Équations intégrales linéaires et non linéaires

Analyse et techniques de résolution

A. Rahmoune

August 16, 2018

Table des matières

Chapitre 1

Définitions préliminaires

1.1 Équations de Fredholm et de Volterra

Une équation dans laquelle la fonction inconnue d'une ou plusieurs variables figure sous le signe intégral est dite *équation intégrale*. Cette définition générale tient compte de beaucoup de formes naturellement issues de la modélisation des différents problèmes de la mécanique et de la physique mathématique ou par remaniement d'une importante classe de problèmes formulés auparavant par des opérateurs différentiels, notamment les problèmes aux limites et ceux de Cauchy.
La forme ordinaire d'une équation intégrale linéaire est donnée par

$$\alpha(x)u(x) = f(x) + \lambda \int k(x,t)u(t)dt \tag{1.1}$$

où $\alpha(x)$, $f(x)$, $k(x,t)$ sont des fonctions données, la fonction $u(x)$ qui figure à l'intérieur et à l'extérieur du signe intégral est l'inconnu à déterminer; λ est un paramètre réel ou complexe différent de zéro. La fonction $k(x,t)$ est appelée *noyau* de l'équation intégrale.

Équations intégrales de Fredholm

Une équation de la forme (1.1) dont les bornes d'intégration sont fixées est dite équation intégrale linéaire de Fredholm.

i) Si $\alpha(x) = 0$, l'équation s'écrit

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt = 0 \tag{1.2}$$

et elle est dite de première espèce.

ii) Si $\alpha(x) = 1$, l'équation s'écrit

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt \tag{1.3}$$

et elle est dite de seconde espèce.

iii) Si $\alpha(x)$ est continue et s'annule en certains points, mais pas en tout point de $[a, b]$, elle est dite de troisième espèce.

iv) Si $f(x) = 0$, l'équation s'écrit

$$u(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt \tag{1.4}$$

et elle est dite homogène.

Équations intégrales de Volterra

Les équations intégrales de Volterra de première espèce, de seconde espèce ou homogène sont définies de la même manière précédente sauf que la borne d'intégration supérieure est variable, c-à-d., $b = x$. Aussi, notons qu'une équation intégrale de Volterra de première espèce peut être transformée en une équation intégrale de second espèce par dérivation en utilisant la formule de Leibniz (7.1) de la manière suivante, soit

$$\int_0^x k(x,t)u(t)dt = f(x) \tag{1.5}$$

alors

$$k(x,x)u(x) + \int_0^x \frac{\partial k(x,t)}{\partial x} u(t)dt = f'(x)$$

Si $k(x,x) \neq 0$, on peut diviser les deux cotés de cette équation par $k(x,x)$, on obtient

$$u(x) + \int_0^x \frac{k_x(x,t)}{k(x,x)} u(t)dt = \frac{f'(x)}{k(x,x)} \tag{1.6}$$

où $k_x(x,t) = \dfrac{\partial k(x,t)}{\partial x}$, et la réduction est achevée.

Noyaux particuliers

1. Si le noyau $k(x,t)$ d'une équation intégrale s'écrit sous la forme

$$k(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\beta_i(t) \tag{1.7}$$

   où les fonctions $\alpha_i(x)$ pour $i = 1, ..., n$ sont linéairement indépendantes, alors il est dit noyau séparable ou dégénéré. Par exemple, les noyaux $x - t, xt, x^2 - t^2$ et $xt^2 + tx^2$ sont séparables.

2. Si le noyau $k(x,t)$ est une fonction à valeurs complexes telle que

$$k(x,t) = \overline{k(t,x)} \tag{1.8}$$

   alors il est dit symétrique ou hermitien. Une équation intégrale à noyau symétrique est dite aussi symétrique. Par exemple, sur le carré $a \leq x, t \leq b$, les noyaux $x + t, x^2 + t^2$ et $i(x - t)$ sont symétriques, tandis que $i(x + t)$ ne l'est pas.

3. Si le noyau est de la forme $k(x,t) = k(x-t)$, alors l'équation intégrale est dite équation intégrale à noyau de convolution.

4. Si le noyau $k(x,t)$ est tel que

$$\int_a^b \int_a^b |k(x,t)|^2 dxdt < \infty \tag{1.9}$$

a une valeur finie, alors ce type de noyau est dit noyau régulier.

5. Si le noyau $k(x,t)$ est de la forme

$$k(x,t) = h(x,t)|x-t|^{-m} \tag{1.10}$$

où $h(x,t)$ est bornée sur $\mathbb{R}$, $a \leq x \leq b$ et $a \leq t \leq b$ avec $h(x,t) \neq 0$, et m est une constante telle que $0 < m < 1$, alors l'équation intégrale est dite équation intégrale faiblement singulière.

6. Si le noyau $k(x,t)$ est de la forme

$$k(x,t) = \frac{h(x,t)}{x-t} \tag{1.11}$$

avec $h(x,t)$ est une fonction différentiable avec $h(x,t) \neq 0$, alors l'équation intégrale est dite singulière à noyau de Cauchy où l'intégrale

$$\int_a^b \frac{h(x,t)}{x-t} u(t)dt, \tag{1.12}$$

est prise au sens de la valeur principale de Cauchy. Ainsi,

$$v.p. \int_a^b \frac{u(t)}{x-t} dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_a^{x-\varepsilon} \frac{u(t)}{x-t} dt + \int_{x+\varepsilon}^b \frac{u(t)}{x-t} dt \right\} \tag{1.13}$$

1.2 Relation avec les équations différentielles

Lemme 1.1 *Pour toute fonction $u(x)$,*

$$\int_a^x \int_a^s u(t)dtds = \int_a^x (x-t)u(t)dt. \tag{1.14}$$

En général, on a

$$\int_a^x \int_a^{x_1} \cdots \int_a^{x_{n-1}} u(x_n)dx_n dx_{n-1} \cdots dx_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-x_1)^{n-1} u(x)dx_1. \tag{1.15}$$

Preuve. Soit $g(s) = \int_a^s u(t)dt$,

$$\begin{aligned} \int_a^x \int_a^s u(t)dtds &= \int_a^x g(s)ds = \int_a^x 1.g(s)ds \\ &= [sg(s)]_a^x - \int_a^x s.g'(s)ds \qquad \text{(intégration par parties)} \\ &= xg(x) - ag(a) - \int_a^x su(s)ds \\ &= x\int_a^x u(t)dt - 0 - \int_a^x tu(t)dt = \int_a^x (x-t)u(t)dt. \end{aligned}$$

1.2.1 Problèmes avec conditions initiales

On considère le problème de Cauchy de second ordre suivant

$$\begin{cases} u''(x) = g(x, u(x)), \quad 0 < x < 1 \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = u'_0 \end{cases} \tag{1.16}$$

L'intégration des deux cotés de l'équation différentielle associée à (4.13) de zéro à x, donne

$$u'(x) = u'_0 + \int_0^x g(t, u(t))dt, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

En intégrant une seconde fois,

$$u(x) = u_0 + u'_0 x + \int_0^x \int_0^s g(t, u(t))dtds$$

En utilisant la relation (1.14), on obtient

$$u(x) = u_0 + u'_0 x + \int_0^x (x - t)g(t, u(t))dt, \quad 0 \leq x \leq 1. \tag{1.17}$$

C'est l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce.

1.2.2 Problèmes aux limites de second type

On considère le problème de Dirichlet suivant

$$\begin{cases} u''(x) = g(x, u(x)), \quad 0 < x < 1 \\ u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1 \end{cases} \tag{1.18}$$

De la même manière, on intègre les deux cotés de zéro à x, on obtient

$$u'(x) = c + \int_0^x g(t, u(t))dt, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

et

$$u(x) = u_0 + cx + \int_0^x (x - t)g(t, u(t))dt, \quad 0 \leq x \leq 1. \tag{1.19}$$

Pour déterminer la constante c, on prend $x = 1$ et on utilise la condition $u(1) = u_1$, ce qui donne

$$c = u_1 - u_0 - \int_0^1 (1 - t)g(t, u(t))dt,$$

Ainsi, l'équation (1.19) devient

$$\begin{aligned} u(x) &= u_0 + (u_1 - u_0)x + \int_0^x (x - t)g(t, u(t))dt - x \int_0^1 (1 - t)g(t, u(t))dt \\ &= u_0 + (u_1 - u_0)x - \int_0^x t(1 - x)g(t, u(t))dt - \int_x^1 x(1 - t)g(t, u(t))dt \end{aligned}$$

qui s'écrit encore comme une équation intégrale de Fredholm de la forme

$$u(x) = u_0 + (u_1 - u_0)x - \int_0^1 k(x, t)g(t, u(t))dt \tag{1.20}$$

où

$$k(x, t) = \begin{cases} t(1 - x), & t \leq x \\ x(1 - t), & t \geq x \end{cases} \tag{1.21}$$

Exemple 1.1 Le problème aux limites linéaire suivant

$$\begin{cases} u''(x) = \lambda u(x), \quad 0 < x < 1 \\ u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1 \end{cases} \tag{1.22}$$

est équivalent à une équation intégrale linéaire de Fredholm de la forme

$$u(x) = u_0 + (u_1 - u_0)x - \lambda \int_0^1 k(x,t)u(t)dt, \quad 0 \leq x \leq 1 \tag{1.23}$$

où $k(x,t)$ est donné par (1.21).

Chapitre 2

Méthodes élémentaires

2.1 Équations à noyau séparable

On considère l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce à noyau séparable de la forme (1.7)

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt \tag{2.1}$$

$$= f(x) + \lambda \sum_{m=1}^{n} \alpha_m(x) \int_a^b \beta_m(t)u(t)dt \tag{2.2}$$

En posant

$$c_m = \int_a^b \beta_m(t)u(t)dt, \quad m = 1, ...n$$

on obtient

$$u(x) = f(x) + \lambda \sum_{m=1}^{n} c_m \alpha_m(x). \tag{2.3}$$

où les c_i sont des constantes à déterminer. Pour ce faire, nous multiplions les deux cotés de l'équation (2.3) par $\beta_i(x)$ et intégrer de a à b, nous obtenons

$$\int_a^b \beta_i(x)u(x)dx = \int_a^b \beta_i(x)f(x)dx + \lambda \sum_{m=1}^{n} c_m \int_a^b \beta_i(x)\alpha_m(x)dx. \tag{2.4}$$

En utilisant les notations suivantes

$$\int_a^b \beta_i(x)f(x)dx = f_i, \quad \int_a^b \beta_i(x)\alpha_m(x)dx = a_{im}, \tag{2.5}$$

l'équation (2.4) devient

$$c_i - \lambda \sum_{m=1}^{n} a_{im}c_m = f_i, \quad i = 1, ..., n \tag{2.6}$$

qui est un système d'équations linéaires à n inconnues de la forme

$$(I - \lambda A)c = f, \tag{2.7}$$

où I est la matrice identité d'ordre n, A est la matrice a_{im}. c et f sont des matrices colonnes. Le déterminant $D(\lambda)$ du système algébrique (2.6) est

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \cdots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} & \cdots & -\lambda a_{1n} \\ \vdots & & & \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \cdots & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix} \tag{2.8}$$

C'est un polynôme de degré au plus n, il joue un rôle important dans l'existence de la solution du système, et par conséquent de l'équation intégrale en question. Précisément, pour toutes les valeurs de λ dont le déterminant $D(\lambda) \neq 0$, le système algébrique (2.7) et donc également l'équation intégrale correspondante admettent une solution unique. D'autre part, pour les valeurs de λ dont $D(\lambda) = 0$, le système algébrique avec son équation intégrale, ou bien n'admettent aucune solution ou bien ont un nombre infini de solutions.

