

ANNEXE I

TRANSFORMÉE DE LAPLACE

Pierre-Simon Laplace, mathématicien français (1749-1827). Laplace entra à l'université de Caen à 16 ans. Très vite il s'intéressa aux mathématiques et fut remarqué par d'Alembert. En analyse, il introduisit la fonction potentielle et les *coefficients de Laplace*. Il travailla également beaucoup sur les équations aux différences et sur les équations différentielles. Contrairement aux apparences, l'utilisation de la *transformée de Laplace* pour la résolution d'équations différentielles n'est pas due à Laplace, mais à Heaviside.



Oliver Heaviside, électricien anglais (1850-1925). Largement autodidacte (il quitta l'école à 16 ans), Heaviside devint télégraphiste et s'intéressa à l'électricité. Il étudia le *traité sur l'électricité et le magnétisme* de Maxwell, et en simplifia fortement les équations. Entre 1880 et 1887 il développa le *calcul opérationnel*, substituant p à d/dt pour la résolution des équations différentielles résultant de l'analyse des circuits électriques. Cette technique causa une grande controverse, en raison de son manque de rigueur mathématique. Elle ne fut prouvée (par la transformée de Laplace) que 20 ans plus tard.



I.1 Définition

Soit $f(t)$ une fonction du temps. Sa *transformée de Laplace unilatérale* $F(p)$ est définie par :

$$L_t[f(t)] = F(p) = \int_{0_-}^{\infty} f(t) \exp(-pt) dt \quad (I.1)^1$$

où p est la variable complexe².

On définit également parfois la *transformée de Laplace bilatérale* par :

¹ $\int_{0_-}^{\infty} f(t) \exp(-pt) dt$ est en fait une notation pour $\lim_{t_0 \rightarrow 0_-} \int_{t_0}^{\infty} f(t) \exp(-pt) dt$. Ce choix particulier

pour la borne d'intégration inférieure permet de prendre correctement en compte les fonctions discontinués en $t=0$ et les distributions ($\delta(t)$, $\delta'(t)$, etc.).

² La fonction $F(p)$ n'est pas définie dans tout le plan complexe : elle n'existe que dans une région de convergence. Nous ne nous en occuperons pas trop ici.

$$L_{II} [f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-pt) dt \quad (1.2)$$

Dans ce cours de Théorie des Circuits, nous utiliserons systématiquement la première. Elle nous permettra en effet de faire apparaître, dans les transformées, les conditions initiales de nos circuits (grâce à (1.4)). Notons cependant que, pour les fonctions *causales*³, qui seront majoritairement utilisées dans ce cours, les deux transformées sont identiques. Les propriétés de ces deux transformées sont essentiellement les mêmes (voir ci-dessous). Pour nous rappeler que les fonctions étudiées ici sont causales, nous les noterons systématiquement sous la forme $f(t)\varepsilon(t)$, où $\varepsilon(t)$ est la fonction échelon (Fig. I.1).

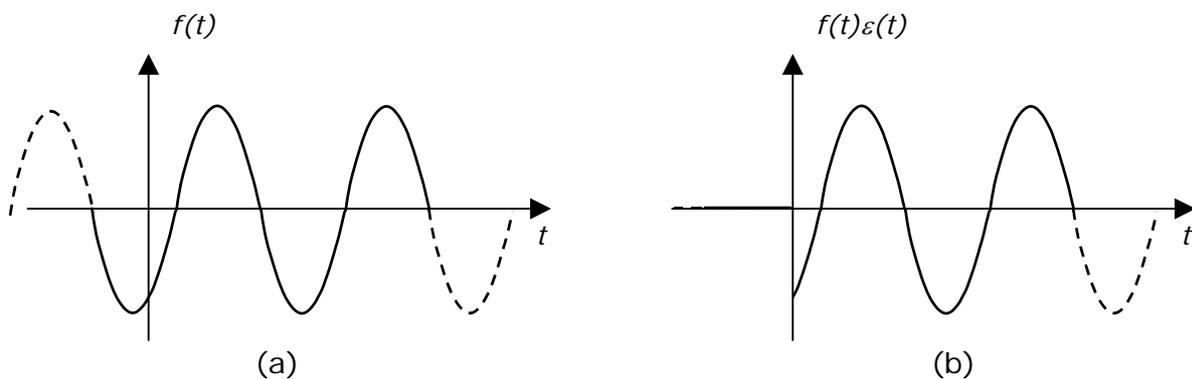


Fig. I.1 a. fonction non-causale b. fonction causale.

