TRANSFORMATION DE LAPLACE (Corrigé des exercices)

1. Déterminer la transformée de Laplace de a) $t \mapsto e^{at}$, b) $t \mapsto t^n e^{at}$, c) $t \mapsto \sin \omega t$, d) $t \mapsto e^{-4t}\sin(5t)$, e) $t \mapsto t^2 \cos t$, f) $t \mapsto \sin t\, \mathbb{1}_{]3,+\infty[}(t)$, g) $t \mapsto t\, \mathbb{1}_{]0,1[}(t) + (2-t)\mathbb{1}_{[1,2[}(t)$.

---

a) $\mathcal{L}(e^{at})(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{at}e^{-pt}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p-a)t}\,dt = \left[-\frac{1}{p-a}e^{-(p-a)t}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p-a}$.

b) D'après la propriété de dérivée de la transformation :

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{at}e^{-pt}\,dt = (-1)^n \frac{d^n}{dp^n}\left(\mathcal{L}(e^{at})\right)(p) = (-1)^n \frac{d^n}{dp^n}\left(\frac{1}{p-a}\right) = \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$$

c) $\mathcal{L}(e^{i\omega t})(p) = \dfrac{1}{p-i\omega} = \dfrac{p+i\omega}{p^2+\omega^2} = \mathcal{L}(\cos\omega t)(p) + i\mathcal{L}(\sin\omega t)(p)$. En identifiant partie réelle et partie imaginaire, on a :

$$\mathcal{L}(\cos\omega t)(p) = \frac{p}{p^2+\omega^2} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{L}(\sin\omega t)(p) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

d) $\mathcal{L}(e^{-4t}\sin 5t)(p) = \mathcal{L}(\sin 5t)(p+4) = \dfrac{5}{(p+4)^2+25}$.

e) D'après la propriété de dérivée de la transformation :

$$\mathcal{L}(t^2\cos t)(p) = (-1)^2 \frac{d^2}{dp^2}\left(\mathcal{L}(\cos t)\right)(p) = \frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{p}{p^2+1}\right)$$

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{p}{p^2+1}\right) = \frac{1}{p^2+1} - \frac{2p^2}{(p^2+1)^2}$$

$$\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{p}{p^2+1}\right) = \frac{-2p}{(p^2+1)^2} - \frac{4p}{(p^2+1)^2} + \frac{8p^3}{(p^2+1)^3} = \frac{-6p(p^2+1)+8p^3}{(p^2+1)^3}$$

donc $\mathcal{L}(t^2\cos t)(p) = \dfrac{2p^3-6p}{(p^2+1)^3}$.

f) $\mathcal{L}(\sin t\, \mathbb{1}_{]3,+\infty[}(t))(p) = \displaystyle\int_3^{+\infty} \sin t\, e^{-pt}\,dt$: c'est la partie imaginaire de

$$\int_3^{+\infty} e^{it}e^{-pt}\,dt = \left[-\frac{1}{p-i}e^{-(p-i)t}\right]_3^{+\infty} = \frac{1}{p-i}e^{-3(p-i)} = \frac{p+i}{p^2+1}e^{-3p}(\cos 3 + i\sin 3)$$

donc $\mathcal{L}(\sin t\, \mathbb{1}_{]3,+\infty[}(t))(p) = \dfrac{e^{-3p}}{p^2+1}(\cos 3 + p\sin 3)$.

g) $\mathcal{L}(t\, \mathbb{1}_{]0,1[}(t) + (2-t)\mathbb{1}_{[1,2[}(t))(p) = \displaystyle\int_0^1 te^{-pt}\,dt + \int_1^2 (2-t)e^{-pt}\,dt$.

$$\int_0^1 te^{-pt}\,dt = \left[t \times \left(-\frac{1}{p}e^{-pt}\right)\right]_0^1 + \frac{1}{p}\int_0^1 e^{-pt}\,dt = -\frac{e^{-p}}{p} - \left[\frac{e^{-pt}}{p^2}\right]_0^1 = -\frac{e^{-p}}{p} - \frac{e^{-p}-1}{p^2}$$

$$\int_1^2 (2-t)e^{-pt}\,dt = \left[(2-t)\left(-\frac{1}{p}e^{-pt}\right)\right]_1^2 - \frac{1}{p}\int_1^2 e^{-pt}\,dt = \frac{e^{-p}}{p} + \left[\frac{e^{-pt}}{p^2}\right]_1^2 = \frac{e^{-p}}{p} + \frac{e^{-2p}-e^{-p}}{p^2}$$

Ainsi, $\mathcal{L}(t\,\mathbf{I}_{]0,1[}(t) + (2-t)\mathbf{I}_{[1,2[}(t))(p) = \dfrac{e^{-2p}-2e^{-p}+1}{p^2} = \dfrac{(e^{-p}-1)^2}{p^2}$.

