Chapitre 1

Équation différentielle

1.1 Définitions.

définition 1
Une équation différentielle est une relation entre la variable t, les valeurs d'une fonction inconnue $x(t)$ et de ses dérivées $x'(t), ..., x^{(n)}(t))$. L'ordre n de l'équation différentielle est celui de la dérivée d'ordre le plus élevé qui figure dans cette relation. On appelle solution de l'équation diff'erentielle toute fonction $x(.)$ qui vérifie cette relation. En pratique, on ne s'intéresse pas à toutes les solutions d'une équation différentielle mais à certaines d'entre elles qui vérifient des conditions initiales. On appelle problème de Cauchy la recherche des solutions d'une équation diff vérifiant des conditions initiales imposées.

Exp 1 et 2

1.2 Équations différentielles du premier ordre.

On appelle équation linéaire du premier ordre une équation de la forme :

$$x'(t) + a(t)x(t) = f(t) \quad (E)$$

dans la quelle $a(.)$ et $f(.)$ sont deux fonctions données, continue sur un même intervalle I, $a(.)$ est appelé le coefiscient et $f(.)$ le second membre.
L'équation différentielle :

$$x'(t) + a(t)x(t) = 0 \quad (E_0)$$

est appelée équation sans second membre associée à (E) ou équation homogene associée.

Méthode générale de résolution (variation de la constante).
Si $x_h(t)$ est une solution de (E_0) ne s'annulant pas sur I, alors toute solution de

l'équation (E) est de la forme : $x_g(t) = u(t)x_h(t)$ où $u(t)$ vérifie

$$u'(t) = \frac{f(t)}{x_h(t)}$$

En effet, soit $x(t) = u(t)x_h(t)$ une solution de (E) avec $x_h(t)$ une solution de (E_0), on a

$$x'(t) = u'(t)x_h(t) + u(t)x'_h(t)$$

En traduisant que $x_g(t)$ est solution de (E), on obtient

$$x'_g(t) + a(t)x_g(t) = u'(t)x_h(t) + u(t)[x'_h(t) + a(t)x_h(t)] = u'(t)x_h(t) = f(t)$$

Si $x_p(t)$ est une solution particulière de (E), et $x_h(t)$ est une solution de (E_0), alors $x_h(t) + x_p(t)$ est une solution de (E) et toute solution est de cette forme.

Exemples. Soit à résoudre

1)

$$y' = -\frac{1}{2}y^3, \quad y(0) = 1,\ y\ \geq\ 0,\ x \in]-1\ ,\ +\infty[$$

2)

$$y' + y = 3x^2 + x - 4 \quad y(0) = 1$$

Réponse.

1)

$$y'y^{-3} = -\frac{1}{2}$$

(Sachant que $u'u^n \longrightarrow\ (PR)\frac{1}{n+1}u^{n+1}$) ce qui implique

$$-\frac{1}{2}y^{-2} = -\frac{1}{2}x + k$$

c-à-d

$$\frac{-1}{2y^2} = -\frac{1}{2}x + k$$

dc

$$y^2 = \frac{1}{x-2k}$$

$$y(x) = \sqrt{\frac{1}{x-2k}}$$

$$y(0) = 1 \Longrightarrow k = -\frac{1}{2},\ \ y(x) = \sqrt{\frac{1}{x+1}}$$

2)

$$y' + y = 0 \Longrightarrow \frac{y'}{y} = -1 \Longrightarrow \ln|y| = -x + c \Longrightarrow y_h(x) = \lambda e^{-x}, \quad \lambda \in I\!R$$

Variation de constante :

$$y_g(x) = \lambda(x)e^{-x} \Longrightarrow y_g'(x) = \lambda'(x)e^{-x} - \lambda(x)e^{-x}$$

$$\Longrightarrow \lambda'(x)e^{-x} = 3x^2 + x - 4$$

$$\lambda'(x) = (3x^2 + x - 4)e^x$$

$$\lambda(x) = \int (33x^2 + x - 4)e^x \, dx \; + \; c$$

Deux intégrations par parties :

$$\lambda(x) = e^x(3x^2 - 5x + 1) \; + \; c$$

$$y_g(x) = [(3x^2 - 5x + 1)e^x + c]e^{-x} = ce^{-x} + 3x^2 - 5x + 1$$

comme $y(0) = 1,\; c + 1 = 0 \Longrightarrow c = -1$

$$y_g(x) = -e^{-x} + 3x^2 - 5x + 1$$

1.3 Principe de superposition des solutions.

Soient a et b deux réels avec $a \neq 0$.
On considère les équations différentielles : $ay' + by = g_1 \;\; (E_1)$ et $ay' + by = g_2 \;\; (E_2)$ où g_1 et g_2 représentent deux fonctions continues d'une variable réelle x. Si on suppose que la fonction f_1 est une solution de (E_1) et que f_2 est une solution de (E_2). Alors $f_1 + f_2$ est une solution de l'équation différentielle

$$ay' + by = g_1 + g_2$$

Exemple.