I.2 Les signaux usuels⁴ et leurs transformées

La Table I.1 donne la transformée de Laplace des signaux les plus courants. On les démontrera à titre d'exercice.

Exemple I.1

$$L_I [\delta(t)] = \int_{0_-}^{\infty} \delta(t) e^{-pt} dt = 1$$

$$L_I [\varepsilon(t)] = \int_{0_-}^{\infty} e^{-pt} dt = \frac{-1}{p} [e^{-pt}]_{0_-}^{\infty} = \frac{1}{p}$$

$$L_I [e^{-at} \varepsilon(t)] = \int_{0_-}^{\infty} e^{-at} e^{-pt} dt = \frac{-1}{p+a} [e^{-(p+a)t}]_{0_-}^{\infty} = \frac{1}{p+a}$$

³ Une fonction est dite *causale* si elle est identiquement nulle pour $t < 0$.

⁴ On pourrait même les appeler « signaux naturels », puisque, comme on le montre au chapitre consacré à l'étude des systèmes linéaires, l'apparition de phénomènes oscillatoires ($e^{-j\omega t}$) amortis ($e^{-\sigma t}$) est une propriété intrinsèque des systèmes linéaires. La fonction e^x ne s'appelle pas *exponentielle naturelle* pour rien...

$$L_t [\cos(\omega t)\varepsilon(t)] = L_t \left[\left(\frac{e^{-j\omega t} + e^{j\omega t}}{2} \right) \varepsilon(t) \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p+j\omega} + \frac{1}{p-j\omega} \right) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

$$\begin{aligned} L_t [e^{-\sigma t} \sin(\omega t)\varepsilon(t)] &= L_t \left[\left(\frac{e^{-(\sigma-j\omega)t} - e^{-(\sigma+j\omega)t}}{2j} \right) \varepsilon(t) \right] = \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{p+(\sigma-j\omega)} - \frac{1}{p+(\sigma+j\omega)} \right) \\ &= \frac{1}{2j} \frac{2j\omega}{p^2 + 2\sigma p + \rho^2} \quad \text{avec } \rho^2 = \sigma^2 + \omega^2 \end{aligned}$$

L'allure de chaque signal est esquissée à la Table I.1. Il est par contre plus difficile d'esquisser les transformées : $F(p)$ est défini sur le plan complexe⁵ et est elle même complexe en général. Une « esquisse » de $F(p)$ correspond donc en principe à deux graphes en 3D, pour le module et l'argument de $F(p)$ respectivement. On préfère donc en général esquisser $F(p)$ à travers ses *singularités*, qui sont les endroits du plan complexe où $F(p)$ tend vers 0 ou vers l'infini. Ces points sont respectivement appelés *zéros* et *pôles* de $F(p)$ (voir l'exemple ci-dessous).

Exemple I.2

On peut afficher facilement le module et l'argument d'une transformée de Laplace, en utilisant Matlab (Fig. I.2):

```
x=[-1.3:0.02:0];
y=[-1:0.02:1];
p=(x'*ones(size(y))'+j*(y'*ones(size(x)))));
N=[1 1]; % zero en p=-1
D=[1 1 0.5]; % poles en p=-0.5±0.5j
mod=abs(polyval(N,p)./polyval(D,p));
arg=angle(polyval(N,p)./polyval(D,p));
mesh(x,y,20*log10(mod))
figure(2)
mesh(x,y,arg)
```