---

2. Déterminer les originaux de a) $p \mapsto \dfrac{a}{p^2-a^2}$, b) $p \mapsto \dfrac{p^2}{(p+3)^3}$.

$$\frac{a}{p^2-a^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-a} - \frac{1}{p+a}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}(e^{at})(p) - \mathcal{L}(e^{-at})(p)\right) = \mathcal{L}\left(\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right)(p).$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'original de } p \mapsto \dfrac{a}{p^2-a^2} \text{ est } t \mapsto \operatorname{sh}(at)}$.

$$\frac{p^2}{(p+3)^3} = \frac{(p+3)^2}{(p+3)^3} - \frac{6p+9}{(p+3)^3} = \frac{1}{p+3} - \frac{6}{(p+3)^2} + \frac{9}{(p+3)^3}$$

En utilisant la propriété de dérivée, on a $-\dfrac{1}{(p+3)^2} = \mathcal{L}(te^{-3t})(p)$ et $\dfrac{2}{(p+3)^3} = \mathcal{L}(t^2e^{-3t})(p)$ donc $\dfrac{p^2}{(p+3)^3} = \mathcal{L}\left(e^{-3t}(1+6t+\dfrac{9}{2}t^2)\right)(p)$.

Ainsi, $\boxed{\text{l'original de } p \mapsto \dfrac{p^2}{(p+3)^3} \text{ est } t \mapsto e^{-3t}(1+6t+\dfrac{9}{2}t^2)}$.

---

3. Résoudre les équations différentielles suivantes : a) $x' + 3x = 0$, b) $x' + 3x = \cos(3t)$ avec $x(0) = 0$, c) $x'' + x = t$ avec $x(0) = 1$ et $x'(0) = 0$.

D'après la propriété de transformée de la dérivée, $\mathcal{L}(x')(p) = p\mathcal{L}(x)(p) - x(0) = p\overline{x}(p) - x(0)$. On a donc :

a) $p\overline{x}(p) - x(0) + 3\overline{x}(p) = 0$, soit $(p+3)\overline{x}(p) = x(0)$, et $\overline{x}(p) = \dfrac{x(0)}{p+3}$, ce qui donne, en remontant à l'original, $\boxed{x(t) = x(0)e^{-3t}}$.

b) On a ici $x(0) = 0$ mais $\mathcal{L}(\cos 3t)(p) = \dfrac{p}{p^2+9}$ donc $(p+3)\overline{x}(p) = \dfrac{p}{p^2+9}$ et

$$\overline{x}(p) = \frac{p}{(p+3)(p^2+9)} = \frac{\alpha}{p+3} + \frac{\beta}{p+3i} + \frac{\gamma}{p-3i}$$

avec $\alpha = \lim\limits_{p\to-3} \dfrac{p}{p^2+9} = -\dfrac{3}{18} = -\dfrac{1}{6}$, $\beta = \lim\limits_{p\to-3i} \dfrac{p}{(p+3)(p-3i)} = \dfrac{-3i}{-6i(3-3i)} = \dfrac{3+3i}{36} = \dfrac{1+i}{12}$ et $\gamma = \lim\limits_{p\to3i} \dfrac{p}{(p+3)(p+3i)} = \dfrac{3i}{6i(3+3i)} = \dfrac{3-3i}{36} = \dfrac{1-i}{12}$.

