Sandrine Caruso

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Référence : J.P Demailly, Analyse numérique et équations différentielles

On s'intéresse au problème de Cauchy

$$\begin{cases} X' = f(t,X) \\ X(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1}$$

où $f : U \to \mathbb{R}^n$, avec U ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, et $(t_0, x_0) \in U$.

Théorème (Cauchy-Lipschitz). *Si f est continue sur U, et localement lipschitzienne en X (*ie *pour tout $(t_1, x_1) \in U$, il existe $V \in \mathcal{V}(x_1)$ et $W \in \mathcal{V}(t_1)$, et il existe $k > 0$, tels pour tous $x, y \in V$ et tout $t \in W$, $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leqslant k\,\|x-y\|$), alors* (1) *admet une unique solution maximale.*

Remarquons que, comme f est continue, X est solution de (1) sur I si et seulement si pour tout $t \in I$,

$$X(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, X(u))du. \tag{2}$$

Soient $V \in \mathcal{V}(x_0)$, $W \in \mathcal{V}(t_0)$ et $k > 0$ comme dans l'énoncé du théorème. Notons $M = \sup_{W \times V} f$. Plaçons-nous sur un *cylindre de sécurité* : soit $r > 0$ tel que $\overline{B}(x_0, r) \subset V$, et soit $T > 0$ tel que $T \leqslant \frac{r}{M}$, et $[t_0 - T, t_0 + T] \subset W$. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions continues de $[t_0 - T, t_0 + T]$ dans $\overline{B}(x_0, r)$. Alors $\mathcal{F}$, muni de la norme uniforme, est un espace complet.

Soit Φ l'opérateur sur $\mathcal{F}$ défini par

$$\Phi(Y)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, Y(u))du.$$

Le fait d'avoir choisi $T < \frac{r}{M}$ assure que si $Y \in \mathcal{F}$, $\Phi(Y)$ est encore dans $\mathcal{F}$. L'équation intégrale (2) affirme en outre qu'une fonction X de classe C^1 est solution de (1) si et seulement si elle est point fixe de Φ. Cherchons donc à appliquer un théorème de point fixe.

Soient $Y, Z \in \mathcal{F}$. Montrons par récurrence que, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\forall t \in [t_0 - T, t_0 + T], \|\Phi^p(Y)(t) - \Phi^p(Z)(t)\| \leqslant \frac{k^p |t - t_0|^p}{p!} \|Y - Z\|_\infty .$$

Cette égalité est vérifiée pour $p = 0$, par définition de $\|\cdot\|_\infty$.

Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$,

$$\begin{aligned}
\left\|\Phi^{p+1}(Y)(t) - \Phi^{p+1}(Z)(t)\right\| &\leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \|f(u, \Phi^p(Y)(u)) - f(u, \Phi^p(Z)(u))\| \, du \right| \\
&\leqslant \left| \int_{t_0}^{t} k \, \|\Phi^p(Y)(u) - \Phi^p(Z)(u)\| \, du \right| \text{ (f loc. lip.)} \\
&\leqslant \left| \int_{t_0}^{t} k \frac{k^p |t-t_0|^p}{p!} \, \|Y - Z\|_\infty \, dt \right| \text{ (par hyp. de récurrence)} \\
&= \frac{k^{p+1}|t-t_0|^{p+1}}{(p+1)!} \, \|Y - Z\|_\infty \, ,
\end{aligned}$$

ce qui conclut la récurrence.

En particulier, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tous $Y, Z \in \mathcal{F}$,

$$\|\Phi^p(Y) - \Phi^p(Z)\|_\infty \leqslant \frac{k^p T^p}{p!} \, \|Y - Z\|_\infty \, .$$

Or, $\frac{k^p T^p}{p!}$ tend vers 0 lorsque p tend vers l'infini, donc il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{k^p T^p}{p!} < 1$. D'après le théorème du point fixe de Picard, Φ admet un point fixe X sur $\mathcal{F}$.

En outre, comme X et f sont continues, $t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, X(u)) du$ est de classe C^1, et donc le point fixe X est de classe C^1. Finalement, X est l'unique solution de (1) sur $[t_0 - T, t_0 + T]$.

Elle se prolonge en au moins une solution maximale. Supposons qu'il existe deux tels prolongements X_1 et X_2 sur deux intervalles I_1 et I_2. L'intervalle $I_1 \cap I_2$ est non vide, puisqu'il contient $[t_0 - T, t_0 + T]$. Soit J le plus grand intervalle inclus dans $I_1 \cap I_2$, contenant $[t_0 - T, t_0 + T]$, tel que $X_1 - X_2$ soit nulle sur J. Cet intervalle est nécessairement fermé puisque $X_1 - X_2$ est continue. S'il n'est pas égal à $I_1 \cap I_2$ tout entier, en l'une de ses bornes, on peut appliquer l'unicité locale précédemment démontrée[1], et contredire la maximalité de J. Donc $J = I_1 \cap I_2$, ainsi X_1 et X_2 sont égales sur $I_1 \cap I_2$, et par définition de solution maximale, $I_1 = I_2 = I_1 \cap I_2$. Finalement, X se prolonge en une unique solution maximale, ce qui conclut.

[1] Avec la condition initiale adéquate...