

Chapitre 6

Équations différentielles ordinaires

Le but

Le but de ce chapitre est d'aborder la résolution d'équations ou de systèmes d'équations différentielles ordinaires (EDOs), linéaires ou non-linéaires, avec ou sans second membre. Formellement, le but est donc de trouver la fonction $y(x)$ solution d'une équation du type :

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}, \dots, y'', y', y, x) \quad (6.1)$$

associée à un ensemble de n constantes d'intégration. Nous verrons plus tard qu'on peut toujours se ramener formellement à une unique équation différentielle ordinaire d'ordre 1 de la forme :

$$y' = f(y, x) \quad (6.2)$$

associée elle-aussi à des contraintes d'intégration.

Notons que nous parlons ici d'équations différentielles **ordinaires**, c'est à dire ne dépendant que d'une seule variable x . Les équations aux dérivées partielles, c'est à dire dépendant de plusieurs variables, seront traitées dans un autre chapitre.

Les motivations

On sait bien évidemment résoudre certaines EDOs simples de manière analytique (à la main), comme les équations différentielles linéaires d'ordre 1 (par exemple $y' + ky = 0$ avec $y(0) = 1$) ou d'ordre 2 (par exemple $y'' + 2\alpha ky' + k^2y = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$). Mais ces équations sont parmi les très rares que l'on sait traiter analytiquement. C'est la raison pour laquelle, en physique, on cherche toujours à faire les simplifications nécessaires pour se ramener à l'une de ces deux équations. En particulier, il est extrêmement rare de pouvoir résoudre des équations qui impliquent ne serait-ce qu'un seul des problèmes suivants :

- ordre élevé
- coefficients non constants (par exemple $y' + e^{-x^2}y = 0$)
- équations non-linéaires (par exemple $y'' + \sin y = 0$)
- forçage compliqué (par exemple $y'' + y = \sin(e^x)$)

Dans ces cas, on procèdera à la résolution numérique des équations impliquées.

Performances

Les différentes méthodes de résolution que nous allons voir ici sont toutes basées sur le même principe, à savoir la résolution de l'équation par une récurrence partant de la condition initiale et calculant la solution

de proche en proche (pas par pas) jusqu'à la valeur voulue de la variable. En général, plus ces pas sont petits (et donc plus on fait un grand nombre de pas), plus les méthodes sont précises, mais plus le temps de calcul est long.

Les performances d'une méthode sont évaluées en comparant :

- La rapidité nécessaire à effectuer une itération **unique**. Cette propriété dépend du nombre d'évaluations de la fonction f nécessaire à compléter l'itération.
- Le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une précision donnée. Des méthodes d'ordres différents ont des erreurs qui décroissent plus ou moins vite avec la taille du pas d'intégration.

6.1 EDO d'ordre 1

Comme mentionné précédemment, les équations (ou systèmes d'équations) d'ordres quelconques peuvent se ramener formellement à une EDO d'ordre 1. Nous allons donc dans un premier temps nous concentrer sur ce cas.

6.1.1 Généralités

Principe

Une manière de présenter les choses est de ré-écrire l'équation différentielle $y' = f(y, x)$ associée à sa condition initiale $y(x_0) = y_0$ comme le problème intégral suivant :

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(y(x'), x') dx' \quad (6.3)$$

Le but est alors de calculer cette intégrale en appliquant des méthodes inspirées des méthodes d'intégration numériques vues précédemment, en particulier les méthodes de Newton-Cotes. Cependant, comparée au problème d'une intégration simple $\int f(x') dx'$, la difficulté essentielle provient ici du fait que l'on ne connaît pas $y(x')$ dont dépend l'intégrale $\int f(y(x'), x') dx'$ puisqu'il s'agit justement de la solution cherchée. On ne peut donc pas appliquer directement ces méthodes.

Méthode générale

Pour résoudre ce problème intégral, on procède en plusieurs étapes :

- La discrétisation :

Comme pour les méthodes de Newton-Cotes composites, on divise le domaine d'intégration $[x_0, x]$ en n intervalles de largeur $h = (x - x_0)/n$ et délimités par les $n + 1$ points $\{x_k = x_0 + kh, k \in [0, n]\}$. Les valeurs $y_k = y(x_k)$ de la solution en ces points sont alors exactement définies par la récurrence suivante :

$$\begin{aligned} y_0 &= y(x_0) \\ y_{k+1} &= y_k + I_k \quad \text{avec} \quad I_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(y(x'), x') dx' \end{aligned}$$

- La méthode d'intégration numérique :

Sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$, on utilise une méthode d'intégration de type Newton-Cotes simple, c'est à dire : on approxime la fonction f par un polynôme de degré p qui coïncide avec f en $p + 1$ points de l'intervalle $[x_k, x_{k+1}]$.

- L'approximation de $y(x')$ sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$:
Ces méthodes de Newton-Cotes simples reposent sur l'évaluation de f aux points de coïncidence. Pour estimer ces valeurs, il faut définir des approximations pour les valeurs de $y(x)$ en ces points. En général, on construit de telles approximations à partir de la première valeur $y(x_k)$ de l'intervalle, celle-ci étant connue. Ces approximations sont d'autant plus précises que la largeur h de l'intervalle est petite.