Ainsi, $\overline{x}(p) = \mathcal{L}\left(-\dfrac{1}{6}e^{-3t} + \dfrac{1+i}{12}e^{-3it} + \dfrac{1-i}{12}e^{3it}\right)(p) = \mathcal{L}\left(-\dfrac{1}{6}e^{-3t} + \dfrac{1}{6}\cos 3t + \dfrac{1}{6}\sin 3t\right)(p)$ et donc $\boxed{x(t) = \dfrac{1}{6}(\cos 3t + \sin 3t - e^{-3t})}$.

c) Toujours d'après la propriété de transformée de la dérivée,

$$\mathcal{L}(x'')(p) = p^2\mathcal{L}(x)(p) - px(0) - x'(0) = p^2\overline{x}(p) - p.$$

De plus, on a $\mathcal{L}(t)(p) = -\dfrac{d}{dp}\mathcal{L}(1)(p) = -\dfrac{d}{dp}\left(\dfrac{1}{p}\right) = \dfrac{1}{p^2}$. Ainsi, en prenant la transformée de Laplace des deux membres de l'équation,

$$p^2\overline{x}(p) - p + \overline{x}(p) = \frac{1}{p^2}$$

On a donc $(p^2+1)\overline{x}(p) = p + \dfrac{1}{p^2} = \dfrac{p^3+1}{p^2}$, soit

$$\overline{x}(p) = \frac{p^3+1}{p^2(p^2+1)} = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{p^2} + \frac{\gamma}{p+i} + \frac{\delta}{p-i}$$

avec $\beta = \lim\limits_{p\to 0} \dfrac{p^3+1}{p^2+1} = 1$, $\gamma = \lim\limits_{p\to -i} \dfrac{p^3+1}{p^2(p-i)} = \dfrac{1+i}{2i} = \dfrac{1-i}{2}$, $\delta = \lim\limits_{p\to i} \dfrac{p^3+1}{p^2(p+i)} = \dfrac{1-i}{-2i} = \dfrac{1+i}{2}$
et $\alpha+\gamma+\delta = \lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{p^3+1}{p(p^2+1)} = 1$ donc $\alpha = 1 - \dfrac{1-i}{2} - \dfrac{1+i}{2} = 0$.

Ainsi, $\overline{x}(p) = \dfrac{1}{p^2} + \dfrac{1-i}{2}\dfrac{1}{p+i} + \dfrac{1+i}{2}\dfrac{1}{p-i} = \dfrac{1}{p^2} + \dfrac{(1-i)(p-i)+(1+i)(p+i)}{2(p^2+1)}$, soit

$$\overline{x}(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{p-1}{p^2+1}$$

Or $\dfrac{1}{p^2} = \mathcal{L}(t)(p)$, $\dfrac{p}{p^2+1} = \mathcal{L}(\cos t)(p)$ et $\dfrac{1}{p^2+1} = \mathcal{L}(\sin t)(p)$, d'où $\overline{x}(p) = \mathcal{L}\left(t + \cos t - \sin t\right)(p)$ et donc, par unicité de la transformation de Laplace, $\boxed{x(t) = t + \cos t - \sin t}$.

---

4. Résoudre les systèmes différentiels suivants : a) $\begin{cases} x' = 2x - 3y \ ; \ x(0) = 8 \\ y' = y - 2x \ ; \ y(0) = 3 \end{cases}$;
b) $\begin{cases} f_0'(t) = 2f_1(t) - 6f_0(t) \ ; \ f_0(0) = 1 \\ f_1'(t) = 6f_0(t) - 5f_1(t) \ ; \ f_1(0) = 0 \end{cases}$ (issu d'un problème de fiabilité).

On transforme les systèmes en utilisant les transformations de Laplace, sachant que

$$\mathcal{L}(f')(p) = p\mathcal{L}(f)(p) - f(0).$$

a) $\begin{cases} p\overline{x}(p) - x(0) = 2\overline{x}(p) - 3\overline{y}(p) \\ p\overline{y}(p) - y(0) = \overline{y}(p) - 2\overline{x}(p) \end{cases}$, soit $\begin{cases} (p-2)\overline{x}(p) - 8 = -3\overline{y}(p) \\ (p-1)\overline{y}(p) - 3 = -2\overline{x}(p) \end{cases}$. Afin d'éliminer $\overline{x}(p)$, on multiplie la première équation par 2 et la deuxième par $p-2$ et on obtient

$$2(p-2)\overline{x}(p) = 16 - 6\overline{y}(p) = 3(p-2) - (p-1)(p-2)\overline{y}(p),$$

soit

$$[(p-2)(p-1) - 6]\overline{y}(p) = (p^2 - 3p - 4)\overline{y}(p) = 3p - 22$$

Ainsi,

$$\overline{y}(p) = \frac{3p-22}{(p-4)(p+1)} = \frac{\alpha}{p-4} + \frac{\beta}{p+1}$$

avec $\alpha = \lim\limits_{p\to 4} \dfrac{3p-22}{p+1} = \dfrac{12-22}{5} = -2$ et $\beta = \lim\limits_{p\to -1} \dfrac{3p-22}{p-4} = \dfrac{-3-22}{-5} = 5$ donc

$$\overline{y}(p) = -\frac{2}{p-4} + \frac{5}{p+1} = -2\mathcal{L}(e^{4t})(p) + 5\mathcal{L}(e^{-t})(p).$$