Exemple 2.1 Résoudre l'équation intégrale

$$u(x) = 1 + \lambda \int_0^1 u(t)dt. \tag{2.9}$$

Il est clair que la solution de cette équation s'écrit sous la forme

$$u(x) = 1 + \lambda c, \tag{2.10}$$

où

$$c = \int_0^1 u(t)dt.$$

En intégrant les deux cotés de l'équation (2.10) de zéro à un, on obtient $(1-\lambda)c = 1$. Donc, si $\lambda \neq 1$, la solution de l'équation (2.9) est donnée par

$$u(x) = \frac{1}{(1-\lambda)}.$$

Exemple 2.2 Résoudre l'équation intégrale suivante

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b (x+t)u(t)dt \tag{2.11}$$

et déterminer les valeurs propres.

On remarque que le noyau de l'équation intégrale (2.11) est séparable, $\alpha_1(x) = x, \alpha_2(x) = 1$ et $\beta_1(t) = 1, \beta_2(t) = t$. En utilisant les notations (2.5), après un simple calcul on obtient

$$a_{11} = 1/2, \quad a_{12} = 1, \quad a_{21} = 1/3, \quad a_{22} = 1/2,$$

et

$$f_1 = \int_0^1 f(t)dt, \qquad f_2 = \int_0^1 tf(t)dt,$$

En porte ces valeurs dans (2.6), on obtient le système

$$\begin{cases} (1-\lambda/3)c_1 - \lambda c_2 & = f_1 \\ (-\lambda/3)c_1 + (1-\lambda/2)c_2 & = f_2 \end{cases}$$

Le déterminant $D(\lambda)$ est nul si $\lambda^2+12\lambda-12=0$. Par conséquent les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = (-6+4\sqrt{3}), \qquad \lambda_2 = (-6-4\sqrt{3}).$$

Si λ est égale à l'une de ces valeurs, l'équation homogène admet une solution non triviale, tandis que l'équation intégrale (2.11) est, en générale, non résoluble. Si λ diffère de ces valeurs, la solution [1] du système algébrique ci-dessus est

$$c_1 = \left[-12f_1 + \lambda(6f_1 - 12f_2)\right]/\lambda^2 + 12\lambda - 12,$$
$$c_2 = \left[-12f_2 + \lambda(4f_1 - 6f_2)\right]/\lambda^2 + 12\lambda - 12.$$

Donc, d'après la relation (2.3), la solution est

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \frac{6(\lambda-2)(x+t) - 12\lambda xt - 4\lambda}{\lambda^2+12\lambda-12} f(t)dt. \tag{2.12}$$

La fonction

$$R(x,t;\lambda) = \frac{6(\lambda-2)(x+t) - 12\lambda xt - 4\lambda}{\lambda^2+12\lambda-12}, \tag{2.13}$$

s'appelle *résolvante.* Nous avons réussi à inverser l'équation intégrale puisque le coté droit de la formule obtenue est une quantité connue.

Exercice 2.1

(a) Trouver $u(x)$,

$$u(x) = x + \int_0^1 \frac{x^2-t^2}{x-t} u(t)dt.$$

Montrer que le noyau $(x^n - t^n)/(x-t)$ est séparable, avec n est un entier naturel positif.

(b) Trouver $u(x)$,

$$u(x) = 1 + \int_0^1 (1+x+t+xt)^{-1/2} u(t)dt.$$

Indication: Il suffit d'utiliser les relations

$$\frac{x^n-t^n}{x-t} = x^{n-1} + x^{n-2}t + x^{n-3}t^2 + \cdots + xt^{n-2} + t^{n-1}.$$
$$(1+x+t+xt)^{-1/2} = (1+x)^{-1/2}(1+t)^{-1/2}.$$

[1]On peut utiliser par exemple la méthode de Cramer

2.2 Noyaux itérés

On considère une équation intégrale linéaire de seconde espèce

$$u(x) = f(x) + \lambda \int k(x,t)u(t)dt \tag{2.14}$$

où les fonctions $f(x)$ et $k(x,t)$ sont de carrés intégrables. Nous allons chercher une solution de cette équation en utilisant la suite itérative suivante

$$u_{n+1}(x) = f(x) + \lambda \int k(x,t)u_n(t)dt. \tag{2.15}$$

La mise en œuvre de ce processus itératif nécessite la donnée d'un itéré initial, on peut prendre par exemple $u_0(x) = f(x)$. En substituant cet élément dans le coté droit de l'équation récurrente (2.15), on obtient le premier itéré

$$u_1(x) = f(x) + \lambda \int k(x,t)u_0(t)dt, \tag{2.16}$$

et ainsi de suite. Cette méthode d'approximation est dite *convergente* s'il *existe* un rang n_0 à partir duquel u_n tend uniformément vers une limite u. Bien entendu, une telle limite si elle existe, elle est nécessairement une solution de l'équation intégrale (2.14). Pour étudier cette convergence, nous allons examiner en détail le processus itératif (2.15) tout en cherchant à déterminer les conditions pour inverser l'équation intégrale à l'aide de la résolvante. À partir des deux premières itérations, nous avons

$$u_1(x) = f(x) + \lambda \int k(x,t)f(t)dt, \tag{2.17}$$

et

$$\begin{aligned} u_2(x) &= f(x) + \lambda \int k(x,t)f(t)dt + \lambda^2 \int k(x,t) \left[\int k(t,z)f(z)dz\right] dt \\ &= f(x) + \lambda \int k(x,t)f(t)dt + \lambda^2 \int k_2(x,t)f(t)dt. \end{aligned} \tag{2.18}$$

où

$$k_2(x,t) = \int k(x,z)k(z,t)dz, \tag{2.19}$$

Ainsi,

$$u_3(x) = f(x) + \lambda \int k(x,t)f(t)dt + \lambda^2 \int k_2(x,t)f(t)dt + \lambda^3 \int k_3(x,t)f(t)dt. \tag{2.20}$$

avec

$$k_3(x,t) = \int k(x,z)k_2(z,t)dz, \tag{2.21}$$

En continuant ce processus itératif, et en notant

$$k_m(x,t) = \int k(x,z)k_{m-1}(z,t)dz, \tag{2.22}$$

on obtient le $(n+1)$-ième itéré, solution approchée de l'équation intégrale (2.14)

$$u_n(x) = f(x) + \sum_{m=1}^{n} \lambda^m \int k_m(x,t) f(t) dt \tag{2.23}$$

L'expression $k_m(x,t)$ est appelée le m-ième terme de la *suite des noyaux itérés*, avec $k_1(x,t) = k(x,t)$. Par passage à la limite, $n \to \infty$, on obtient ce qu'on appelle la *série de Neumann*

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x) = f(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \int k_m(x,t) f(t) dt \tag{2.24}$$

Il convient de montrer, sous quelles conditions cette série converge-t-elle? Pour ce faire, nous allons étudier la somme partielle et appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir une majoration du terme général

$$\left|\int k_m(x,t) f(t) dt\right|^2 \leq \left(\int |k_m(x,t)|^2 dt\right) \int |f(t)|^2 dt \tag{2.25}$$

En posant

$$D^2 = \int |f(t)|^2 dt, \quad C_m^2 = \sup_x \int |k_m(x,t)|^2 dt, \tag{2.26}$$

l'inégalité (2.25) devient

$$\left|\int k_m(x,t) f(t) dt\right|^2 \leq C_m^2 D^2. \tag{2.27}$$

Il faut établir donc une majoration de la constante C_m^2. Pour cela, il suffit d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à la relation (2.22)

$$|k_m(x,t)|^2 \leq \int |k_{m-1}(x,z)|^2 dz \int |k(z,t)|^2 dz,$$

et intégrer les deux cotés par rapport à t, ce qui donne

$$\int |k_m(x,t)|^2 dt \leq B^2 C_{m-1}^2, \tag{2.28}$$

où

$$B^2 = \int\int |k(z,t)|^2 dz dt \tag{2.29}$$

De l'inégalité (2.28), on obtient la relation récurrente

$$C_m^2 \leq B^{2m-2} C_1^2. \tag{2.30}$$

Ainsi, des relations (2.27) et (2.30), en on déduit

$$\left|\int k_m(x,t) f(t) dt\right|^2 \leq C_1^2 D^2 B^{2m-2}. \tag{2.31}$$

Donc, le terme général de la somme partielle (2.23) est en valeur absolue majoré par la quantité $DC_1|\lambda|^m B^{m-1}$. Il en résulte que la série infinie (2.24) converge plus rapidement que la série géométrique de raison $|\lambda|B$. Par conséquent, si

$$|\lambda| B < 1 \tag{2.32}$$

la convergence uniforme de cette série est assurée. Par ailleurs, il faut montrer ainsi l'unicité de la limite pour un λ qui satisfait cette condition. On suppose que l'équation (2.14) admet deux solutions $u_1(x)$ et $u_2(x)$, soient

$$u_1(x) = f(x) + \lambda \int k(x,t)u_1(t)dt,$$

$$u_2(x) = f(x) + \lambda \int k(x,t)u_2(t)dt.$$

Si, on soustrait ces deux équations, en posant $u_1(x) - u_2(x) = \varphi(x)$, on obtient l'équation intégrale homogène

$$\varphi(x) = \lambda \int k(x,t)\varphi(t)dt. \tag{2.33}$$

Appliquons maintenant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à cette équation, on trouve

$$|\varphi(x)| \leq |\lambda|^2 \int |k(x,t)|^2 dt \int |\varphi(t)|^2 dt,$$

et intégrer ensuite par rapport à x pour obtenir

$$\int |\varphi(x)|dx \leq |\lambda|^2 \int \int |k(x,t)|^2 ds dt \int |\varphi(s)|^2 ds,$$

ou

$$(1 - |\lambda|^2 B^2) \int |\varphi(s)|^2 ds \leq 0. \tag{2.34}$$

Comme $|\lambda| B < 1$, on conclut que $\varphi(x) \equiv u_1(x) - u_2(x) \equiv 0$, i.e. $u_1(x) \equiv u_2(x)$.
Jusqu'ici, la question de convergence de cette méthode itérative est achevée. Pour établir son bien fondée, nous avons besoin aussi d'établir une estimation de l'erreur commise. Cela revient à donner une estimation aux termes négligés dans la série de Neumann (2.24) qu'on peut réécrire aussi sous la forme

$$u(x) = f(x) + \sum_{m=1}^{n} \lambda^m \int k_m(x,t) f(t)dt + E_n(x). \tag{2.35}$$

Alors, il en résulte de l'analyse précédente que

$$|E_n(x)| \leq \frac{DC_1 |\lambda|^{n+1} B^n}{(1 - |\lambda| B)}. \tag{2.36}$$

Finalement, notons qu'on peut évaluer la résolvante en fonction des noyaux itérés $k_m(x,t)$. En effet, en échangeant l'ordre entre l'intégration et la somme dans la série de Neumann (2.24), on obtient

$$u(x) = f(x) + \lambda \int \left(\sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} k_m(x,t) \right) f(t)dt. \tag{2.37}$$

de la forme

$$u(x) = f(x) + \lambda \int R(x,t;\lambda) f(t)dt. \tag{2.38}$$

où

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} k_m(x,t) \tag{2.39}$$

Exercice 2.2 Montrer que la résolvante $R(x,t;\lambda)$ si elle existe, elle est unique.