i) Résoudre l'équation différentielle $y' - 2y = e^{2x}$

ii) Résoudre l'équation différentielle $y' - 2y = \cos 3x$

iii) Résoudre alors l'équation différentielle $y' - 2y = \cos 3x + e^{2x}$

Réponse.

i) $y' - 2y = e^{2x} \quad (H) y' - 2y = 0 \Longleftrightarrow \frac{y'}{y} = 2 \Longleftrightarrow \log|y(t)| = 2x + cte$

$$y(x) = ke^{2x}$$

ainsi $y(x) = ke^{2x} + y_p(x)$ Vu le second membre, on pose $y_p(x) = Ae^{2x}$ on trouve que c'est impossible, donc on pose $y_p(x) = (Ax + b)e^{2x}$, on trouve après identification que $A = 1$, et on peut prendre $B = 0$.
Les solutions sont les fonctions

$$\forall x \in I\!R,\; y_g(x) = y_p(x) + y_h(x) = Ke^{2x} + xe^{2x}, \quad K \in I\!R$$

ii) $y' - 2y = \cos 3x \quad (H)\ y' - 2y = 0 \Longleftrightarrow \frac{y'}{y} = 2 \Longleftrightarrow \log|y(x)| = 2x + cte$ donc $y_h(x) = Ke^{2x}$, Vu le second membre, on pose $y_p(x) = A\cos 3x + B\sin 3x$ on trouve prés identification que $A = -\frac{2}{13}$ et $B = \frac{3}{13}$ ainsi

$$y_g(x) = y_p(x) + y_h(x) = -\frac{2}{13}\cos 3x + \frac{3}{13}\sin 3x + Ke^{2x} \quad K \in I\!R$$

iii) d'après le pricipe de superposition, on trouve

$$y_g(x) = Ke^{2x} + xe^{2x} - \frac{2}{13}\cos 3x + \frac{3}{13}\sin 3x + Ke^{2x} \quad K \in I\!R$$

1.4 Équations linéaires du deuxième ordre à coefficients constants

On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, une équation de la forme :

$$ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = f(t) \quad (E)$$

où $f(.)$ est une fonction continue donnée sur un intervalle I, et a, b, c des constantes complexes données, vérifiant la condition $a \neq 0$, l'équation :

$$ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = 0 \quad (E_0)$$

est appelée l‘'équation sans second membre associée à (E)

1.4.1 Résolution de l'équation (E_0)

$$ar^2 + br + c = 0$$

est appelée équation caractérestique associée à l'équation (E_0)

1. L'ÉQUATION CARACTÉRISTIQUE A DEUX RACINES $r_1 \neq r_2$:

   La solution générale de (E_0) est : $x(t) = A_1e^{r_1t} + A_2e^{r_2t}$

   A_1 et A_2 constantes réeles
2. L'ÉQUATION CARACTÉRISTIQUE A UNE RACINE DOUBLE $r_0 = -\frac{b}{2a}$:

   La solution générale de (E_0) est : $x(t) = A_1e^{r_0t} + A_2te^{r_0t}$

   A_1 et A_2 constantes réeles.
3. L'ÉQUATION CARACTÉRISTIQUE A DEUX RACINES NON RÉELLES DISTINCTES
   elles sont alors de la forme $\alpha + (-)iw,\ \ \alpha,\ w \in I\!R$

   $$x_g(t) = e^{\alpha t}(A_1\cos wt + A_2\sin wt)A_1,\ A_2 \in I\!R$$

1.4.2 Résolution de l'équation (E)

1. Le second membre $f(t)$ est un polynôme de degré n :
   On vérifie facilement qu'il existe toujours une solution particulière $x_p(t)$ qui est un polynôme qu'on détermine par la méthode des coefficients indéterminés.
2. cas où $f(t) = e^{mt}P(t)$ avec $m \in C$
   Dans ce cas, on effectue le changement de fonctions inconnue $x(t) = v(t)e^{mt}$ qui conduit à rechercher une solution particulière $v_p(t)$ de l'équation
   $$av''(t) + [2ma + b]v'(t) + [am^2 + bm + c]v(t) = P(t)$$
   qui nous ramène au cas précédent.
3. cas d'une équation à coefficients réels, avec $f(t) = \cosh(t)$ ou $f(t) = \sinh(t)$: Principe de superposition.
4. cas où $f(t) = \cos mt$ ou $\sin mt$:
   $$x_p(t) = A\cos mt + B\sin mt$$

Exemple 1
Résolvez le problème de cauchy :

$$\begin{cases} x''(t) + 2x'(t) + x(t) = t \\ x(0) = x'(0) = 1 \end{cases}$$

Étape 1. Résolution de l'équation différentielle sans secod membre associée : $x''(t) + 2x'(t) + x(t) = 0$, l'équation caractéristique : $r^2 + 2r + 1 = 0$ a une racine double $r_0 = -1$. La solution est $x_h(t) = e^{-t}(At + B)$.