On en déduit $\boxed{y(t) = -2e^{4t} + 5e^{-t}}$ puis $x(t) = \frac{1}{2}(y(t) - y'(t)) = \frac{1}{2}\left(-2e^{4t} + 5e^{-t} + 8e^{4t} + 5e^{-t}\right)$, soit $\boxed{x(t) = 3e^{4t} + 5e^{-t}}$.

b) $\begin{cases} p\overline{f_0}(p) - f_0(0) = 2\overline{f_1}(p) - 6\overline{f_0}(p) \\ p\overline{f_1}(p) - f_1(0) = 6\overline{f_0}(p) - 5\overline{f_1}(p) \end{cases}$, soit, avec $f_0(0) = 1$ et $f_1(0) = 0$,

$$\begin{cases} (p+6)\overline{f_0}(p) = 2\overline{f_1}(p) + 1 \\ (p+5)\overline{f_1}(p) = 6\overline{f_0}(p) \end{cases}$$

Afin d'éliminer $\overline{f_1}(p)$, on multiplie la première équation par $p+5$ et la deuxième par 2 et on obtient

$$(p+6)(p+5)\overline{f_0}(p) - (p+5) = 12\overline{f_0}(p),$$

soit

$$[(p+6)(p+5) - 12]\overline{f_0}(p) = p+5.$$

On en déduit

$$\overline{f_0}(p) = \frac{p+5}{p^2+11p+18} = \frac{\alpha}{p+9} + \frac{\beta}{p+2}$$

avec $\alpha = \lim\limits_{p\to -9} \frac{p+5}{p+2} = \frac{-4}{-7} = \frac{4}{7}$ et $\beta = \lim\limits_{p\to -2} \frac{p+5}{p+9} = \frac{3}{7}$.

On a donc $\overline{f_0}(p) = \frac{4}{7}\mathcal{L}(e^{-9t})(p) + \frac{3}{7}\mathcal{L}(e^{-2t})(p)$, soit $\boxed{f_0(t) = \frac{4}{7}e^{-9t} + \frac{3}{7}e^{-2t}}$ et

$$f_1(t) = \frac{1}{2}f_0'(t) + 3f_0(t) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{7} \times (-9e^{-9t}) + \frac{1}{2} \times \frac{3}{7} \times (-2e^{-2t}) + \frac{12}{7}e^{-9t} + \frac{9}{7}e^{-2t}$$

soit $\boxed{f_1(t) = -\frac{6}{7}e^{-9t} + \frac{6}{7}e^{-2t}}$.

---

5. Exprimer Φ en fonction de f si on a, pour tout $x > 0$, $\Phi(x) - \lambda \int_0^x e^{x-y}\Phi(y)\,dy = f(x)$.

On prend la transformée de Laplace des deux membres. D'après la propriété sur la convolution :

$$\mathcal{L}\left(\int_0^x e^{x-y}\Phi(y)\,dy\right)(p) = \mathcal{L}(e^t)(p)\mathcal{L}(\Phi(t))(p)$$

On a alors $\mathcal{L}(\Phi(t))(p) - \lambda\mathcal{L}(e^t)(p)\mathcal{L}(\Phi(t))(p) = \mathcal{L}(f(t))(p) = (1 - \frac{\lambda}{p-1})\mathcal{L}(\Phi(t))(p)$. Ainsi,

$$\overline{\Phi}(p) = \frac{p-1}{p-1-\lambda}\overline{f}(p) = \overline{f}(p) + \frac{\lambda}{p-1-\lambda}\overline{f}(p)$$

avec $\frac{\lambda}{p-1-\lambda} = \mathcal{L}(\lambda e^{(\lambda+1)t})(p)$ et, toujours d'après la propriété sur la convolution,

$$\frac{\lambda}{p-1-\lambda}\overline{f}(p) = \mathcal{L}\left(\lambda \int_0^x e^{(\lambda+1)(x-u)}f(u)\,du\right)(p)$$

et donc, par unicité de la transformation de Laplace,

$$\boxed{\Phi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x e^{(\lambda+1)(x-u)}f(u)\,du.}$$

Thème d'étude

On considère une unité de service (guichet par exemple) à un seul serveur, sans rejet de clients.