Théorème 2.1 *À toute fonction $k(x,t)$ de carré intégrable correspond une unique résolvante $R(x,t;\lambda)$, analytique en λ, régulière au moins à l'intérieur du cercle $|\lambda| < 1/B$, et est donnée par la série (2.39). En outre, si $f(x)$ est de carré intégrable, alors la solution unique de l'équation (2.14), valable dans le cercle $|\lambda| < 1/B$, et est donnée par la formule (2.38).*

Remarque 1 La condition (2.32) est essentielle pour la convergence de la série (2.39). Mais, l'équation (2.14) peut également admettre une solution pour $|\lambda| > 1/B$. En effet, soit par exemple

$$u(x) = 1 + \lambda \int_0^1 u(t)dt. \tag{2.40}$$

Ici $k(x,t) = 1$ et, par conséquent,

$$B^2 = \int_0^1 \int_0^1 k^2(x,t)dxdt = \int_0^1 \int_0^1 dxdt = 1.$$

Dans ce cas, la condition (2.32) assure la convergence de la série (2.39) pour $|\lambda| < 1$. Il en découle que dans un cercle de rayon supérieur à 1, la méthode des noyaux itérés pour cette équation ne peut pas converger. Cependant, comme nous l'avons vu dans l'exemple 2.1, lorsque $|\lambda| > 1$, cette équation est résoluble. En effet, si $\lambda \neq 1$, la fonction $u(x) = 1/(1-\lambda)$ est solution de l'équation donnée.

Proposition 2.1 *Le m-ième noyau itéré de l'équation intégrale de Volterra est donné par*

$$k_m(x,t) = \int_t^x k(x,z)k_{m-1}(z,t)dz, \ \text{si } t < x, \tag{2.41}$$

et $k_m(x,t) = 0$, si $t \geq x$.

Preuve. Par définition du noyau de Volterra, on sait que $k_1(x,t) = k(x,t)$ est égal à zéro si $t > x$, donc pour $m = 2$

$$k_2(x,t) = \int_a^b k(x,z)k(z,t)dz$$

Le premier terme de l'intégrant est égal à zéro quand $z > x$ et le second est égal à zéro quand $z < t$. Par conséquent,

$$k_2(x,t) = \int_t^x k(x,z)k_1(z,t)dz$$

La preuve peut maintenant être complété par induction.

Exemple 2.3 Résoudre à l'aide de la résolvante l'équation de Volterra

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x u(t)dt \tag{2.42}$$

Nous avons $k_1(x,t) = k(x,t) = 1$.

$$k_2(x,t) = \int_t^x k(x,z)k_1(z,t)dt = \int_t^x dz = x - t,$$

$$\begin{aligned} k_3(x,t) &= \int_t^x k(x,z)k_2(z,t)dt = \int_t^x 1.(z-t)dz \\ &= \left[\frac{1}{2}(z-t)^2\right]_t^x = \frac{1}{2}(x-t)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_4(x,t) &= \int_t^x k(x,z)k_3(z,t)dt = \int_t^x 1.\frac{1}{2}(z-t)^2dz \\ &= \left[\frac{1}{3!}(z-t)^3\right]_t^x = \frac{1}{3!}(x-t)^3 \end{aligned}$$

En général, on trouve

$$k_m(x,t) = \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} \tag{2.43}$$

D'après (2.39) et (2.38), la résolvante est donnée par

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1}\frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} = e^{\lambda(x-t)} \tag{2.44}$$

et la solution

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x e^{\lambda(x-t)} f(t)dt. \tag{2.45}$$

Exercice 2.3 Trouver les résolvantes des équations intégrales de Volterra à noyau suivant

$$k(x,t) = x - t, \quad h(x,t) = e^{x-t}, \quad z(x,t) = \frac{1+x^2}{1+t^2}$$

2.3 Approximations successives

D'abord, il faut rappeler que la plus part des méthodes itératives sont fondées sur le même principe, qui est la recherche d'un point fixe. Cependant, elles se diffèrent dans la complexité des algorithmes proposés qui devraient êtres réalisés de sorte qu'ils soient consistent avec la difficulté rencontrée souvent lors du calcul des itérés. La méthode des approximations successives consiste à calculer explicitement à chaque étape k, l'itéré u_k à l'aide de la suite itérative définie par (2.15) et de l'utiliser dans l'étape $k+1$ pour le calcul de l'itéré u_{k+1}. Soit par exemple,

$$u(x) = x - \int_0^x (x-t)u(t)dt \tag{2.46}$$

On choisit $u_0(x) = 0$, ceci donne $u_1(x) = x$ et

$$\begin{aligned}
u_2(x) &= \int_0^x (x-t)u_1(t)dt \\
&= \int_0^x (x-t)tdt \\
&= x - \left[\frac{xt^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right]_0^x \\
&= x - \frac{x^3}{3!}.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
u_3(x) &= \int_0^x (x-t)u_2(t)dt \\
&= \int_0^x (x-t)\left(t - \frac{t^3}{6}\right)dt \\
&= x - x\left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{24}\right]_0^x + \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{30}\right]_0^x \\
&= x - x\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right) + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30}\right) \\
&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.
\end{aligned}$$

En continuant ce processus, le n-ième itéré

$$u_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

qui est la série de Maclaurin de $\sin x$. Donc la solution de (3.14) est $u(x) = \sin x$.

Exercice 2.4 Résoudre les équations intégrales de Fredholm suivantes par la méthode des approximations successives

1. $u(x) = x + e^x - \int_0^1 xtu(t)dt$.

2. $u(x) = x + \lambda \int_{-1}^1 xtu(t)dt$.

3. $u(x) = \sin x + \sin x \int_0^{\pi/2} \cos tu(t)dt$.

4. $u(x) = (\pi + 2)x + \sin x + \cos x - \int_0^{\pi/4} x(1 + u(t))dt$.

Chapitre 3

Quelques théorèmes du point fixe

Ce chapitre est consacré à établir certains résultats d'existence et d'unicité pour la résolution d'une équation de la forme $u = Au$, où A est un opérateur défini sur un espace de Banach E, pas nécessairement linéaire. Ces résultats sont basés sur le théorème du point fixe de Banach. Nous allons voir que si A est un opérateur contractant, alors cette équation admet une solution unique pour tout f dans E.

3.1 Contraction

Définition 3.1 *Soit A un opérateur borné sur un espace de Banach E. On dit que A est un opérateur contractant s'il existe une constante positive $0 < \kappa < 1$ telle que*

$$\|Au_1 - Au_2\| \leq \kappa \|u_1 - u_2\| \tag{3.1}$$

pour tout $u_1, u_2 \in E$.

Le résultat suivant est appelé *théorème de l'application contractante.*

Théorème 3.1 (Banach, 1922) *Soit A un opérateur contractant sur E. Alors l'équation*

$$Au = u \tag{3.2}$$

admet une solution unique dans E. Une telle solution est un point fixe de l'opérateur A.

Preuve. Montrons d'abord l'unicité du point fixe. Raisonnons par l'absurde et supposant qu'il existe deux points fixes u et v telles que $Au = u$ et $Av = v$, alors

$$\|u - v\| = \|Au - Av\| \leq \kappa \|u - v\|$$

et

$$(1 - \kappa)\|u - v\| \leq 0$$

D'où $\|u-v\|=0$, ce qui implique $u=v$.
Pour montrer l'existence, nous allons construire un processus itératif. Soit la donnée d'un élément initial u_0 et d'une suite récurrente u_n définie par

$$u_{n+1}=Au_n, \quad n=0,1,2,\dots.$$

On doit montrer d'abord que cette suite est de Cauchy, et que sa limite est une solution de (3.2). Que la limite existe, découle du faite que dans un Banach toute suite de Cauchy est convergente. Notons que,

$$\|u_{n+1}-u_n\|=\|Au_n-Au_{n-1}\|\leq\kappa\|u_n-u_{n-1}\|.$$

D'où

$$\|u_{n+1}-u_n\|\leq\kappa\|u_n-u_{n-1}\|\leq\kappa^2\|u_{n-1}-u_{n-2}\|\leq\cdots\leq\kappa^n\|u_1-u_0\|.$$

En général, si $n>m$,

$$\begin{aligned}\|u_n-u_m\|&=\|(u_n-u_{n-1})+(u_{n-1}-u_{n-2})+\cdots+(u_{m+1}-u_m)\|\\&\leq\|u_n-u_{n-1}\|+\|u_{n-1}-u_{n-2}\|+\cdots+\|u_{m+1}-u_m\|\\&\leq(\kappa^{n-1}+\kappa^{n-2}+\ldots+\kappa^m)\|u_1-u_0\|\\&\leq(\kappa^m+\kappa^{m+1}+\ldots)\|u_1-u_0\|=\frac{\kappa^m}{1-\kappa}\|u_1-u_0\|\end{aligned}$$

Donc,

$$\lim_{n,m\to\infty}\|u_n-u_m\|=0.$$

Par conséquent, la suite (u_n) est de Cauchy, notons sa limite par u. Il reste à montrer que u est une solution de (3.2). Comme A est continu, nous avons

$$Au=A(\lim_{n\to\infty}u_n)=\lim_{n\to\infty}Au_n=\lim_{n\to\infty}u_n=u.$$

Proposition 3.1 *Soit E un espace normé et $A:U\subset E\longrightarrow E$ un opérateur contractant, alors $I-A$ est un homéomorphisme sur U vers $(I-A)U$.*

Preuve. Il est clair que $I-A$ est continu. Ainsi,

$$\|(I-A)u_1-(I-A)u_2\|\geq\|u_1-u_2\|-\|Au_1-Au_2\|\geq(1-\kappa)\|u_1-u_2\|$$

où $0<\kappa<1$, donc $(I-A)^{-1}$ est continu.