Étape 2. On cherche une solution particulière de l'équation complète de la forme : $x_p(t) = at + b$ car le second membre est un polynôme de degré 1, on obtient par identification $a = 1$ et $b = -2$, on obtient la solution particulière : $x_p(t) = t - 2$

Étape 3. La solution générale de l'équation complète est :

$$x_g(t) = x_p(t) + x_h(t) = e^{-t}(AT + B) + t - 2$$

Pour résoudre le problème de cauchy, on détermine A et B, on obtient : $A = B = 3$

Exemple 2
Résolvez l'équation différentielle : $x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = te^{-t}$

Étape 1. Résolution de l'équation différentielle sans secod membre associée : $x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = 0$, l'équation caractéristique : $r^2 + 3r + 1 = 0$ a deux racines distincts $r_1 = -1$ et $r_2 = -2$. La solution est $x_h(t) = Ae^{-t} + Be^{-2t}$.

Étape 2. Pour obtenir une solution particulière de l'équation complète, on effectue le changement de fonction inconnue suivant $x(t) = e^{-t}v(t)$, on est conduit èa l'équation en $^{v}(t)$ de la forme $v''(t) + v'(t) = t$, cette équation a pour solution particulière un polynôme de degré 2, donc $x_p(t) = \frac{1}{2}t^2 - t$

ÉTAPE 3. La solution générale de l'équation compléte est

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = Ae^{-t} + Be^{-2t} + (\frac{1}{2}t^2 - t)e^{-t}$$

Exemple 3
Résolvez l'équation différentielle : $x''(t) + 2x'(t) + 2x(t) = e^{-t}\sin t$

ÉTAPE 1. Résolution de l'équation différentielle sans secon membre associée, l'équation caractéristique $r^2 + 2r + 2 = 0$ a deux racines complexes conjuguées distincts $r_1 = -1+i$ et $r_2 = -1-i$. La solution homogéne est $x_h(t) = e^{-t}(A\cos t + B\sin t)$

ÉTAPE 2. On remarque que le second membre vérifie : $e^{-t}\sin t = \text{Im }(e^{(-1+i)t})$. On cherche donc une solution particulière $z_p(t)$ de l'équation :

$$z''(t) + 2z'(t) + 2z(t) = e^{(-1+i)t}$$

qui fournira une solution de l'équation proposée par : $x_p = \text{Im}(z_p)$
Pour obtenir z_p, on effectue le changement de fonction inconnue :

$$z(t) = e^{(-1+i)t}v(t)$$

qui conduit après simplification par $e^{(-1+i)t}$ à l'équation en $v(t)$:

$$v''(t) + 2iv'(t) = 1$$

dont une solution particulière est $v_p = \frac{1}{2i}t$, on obtient ensuitre

$$z_p(t) = e^{(-1+i)t}v_p(t) = -\frac{1}{2}te^{-t}(i(\cos t + i\sin t))$$

et finalement $x_p = \text{Im}(z_p) = -\frac{1}{2}te^{-t}\cos t$

ÉTAPE 3. La solution générale de l'équation compléte s'obtient par superposition :

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = e^{-t}(A\cos t + B\sin t) - \frac{1}{2}te^{-t}\cos t$$

Exemple 4
Résolvez l'équation différentielle :

$$x''(t) - x(t) = \sinh t$$

L'équation sans second membre a pour solution générale :

$$x_h(t) = Ae^t + Be^{-t}$$

Le second membre est la combinaison linéaire : $\sinh t = \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t}$
L'équation $x''(t) - x(t) = e^t$ a pour solution particulière

$$x_1(t) = \frac{1}{2}te^t$$

L'équation $x''(t) - x(t) = e^{-t}$ a pour solution particulière

$$x_1(t) = -\frac{1}{2}te^{-t}$$

La propriété générale de la superposition permet de former alors la solution générale de l'équation proposée :

$$x(t) = Ae^t + Be^{-t} + \frac{1}{4}te^t + \frac{1}{4}te^{-t}$$