Au bilan, la résolution numérique se fait de proche en proche, à partir de la condition initiale, et elle repose sur le calcul d'une récurrence approchée de la forme :

$$\begin{aligned} \tilde{y}_0 &= y(x_0) \\ \tilde{y}_{k+1} &= \tilde{y}_k + \tilde{I}_k(\tilde{y}_k) \end{aligned}$$

Différentes méthodes correspondent à différents choix de méthode numérique et d'approximation de $y(x')$ pour la calcul de \tilde{I}_k .

Erreurs

Les erreurs ont ici deux origines distinctes :

- Premièrement, la précision est limitée par les deux choix mentionnés précédemment ($\tilde{I}(y_k) \neq I_k$). Par exemple, nous avons vu que les méthodes des rectangles, des trapèzes et de Simpson sont des méthodes d'ordre 1, 2 et 4 respectivement. Elles participent donc ici aussi à l'erreur totale. De même, les différentes manières de calculer $y(x')$ aux points de coïncidence vont introduire des erreurs. Toutes ces erreurs sont en général estimées en considérant que le y_k utilisé pour le calcul de \tilde{I}_k est exact : $\tilde{y}_k = y_k$ et on construit l'erreur totale due à ces problèmes en sommant simplement les erreurs de tous les intervalles.
- D'autre part, pour $k > 0$, le calcul de \tilde{I}_k ne se fait pas à partir de la valeur exacte y_k , mais à partir de la valeur approchée \tilde{y}_k issue des calculs précédents ($\tilde{I}(\tilde{y}_k) \neq \tilde{I}(y_k)$). En comparaison d'une intégration simple les erreurs peuvent donc s'accumuler au fil des itérations. Nous verrons que dans certains cas, la solution numérique s'éloigne progressivement de la solution exact au fil des itérations, traduisant un problème de **stabilité** de la méthode.

6.1.2 Méthode d'Euler (Runge Kutta d'ordre 1)

Méthode

La méthode d'Euler est la plus facile à interpréter et la plus simple à mettre en oeuvre.

- La méthode d'intégration numérique utilisée pour intégrer la fonction f sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ est celle d'ordre la plus bas, c'est à dire la **méthode du rectangle** :

$$\tilde{I}_k = (x_{k+1} - x_k) f(y(x_k), x_k) \tag{6.4}$$

- Cette méthode ne nécessite l'évaluation de f qu'en x_k où la fonction $y(x)$ est déjà connue. Il n'y a donc pas besoin d'approximer y en ce point.

Au bilan, l'intégration par la méthode d'Euler consiste à réaliser le calcul de la récurrence suivante :

$$\boxed{\begin{aligned} k=0 & \quad \tilde{y}_0 = y(x_0) \\ \forall k > 0 & \quad \begin{cases} k_1 &= h f(\tilde{y}_k, x_k) \\ \tilde{y}_{k+1} &= \tilde{y}_k + k_1 \end{cases} \end{aligned}} \tag{6.5}$$

Remarque : La méthode d'Euler peut aussi être interprétée selon un autre point de vue. En effet, si on utilise l'approximation suivante pour l'expression de la dérivée en x_k : $y'_k \approx \frac{y_{k+1} - y_k}{h}$, alors l'EDO à résoudre s'écrit : $\frac{\tilde{y}_{k+1} - \tilde{y}_k}{h} = f(\tilde{y}_k, x_k)$, ce qui correspond exactement à la relation de récurrence obtenue précédemment. La méthode de Euler consiste donc à estimer la pente en x_k avec cette relation, et à calculer une valeur de x_{k+1} en utilisant cette pente.

Rapidité

Chaque pas d'intégration nécessite une unique évaluation de la fonction f . La méthode de Euler est donc la méthode la plus rapide pour effectuer un nombre n de pas d'intégration donné.

Erreur

La méthode de Euler est une **méthode d'ordre 1**. Ainsi, **en tout point x fixé**, l'erreur sur la valeur de $y(x)$ en ce point décroît comme $1/n$ lorsque le nombre de pas d'intégration augmente :

$$\epsilon = O\left(\frac{1}{n}\right) = O(h) \quad (6.6)$$

Démonstration : Sur chaque intervalle, l'erreur associée à la méthode du rectangle est $\epsilon_k = O(h^2)$. L'erreur totale sur l'intégrale entre x_0 et x fixé est la somme des erreurs $\epsilon = \sum_{k=0}^{n-1} \epsilon_k = n\epsilon_k = nO(h^2) = O(1/n)$.

Stabilité numérique

La méthode de Euler n'est stable linéairement que si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y} < 0 \\ h < \frac{2}{|\partial f / \partial y|} \end{cases} \quad (6.7)$$

Ainsi, **à h fixé**, si on intègre de plus en plus loin de la condition initiale, l'erreur ne reste bornée que si la fonction f se comporte correctement et si h est choisi plus petit qu'une limite bien déterminée.