Exemple 3.1 On considère

$$\begin{cases}-u''(x)=3(1+u(x)^2), \quad 0\leq x\leq 1\\ u(0)=u(1)=0, \quad u\in\mathcal{C}^2([0,1])\end{cases} \tag{3.3}$$

Montrer que ce problème aux limites admet une solution unique.

Solution. D'abord, rappelons qu'on peut transformer tout problème aux limites de la forme

$$\begin{cases} -u''(x) = g(x, u(x)), \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

en une équation intégrale de Fredholm homogène

$$u(x) = \int_0^1 k(x,t) g(t, u(t)) dt$$

où

$$k(x,t) = \begin{cases} t(1-x), \quad 0 \leq t < x \leq 1, \\ x(1-t), \quad 0 \leq x < t \leq 1. \end{cases}$$

Maintenant, pour tout $u \in \mathcal{C}([0,1])$, on considère

$$Tu(x) = \int_0^1 k(x,t) 3(1 + u(t)^2) dt.$$

on a

$$\begin{aligned} |Tu_1(x) - Tu_2(x)| &= 3 \left| \int_0^1 k(x,t)[u_1^2(t) - u_2^2(t)] dt \right| \\ &\leq 3 \int_0^1 |k(x,t)||u_1(t) + u_2(t)||u_1(t) - u_2(t)| dt \\ &\leq 3 \left(\int_0^x t(1-x) dt + \int_x^1 x(1-t) dt \right) (\|u_1\| + \|_2\|) \|u_1 - u_2\| dt \\ &\leq 3 \frac{x(1-x)}{2} (\|u_1\| + \|u_2\|) \|u_1 - u_2\| \\ &\leq \frac{3}{4} \|u_1 - u_2\|. \end{aligned}$$

pour tout $u_1, u_2 \in U = \{u \in \mathcal{C}([0,1]) : \|u\| \leq 1\}$. D'autre part, nous avons $T(U) \subseteq U$, en effet, soit $u \in U$

$$|Tu(x)| = \left| 3 \int_0^1 k(x,t)(1 + u(t)^2) dt \right| \leq 6 \int_0^1 k(x,t) dt = 6 \frac{x(1-x)}{2} \leq \frac{3}{4}.$$

Donc, l'opérateur T admet un point fixe unique dans U qui est évidemment, solution du problème aux limites (3.3).

Exemple 3.2 Soient $k(x,t)$ et $g(t,u)$ deux fonctions à valeurs réelles, continues pour tout $0 \leq x, t \leq 1$ et tout $u \in \mathbb{R}$. Et supposons que g satisfait la condition de Lipschitz par rapport à u, i.e.

$$| g(t, u_1) - g(t, u_2) | \leq L \mid u_1 - u_2 \mid \tag{3.5}$$

pour tout $0 \leq t \leq 1$ et tout $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$. Notre souhait alors, est de montrer l'existence et l'unicité d'une telle solution pour l'équation intégrale de Volterra

$$u(x) = f(x) + \int_0^x k(x,t) g(t, u(t)) dt \tag{3.6}$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{C}([0,1])$.

On considère l'opérateur $A : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$ défini par

$$Au = f + Tu$$

où $T : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$ avec

$$Tu(x) = \int_0^x k(x,t)g(t,u(t))dt$$

Il est clair qu'un tel point fixe de A est solution de l'équation (3.6). Pour $\alpha > 0$, on introduit une nouvelle norme $\|.\|_\alpha$ sur $\mathcal{C}([0,1])$,

$$\|u\|_\alpha = \int_0^1 e^{-\alpha t}|u(t)|dt$$

Alors, $\|u\|_\alpha$ est une norme sur $\mathcal{C}([0,1])$ équivalente à la norme L^1. On pose $X_\alpha = (\mathcal{C}([0,1]), \|.\|_\alpha)$ et soit $\tilde{X}_\alpha$ la complétion de X_α. Il est clair que $\tilde{X}_\alpha$ est un sous espace vectoriel de $L^1([0,1])$ avec la norme $\|u\|_\alpha$, et T est prolongé à $\tilde{T} : \tilde{X}_\alpha \to \tilde{X}_\alpha$, défini de la même manière que T. Soit maintenant

$$M = \max_{0 \leq x,t \leq 1} |k(x,t)|$$

Nous avons pour tout $u_1, u_2 \in \tilde{X}_\alpha$

$$\begin{aligned}
\|\tilde{T}u_1 - \tilde{T}u_2\|_\alpha &= \int_0^1 e^{-\alpha t} \left| \int_0^t k(t,z)[g(z,u_1(z)) - g(z,u_2(z))]dt \right| dz \\
&\leq ML \int_0^1 \int_0^t e^{-\alpha t}|u_1(z) - u_2(z)|dzdt \\
&\leq ML \int_0^1 \int_z^1 e^{-\alpha t}|u_1(z) - u_2(z)|dtdz \\
&\leq ML \int_0^1 \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\alpha}}{\alpha}|u_1(z) - u_2(z)|dz \\
&\leq \frac{ML}{\alpha}\|u_1 - u_2\|.
\end{aligned}$$

Ceci montre que si, $ML < \alpha$. Alors, l'opérateur $\tilde{T} : \tilde{X}_\alpha \to \tilde{X}_\alpha$ est contractant, donc $\tilde{A} = f + \tilde{T}$ l'est aussi. Par ailleurs, il est facile de voir que $\tilde{A}$ applique $\tilde{X}_\alpha$ vers X_α, donc l'unique point fixe de $\tilde{A}$ appartient à $\mathcal{C}([0,1])$. Évidement, un tel point, ce n'est autre que le point fixe de A.

Théorème 3.2 *Soit A un opérateur sur E, tel que A^n est un opérateur contractant. Alors l'équation*

$$Au = u$$

admet une solution unique sur E.

Preuve. Puisque A^n est contractant, il admet un point fixe unique noté par u_0. Alors

$$\|A(u_0) - u_0\| = \|A^n(A(u_0)) - A^n(u_0)\| \leq \kappa\|A(u_0) - u_0\|$$

ce qui implique $A(u_0) = u_0$ puisque $0 < \kappa < 1$. L'unicité du point fixe de A découle du faite qu'il est aussi point fixe de A^n.

Proposition 3.2 *Soit $k(x,t,u)$ une fonction à valeurs réelles, continue sur le carré $0 \leq x,t \leq T$ et satisfait la condition de Lipschitz par rapport à u, i.e.*

$$\|k(x,t,u_1) - k(x,t,u_2)\| \leq L\|u_1 - u_2\| \tag{3.7}$$

Alors, l'équation intégrale non linéaire de Volterra

$$u(x) = f(x) + \int_0^x k(x,t,u(t))dt, \quad x \in [0,T] \tag{3.8}$$

admet une solution unique continue pour tout $f \in \mathcal{C}([0,T])$.

Preuve. Soit E l'espace métrique $\mathcal{C}([0,T])$ muni de la norme de la convergence uniforme

$$\|u\| = \max_{x \in [0,T]} |u(x)|$$

On considère l'opérateur $A : \mathcal{C}([0,T]) \to \mathcal{C}([0,T])$ défini par

$$Au(x) = f(x) + \int_0^x k(x,t,u(t))dt, \quad x \in [0,T] \tag{3.9}$$

Il est clair que Au est continu. Nous allons montrer qu'il existe $m \geq 1$ tel que A^m est contractant. Soient u_1, u_2 deux éléments de E et $x \in [0,T]$. Nous allons montrer que pour tout $n \geq 1$

$$\|A^n u_1 - A^n u_2\| \leq \frac{L^n T^n}{n!} \|u_1 - u_2\| \tag{3.10}$$

En effet, pour $n = 1$ on a

$$\begin{aligned} |Au_1(x) - Au_2(x)| &= \left| \int_0^x \{k(x,t,u_1(t)) - k(x,t,u_2(t))\} dt \right| \\ &\leq L \int_0^x |u_1(t) - u_2(t)| dt \\ &\leq L\|u_1 - u_2\| x \leq L\|u_1 - u_2\| T. \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\|Au_1 - Au_2\| \leq LT\|u_1 - u_2\|$$

Supposons que cette propriété est vraie pour $n = m$ et montrons qu'elle est valable pour $n = m+1$,

$$\begin{aligned} |A^{m+1}u_1(x) - A^{m+1}u_2(x)| &= |A(A^m)u_1(x) - A(A^m)u_2(x)| \\ &= \left| \int_0^x \{k(x,t,A^m u_1(t)) - k(x,t,A^m u_2(t))\} dt \right| \\ &\leq \int_0^x L|A^m u_1(t) - A^m u_2(t)| dt \\ &\leq \int_0^x L \frac{L^m t^m}{m!} \|u_1 - u_2\| dt \\ &\leq \frac{L^{m+1} T^{m+1}}{(m+1)!} \|u_1 - u_2\| \end{aligned}$$

D'où

$$\|A^{m+1}u_1 - A^{m+1}u_2\| \leq \frac{L^{m+1} T^{m+1}}{(m+1)!} \|u_1 - u_2\|$$

Nous avons donc (3.10). Et comme la suite $\dfrac{L^n T^n}{n!}$ tend vers 0, il existe un n_0 tel que $\dfrac{L^{n_0} T^{n_0}}{n_0!} < 1$. Par conséquent, A^{n_0} est une contraction, ce qui achève la preuve.

Exemple 3.3 Montrer que l'équation intégrale

$$u(x) = 1 + \int_0^x \frac{\sin(x-t)}{1+u^2(t)}dt, \quad 0 \le x \le 1 \tag{3.11}$$

admet une solution unique continue sur $[0,1]$.

D'abord notons que la fonction $f(x) \equiv 1$ est continue sur $[0,1]$. Pour montrer l'existence et l'unicité de la solution pour cette équation, il suffit de montrer que le noyau $k(x,t,u)$ satisfait la condition de Lipschitz par rapport à la troisième variable u. Nous avons

$$\begin{aligned}
|k(x,t,u_1(t)) - k(x,t,u_2(t))| &= \left| \frac{\sin(x-t)}{1+u_1^2(t)} - \frac{\sin(x-t)}{1+u_2^2(t)} \right| \\
&\le \left| \frac{u_1^2(t) - u_2^2(t)}{(1+u_1^2(t))(1+u_2^2(t))} \right| \\
&\le \left| \frac{u_1(t) + u_2(t)}{(1+u_1^2(t))(1+u_2^2(t))} \right| \|u_1 - u_2\| \\
&\le \|u_1 - u_2\|.
\end{aligned}$$

En effet, cette majoration découle de l'énégalité

$$\left| \frac{a+b}{(1+a^2)(1+b^2)} \right| \le \frac{1}{2} \left| \frac{2a}{1+a^2} \right| + \frac{1}{2} \left| \frac{2b}{1+b^2} \right| \quad \text{pour tout } a, b \in \mathbb{R}$$

Ainsi, l'équation (3.11) admet une solution unique continue.