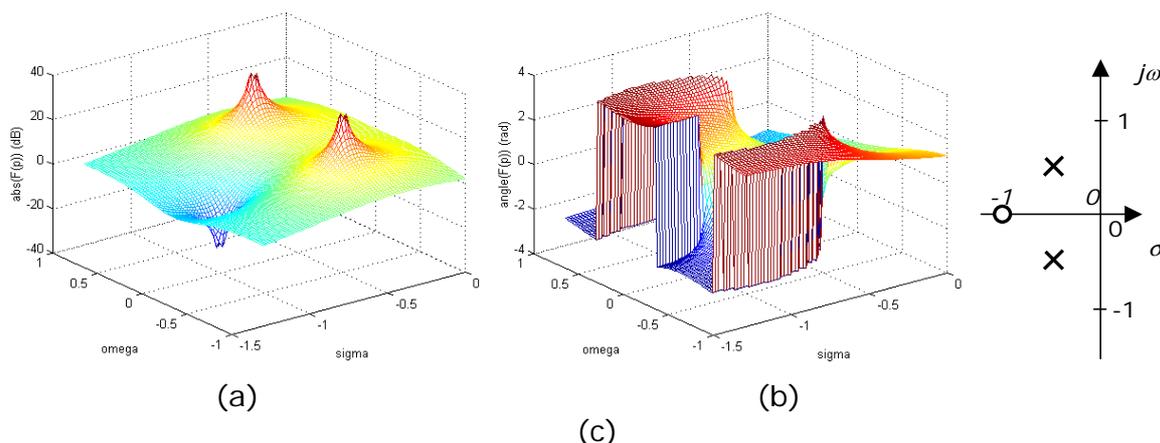
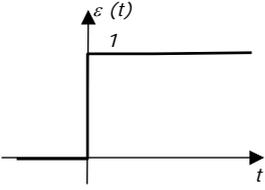
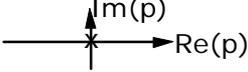
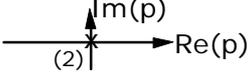
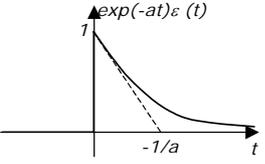
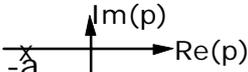
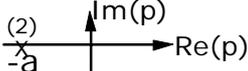
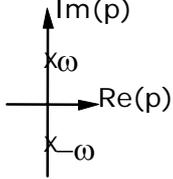
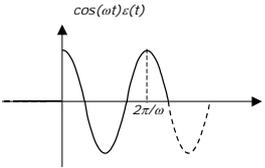
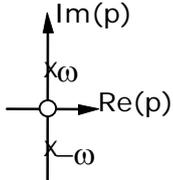
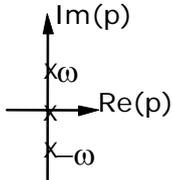
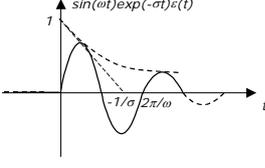
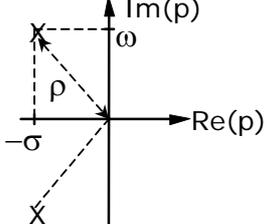


Fig. I.2 Affichage d'une transformée de Laplace ayant un zéro en $p=-1$ et deux pôles complexes conjugués en $p=-0.5\pm 0.5j$. (a : module ; b : argument ; c : esquisse 2D des pôles et zéros)

⁵ Plus précisément, dans la région du plan complexe où elle converge.