Notations :
Pour le k-ième client qui se présente dans le système, on note
- t_{A_k} l'instant de son arrivée ;
- t_{D_k} l'instant de son départ ;
- $\tau_k = t_{A_k} - t_{A_{k-1}}$ l'intervalle de temps entre la $(k-1)$-ième arrivée et la k-ième arrivée ;
- w_k le temps d'attente dans la file, éventuellement nul, du k-ième client ;
- v_k le temps de service du k-ième client ;
- u_k le temps passé dans le système par le k-ième client.

On suppose que la loi de τ_k est indépendante de k, de densité a, et que la loi de v_k est indépendante de k, de densité v, de fonction de répartition H. On note F_k la fonction de répartition de w_k et G_k la fonction de répartition de u_k.

0) Représenter sur l'axe des temps les différentes quantités précédentes, en distingant les cas $w_k > 0$ et $w_k = 0$.
1) Exprimer u_k en fonction de w_k et de v_k. En déduire que, pour tout $x > 0$,

$$G_k(x) = \int_0^x F_k(x-t)v(t)dt.$$

2) Exprimer w_k en fonction de u_{k-1} et de τ_k. En déduire que, pour tout $x > 0$,

$$F_k(x) = \int_0^{+\infty} G_{k-1}(x+t)a(t)dt.$$

3) Déterminer $F_1(x)$ et montrer que les résultats précédants permettraient de déterminer $F_k(x)$ et $G_k(x)$ pour tout k. Écrire les équations vérifiées par F et G en régime permanent (où $F = \lim\limits_{k\to+\infty} F_k$ et $F = \lim\limits_{k\to+\infty} F_k$).
4) On se propose de résoudre ces équations dans le cas où la densité de la loi des interarrivées et de la loi de service sont exponentielles ($a(t) = \lambda e^{-\lambda t}\ \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(t)$ et $v(t) = \mu e^{-\mu t}\ \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(t)$).
i) Montrer que $F(x) = e^{\lambda x}F(0) - \lambda e^{\lambda x}\displaystyle\int_0^x e^{-\lambda t}G(t)dt$ pour tout $x > 0$, puis que

$$\overline{F}(p) = \frac{F(0) - \lambda\overline{G}(p)}{p-\lambda} \text{ et que } \overline{G}(p) = \frac{\mu\overline{F}(p)}{\mu + p}.$$

ii) En déduire que $\overline{F}(p) = \dfrac{p+\mu}{p(p+\mu-\lambda)}F(0)$, puis que $F(x) = \left(\mu - \lambda e^{-(\mu-\lambda)x}\right)\dfrac{F(0)}{\mu-\lambda}$. Montrer enfin que $F(x) = 1 - \dfrac{\lambda}{\mu}e^{-(\mu-\lambda)x}$ et que G est la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre $\mu - \lambda$.

1) Si $t_{D_{n-1}} \leq t_{A_n}$, la n-ième personne n'attend pas et $w_n = 0$. Sinon, elle attend $t_{D_{n-1}} - t_{A_n}$. On a donc $w_n = \max(t_{D_{n-1}} - t_{A_n}, 0)$; or $u_{n-1} = t_{D_{n-1}} - t_{A_{n-1}}$ et $\tau_n = t_{A_n} - t_{A_{n-1}}$, donc

$\boxed{w_n = \max(u_{n-1} - \tau_n, 0)}$.
$F_n(x) = P([w_n \leq x])$. Pour $x \geq 0$, $[\max(u_{n-1} - \tau_n, 0) \leq x] = [u_{n-1} - \tau_n \leq x]$ et

$$\begin{aligned} F_n(x) &= P([u_{n-1} - \tau_n \leq x]) = \int_0^{+\infty} P([u_{n-1} - \tau_n \leq x]/[\tau_n = t]) f_{\tau_n}(t)dt \\ &= \int_0^{+\infty} P([u_{n-1} \leq x + t]/[\tau_n = t]) f_{\tau_n}(t)dt = \int_0^{+\infty} P([u_{n-1} \leq x + t]) f_{\tau_n}(t)dt \end{aligned}$$

car u_{n-1} et τ_n sont clairement indépendantes, et, comme la densité de la loi des interarrivées est a, on a, $\boxed{\text{pour } x > 0,\ F_n(x) = \int_0^{+\infty} G_{n-1}(x+t)a(t)dt}$.

