $\|\phi(t)\| < \eta$. L'argument utilisé dans la démonstration du théorème de Lyapunov permet alors d'affirmer que ϕ est définie sur $\mathbb{R}^+$ et que l'inégalité ci-dessus est vraie pour tout temps. ■

Exemple. *Équation de Newton amortie :* $x'' + kx' + g(x) = 0$ *avec* $k > 0$.
On vérifie facilement que le théorème s'applique pour tout $k > 0$.

4.3 Points stationnaires hyperboliques

Dans le premier chapitre de ce cours, nous avons étudié précisément le comportement asymptotique des équations différentielles linéaires à coefficients constants du type

$$(L) \qquad X' = AX$$

avec A matrice carrée à coefficients réels ou complexes.

Dans le cas où A est à coefficients réels, nous avons vu que $\mathbb{R}^n$ était somme directe du sous-espace stable $E^s_{\mathbb{R}}$, du sous-espace instable $E^i_{\mathbb{R}}$ et du sous-espace neutre $E^n_{\mathbb{R}}$ définis de la façon suivante :

$$E^s_{\mathbb{R}} \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\oplus_{\mathcal{R}e\,\lambda_i<0} E'_{\lambda_i}\right) \cap \mathbb{R}^n, \quad E^i_{\mathbb{R}} \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\oplus_{\mathcal{R}e\,\lambda_i>0} E'_{\lambda_i}\right) \cap \mathbb{R}^n, \quad E^n_{\mathbb{R}} \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\oplus_{\mathcal{R}e\,\lambda_i=0} E'_{\lambda_i}\right) \cap \mathbb{R}^n$$

où $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ sont les valeurs propres réelles ou complexes de A et E'_{λ_i} le sous-espace caractéristique associé à λ_i.

Par ailleurs, nous savons qu'il est possible de caractériser ces trois sous-espaces vectoriels en termes de comportement asymptotique des solutions de l'équation différentielle (L) :
- $E^s_{\mathbb{R}}$ est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^n$ tels que la solution de (L) issue de x tende vers 0 en $+\infty$;
- $E^i_{\mathbb{R}}$ est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^n$ tels que la solution de (L) issue de x tende vers 0 en $-\infty$;
- $E^n_{\mathbb{R}}$ est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^n$ tels que la solution de (L) issue de x soit à norme majorée par un polynôme.

Enfin, dans le cas d'une équation différentielle autonome

$$(S) \qquad X' = F(X)$$

telle que $F(x_0) = 0$, nous avons vu que, lorsque toutes les valeurs propres de $A := DF(x_0)$ étaient à partie réelle strictement négative, toutes les solutions issues d'un point x proche de x_0 tendaient exponentiellement vite vers x_0 (voir la section précédente).

Dans cette section, nous souhaitons étudier le cas plus général où le point stationnaire x_0 est de type hyperbolique c'est-à-dire est tel que le sous-espace neutre associé à la matrice $A := DF(x_0)$ soit réduit à $\{0\}$. Afin d'énoncer un résultat précis, il convient d'abord d'introduire les concepts de *variété stable* et *variété instable*.

On rappelle que $\phi_t(x)$ désigne la valeur à l'instant de t de la solution maximale de (S) issue de x à l'instant 0.

Définition. Soit $\delta > 0$ et x_0 un point stationnaire de F.
- La variété stable $V_\delta^s(x_0)$ de (S) près de x_0 est l'ensemble des $x \in B(x_0,\delta)$ tels que $t \mapsto \phi_t(x)$ soit définie sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $B(x_0,\delta)$ pour tout $t \geq 0$.
- La variété instable $V_\delta^i(x_0)$ de (S) près de x_0 est l'ensemble des $x \in B(x_0,\delta)$ tels que $t \mapsto \phi_t(x)$ soit définie sur $\mathbb{R}^-$ et à valeurs dans $B(x_0,\delta)$ pour tout $t \leq 0$.

Le théorème ci-dessous montre que dans le cas d'un point stationnaire hyperbolique, au moins l'une de ces deux variétés n'est pas réduite à $\{x_0\}$. Pour simplifier les notations, on suppose que $x_0 = 0$.