f(t)	F(p)
$\delta(t)$	1 Ni pôle ni zéro
$\varepsilon(t)$ 	$\frac{1}{p}$ 
$t\varepsilon(t)$	$\frac{1}{p^2}$ 
$e^{-at} \varepsilon(t)$ 	$\frac{1}{p+a}$ 
$te^{-at} \varepsilon(t)$	$\frac{1}{(p+a)^2}$ 
$\frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \varepsilon(t)$	$\frac{1}{p^2 + \omega^2}$ 
$\cos(\omega t) \varepsilon(t)$ 	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$ 
$\frac{1}{\omega^2} (1 - \cos(\omega t)) \varepsilon(t)$	$\frac{1}{p(p^2 + \omega^2)}$ 
$\frac{1}{\omega} e^{-\sigma t} \sin(\omega t) \varepsilon(t)$ 	$\frac{1}{p^2 + 2\sigma p + \rho^2}$ $(\sigma < \rho)$ 

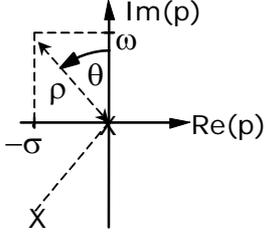
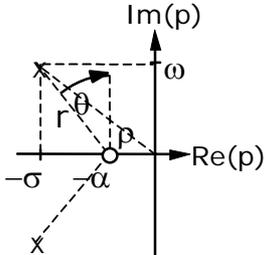
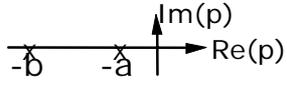
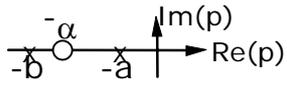
$\frac{1}{\rho^2}(1 - e^{-\sigma t} \frac{\rho}{\omega} \cos(\omega t - \theta))$ $\theta = \arctan\left(\frac{\sigma}{\omega}\right)$	$\frac{1}{p(p^2 + 2\sigma p + \rho^2)}$ $(\sigma < \rho)$ 
$\frac{r}{\omega} e^{-\sigma t} \cos(\omega t - \theta) \varepsilon(t)$ $\theta = \arctan\left(\frac{\alpha - \sigma}{\omega}\right)$ $r = \sqrt{\omega^2 + (\alpha - \sigma)^2}$	$\frac{p + \alpha}{p^2 + 2\sigma p + \rho^2}$ $(\sigma < \rho)$ 
$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt}) \varepsilon(t)$	$\frac{1}{p^2 + 2\sigma p + \rho^2}$ $(\sigma > \rho)$ $= \frac{1}{(p+a)(p+b)}$ 
$(Ke^{-at} + (1-K)e^{-bt}) \varepsilon(t)$ $K = \frac{\alpha - a}{b - a}$	$\frac{(p + \alpha)}{p^2 + 2\sigma p + \rho^2}$ $(\sigma > \rho)$ $= \frac{(p + \alpha)}{(p+a)(p+b)}$ 

Table I.1 Transformée de Laplace des signaux usuels (avec $a, b, \sigma, \omega, \rho, \theta \in \mathbb{R}$)

I.3 Propriétés fondamentales

Il est facile de démontrer les propriétés suivantes :

$L_1 [af(t) + bg(t)] = aF(p) + bG(p) \quad (\text{linéarité})$	(1.3)
$L_1 \left[\frac{df(t)}{dt} \right] = pF(p) - f(0_-) \quad (\text{dérivée})$	(1.4)
$L_1 \left[\int_0^t f(t) dt \right] = \frac{F(p)}{p} \quad (\text{intégrale})$	(1.5)
$L_1 [f(t - \tau)] = e^{-p\tau} F(p) \quad (\text{retard temporel})$	(1.6)
$L_1 [e^{-\sigma t} f(t)] = F(p + \sigma) \quad (\text{translation de la transformée})$	(1.7)
$L_1 [f(t) * g(t)] = F(p)G(p) \quad (\text{convolution})$	(1.8)
$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) \quad (\text{théorème de la valeur initiale})$ <p style="text-align: center;">(à condition que ces limites existent)</p>	(1.9)

$$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \quad (\text{théorème de la valeur finale}) \quad (I.10)$$

(à condition que ces limites existent)

$$L_I \left[\sum_{k=0}^{\infty} f(t-kT)\varepsilon(t-kT) \right] = \frac{F(p)}{1-e^{-pT}} \quad (\text{périodification}) \quad (I.11)$$