Théorème 3.3 *Soit $k(x,t)$ une fonction à valeurs réelles, continue sur le carré $0 \le x, t \le 1$. Alors l'équation intégrale*

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)u(t)dt \tag{3.12}$$

admet une solution unique pour tout λ et $f(x)$ dans $L^2[0,1]$.

Preuve. On considère l'opérateur

$$Au = f + \lambda Tu,$$

où

$$Tu(x) = \int_0^x k(x,t)u(t)dt$$

Pour montrer l'existence d'un point fixe pour A, il suffit de montrer que A^n est contractant pour un certain n. Nous avons

$$A^n u = f + \lambda Tf + \cdots + \lambda^{n-1}T^{n-1}f + \lambda^n T^n u$$

avec

$$T^n u(x) = \int_0^x k_n(x,t)u(t)dt$$

Alors,

$$\|A^n u_1 - A^n u_2\| = |\lambda|^n \left\| \int_0^x k_n(x,t)(u_1(t) - u_2(t))dt \right\|$$

Pour déterminer $k_n(x,t)$, on utilise la proposition 2.1,

$$\begin{aligned} k_1(x,t) &= k(x,t) \\ k_n(x,t) &= \int_t^x k(x,z)k_{n-1}(z,t)dz, \quad n = 2,3,\ldots \end{aligned}$$

D'autre part, comme $k(x,t)$ est continu sur le carré $0 \leq x,t \leq 1$, alors il est uniformément borné, i.e. il existe M tel que $|k(x,t)| < M$ pour tout $x,t \in [0,1]$. Par induction, on obtient la majoration

$$|k_n(x,t)| \leq \frac{M^n(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad 0 \leq t \leq x.$$

En effet, pour $n = 1$ la propriété est évidente. Supposons qu'elle est à l'ordre n,

$$\begin{aligned} |k_{n+1}(x,t)| &\leq \int_t^x \mid k(x,z) \mid\mid k_n(z,t) \mid dt \\ &\leq \frac{M^{n+1}}{(n-1)!} \int_t^x (z-t)^{n-1}dz \\ &\leq \frac{M^{n+1}(x-t)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Nous avons donc,

$$\begin{aligned} \|A^n u_1 - A^n u_2\| &\leq \frac{|\lambda|^n M^n}{(n-1)!} \left\| \int_0^x (u_1(t) - u_2(t))dt \right\| \\ &\leq \frac{|\lambda|^n M^n}{(n-1)!} \|u_1 - u_2\|. \end{aligned}$$

Pour n assez grand,

$$\frac{|\lambda|^n M^n}{(n-1)!} < 1$$

de sorte que A^n soit un opérateur contractant, et (3.12) admet une solution unique.

Théorème 3.4 *Soit $k(x,t)$ une fonction à valeurs réelles, définie sur le carré $a \leq x,t \leq b$ telle que*

$$B^2 = \int_a^b \int_a^b k^2(x,t)dxdt < +\infty$$

Alors, l'équation intégrale

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt, \quad a \leq x \leq b \tag{3.13}$$

admet une solution unique $u(x) \in L^2([a,b])$, pour tout paramètre λ suffisamment petit et tout $f(x)$ dans $L^2([a,b])$.

Preuve: On considère l'opérateur

$$Au(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt$$

Soit $u(x) \in L^2[a,b]$, nous allons montrer d'abord que $Au \in L^2[a,b]$.

$$\begin{aligned}\int_a^b (Au)^2 dx = \int_a^b f^2(x)dx + 2\lambda \int_a^b f(x)\left(\int_a^b k(x,t)u(t)dt\right)dx \\ + \lambda^2 \int_a^b \left(\int_a^b k(x,t)u(t)dt\right)^2 dx\end{aligned}$$

En utilisant la relation de Fubini et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\left(\int_a^b k(x,t)u(t)dt\right)dx &= \int_a^b \int_a^b k(x,t)u(t)f(x)dxdt \\ &\leq \left(\int_a^b \int_a^b k^2(x,t)dxdt\right)^{1/2} \|u\|.\|f\| < \infty\end{aligned}$$

De la même manière, on obtient

$$\int_a^b \left(\int_a^b k(x,t)u(t)dt\right)^2 dx < \infty$$

Ainsi, $Au \in L^2([a,b])$. Par conséquent, $A : L^2([a,b]) \to L^2([a,b])$. Il reste à montrer que A est contractant. Soient $u(x), v(x) \in L^2([a,b])$,

$$\begin{aligned}\|Au - Av\| &= \left(\int_a^b |Au - Av|^2 dx\right)^{1/2} \\ &= |\lambda| \left[\int_a^b \left(\int_a^b k(x,t)[u(t) - v(t)]dt\right)^2 dx\right]^{1/2} \\ &\leq |\lambda| \left(\int_a^b \int_a^b k^2(x,t)dxdt\right)^{1/2} \left(\int_a^b |u(t) - v(t)|^2 dt\right)^{1/2} \\ &\leq |\lambda| B \|u - v\|\end{aligned}$$

Ceci, montre que si $|\lambda| B < 1$, i.e.,

$$|\lambda| < \frac{1}{B} = \left(\int_a^b \int_a^b k^2(x,t)dxdt\right)^{-1/2}$$

Alors l'opérateur A est contractant. Et par conséquent, l'équation intégrale $Au = u$ admet une solution unique pour tout $f(x)$ dans $L^2([a,b])$.

Proposition 3.3 *Soit A un opérateur continu sur E. Supposons qu'ils existent $u, v \in E$ tels que*

$$\lim_{n\to\infty} A^n u = v$$

alors v est un point fixe de A, i.e. $Av = v$.

PREUVE. Soit $v_n = A^n u, \quad n = 1, 2, \ldots$. Si A est continu, alors

$$Av = A(\lim_{n\to\infty} v_n) = \lim_{n\to\infty} Av_n = \lim_{n\to\infty} v_{n+1} = v.$$

Théorème 3.5 *On considère l'équation intégrale non linéaire suivante*

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t,u(t))dt, \tag{3.14}$$

où $f \in L^2[a,b]$ et $k(x,t,z)$ vérifie les hypothèses suivantes

1. $\left\| \int_a^b k(x,t,u(t))dt \right\| \leq M\|u(t)\|$
2. $|k(x,t,z_1) - k(x,t,z_2)| \leq N(x,t)|z_1 - z_2|$
   où
$$B^2 = \int_a^b \int_a^b |N(x,t)|^2 dxdt < \infty.$$

Si $|\lambda|\beta < 1$, alors l'équation (3.14) admet une solution unique de carrée intégrable.

PREUVE. On considère l'opérateur

$$Au = f + \lambda Tu,$$

où

$$Tu(x) = \int_a^b k(x,t,u(t))dt.$$

$$\begin{aligned}
\|Au_1 - Au_2\| &= |\lambda|\|Tu_1 - Tu_2\| \\
&= |\lambda| \left\| \int_a^b k(x,t,u_1(t))dt - \int_a^b k(x,t,u_2(t))dt \right\| \\
&\leq |\lambda| \left\{ \int_a^b \left[\int_a^b |k(x,t,u_1(t)) - k(x,t,u_2(t))|dt \right]^2 dx \right\}^{1/2} \\
&\leq |\lambda| \left\{ \int_a^b \left[\int_a^b N(x,t)|u_1(t) - u_2(t)|dt \right]^2 dx \right\}^{1/2} \\
&\leq |\lambda| B\|u_1 - u_2\|.
\end{aligned}$$

Il en résulte que pour $|\lambda|B < 1$, A est un opérateur contractant, donc il admet un point fixe unique. Un tel point fixe est une solution de (3.14).

Exemple 3.4 On considère le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} u''(x) + \lambda L(x,u(x)) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{3.15}$$

En outre, on suppose que

$$\|L(x,u(x))\| \leq M\|u(x)\|$$

$$|L(x,u(x_1)) - L(x,u(x_2))| \leq N(x)|u_1(x) - u_2(x)| \tag{3.16}$$

avec

$$B^2 = \int_0^1 |N(t)|^2 dt < \infty.$$

Ce problème peut être transformé à l'équation intégrale

$$u(x) - \lambda \int_0^1 k(x,t)L(t,u(t))dt = -\int_0^1 k(x,t)f(t)dt. \tag{3.17}$$

où

$$k(x,t) = \begin{cases} t(1-x), & t \leq x \\ x(1-t), & t \geq x \end{cases}$$

Comme $|k(x,t)| \leq \dfrac{1}{4}$ et $L(x,u(x))$ satisfait (3.16), les hypothèses du théorème 3.5 sont vérifiées. Par conséquent, si

$$\frac{1}{4}|\lambda|B < 1$$

le problème (3.15) aura une solution unique pour tout $f \in L^2[a,b]$.

Exercice 3.1 Soit T un opérateur défini sur $\mathcal{C}([0,1])$ par

$$Tu(x) = \int_0^x (u(t))^2 dt.$$

Montrer que T n'est pas contractant sur la boule unité fermée de $\mathcal{C}([0,1])$, mais il l'est sur la boule fermée de rayon $\dfrac{1}{4}$.

Exercice 3.2 Montrer que l'opérateur $T : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$ défini par

$$Tu(x) = u(0) + \lambda \int_0^x u(t)dt, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

est contractant si $|\lambda| < 1$.

Exercice 3.3 Montrer que l'équation intégrale non linéaire

$$u(x) = \int_0^1 e^{-tx}\cos(\beta u(t))dt, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 < \beta < 1.$$

admet une solution unique.

Exercice 3.4 Montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -u''(x) = 2 + \dfrac{1}{1+u^2(x)}, & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0) = u(1) = 0, & u \in \mathcal{C}^2([0,1]) \end{cases}$$

Exercice 3.5 Considérons l'espace

$$\mathcal{C}_0^2([0,1],\mathbb{R}) = \{u \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}), u(0) = u(1) = 0\}$$

et l'opérateur $L_D : \mathcal{C}_0^2([0,1],\mathbb{R}) \to \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$,

$$L_D(u) = u''.$$

Montrer que

1. L_D est inversible et pour tout $g \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$,

   $$L_D^{-1}(g)(x) = \int_0^1 k(x,t)g(t)dt$$

   où

   $$k(x,t) = \begin{cases} t(x-1), & 0 \le t \le x \le 1, \\ x(t-1), & 0 \le x \le t \le 1. \end{cases}$$

2. Si on pose $w(x) = \int_0^1 k(x,t)g(t)dt$ alors

   $$w'(x) = \int_0^x tg(t)dt + \int_x^1 (t-1)g(t)dt.$$

3. L_D^{-1} est un opérateur linéaire, continu et borné, avec

   $$\|L_D^{-1}(g)\|_{\mathcal{C}_0^2([0,1])} \le 2\|g\|_\infty.$$

4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le problème $L_D^{-1}(u) = \lambda u$ admet une solution $u \in \mathcal{C}_0^2([0,1],\mathbb{R})$, non triviale ($\neq 0$) si et seulement si $\lambda = -(\pi n)^{-2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Dans ce cas là $u(x) = A\sin(n\pi x)$ avec $A \in \mathbb{R}$.