Démonstration : Pour caractériser la stabilité de la méthode de Euler, on écrit la relation de récurrence, et on effectue un développement limité en supposant que l'erreur relative sur y est faible $|\epsilon_y| = |y_k - \tilde{y}_k| \ll |y_k|$ et que le pas d'intégration h est faible :

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{k+1} &= \tilde{y}_k + hf(\tilde{y}_k, x_k) \\ y_{k+1} - \epsilon_{k+1} &= y_k - \epsilon_k + hf(y_k - \epsilon_k, x_k) \\ y_{k+1} - \epsilon_{k+1} &= y_k - \epsilon_k + hf(y_k, x_k) - \epsilon_k h \frac{\partial f}{\partial y} + hO(\epsilon_k^2) \\ \epsilon_{k+1} &= \epsilon_k \left(1 + h \frac{\partial f}{\partial y}\right) + h \left(\frac{y_{k+1} - y_k}{h} - f(y_k, x_k)\right) + O(h\epsilon_k^2) \\ \epsilon_{k+1} &= \epsilon_k \left(1 + h \frac{\partial f}{\partial y}\right) + O(h^2) + O(h\epsilon_k^2) \end{aligned}$$

La notion de stabilité linéaire est définie pour les petits pas d'intégration h , de manière à pouvoir négliger les termes d'ordre supérieur en h . On arrive donc à une relation de récurrence sur l'erreur qui permet d'estimer le

facteur d'amplification : $g_k = \epsilon_{k+1}/\epsilon_k = 1 + h\partial f/\partial y$. La condition de stabilité $|g_k| < 1$ n'est donc satisfaite que si $-2 < h\partial f/\partial y < 0$ ce qui correspond aux conditions données ci-dessus.

Exemple

On s'intéresse à l'équation suivante dont la solution analytique est bien connue :

$$\begin{cases} y' + y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow y(x) = e^{-x} \tag{6.8}$$

Numériquement, la méthode de Euler est suffisamment simple pour pouvoir suivre exactement les opérations qu'elle effectue. Pour cette EDO, $f(y, x) = -y$. Donc, $\forall k, k_1 = -h\tilde{y}_k$, si bien que la récurrence s'écrit :

$$\begin{aligned} \tilde{y}_k &= \tilde{y}_{k-1} - h\tilde{y}_{k-1} \\ &= (1 - h)\tilde{y}_{k-1} \\ &= (1 - h)^k \\ \tilde{y}(x = nh) &= (1 - h)^n \end{aligned}$$

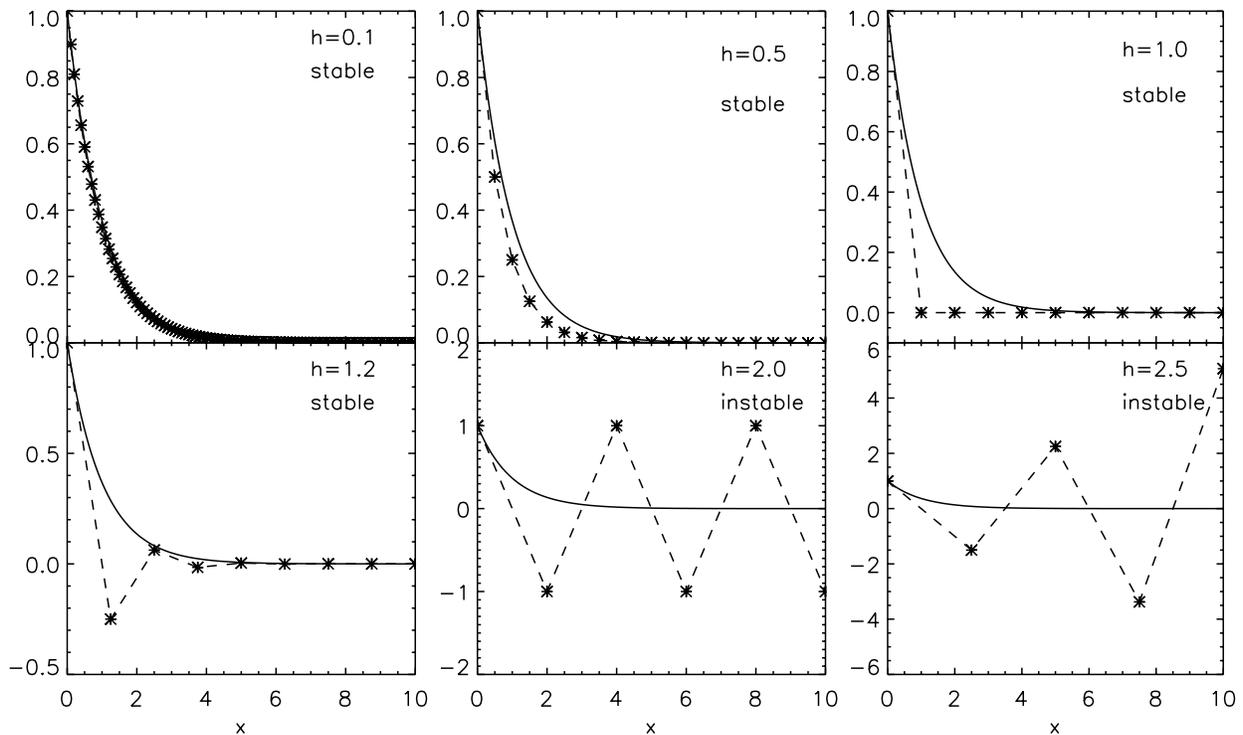


FIGURE 6.1 – Solutions numériques de l'équation $y' + y = 0, y(0) = 1$ par la méthode d'Euler et différentes valeurs du pas d'intégration h (en pointillés et points). La solution analytique $y(x) = e^{-x}$ est représentée en lignes pleines.