Exemple I.3

$$L_I \left[\frac{df(t)}{dt} \right] = \int_{0_-}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt \stackrel{\text{par parties}}{=} \left[f(t)e^{-pt} \right]_{0_-}^{\infty} - \int_{0_-}^{\infty} (-p)f(t)e^{-pt} dt = pF(p) - f(0_-)$$

$$\begin{aligned} L_{II} [f(t) * g(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau) d\tau \right) e^{-pt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-p\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)e^{-p(t-\tau)} d(t-\tau) \\ &= F(p)G(p) \end{aligned}$$

NB : On constate que cette propriété n'est vraie *stricto sensu* que pour la transformée de Laplace *bilatérale* L_{II} , vu les bornes d'intégration utilisées ci-dessus. Elle reste donc également vraie en transformée de Laplace unilatérale à condition que les fonctions soient causales.

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) \stackrel{(I.3)}{=} f(0_-) + \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\int_{0_-}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt \right) = f(0_-) + (f(0_+) - f(0_-)) = f(0_+)$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) \stackrel{(I.3)}{=} f(0_-) + \lim_{p \rightarrow 0} \left(\int_{0_-}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt \right) = f(0_-) + (f(\infty) - f(0_-)) = f(\infty)$$

Ces deux propriétés sont très importantes en pratique : elle permettent de vérifier, dans une certaine mesure, l'exactitude d'une transformée $F(p)$ après calcul, si on connaît par ailleurs les valeurs limites de $f(t)$.

$$L_I \left[\sum_{k=0}^{\infty} f(t-kT)\varepsilon(t-kT) \right] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-pkT} F(p) = F(p) \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-pT})^k = \frac{F(p)}{1-e^{-pT}}$$

I.4 Transformée inverse

La transformée de Laplace inverse unilatérale $f(t)$ d'une fonction $F(p)$ est définie par :

$$L_I^{-1} [F(p)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} F(p) \exp(pt) dp \quad (I.12)$$

où le chemin d'intégration peut être choisi quelconque dans le plan complexe à condition de rester dans le domaine de convergence de $F(p)$.

En pratique, comme les transformées $F(p)$ de la plupart des signaux usuels sont des fractions rationnelles $N(p)/D(p)$, il suffit de les décomposer en fractions simples et d'utiliser la propriété de linéarité de la transformée de Laplace. Le développement qui suit est la base du *calcul opérationnel* et porte le nom de *développement d'Heaviside*.

I.4.1 Pôles simples

On suppose pour commencer que $d^\circ(N(p)) < d^\circ(D(p))$ et que les pôles p_i de $F(p)$ (c'est-à-dire les zéros de $D(p)$) sont simples :

$$F(p) = \frac{N(p)}{(p-p_1)(p-p_2)\dots(p-p_m)} \quad \text{avec } p_i \neq p_j \text{ si } i \neq j \quad (I.13)$$

On peut alors toujours écrire :

$$F(p) = \frac{\underline{A}_1}{p-p_1} + \frac{\underline{A}_2}{p-p_2} + \dots + \frac{\underline{A}_m}{p-p_m} \quad (I.14)$$

avec $\underline{A}_i = F(p)(p-p_i)|_{p=p_i}$

Les coefficients complexes \underline{A}_i sont appelés les *résidus* de leurs pôles respectifs. On en déduit :

$$f(t) = (\underline{A}_1 e^{p_1 t} + \underline{A}_2 e^{p_2 t} + \dots + \underline{A}_m e^{p_m t}) \varepsilon(t) \quad (I.15)$$

Exemple I.4

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{1}{p^2 + 3p + 2} = \frac{1}{(p+1)(p+2)} \\ &= \frac{1}{p+1} + \frac{-1}{p+2} \\ f(t) &= (e^{-t} - e^{-2t}) \varepsilon(t) \end{aligned}$$