Chapitre 4

Opérateurs linéaires bornés

Définition 4.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps des scalaires. Une application $A : E \to F$ est dite linéaire si pour tout u et v dans E et pour tout scalaires α et β,*

$$A(\alpha u + \beta v) = \alpha A u + \beta A v \tag{4.1}$$

Cette application est appelée aussi *opérateur linéaire* ou *transformation linéaire.*

Définition 4.2 *Soient E et F deux espaces normés. Un opérateur linéaire $A : E \to F$ est dit borné s'il existe une constante $M \geq 0$, telle que*

$$\|Au\| \leq M\|u\| \quad \textit{pour tout } u \in E. \tag{4.2}$$

Définition 4.3 *Soient E et F deux espaces vectoriels normés. On définit une norme sur l'espace vectoriel de tout les opérateurs linéaires bornés de E dans F par*

$$\|A\| = \sup_{\|u\|=1} \|Au\| = \sup_{\|u\|\neq 0} \frac{\|Au\|}{\|u\|} \tag{4.3}$$

L'espace des opérateurs linéaires bornés de E dans F muni de cette norme est noté par $\mathcal{L}(E, F)$. Si $E = F$, il est noté simplement par $\mathcal{L}(E)$.

Théorème 4.1 *Soit A un opérateur linéaire entre deux espaces vectoriels normés E et F. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

(a) *A est borné.*

(b) *A est continu sur E.*

(c) *A est continu à l'origine.*

Théorème 4.2 *Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Si F est un Banach, alors $\mathcal{L}(E, F)$ l'est aussi.*

Preuve. Il est clair qu'il est un espace normé. Il reste à montrer qu'il est complet. Soit A_n une suite de fonctions de Cauchy dans $\mathcal{L}(E,F)$. i.e,

$$\|A_n - A_m\| \longrightarrow 0, \quad \text{quand } n,m \to \infty$$

Ce qui implique que $A_n(u)$ est une suite de Cauchy. Par conséquent, elle converge vers une limite, notée $A(u)$. Bien entendu, $u \to Au$ est linéaire. Montrons qu'il est borné

$$\|Au\| = \lim_{n\to\infty} \|A_n u\| \le \lim\sup \|A_n\|\|u\|.$$

Et comme $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, alors elle est uniformément bornée par une constante C. On a donc $\|Au\| \le C\|u\|$. D'où $A \in \mathcal{L}(E,F)$.
D'autre part, montrons que A est une limite de la suite A_n:

$$\begin{aligned}\|(A_n - A)(u)\| &= \lim_{m\to\infty} \|(A_n - A_m)(u)\| \\ &\le \lim_{m\to\infty} \sup \|A_n - A_m\|\|u\| \\ &\le o(1)\|u\|.\end{aligned}$$

Comme A_n est de Cauchy, alors $\|A_n - A\| \to 0$.

Définition 4.4 *Deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont dites équivalentes, s'il existe deux constantes α, β telles que $\alpha\|.\|_1 \le \|.\|_2 \le \beta\|.\|_1$.*

Proposition 4.1 *Dans un espace de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Ce résultat, n'est pas vrai en dimension infinie.*

Théorème 4.3 *Tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet et par conséquent tout sous espace de dimension finie d'un espace vectoriel normé est fermé.*

4.1 Opérateurs intégraux

Maintenant, nous allons définir une classe importante d'opérateurs définis à l'aide d'une intégrale dites opérateurs intégraux dont le domaine d'intégration est un domaine Ω mesurable dans $\mathbb{R}^d$.

Définition 4.5 *Soit k une fonction mesurable sur $\Omega \times \Omega$. Alors la forme général d'un opérateur intégral linéaire A, dit aussi opérateur à noyau, est formellement donné par l'expression*

$$Au(x) = \int_\Omega k(x,t)u(t)dt \tag{4.4}$$

Au est défini dès que cette intégrale existe.[1]

[1] Généralement, au sens de Lebesgue.

Exemple 4.1 Soit $E = \mathcal{C}(I)$, où I est un intervalle compact de $\mathbb{R}$. On considère l'opérateur intégral linéaire A de E dans lui même défini par

$$Au(x) = \int_I k(x,t)u(t)dt \tag{4.5}$$

où k une fonction à valeurs réelles continue sur le carré $I \times I$. Pour déterminer $\|A\|$, on a

$$|Au(t)| \leq \|u\| \int_I |k(x,t)|dt$$

Ainsi,

$$\|A\| \leq \max_{x\in I} \int_I |k(x,t)|dt \tag{4.6}$$

Comme

$$h(x) = \int_I |k(x,t)|dt$$

est continue sur I, h atteint son maximum en un certain point $x_0 \in I$. On définit

$$w(t) = \begin{cases} \dfrac{k(x_0,t)}{|\, k(x_0,t)\, |} & \text{si } k(x_0,t) \neq 0 \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases}$$

Il est clair que w est une fonction intégrable sur I car elle est bornée et mesurable. Alors il existe une suite $\{w_n\}$ dans $\mathcal{C}(I)$ telle que $\|w_n\| \leq 1$ et $\{w_n\}$ converge vers w dans $L^1(I)$ (Car $\mathcal{C}(I)$ est dense dans $L^p(I), 1 \leq p < \infty$). Donc

$$\|A\| \geq \|Aw_n\| \geq Aw_n(x_0) \to \int_I k(x_0,t)w(t)dt$$

D'où

$$\|A\| \geq \|Aw_n\| \geq \int_I k(x_0,t)w(t)dt = \int_I |k(x_0,t)|dt = \max_{x\in I} \int_I |k(x,t)|dt \tag{4.7}$$

Ainsi, d'après (4.6) et (4.7),

$$\|A\| = \max_{x\in I} \int_I |k(x,t)|dt \tag{4.8}$$

Convergence uniforme et convergence ponctuelle

Définition 4.6 *Soit $\{A_n\}$ une suite d'opérateurs dans $\mathcal{L}(E,F)$. On dit que A_n converge uniformément vers un certain $A \in \mathcal{L}(E,F)$ si*

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0$$

On dit aussi, que A_n converge vers A en norme d'opérateur.

Définition 4.7 *Soit $\{A_n\}$ une suite d'opérateurs dans $\mathcal{L}(E,F)$. On dit que A_n converge ponctuellement vers un certain $A \in \mathcal{L}(E,F)$ si*

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n u - Au\| = 0$$

pour tout $u \in E$.

Il est facile de vérifier que la convergence uniforme de la suite $\{A_n\}$ dans $\mathcal{L}(E,F)$ implique la convergence ponctuelle, mais la réciproque n'est pas toujours vraie.

Noyau et image d'une application linéaire

Le noyau et l'image d'une application linéaire sont deux espaces vectoriels importants.

Définition 4.8 *Soit $A : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels E, F. Le noyau de A, noté par $N(A)$ est le sous ensemble de E défini par*

$$N(A) = \{u \in E \mid Au = 0\}. \tag{4.9}$$

L'image de A, notée par $R(A)$ est le sous ensemble de F défini par

$$R(A) = \{Au \in F \mid u \in E\}. \tag{4.10}$$

Le terme "noyau" utilisé dans cette définition a un sens totalement différent de celui utilisé pour se référer au noyau d'un opérateur intégral. Si $N(A) = \{0\}$ alors l'opérateur inverse $A^{-1} : R(A) \subset F \to E$ existe sur $R(A)$, i.e., $A^{-1}Au = u \ \forall u \in E$, $AA^{-1}f = f \ \forall f \in R(A)$. Il est clair que la linéarité de A implique la linéarité de A^{-1}. Si $N(A) = \{0\}$ et $R(A) = F$ alors l'opérateur inverse $A^{-1} : F \to E$ est défini sur tout l'espace F. La question qui se pose alors est la suivante : Si A est borné, son inverse A^{-1} est-il aussi borné? La réponse à cette question est l'objet de ce qui suit, notamment le théorème de l'inverse de Banach.

Proposition 4.2 *Soit $A : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels E et F. Le noyau de A est un sous espace vectoriel de E, et l'image de A est un sous espace vectoriel de F. Si E et F sont des espaces vectoriels normés et A est borné, alors le noyau de A est un sous espace fermé.*

Exemple 4.2 On considère l'opérateur intégral $A : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$ défini par

$$Au(x) = \int_0^1 k(x,t)u(t)dt$$

où $k(x,t)$ est un noyau séparable, c-à-d il s'écrit sous la forme $k(x,t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x)\beta_i(t)$ avec $\alpha_i, \beta_i : [0,1] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues. Alors

$$Au(x) = \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \beta_i(t)u(t)dt \right) \alpha_i(x)$$

C'est la la projection de u sur le sous espace engendré par $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Le noyau de A est le sous espace des fonctions $u \in \mathcal{C}([0,1])$ telle que

$$\int_0^1 \beta_i(t)u(t)dt = 0 \quad \text{pour } i = 1, \ldots, n$$

Ainsi, l'image et le noyau de A sont deux sous espaces fermés de $\mathcal{C}([0,1])$.

Application ouverte et graphe fermé

Théorème 4.4 (de l'application ouverte) *Soient E et F deux espaces de Banach et soit $A \in \mathcal{L}(E,F)$ et surjectif, alors A est une application ouverte, c'est-à-dire qu'elle transforme tout ouvert de E en un ouvert de F.*

Ce théorème est utilisé largement pour montrer la continuité de l'opérateur inverse.

Théorème 4.5 (de l'inverse de Banach) *Soient E et F deux espaces de Banach et soit $A \in \mathcal{L}(E,F)$ et bijectif, alors $A^{-1} \in \mathcal{L}(E,F)$.*

PREUVE. Comme l'application est ouverte, alors l'inverse est continue.

Dans l'application des méthodes numériques pour la résolution des problèmes de la forme $Au = f$, où A est un opérateur linéaire borné entre deux espaces de Banach E et F, la connaissance de certaines propriétés de l'opérateur concerné est d'une grande importance, de sorte que l'existence et la bornitude de l'inverse soient garanties. Le théorème de l'inverse de Banach dit que l'existence et l'unicité des solutions pour tout $f \in F$ implique la stabilité de la solution u, c-à-d, une petite perturbation de la donnée f, entraîne un petit changement dans la solution u. Plus précisément, soit $A\tilde{u} = \tilde{f}$. nous avons alors,

$$u - \tilde{u} = A^{-1}(f - \tilde{f})$$

Ainsi,

$$\|u - \tilde{u}\| = \|A^{-1}\|\|f - \tilde{f}\|$$

Donc, si $f - \tilde{f}$ est petit, il en va de soi pour $u - \tilde{u}$. Le rapport $\|A^{-1}\|$ détermine la relation entre la taille de l'erreur dans la donnée f et l'erreur dans la solution u. Pour plus de détails, nous allons examiner les erreurs relatives :

$$\frac{\|u - \tilde{u}\|}{\|u\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|\|f - \tilde{f}\|}{\|u\|} = \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|f - \tilde{f}\|}{\|A\|\|u\|}$$

Et puisque $\|f\| \leq \|A\|\|u\|$, on obtient

$$\frac{\|u - \tilde{u}\|}{\|u\|} \leq \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|f - \tilde{f}\|}{\|f\|}$$

La quantité $\mathrm{cond}(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$ est appelée nombre de conditionnement de l'équation. Généralement, $\mathrm{cond}(A) \geq 1$,

$$\|A\|\|A^{-1}\| \geq \|AA^{-1}\| = \|I\| = 1.$$

Les problèmes avec un petit conditionnement sont dit bien conditionnés, tandis que ceux avec un grand conditionnement sont dit mal conditionnés.