2 Le temps dans le système étant égal à la somme du temps d'attente et du temps de service, on a $\boxed{u_n = w_n + v_n}$.

$$\begin{aligned} G_n(x) &= P([u_n \leq x]) = P([w_n + v_n \leq x]) = \int_0^{+\infty} P([w_n + v_n \leq x]/[v_n = t]) f_{v_n}(t)dt \\ &= \int_0^{x} P([w_n \leq x - t]/[v_n = t]) f_{v_n}(t)dt = \int_0^{x} P([w_n \leq x - t]) f_{v_n}(t)dt \end{aligned}$$

car w_n et v_n sont clairement indépendantes, et, la densité de la loi de service étant s, on a, $\boxed{\text{pour } x > 0,\ G_n(x) = \int_0^{x} F_n(x-t)s(t)dt}$, soit $\boxed{G_n = F_n * s}$.

3) F_1 fonction de répartition de w_1. Or $w_1 = 0$ car la première personne n'attend pas. Donc, $\boxed{\text{pour } x > 0,\ F_1(x) = P([w_1 \leq x]) = 1}$. On a alors, $G_1(x) = \int_0^x s(t)dt$ puis $F_2(x) = \int_0^{+\infty} G_1(t+x)a(t)dt$, puis $G_2(x) = \int_0^x F_2(x-t)s(t)dt$... De proche en proche, on détermine tous les F_n et tous les G_n.

Le régime permanent s'obtient en passant à la limite à l'infini. Si $F = \lim\limits_n F_n$ et $G = \lim\limits_n G_n$, on a alors $\boxed{F(x) = \int_0^{+\infty} G(x+t)a(t)dt \text{ et } G(x) = \int_0^x F(x-t)s(t)dt}$.

4) i) Dans le cas où la densité de la loi des interarrivées et de la loi de service sont exponentielles, on a $a(t) = \lambda e^{-\lambda t}\,\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(t)$ et $s(t) = \mu e^{-\mu t}\,\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(t)$. En faisant le changement de variable $u = x + t$ dans $F(x)$, on a alors

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^{+\infty} G(x+t)\lambda e^{-\lambda t}dt = \int_x^{+\infty} G(u)\lambda e^{-\lambda(u-x)}du \\ &= \lambda e^{\lambda x}\int_x^{+\infty} G(u)e^{-\lambda u}du = \lambda e^{\lambda x}\int_0^{+\infty} G(u)e^{-\lambda u}du - \lambda e^{\lambda x}\int_0^{x} G(u)e^{-\lambda u}du \end{aligned}$$

Or $F(0) = \lambda\int_0^{+\infty} G(t)e^{-\lambda t}dt$ donc $\boxed{\text{pour } x > 0,\ F(x) = e^{\lambda x}F(0) - \lambda e^{\lambda x}\int_0^x e^{-\lambda t}G(t)dt}$.

On passe alors à la transformée de Laplace définie par $\overline{f}(p) = \int_0^{+\infty} e^{-px}f(x)dx$. Rappelons que si $f(x) = e^{\alpha x}$, alors $\overline{f}(p) = \dfrac{1}{p-\alpha}$, que $\overline{f * g}(p) = \overline{f}(p)\overline{g}(p)$, que $\overline{f'}(p) = p\overline{f}(p) - f(0)$, (donc si

$f(x)=\int_0^x g(t)dt$, $\overline{f}(p)=\frac{1}{p}\overline{g}(p))$ et que si $f(x)=e^{\alpha x}g(x)$, alors $\overline{f}(p)=\overline{g}(p-\alpha)$.