Exemple I.5

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{p+1}{p^2 + 4} = \frac{p+1}{(p-j2)(p+j2)} \\ &= \frac{\underline{A}_1}{p-j2} + \frac{\underline{A}_2}{p+j2} \quad \text{avec} \quad \underline{A}_1 = \frac{p+1}{(p+j2)} \Big|_{p=j2} = \frac{1+j2}{j4} = \frac{1}{2} - \frac{j}{4} = \underline{A}_2^* \\ f(t) &= (\underline{A}_1 e^{j2t} + \underline{A}_1^* e^{-j2t}) \varepsilon(t) \\ &= 2\Re(\underline{A}_1 e^{j2t}) \varepsilon(t) \\ &= 2(\Re(\underline{A}_1) \cos(2t) - \Im(\underline{A}_1) \sin(2t)) \varepsilon(t) \\ &= \left(\cos(2t) + \frac{1}{2} \sin(2t) \right) \varepsilon(t) \end{aligned}$$

Ce résultat concorde tout à fait avec les transformées de sin et cos de la Table 1.1

I.4.2 Pôles doubles

Supposons maintenant qu'on a toujours $d^\circ(N(p)) < d^\circ(D(p))$, mais que $F(p)$ possède des pôles doubles⁶ :

⁶ Nous ne considérerons pas ici le cas des pôles de multiplicité supérieure à deux, peu utile à l'ingénieur.

$$F(p) = \frac{N(p)}{\dots(p-p_i)^2\dots} \quad (I.16)$$

On peut alors toujours écrire :

$$F(p) = \dots + \frac{A_{i1}}{p-p_i} + \frac{A_{i2}}{(p-p_i)^2} + \dots$$

avec $\underline{A_{i2}} = F(p)(p-p_i)^2 \Big|_{p=p_i}$ (I.17)

$$\underline{A_{i1}} = \frac{d(F(p)(p-p_i)^n)}{dp} \Big|_{p=p_i}$$

On en déduit que la contribution des fractions simples dues aux pôles doubles sont :

$$f(t) = \dots + (\underline{A_{i1}}e^{p_i t} + \underline{A_{i2}}te^{p_i t})\varepsilon(t) + \dots \quad (I.18)$$

Exemple I.6

$$F(p) = \frac{3p}{p^2 + 4p + 2} = \frac{3p}{(p+2)^2} = \frac{-6}{(p+2)^2} + \frac{3}{p+2}$$

$$f(t) = (-6te^{-2t} + 3e^{-2t})\varepsilon(t)$$

I.4.3 Fraction rationnelle quelconque

Dans le cas le plus général, il se peut que l'on ait non seulement des pôles multiples, mais également que le $d^\circ(N(p)) \geq d^\circ(D(p))$. Il suffit alors de commencer par procéder à la division du polynôme $N(p)$ par $D(p)$:

$$F(p) = \frac{Q(p)D(p) + R(p)}{D(p)} = Q(p) + \frac{R(p)}{D(p)} \quad \text{avec } d^\circ(R) < d^\circ(p) \quad (I.19)$$

L'inversion de la fraction rationnelle en $R(p)$ se fait comme précédemment, et l'inversion de $Q(p)$ donne :

$$F(p) = (q_0 + q_1 p + \dots + q_k p^k) + \dots$$

$$f(t) = (q_0 \delta(t) + q_1 \delta'(t) + \dots + q_k \delta^{(k-1)}(t)) + \dots \quad (I.20)$$

La présence du polynôme $Q(p)$ influence donc uniquement le comportement de $f(t)$ autour de 0.