Théorème (de la variété stable). *Soit F un champ de vecteurs de classe C^k admettant 0 comme point stationnaire hyperbolique. Alors $\mathbb{R}^n = E_\mathbb{R}^s \oplus E_\mathbb{R}^i$ et on a le résultat suivant :*

(i) si $E_\mathbb{R}^s$ n'est pas réduit à $\{0\}$ alors il existe $\delta > 0$ et une application v_s de classe C^k définie sur un voisinage de 0 dans $E_\mathbb{R}^s$ et à valeurs dans $E_\mathbb{R}^i$ telle que

$$V_\delta^s(0) = \{x + v_s(x) \,/\, x \in E_\mathbb{R}^s\} \quad v_s(0) = 0 \quad et \quad Dv_s(0) = 0;$$

(ii) si $E_\mathbb{R}^i$ n'est pas réduit à $\{0\}$ alors il existe $\delta > 0$ et une application v_i de classe C^k définie sur un voisinage de 0 dans $E_\mathbb{R}^i$ et à valeurs dans $E_\mathbb{R}^s$ telle que

$$V_\delta^i(0) = \{x + v_i(x) \,/\, x \in E_\mathbb{R}^i\} \quad v_i(0) = 0 \quad et \quad Dv_i(0) = 0.$$

La démonstration de ce théorème se trouve par exemple dans [1]. Elle dépasse sensiblement le cadre du cours. Comme sous-produit de la démonstration, on obtient en sus que, quitte à diminuer δ, si $x \in V_\delta^s(0)$ alors $\phi_t(x)$ tend exponentiellement vite vers 0.

Exemple. Considérons le système différentiel

$$\begin{cases} x' &= 3x, \\ y' &= 2y + xz, \\ z' &= -z. \end{cases}$$

Il est clair que $(0,0,0)$ est un point stationnaire. Si l'on note $F(x,y,z)$ le membre de droite, on constate que

$$DF(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ z & 2 & x \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donc $DF(0,0,0) = \operatorname{diag}(3,2,-1)$ et le point stationnaire $(0,0,0)$ est donc de type hyperbolique. De plus les sous-espaces stables et instables associés à $DF(0,0,0)$ sont respectivement $\mathbb{R}e_3$ et $\mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2$ avec (e_1,e_2,e_3) base canonique de $\mathbb{R}^3$. Le théorème de la variété stable permet donc de conclure à l'existence d'un intervalle I contenant 0, d'un voisinage V_i de $(0,0)$ et de deux applications $v_s : I \to \mathbb{R}^2$ et $v_i : V \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ et nulles à l'origine telles que

$$V_\delta^s(0) = \{(x, v_s(x)) \,/\, x \in I\} \quad \text{et} \quad V_\delta^i(0) = \{(x, v_i(x)) \,/\, x \in V\}.$$

Notons que $V_\delta^s(0)$ et $V_\delta^i(0)$ sont une courbe gauche et une surface, respectivement, passant par l'origine.

En fait, dans cet exemple très simple, il est facile de calculer $z(t)$ puis de résoudre explicitement l'équation. Cela permet de retrouver le résultat donné par le théorème de la variété stable.

Exercice : faire les calculs jusqu'au bout.

Bibliographie

[1] S. Benzoni-Gavage : Calcul différentiel et équations différentielles, cours et exercices corrigés, **Dunod**.

[2] A. Chambert-Loir et S. Fermigier : Agrégation de mathématiques, analyse 1,2 et 3, exercices, **Dunod**.

[3] R. Danchin : Notes de cours de *Calcul différentiel*, téléchargeable sur `http ://perso-math.univ-mlv.fr/users/danchin.raphael/`

[4] R. Danchin : Notes de cours d'analyse pour la préparation au CAPES, téléchargeable sur `http ://perso-math.univ-mlv.fr/users/danchin.raphael/`

[5] H. Queffélec et C. Zuily : Éléments d'analyse pour l'agrégation, **Masson**.

Index