Ce résultat numérique est différent du résultat exact et l'erreur numérique peut être calculée exactement :

$$\epsilon(x, h) = y - \tilde{y} = e^{-x} - (1 - h)^{\frac{x}{h}}$$

- **Pour un $x = nh$ fixé**, lorsque le pas d'intégration devient très petit ($h \rightarrow 0$), l'erreur tend vers :

$$\epsilon = e^{-x} - e^{\frac{x}{h} \ln(1-h)} \sim e^{-x} - e^{\frac{x}{h} \left(-h - \frac{h^2}{2}\right)} = e^{-x} \left(1 - e^{-\frac{xh}{2}}\right) \sim \frac{hx}{2} e^{-x} = \frac{x^2}{2n} e^{-x}$$

Et l'erreur relative tend vers : $\epsilon(x)/y(x) \sim hx/2$. Ainsi, quelque soit le point x fixé, plus on diminue le pas h , plus la méthode est précise et $\epsilon = O(h) = O(1/n)$. C'est bien l'ordre de la méthode de Euler.

- À l'inverse, **pour un h fixé**, lorsque $x = nh \rightarrow \infty$, la solution théorique vérifie $e^{-x} \rightarrow 0$, alors que la solution numérique dépend de la valeur du pas d'intégration h . Si $h < 2$, alors $|1 - h| < 1$ et la solution numérique se comporte comme la solution théorique : $\tilde{y}_n = (1 + h)^n \rightarrow 0$ (par valeur positive si $h < 1$ et en oscillant si $1 < h < 2$). Dans ce cas, la solution numérique est dite stable. Au contraire, si $h > 2$, alors $|1 - h| > 1$ et la solution numérique diverge en oscillant : elle est instable (voir Fig. 6.1). Ceci est cohérent avec les propriétés générales de stabilité de la méthode d'Euler, où les conditions de stabilité sont : $\partial f / \partial y = -1 < 0$ qui est bien satisfaite, et $h < 2 / |\partial f / \partial y| = 2$ qui dépend du pas h .

6.1.3 Méthode de Heun (Runge Kutta d'ordre 2)

Méthode

La méthode de Heun est un peu plus complexe à mettre en oeuvre.

- La méthode d'intégration numérique utilisée pour intégrer la fonction f sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ est la **méthode du trapèze** :

$$\tilde{I}_k = (x_{k+1} - x_k) \frac{f(y(x_k), x_k) + f(y(x_{k+1}), x_{k+1})}{2} \quad (6.9)$$

- Cette méthode nécessite l'évaluation de f en x_k où la fonction $y(x)$ est déjà connue mais aussi en x_{k+1} où la fonction $y(x)$ n'est pas encore connue. Il est donc besoin de trouver une approximation de y en ce point. Dans la méthode de Heun, une première estimation de \tilde{y}_{k+1} est obtenue en utilisant la méthode de Euler : $\tilde{y}_{k+1} = \tilde{y}_k + hf(\tilde{y}_k, x_k)$. Cette estimation est utilisée pour calculer $f_{k+1} = f(y(x_{k+1}), x_{k+1})$.

A bilan, l'intégration par la méthode de Heun consiste à réaliser le calcul de la récurrence suivante :

$$\boxed{\begin{array}{l} k = 0 \quad \tilde{y}_0 = y(x_0) \\ \forall k > 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} k_1 = hf(\tilde{y}_k, x_k) \\ k_2 = hf(\tilde{y}_k + k_1, x_{k+1}) \\ \tilde{y}_{k+1} = \tilde{y}_k + \frac{k_1 + k_2}{2} \end{array} \right. \end{array}} \quad (6.10)$$

Remarque : L'interprétation de la méthode de Heun en termes des dérivées est plus complexe. On peut cependant le voir de la manière suivante. La valeur de \tilde{y}_{k+1} est obtenue en utilisant la pente moyenne entre deux pentes :

- La pente k_1 au début de l'intervalle (en x_k) qui est connue
- La pente k_2 à la fin de l'intervalle (en x_{k+1}) que l'on approxime en utilisant une première estimation de \tilde{y}_{k+1} grâce à k_1 .

Rapidité

Chaque pas d'intégration nécessite deux évaluations de la fonction f . La méthode de Heun est donc deux fois plus lente que la méthode de Euler pour effectuer n pas d'intégration.