Exemple 4.3 On considère le problème à valeurs initiales suivant

$$\begin{cases} u''(t) + u(t) = g(t), \\ u(0) = 1, u'(0) = 0. \end{cases} \tag{4.11}$$

Si, par exemple $g(t) = 1$, la solution est $u(t) = 1$. Si on introduit une petite perturbation sur le second membre de l'équation différentielle en prenant $g(t) = 1 + \varepsilon \cos t$, avec $\varepsilon \neq 0$, la solution est donnée par $u(t) = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon t \sin t$. En marchant dans le temps, cette expression va osciller avec une amplitude croissante et elle "explose". Le phénomène est appelé *résonance*.

Théorème 4.6 (du graphe fermé) *Soient E et F deux espaces de Banach et soit A un opérateur linéaire de E dans F, alors $A \in \mathcal{L}(E, F)$ si et seulement si A est fermé.*[2]

Ce théorème est utile dans la démonstration directe de la continuité. Précisément, pour montrer la continuité de l'opérateur linéaire A, au lieu de supposer que si $u_n \to u$ dans E alors, $Au_n \to Au$ dans F, on a besoin seulement de supposer que $Au_n \to f$ dans F et il suffit de montrer que $f = Au$ (ce qui signifier également que A est fermé).

Preuve. Soit $\Gamma = \{(u, Au) \mid u \in E\}$ le graphe de A. La projection $\Gamma \subset E \times F \to E$ définie par $(u, Au) \to u$ est un opérateur linéaire borné entre deux espaces de Banach. Il est clair qu'elle est bijective. Alors, l'inverse est continue d'après le théorème de Banach. Mais, l'application $E \to \Gamma \subset E \times F$ est tout simplement A, d'où A est continue.

Contre exemple: Soient $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ et $F = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ deux espaces vectoriels munis de la même norme de la convergence uniforme

$$\|u\| = \sup_{x \in [0,1]} |u(x)|$$

On définit l'opérateur différentiel $L_D : E \to F$ par $L_D u = u'$. Il est clair que L_D est linéaire. Si $\{u_n\} \in E$ et $(u_n, u_n') \to (u, f)$ dans $E \times F$ alors $u_n' \to f$ uniformément sur $[0, 1]$. D'où

$$u_n(x) - u_n(0) = \int_0^x u_n'(t)dt \to \int_0^x f(t)dt$$

Mais, $u_n(x) - u_n(0) \to u(x) - u(0)$, donc

$$u(x) = u(0) + \int_0^x f(t)dt$$

Ainsi, $u' = f$ et $\Gamma(L_D)$ est fermé. Cependant L_D n'est pas borné. (Pourquoi?)[3]

Théorème 4.7 *Soient E et F deux espaces de Banach. Si $A \in \mathcal{L}(E, F)$ et injectif, alors $A^{-1} : R(A) \to E$ est borné si et seulement si l'image $R(A)$ est fermée dans F.*

Exemple 4.4 Soit $E = \mathcal{C}([0, 1])$ muni de la norme de la convergence uniforme. On considère l'opérateur intégral de Volterra $T : E \to E$

$$Tu(x) = \int_0^x u(t)dt \tag{4.12}$$

Alors, T est borné, avec $\|T\| \leq 1$, en effet

$$\|Tu\| \leq \sup_{0 \leq x \leq 1} \int_0^x |u(t)|dt \leq \int_0^1 |u(t)|dt \leq \|u\|.$$

Pour $u \equiv 1$, $T(1) = x$ et $\|x\| = 1$, on obtient $\|T\| = 1$. Il est clair que T est injectif, i.e. $N(T) = \{0\}$. Cependant, l'image de T est l'ensemble des fonctions continûment différentiables sur $[0, 1]$ et qui s'annulent en $x = 0$, i.e.

$$R(T) = \{u \in \mathcal{C}^1([0, 1]) \mid u(0) = 0\}$$

C'est un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}([0, 1])$ qui n'est pas fermé.

[2]Un opérateur A est dit fermé si son graphe $\Gamma(A)$ est un sous ensemble fermé dans $E \times F$.

[3]Tout simplement, car E n'est pas un espace de Banach, tandis que F l'est.

Exemple 4.5 (Perturbation de l'identité) Soit $E = \mathcal{C}([0,1])$, on considère l'opérateur $A : E \to E$ défini par

$$Au(x) = u(x) + \int_0^x u(t)dt$$

Alors l'image de A est fermée, plus précisément on a

(a) $N(A) = \{0\}$,

(b) $R(A) = \mathcal{C}([0,1])$.

(a) Il est clair que A est injectif, en effet $Au = 0$ implique

$$u(x) = -\int_0^x u(t)dt, \text{ pour tout } x \in [0,1]$$

et on constate que u est une primitive d'une fonction continue. Il en résulte que u est une fonction continue et dérivable. En dérivant les deux cotés de cette relation, on obtient l'équation différentielle assujettie à une condition initiale

$$\begin{cases} u'(x) + u(x) = 0, & x \in [0,1] \\ u(0) = 0 \end{cases} \tag{4.13}$$

qui admet la solution unique $u = 0$, d'où $N(A) = \{0\}$.
(b) Pour tout $f \in \mathcal{C}([0,1])$, nous cherchons une solution $u \in \mathcal{C}([0,1])$ telle que $Au = f$. De même, en dérivant les deux cotés de l'équation par rapport à x, on obtient

$$u' + u = f'.$$

En utilisant le facteur intégrant, cette équation devient

$$(e^t u)' = e^t f'.$$

On peut maintenant intégrer de zéro à x, on obtient

$$e^x u(x) - u(0) = \int_0^x e^t f'(t)dt = e^x f(x) - f(0) - \int_0^x e^t f(t)dt,$$

D'où,

$$u(x) = f(x) - \int_0^x e^{t-x} f(t)dt. \tag{4.14}$$

car $u(0) = f(0)$. Ainsi, l'opérateur A est inversible sur $\mathcal{C}([0,1])$ et

$$A^{-1} = I - L,$$

où L est l'opérateur de Volterra

$$Lf(x) = \int_0^x e^{t-x} f(t)dt.$$

Enfin, il est facile de voir que cet inverse est borné, en effet

$$\begin{aligned} \|A^{-1}f\| = \|(I-L)f\| &= \sup_{x\in[0,1]} \left| f(x) - \int_0^x e^{t-x} f(t)dt \right| \\ &\leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} \int_0^x e^{t-x} |f(t)|dt \\ &\leq \|f\| + \int_0^1 e\|f\|dt = (1+e)\|f\|. \end{aligned}$$

tel que $\|A^{-1}\| \leq 1 + e < \infty$.

Le théorème suivant fournit un moyen utile pour montrer que l'image d'un opérateur A est fermée.

Théorème 4.8 *Soient E et F deux espaces de Banach et soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors A est injectif et son image est fermée si et seulement s'il existe une constante positive $\gamma > 0$ telle que*

$$\|Au\| \geq \gamma \|u\|, \quad \forall u \in E. \tag{4.15}$$

Preuve. D'abord, supposons que A satisfait la condition de minoration (4.15). Alors, $Au = 0$ implique que $\|u\| = 0$, d'où $u = 0$. Pour montrer que $R(A)$ est fermée, soit $\{f_n\}$ une suite convergente dans $R(A)$, avec $f_n \to f \in F$. Alors il existe une suite $\{u_n\}$ dans E telle que $f_n = Au_n$. La suite $\{u_n\}$ est de Cauchy, puisque $\{f_n\}$ est de Cauchy, en effet

$$\|u_n - u_m\| \leq \frac{1}{\gamma}\|A(u_n - u_m)\| = \frac{1}{\gamma}\|f_n - f_m\|$$

Ainsi, comme E est complet, on obtient $u_n \to u$ pour un certain $u \in E$. Et comme A est borné, nous avons

$$Au = A(\lim_{n\to\infty} u_n) = \lim_{n\to\infty} Au_n = \lim_{n\to\infty} f_n = f$$

Donc $u \in R(A)$, et $R(A)$ est fermée.
Inversement, supposant que A est injectif et son image est fermée. Alors, $R(A)$ est un espace de Banach, et comme $A : E \to F$ est injectif, l'opérateur $A : E \to R(A)$ est injectif et surjectif donc bijectif entre deux espaces de Banach. Le théorème de l'inverse de Banach, implique que $A^{-1} : R(A) \to E$ est borné, et par conséquent, il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\|A^{-1}f\| \leq c\|f\|, \quad \text{pour tout } f \in R(A).$$

Si on pose $f = Au$, on obtient $\|Au\| \geq \gamma\|u\|$ pour tout $u \in E$, avec $\gamma = \dfrac{1}{c}$.

Exemple 4.6 Soient E un espace normé et $T \in \mathcal{L}(E)$, donc on peut écrire

$$\|Tu\| \leq \|T\|\|u\| \quad \text{pour tout } u \in E.$$

Soit λ un scalaire. Nous avons alors,

$$\|(\lambda I - T)u\| = \|\lambda u - Tu\| \geq |\lambda|\|u\| - \|Tu\| \geq (\mid \lambda \mid - \|T\|)\|u\|$$

Par conséquent, si $\mid \lambda \mid > \|T\|$, alors l'opérateur $\lambda I - T$ satisfait la condition (4.15).

Plusieurs opérateurs linéaires satisfont la condition de minoration (4.15) malgré qu'ils ne sont pas bornés.