On a alors, en utilisant en plus la linéarité, $\boxed{\overline{F}(p)=\frac{F(0)}{p-\lambda}-\lambda\frac{\overline{G}(p)}{p-\lambda}}$.
En effet, si $f_1(x)=e^{\lambda x}f_2(x)$ avec $f_2(x)=\int_0^x f_3(x)dx$ où $f_3(x)=e^{-\lambda x}G(x)$, on a sucessivement $\overline{f_1}(p)=\overline{f_2}(p-\lambda)=\frac{\overline{f_3}(p-\lambda)}{p-\lambda}$ et $\overline{f_3}(p)=\overline{G}(p+\lambda)$ d'où $\overline{f_1}(p)=\frac{\overline{G}(p-\lambda+\lambda)}{p-\lambda}=\frac{\overline{G}(p)}{p-\lambda}$.
On a donc $\boxed{\overline{F}(p)=\frac{F(0)-\lambda\overline{G}(p)}{p-\lambda}}$. De plus, $G=F*s$, et $\overline{s}(p)=\frac{\mu}{p+\mu}$, donc $\boxed{\overline{G}(p)=\frac{\mu\overline{F}(p)}{p+\mu}}$.

ii) De $\overline{F}(p)=\frac{F(0)}{p-\lambda}-\frac{\lambda}{p-\lambda}\frac{\mu\overline{F}(p)}{p+\mu}$, on déduit $\overline{F}(p)\left[1+\frac{\lambda\mu}{(p-\lambda)(p+\mu)}\right]=\frac{F(0)}{p-\lambda}$.
$\overline{F}(p)\frac{(p-\lambda)(p+\mu)+\lambda\mu}{(p-\lambda)(p+\mu)}=\frac{F(0)}{p-\lambda}$, d'où $\overline{F}(p)=\frac{(p+\mu)F(0)}{p^2+\mu p-\lambda p}=\frac{p+\mu}{p(p-(\lambda-\mu))}F(0)$.
On décompose la fraction rationnelle de p en éléments simples :

$$\frac{p+\mu}{p(p-(\lambda-\mu))}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p-(\lambda-\mu)}$$

avec $A=\frac{\mu}{\mu-\lambda}$ et $B=\frac{\lambda}{\lambda-\mu}=-\frac{\lambda}{\mu-\lambda}$ donc $\overline{F}(p)=\frac{F(0)}{\mu-\lambda}\left[\frac{\mu}{p}-\frac{\lambda}{p-(\lambda-\mu)}\right]$. On a vu que si $g_\alpha(x)=e^{\alpha x}$, alors $\overline{g_\alpha}(p)=\frac{1}{p-\alpha}$, d'où $\overline{F}(p)=\frac{F(0)}{\mu-\lambda}\left[\mu\overline{g_0}(p)-\lambda\overline{g_{\lambda-\mu}}(p)\right]$. Par unicité et linéarité de la transformée de Laplace, on en déduit que $F(x)=\frac{F(0)}{\mu-\lambda}\left[\mu-\lambda e^{-(\mu-\lambda)x}\right]$.
Pour trouver $F(0)$, on utilise alors $\lim_{x\to+\infty}F(x)=1$: $1=\frac{\mu}{\mu-\lambda}F(0)$ donc $\frac{F(0)}{\mu-\lambda}=\frac{1}{\mu}$ et finalement $\boxed{F(x)=1-\frac{\lambda}{\mu}e^{-(\mu-\lambda)x}\text{ si }x\geq 0}$.
Puis $\overline{G}(p)=\overline{F}(p)\frac{\mu}{p+\mu}=\frac{\mu F(0)}{p(p-(\lambda-\mu))}=F(0)\left[\frac{C}{p}+\frac{D}{p-(\lambda-\mu)}\right]$ avec $C=\frac{\mu}{\mu-\lambda}$ et $D=\frac{\mu}{\lambda-\mu}$ donc

$$\overline{G}(p)=\frac{\mu}{\mu-\lambda}F(0)\left[\overline{g_0}(p)-\overline{g_{\lambda-\mu}}(p)\right]$$

et $G(x)=\frac{\mu}{\mu-\lambda}F(0)\left[g_0(x)-g_{\lambda-\mu}(x)\right]=\frac{\mu}{\mu-\lambda}F(0)\left[1-e^{-(\mu-\lambda)x}\right]$ avec, en faisant $x\to+\infty$, $1=\frac{\mu}{\mu-\lambda}F(0)$, donc $\boxed{G(x)=1-e^{-(\mu-\lambda)x}\text{ si }x\geq 0}$: c'est la fonction de répartition d'une variable aléatoire de loi exponentielle $\mathcal{E}(\mu-\lambda)$.