Erreur

La méthode de Heun est une **méthode d'ordre 2**. Ainsi, **en tout point x fixé**, l'erreur sur la valeur de $y(x)$ en ce point décroît comme $1/n^2$ lorsque le nombre de pas d'intégration augmente :

$$\epsilon = O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O(h^2) \tag{6.11}$$

Démonstration : Sur chaque intervalle, l'erreur associée à la méthode du trapèze est $\epsilon_k = O(h^3)$. De plus, l'erreur faite à chaque pas en approximant y_{k+1} par $y_k + k_1$ est : $hf(y_{k+1}, x_{k+1}) - hf(y_k + k_1, x_{k+1}) = h(y_{k+1} - y_k - k_1)df/dy$. La méthode de Euler étant d'ordre 1 (en $O(h^2)$), cette erreur vaut donc : $hO(h^2) = O(h^3)$. Au bilan, l'erreur totale à chaque pas d'intégration est de l'ordre de $O(h^3)$ aussi. Et l'erreur sur l'intégrale totale entre x_0 et x fixé est la somme des erreurs $\epsilon = \sum_{k=0}^{n-1} \epsilon_k = n\epsilon_k = nO(h^3) = O(1/n^2)$.

Stabilité numérique

De même que pour la méthode de Euler, la méthode de Heun n'est stable que si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y} < 0 \\ h < \frac{2}{|\partial f/\partial y|} \end{cases} \tag{6.12}$$

Ainsi, **à h fixé**, si on intègre de plus en plus loin de la condition initiale, l'erreur ne reste bornée que si la fonction f se comporte correctement et si h est choisi plus petit qu'une limite bien déterminée. La démonstration est un peu plus complexe cependant, et est laissée à la curiosité du lecteur...

Exemple

En reprenant l'exemple développé pour la méthode de Euler, on a toujours $f(y, x) = -y$ si bien qu'ici : $\forall k, k_1 = -h\tilde{y}_k, k_2 = -h(\tilde{y}_k + k_1) = -h(1 - h)\tilde{y}_k$. La récurrence s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \tilde{y}_k &= \tilde{y}_{k-1} - \frac{h + h(1 - h)}{2} \tilde{y}_{k-1} \\ &= \left(1 - h + \frac{h^2}{2}\right) \tilde{y}_{k-1} \\ &= \left(1 - h + \frac{h^2}{2}\right)^k \\ \tilde{y}(x = nh) &= \left(1 - h + \frac{h^2}{2}\right)^n \end{aligned}$$

Ce résultat numérique est différent du résultat exact et l'erreur numérique peut être calculée exactement :

$$\epsilon(x, h) = y - \tilde{y} = e^{-x} - \left(1 - h + \frac{h^2}{2}\right)^{\frac{x}{h}}$$

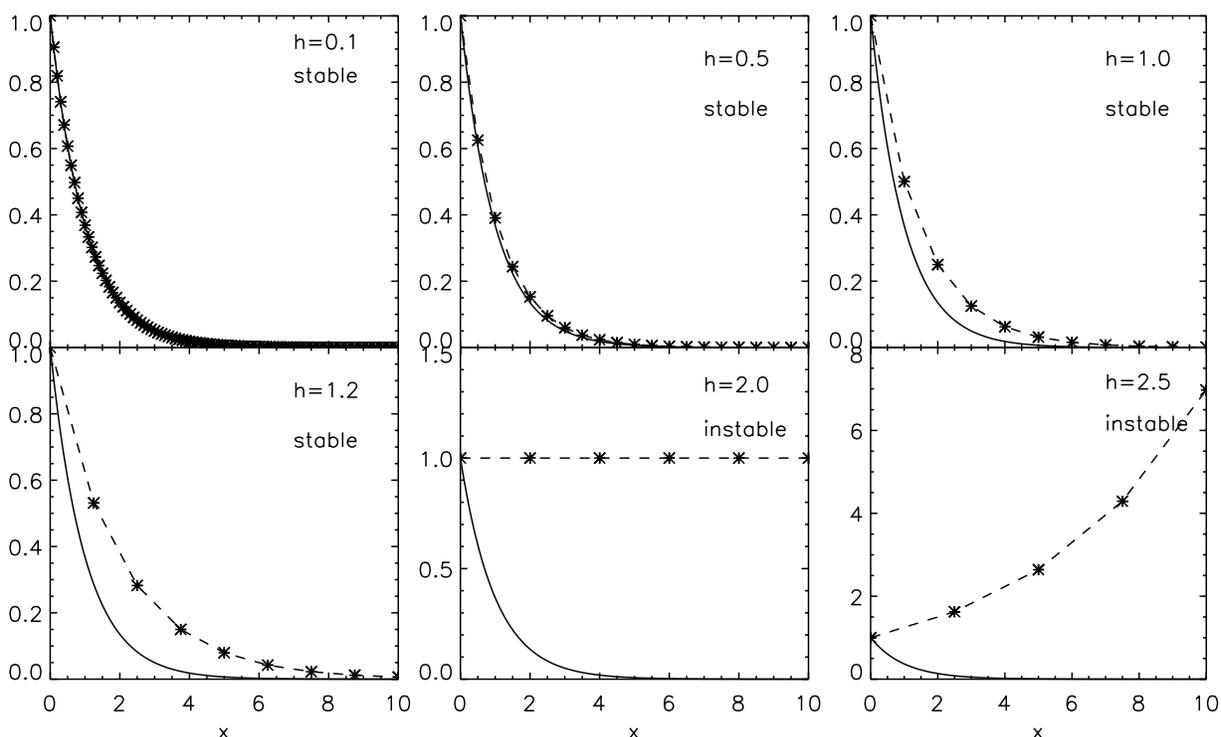


FIGURE 6.2 – Solutions numériques de l'équation $y' + y = 0$, $y(0) = 1$ par la méthode de Heun et différentes valeurs du pas d'intégration h (en pointillés et points). La solution analytique $y(x) = e^{-x}$ est représentée en lignes pleines.