Exemple I.7

$$F(p) = \frac{p^3 + 3p^2 + 4p + 3}{p^2 + 2p + 1} = p + 1 + \frac{p+2}{p^2 + 2p + 1} = p + 1 + \frac{p+2}{(p+1)^2}$$

$$= p + 1 + \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{p+1}$$

$$f(t) = \delta'(t) + \delta(t) + (te^{-t} + e^{-t})\varepsilon(t)$$

I.4.4 Conclusion

On constate que le lien entre une transformée de Laplace et le signal correspondant est **beaucoup plus simple qu'il n'y paraît à première vue**. En effet :

Mis à part les zéros en $p=0$, qui font apparaître des impulsions de Dirac et leurs dérivées, le type des composantes présentes dans le signal est déterminé uniquement par les pôles. Chaque pôle correspond en général à une exponentielle imaginaire amortie de pulsation égale à sa partie imaginaire et d'amortissement égal à sa partie réelle (qui doit être négative pour correspondre à un amortissement; dans le cas contraire, le signal est amplifié au cours du temps). En particulier :

- Pôle en 0 : terme constant
- Pôles imaginaires purs (toujours par paire) : cisoïde non amortie, de pulsation déterminée par la position des pôles sur l'axe imaginaire
- Pôles complexes conjugués (toujours par paire) : cisoïde amortie, de pulsation déterminée par la partie imaginaire des pôles, et d'amortissement déterminé par leur partie réelle
- Pôle réel : exponentielle décroissante d'amortissement déterminé par la position du pôle sur l'axe réel

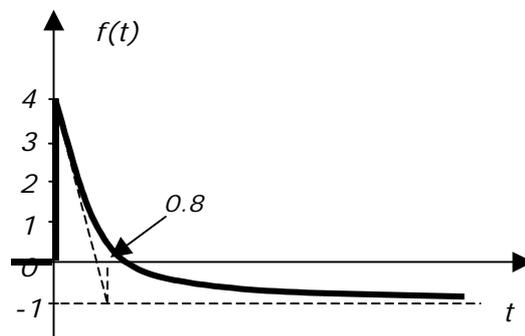
Un pôle double correspond à une multiplication des fonctions ci-dessus par t .

Les zéros dans le plan complexe ne font que modifier le résidu de ces pôles, et agissent donc uniquement sur l'amplitude et la phase initiale des composantes liées aux pôles.

Exercices

Exercice I.1

On demande de calculer la transformée de Laplace du signal suivant, et de vérifier les théorèmes de la valeur finale et initiale :

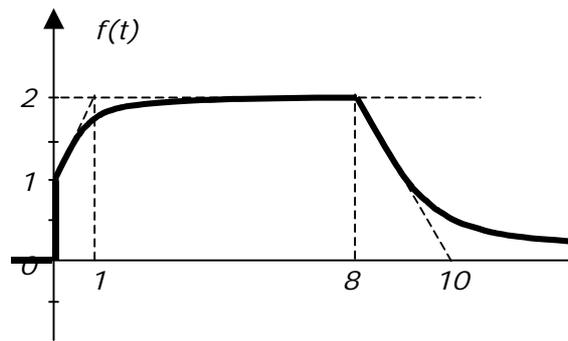


Solution

$$F(p) = \frac{4p - 1.25}{p(p + 1.25)}$$

Exercice I.2

On demande de calculer la transformée de Laplace du signal suivant, et de vérifier les théorèmes de la valeur finale et initiale :

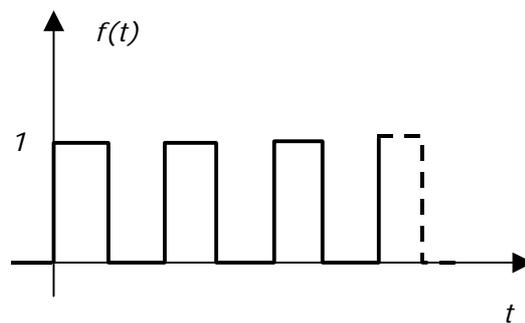


Solution

$$F(p) = \frac{2}{p} - \frac{1}{p+1} + e^{-8p} \left(\frac{2}{p + \frac{1}{2}} - \frac{2}{p} \right)$$

Exercice I.3

On demande de calculer la transformée de Laplace de l'onde carrée périodique suivante, et de vérifier le théorème de la valeur initiale :