- **Pour un $x = nh$ fixé**, lorsque le pas d'intégration devient très petit ($h \rightarrow 0$), l'erreur tend vers :

$$\epsilon = e^{-x} - e^{\frac{x}{h} \ln(1-h+h^2/2)} \sim e^{-x} - e^{\frac{x}{h}(-h+\frac{h^3}{6})} = e^{-x} \left(1 - e^{\frac{xh^2}{6}}\right) \sim -\frac{h^2}{6} x e^{-x} = -\frac{x^3 e^{-x}}{6n^2}$$

Ainsi, quelque soit le point x fixé, plus on diminue le pas h , plus la méthode est précise et $\epsilon = O(h^2) = O(1/n^2)$. C'est bien l'ordre de la méthode de Heun.

- **À l'inverse, pour un h fixé**, lorsque $x = nh \rightarrow \infty$, c'est à dire quand $n \rightarrow \infty$, la solution théorique vérifie $e^{-x} \rightarrow 0$, alors que la solution numérique dépend de la valeur du pas d'intégration h . En réalité, le comportement de la solutions dépend de $h(1-h/2)$. Si $h(1-h/2) < 0$, c'est à dire si $h > 2$, alors la solution numérique est instable car elle ne tend pas vers zéro. À l'inverse, si $h < 2$, on a $h(1-h/2) < 1/2$ et la solution numérique est tend toujours vers 0 (par valeur positive) : elle est stable. Ces conditions sont les même que pour la méthode de Euler.

6.1.4 Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

Méthode

La méthode de Runge-Kutta 4 est encore plus complexe à mettre en oeuvre.

- La méthode d'intégration numérique utilisée pour intégrer la fonction f sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ est la **méthode de Simpson** :

$$\tilde{I}_k = (x_{k+1} - x_k) \frac{f(y(x_k), x_k) + 4f(y(x_{k+1/2}), x_{k+1/2}) + f(y(x_{k+1}), x_{k+1})}{6} \quad (6.13)$$

- Cette méthode nécessite l'évaluation de f en x_k où la fonction $y(x)$ est déjà connue mais aussi en $x_{k+1/2}$ et x_{k+1} où la fonction $y(x)$ n'est pas encore connue. Il est donc besoin de trouver des approximations de y en ces points. Dans la méthode RK4, des premières estimations de $\tilde{y}_{k+1/2}$ et \tilde{y}_{k+1} sont obtenues en utilisant les méthodes de Euler et Heun. Ces estimations sont utilisées pour calculer $f_{k+1/2}$ et f_{k+1} et en déduire une meilleure estimation de \tilde{y}_{k+1} .

A bilan, l'intégration par la méthode RK4 consiste à réaliser le calcul de la récurrence suivante :

$$\begin{array}{l} k = 0 \\ \forall k > 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{y}_0 = y(x_0) \\ k_1 = hf(\tilde{y}_k, x_k) \\ k_2 = hf(\tilde{y}_k + \frac{k_1}{2}, x_{k+1/2}) \\ k_3 = hf(\tilde{y}_k + \frac{k_2}{2}, x_{k+1/2}) \\ k_4 = hf(\tilde{y}_k + k_3, x_{k+1}) \\ \tilde{y}_{k+1} = \tilde{y}_k + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} \end{array} \right. \quad (6.14)$$

Remarque : On peut aussi interpréter la méthode RK4 comme l'extrapolation de \tilde{y}_k à \tilde{y}_{k+1} en utilisant une pente calculée comme la moyenne pondérée de 4 pentes différentes :

- la pente k_1 au début de l'intervalle (en x_k) qui est connue
- la pente k_2 au milieu de l'intervalle (en $x_{k+1/2}$) que l'on approxime en utilisant une première estimation de $\tilde{y}_{k+1/2}$ grâce à k_1 .
- la pente k_3 au milieu de l'intervalle (en $x_{k+1/2}$) que l'on approxime en utilisant une seconde estimation de $\tilde{y}_{k+1/2}$ grâce à k_2 .
- la pente k_4 à la fin de l'intervalle (en x_{k+1}) que l'on approxime en utilisant une estimation de \tilde{y}_{k+1} grâce à k_3 .

Rapidité

Chaque pas d'intégration nécessite 4 évaluations de la fonction f . La méthode de RK4 est donc deux fois plus lente que la méthode de Heun (et 4 fois plus lente que la méthode de Euler) pour effectuer un nombre donné de pas d'intégration.

Erreur

La méthode de Runge Kutta 4 est une **méthode d'ordre 4**. Ainsi, **en tout point x fixé**, l'erreur sur la valeur de $y(x)$ en ce point décroît comme $1/n^4$ lorsque le nombre de pas d'intégration augmente :

$$\epsilon = O\left(\frac{1}{n^4}\right) = O(h^4) \quad (6.15)$$

Stabilité numérique

De même que pour la méthode de Euler, et la méthode de Heun la méthode de RK4 n'est stable que si certaines conditions sont satisfaites. Ces conditions sont cependant plus complexes à écrire.

Exemple

En reprenant l'exemple précédent $y' + y = 0$, $y(0) = 1$, on a à nouveau $f(y, x) = -y$. Après calcul, on trouve que la récurrence donne dans ce cas :

$$\tilde{y}(x = nh) = \left(1 - h + \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!}\right)^n$$

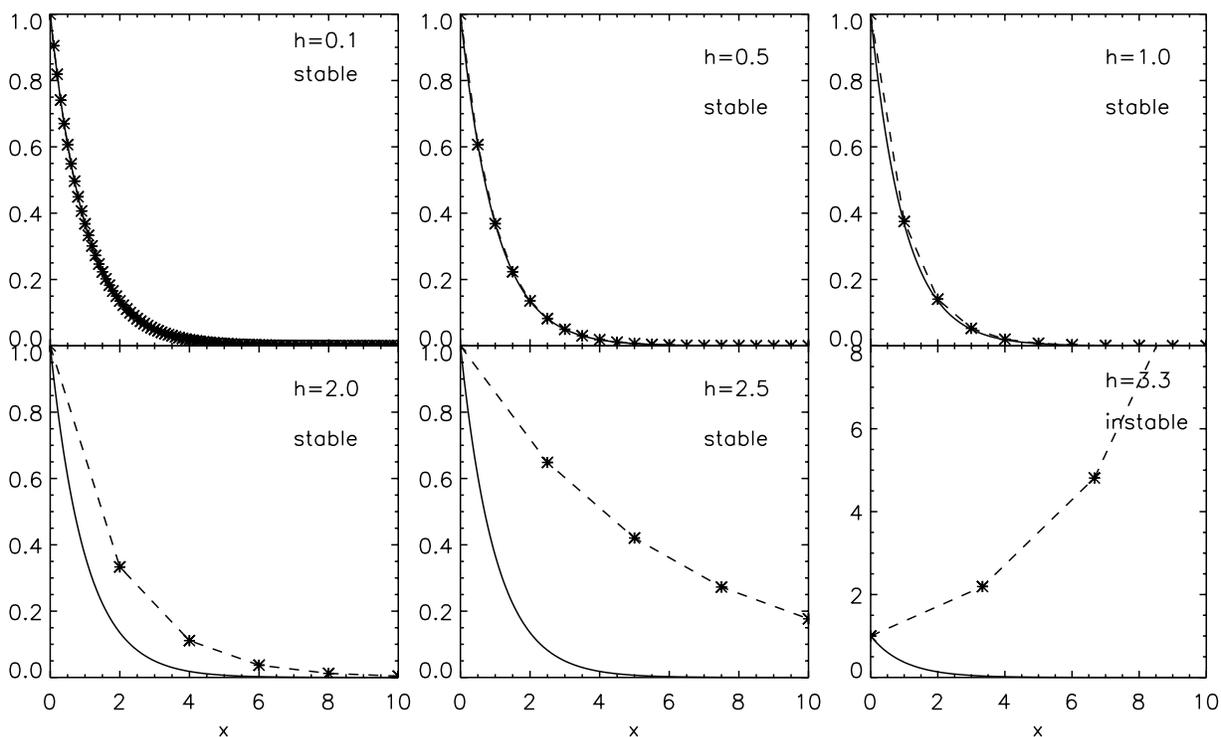


FIGURE 6.3 – Solutions numériques de l'équation $y' + y = 0$, $y(0) = 1$ par la méthode de Runge Kutta 4 et différentes valeurs du pas d'intégration h (en pointillés et points). La solution analytique $y(x) = e^{-x}$ est représentée en lignes pleines.

Ce résultat numérique est différent du résultat exact et l'erreur numérique peut être calculée exactement. L'analyse de cette erreur devient cependant un peu complexe et est laissée à la curiosité du lecteur...

6.2 EDO d'ordre supérieurs

6.2.1 Principe

La résolution d'équations différentielles ordinaires de degré $n > 1$ est basée sur le même principe. Une telle équation peut s'écrire :

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}, \dots, y'', y', x) \quad (6.16)$$

Pour la résoudre, on construit un vecteur qui contient toutes les dérivées de y d'ordre $0 \leq m \leq n - 1$. Le vecteur dérivé contient alors toutes les dérivées de f d'ordre $1 \leq m \leq n$:

$$\vec{Y} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} \quad \vec{Y}' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y^{(3)} \\ \vdots \\ y^{(n)} \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

L'équation d'ordre n peut alors s'écrire sous la forme suivante :

$$\vec{Y}' = \vec{F}(\vec{Y}) \quad \text{avec} \quad \vec{F}(\vec{Y}) = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y^{(3)} \\ \vdots \\ f(y^{(n-1)}, \dots, y'', y', x) \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

L'équation différentielle d'ordre n est ainsi écrite comme un système de n équations différentielles d'ordre 1 portant sur les n variables indépendantes $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$. Formellement, ce système se comporte comme une unique équation différentielle d'ordre 1 pour laquelle on peut appliquer les méthodes vues dans la section précédente.