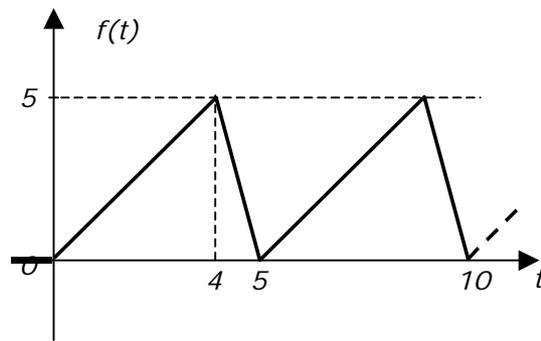
Solution

$f(t)$ peut clairement être obtenu à partir d'une seule période $f_1(t)$, que l'on additionne à elle-même une infinité de fois, en la retardant à chaque fois de T . Il vient donc :

$$F(p) = \frac{1}{p} \frac{(1 - e^{-p\frac{T}{2}})}{(1 - e^{-pT})}$$

Exercice I.4

On demande de calculer la transformée de Laplace du signal suivant, et de vérifier le théorème de la valeur initiale :



Solution

$f(t)$ peut clairement être obtenu à partir d'une seule période $f_1(t)$, que l'on additionne à elle-même une infinité de fois, en la retardant à chaque fois de $T=5s$. Il vient :

$$F(p) = \frac{1}{p^2} \frac{\left(\frac{5}{4} - \frac{25}{4}e^{-4p} + 5e^{-5p}\right)}{(1 - e^{-5p})}$$

Exercice I.5

On demande de calculer et d'esquisser la transformée de Laplace inverse de la fonction suivante, et de vérifier les théorèmes des valeurs initiales et finales :

$$F(p) = \frac{(p+1)e^{-5p}}{p^2(p+10)}$$

Solution

$$f(t) = 0.1(t-5)\varepsilon(t-5) + 0.09\varepsilon(t-5) - 0.09e^{-10(t-5)}\varepsilon(t-5)$$

Exercice I.6

On demande de calculer et d'esquisser la transformée de Laplace inverse de la fonction suivante, et de vérifier les théorèmes des valeurs initiales et finales :

$$F(p) = \frac{p^2}{p^2 + 6p + 8}$$

Solution

$$f(t) = \delta(t) + 2e^{-2t}\varepsilon(t) - 8e^{-4t}\varepsilon(t)$$

Exercice I.7

On demande de calculer et d'esquisser la transformée de Laplace inverse de la fonction suivante, et de vérifier les théorèmes des valeurs initiales et finales :

$$F(p) = \frac{p^3 + p^2 + 2p + 1}{p^3 + 3p^2 + p + 3}$$

Solution

$$f(t) = \delta(t) + \left(-2.3 e^{-3t} + 0.316 \cos(t - 0.322)\right)\varepsilon(t)$$

NB : le théorème de la valeur finale est inapplicable ici.

Exercice I.8

On demande de calculer et d'esquisser la transformée de Laplace inverse de la fonction suivante, et de vérifier les théorèmes des valeurs initiales et finales :

$$F(p) = \frac{1}{(p^2 + 4)(p^2 - 4)}$$

Solution

$$f(t) = \left(\frac{1}{32}(e^{2t} - e^{-2t}) + \frac{1}{16} \cos\left(2t - \frac{3\pi}{2}\right) \right) \varepsilon(t)$$

NB : le théorème de la valeur finale est inapplicable ici.

NB2 : $F(p)$ possède des pôles à gauche de l'axe imaginaire, donc $f(t)$ n'est pas bornée.

Exercice I.9

Avec l'aide de Matlab (fonctions `roots` et `residue`), trouver la transformée de Laplace inverse de la fonction suivante :

$$F(p) = \frac{9.497E6p^2}{p^4 + 3.671E3p^3 + 7.197E8p^2 + 1.303E12p + 1.259E17}$$

Solution

$$f(t) = \left(1965.2e^{-978t} \cos(20151t - 1.52) + 1713.1e^{-857t} \cos(17566t + 1.62) \right) \varepsilon(t)$$