6.2.2 Exemple : EDO d'ordre 2 par la méthode de Euler

Regardons le cas de l'équation de l'oscillateur harmonique $y'' + y = 0$ (EDO d'ordre 2). Cette équation s'écrit bien $y'' = f(y', y, x)$ avec $f(y', y, x) = -y$. On peut donc construire le vecteur et sa dérivée :

$$\vec{Y} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \quad \vec{Y}' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ -y \end{pmatrix} = \vec{F}(\vec{Y}) \quad \text{avec} \quad \vec{F}(\vec{Y}) = \begin{pmatrix} y' \\ -y \end{pmatrix}$$

Si l'on décide d'appliquer la méthode de Euler pour cette équation formelle, alors la récurrence s'écrit :

$$\vec{Y}_{k+1} = \vec{Y}_k + h\vec{F}_k \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} y_{k+1} \\ y'_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_k \\ y'_k \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} y'_k \\ -y_k \end{pmatrix}$$

On peut donc finalement résoudre l'équation différentielle en calculant la double récurrence :

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + hy'_k \\ y'_{k+1} = y'_k - hy_k \end{cases}$$

6.2.3 Constantes d'intégration

Dans le cas d'une unique équation différentielle d'ordre 1, une unique constante d'intégration du type $y(x_0) = y_0$ était nécessaire pour déterminer entièrement la solution. Et on pouvait résoudre simplement le problème en partant de ce x_0 et en calculant la solution de proche en proche.

Dans le cas d'une équation différentielle d'ordre $n > 1$ supérieur, la situation est plus complexe car n constantes d'intégrations sont nécessaires.

- Dans certains cas physiques, toutes ces constantes sont déterminées au même, seul et unique point x_0 . Par exemple, dans le cas de l'oscillateur harmonique, on peut imposer la position et la vitesse initiales : $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. Dans ce cas, il suffit d'itérer la méthode choisie (Euler, Heun, RK4...), de proche en proche, à partir de ce point, exactement de la même manière que pour une EDO d'ordre 1.
- Cependant, dans d'autres situations physiques, les constantes d'intégration sont imposées en des points différents. Par exemple, dans d'une équation d'ordre 2 on peut imposer $y(0) = 1$ et $y(1) = 1$. Dans ces cas, les méthodes classiques ne peuvent s'appliquer directement à partir d'un des points, puisqu'il manque une quantité en ce point. Dans ce cas, il faut appliquer des variantes plus ou moins compliquées comme la méthode des tirs ou des méthodes de relaxation.

Méthode des tirs :

Regardons le cas de l'équation différentielle précédente : $y'' + y = 0$ associée aux constantes : $y(0) = 1$, $y(1) = 0$. La récurrence à calculer s'écrit :

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + hy'_k \\ y'_{k+1} = y'_k - hy_k \end{cases}$$

Si l'on part de $x = 0$, y_0 est bien connu, mais on voit qu'il n'est pas possible de commencer la récurrence car y'_0 n'est pas connu. Dans la méthode des tirs, on fait une hypothèse sur cette quantité manquante. Par exemple, on suppose que $y'(0) = 0$. On intègre alors jusque $x = 1$ et on compare la valeur $y(1)$ trouvée à celle de la condition imposée. A priori, on trouve que celle-ci est différente. On essaie alors de corriger la valeur supposée de $y'(0)$ pour obtenir un meilleur accord, et on recommence jusqu'à obtenir un résultat satisfaisant.

Le nom de cette méthode provient de l'analogie avec les tirs de mortier, dont on corrige l'angle de départ jusqu'à atteindre la cible.

6.3 Exercices

- Résoudre l'équation différentielle ordinaire $y' + y = 0$, $y(0) = 1$ sur l'intervalle $[0, 10]$ par la méthode de Euler. Visualiser avec gnuplot la solution théorique et la solution numérique. Tester différentes valeurs du pas h .
- Mesurer l'erreur obtenue en $x = 10$. Tracer l'évolution de cette erreur en fonction du nombre de pas d'intégration n (ou du pas $h = x/n$).
- Recommencer avec les méthodes de Heun et de Runge-Kutta.

Ensuite, faire l'un des problèmes suivant (au choix) :

- Résoudre l'équation différentielle ordinaire du second ordre $y'' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Comparer à la solution théorique.
- Résoudre l'équation différentielle ordinaire avec forçage : $y' + y = (\sin x)^{10}$, $y(0) = 0$.
- Résoudre l'équation différentielle ordinaire, non-linéaire et à coefficients non constants : $y' = \cos^2 x \cos^2 2y$, $y(\pi/2) = \pi$ un utilisant une méthode de votre choix. Comparer à la solution théorique $y = \pi + \arctan(x + \sin(2x))/2 - \pi/2$.