Théorème 4.9 *Soient E et F deux espaces normés et $A : E \to F$ un opérateur linéaire. Alors l'opérateur inverse $A^{-1} : R(A) \to E$ existe et continu si et seulement si A satisfait la condition de minoration (4.15).*

Définition 4.9 *Un opérateur borné et bijectif entre deux espaces de Banach est appelé un isomorphisme. Deux espaces de Banach sont dit isomorphe s'il existe un isomorphisme défini de l'un de ces espaces vers l'autre.*

Lemme 4.1 *Soient E et F deux espaces de Banach, et $A \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes*

1. *A est un isomorphisme.*
2. *A satisfait (4.15) et $R(A) = F$.*
3. *A satisfait (4.15) et l'image $R(A)$ est dense dans F.*

4.2 Opérateurs compacts

Définition 4.10 *Soit $B \subset F$ une partie d'un espace topologique. On dit qu'elle est relativement compacte si son adhérence est compacte. Si F est séparé, ceci équivaut à : B est contenu dans un compact. Si F est métrisable, ceci équivaut à : toute suite dans B a une sous-suite qui converge dans F.*

Définition 4.11 *Soient E et F deux espaces de Banach. Un opérateur $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est dit compact ou complètement continu si l'image $T(B_E)$ de la boule unité fermée $B_E = \{u \in E; \|u\|_E \leq 1\}$ est relativement compacte. Autrement dit, T est compact si et seulement si pour toute suite $(u_n)_n$ bornée dans E la suite $(Tu_n)_n$ admet une sous-suite convergente.*

Notons par $\mathcal{K}(E, F) \subset \mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des opérateurs linéaires compacts de E dans F et si $E = F$ on pose $\mathcal{K}(E) = \mathcal{K}(E, E)$.

Définition 4.12 *On dit qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est de rang fini si* $\dim R(T) < \infty$.

Il est clair qu'un opérateur continu de rang fini est un exemple d'opérateur compact.

Exemple 4.7 L'opérateur intégral à noyau séparable

$$Au(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) \int_a^b \beta_i(t)u(t)dt,$$

est un opérateur linéaire de rang fini.

Théorème 4.10 *$\mathcal{K}(E, F)$ est un sous ensemble fermé de $\mathcal{L}(E, F)$. En d'autres termes, une limite d'opérateurs compacts au sens de la norme de $\mathcal{L}(E, F)$, est compacte.*

Ce théorème, dit que les limites d'opérateurs de rang fini, sont des opérateurs compacts! Inversement, est-il vrai que tout opérateur compact est limite d'une suite d'opérateurs de rang fini? La réponse est : Ce n'est pas toujours vrai. En revanche, cela est vrai, si nous somme dans un Hilbert.

Théorème 4.11 *Soit H un espace de Hilbert et soit $T \in \mathcal{K}(H)$. Alors T est une limite uniforme d'une suite d'opérateurs de rang fini.*

Proposition 4.3 *Soit E un espace de Banach. Si $T \in \mathcal{L}(E)$ et $S \in \mathcal{K}(E)$ (resp. $T \in \mathcal{K}(E)$ et $S \in \mathcal{L}(E)$) alors $S \circ T \in \mathcal{K}(E)$.*

Lemme 4.1 (Riesz) *Soit E un e.v.n et soit $M \subset E$ un sous espace fermé tel que $M \neq E$. Alors*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists u \in E \quad \textit{tel que} \quad \|u\| = 1 \quad \textit{et} \quad d(u, M) \geq 1 - \varepsilon.$$

Preuve. Soit $v \in E$ avec $v \notin M$. Puisque M est fermé, alors $d = \text{dist } (v, M) > 0$. On choisit $m_0 \in M$ tel que

$$d \leq \|v - m_0\| \leq \frac{d}{1 - \varepsilon}.$$

Alors,

$$u = \frac{v - m_0}{\|v - m_0\|}$$

répond à la question. En effet, si $m \in M$ on a

$$\|u - m\| = \left\| \frac{v - m_0}{\|v - m_0\|} - m \right\| \geq 1 - \varepsilon.$$

puisque $m_0 + \|v - m_0\| m \in M$.

Théorème 4.12 (Riesz) *Soit E un espace vectoriel normé tel que B_E soit compacte. Alors E est de dimension finie.*

Preuve. Raisonnons par l'absurde. Si E est de dimension infinie, il existe une suite (E_n) de sous-espaces de dimension finie tels que $E_{n-1} \subsetneqq E_n$. Grâce au lemme (4.1) on peut construire une suite (u_n) avec $u_n \in E_n, \|u_n\| = 1$ et dist $(u_n, E_{n-1}) \geq \dfrac{1}{2}$. En particulier $\|u_n - u_m\| \geq \dfrac{1}{2}$ pour $m < n$. Donc la suite (u_n) n'admet aucune sous-suite convergente, ce qui est contraire à l'hypothèse : B_E est compacte.

Conséquences : Soit E un e.v.n de dimension infini. Alors,

1. L'identité $I : E \to E$ est un opérateur borné qui n'est pas compact. Sinon, $I(B_E) = B_E$ serait compacte! ce qui est impossible d'après le théorème de Riesz.

2. Si $T \in \mathcal{K}(E)$ alors T ne peut pas avoir un inverse borné. En effet, si T est inversible dans $\mathcal{L}(E)$, alors on aurait T compact est T^{-1} borné, donc $I = T^{-1} \circ T$ serait compact.

3. Si T est inversible sur E, alors T ne peut pas être compact.

En dimension fini, il est bien connu que les parties compactes sont les parties fermées bornées. Malheureusement, ce n'est pas vrai en dimension infinie, par exemple, la boule unité fermée n'est pas compacte. La question importante est plutôt la suivante :
Qu'elle sont les parties compactes de $\mathcal{C}([a,b])$, espace des fonctions continues sur $[a,b]$?

Définition 4.13 *Une famille $S \subseteq \mathcal{C}([a,b])$ est dite équicontinue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que $x_1, x_2 \in [a,b]$, $|x_1 - x_2| < \delta$ implique $|u(x_1) - u(x_2)| \leq \varepsilon$ pour tout $u \in S$.*

Le théorème suivant caractérise les parties compactes de $\mathcal{C}([a,b])$.

Théorème 4.13 (Arzéla-Ascoli) *Une famille $S \subseteq \mathcal{C}([a,b])$ est relativement compact dans $\mathcal{C}([a,b])$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées*

1. *S est équicontinues.*
2. *S est uniformément bornée, i.e., il existe M telle que $\|u\|_\infty < M$ pour tout $u \in S$.*

Exemple 4.8 *Considérons l'espace de Banach $(\mathcal{C}[a,b], \|.\|_\infty)$ et soit k une fonction continue sur le carré $[a,b] \times [a,b]$. Alors l'opérateur intégral linéaire*

$$Tu(x) = \int_a^b k(x,t)u(t)dt, \qquad \text{pour tout } u \in \mathcal{C}[a,b] \tag{4.16}$$

est compact.

En effet, par ce que la fonction $k(x,t)$ est continue sur le carré $[a,b] \times [a,b]$, elle est uniformément continue, donc

$$|k(x_1,t) - k(x_2,t)| < \varepsilon \text{ si } |x_1 - x_2| < \delta,$$

d'où

$$|Tu(x_1) - Tu(x_2)| < \varepsilon(b-a)\|u\|_\infty$$

Donc, si $u \in B_E$. Alors $T(B_E)$ est un ensemble de fonctions équicontinues. D'autre part,

$$\|Tu\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} \left| \int_a^b k(x,t)u(t)dt \right| \leq M(b-a)\|u\|_\infty$$

Ce qui veut dire que $T(B_E)$ est uniformément borné. Et d'après le théorème d'Ascoli, l'ensemble $T(B_E)$ est relativement compact.

Exemple 4.9 *Sur l'espace de Hilbert $L^2[0,\pi]$, l'opérateur T défini par*

$$Tu(x) = \int_0^\pi \cos(x-t)u(t)dt$$

est un opérateur compact.

On remarque que l'opérateur T est linéaire continu de rang fini. En effet, T s'écrit aussi sous la forme

$$Tu(x) = \cos(x)\int_0^\pi \cos(t)u(t)dt + \sin(x)\int_0^\pi \sin(t)u(t)dt$$

C'est-à-dire : $\dim R(T) = 2$.

Exercices

1. Montrer que les seuls opérateurs compacts dont l'image est fermée sont les opérateurs de rang fini.

2. Soit $(1 \le p \le \infty)$. Montrer que l'opérateur $T : L^p([0,1]) \to L^p([0,1])$
$$Tu(x) = \int_0^1 (x^2 + t^2)u(t)dt.$$
est un opérateur de rang fini et déterminer son spectre.

3. Soit $(1 \le p < \infty)$. On considère l'opérateur de Volterra $V : L^p([0,1]) \to L^p([0,1])$,
$$Vu(x) = \int_0^x u(t)dt.$$
Montrer que V est quasi-nilpotent, i.e. $\sigma(V) = \{0\}$, en prouvant que pour tout $\lambda \neq 0$ et tout $f \in L^p([0,1])$, l'équation $(\lambda - V)u = f$ admet une solution unique donnée par
$$u(x) = \frac{1}{\lambda} f(x) + \frac{1}{\lambda^2} e^{x/\lambda} \int_0^x f(t) e^{-t/\lambda} dt.$$

4. On considère l'opérateur $A : \mathcal{C}([a,b]) \to \mathcal{C}([a,b])$ défini par la formule
$$Au(t) = \int_0^1 \sin(xt)u(t)dt$$
Montrer que :
   (a) A est injectif et strictement positif ($0 < u \in \mathcal{C}([0,1])$ implique $Au > 0$).
   (b) A est un opérateur compact.

4.3 Théorie de Riesz-Fredholm

Théorème 4.14 *Soit E un espace de Banach et soit $T \in \mathcal{K}(E)$. Alors*

a) $N(I-T)$ *est de dimension finie,*

b) $R(I-T)$ *est fermée,*

c) $R(I-T) = N(I-T^*)^\perp$

d) $N(I-T) = 0 \Leftrightarrow R(I-T) = E$

e) $\dim N(I-T) = \dim N(I-T^*)$.

Ce théorème concerne la résolution de l'équation de seconde espèce $u - Tu = f$ où T est un opérateur compact dans un espace de Banach, il exprime que :

a) l'équation homogène $u - Tu = 0$ admet au plus un nombre fini de solutions linéairement indépendantes $u \neq 0$.

b) si $u_n - Tu_n = f_n$ et $f_n \to f$ dans E, alors il existe un $u \in E$ tel que $u - Tu = f$ (attention! cela ne signifie pas que $u_n \to u$ dans E).

c) l'équation $u - Tu = f$ admet une solution si et seulement si $f \in N(I - T^*)^\perp$.

d) $u = 0$ est la solution unique de l'équation homogène $u - Tu = 0$ si et seulement si l'équation non homogène $u - Tu = f$ admet une solution $u \in E$ pour tout $f \in E$.

e) les équations $u - Tu = 0$ et $v - T^*v = 0$ ont le même nombre de solutions linéairement indépendantes non nulles.

En particulier, les énoncés **c**) et **d**) sont des résultats classiques bien connus, on les rencontre souvent dans la plus part des références d'analyse fonctionnelle et ils sont désignés par *l'Alternative de Fredholm* :

- **ou bien** l'équation $u - Tu = f$ admet une solution unique pour tout $f \in E$.
- **ou bien** l'équation homogène $u - Tu = 0$ admet un nombre fini n de solutions linéairement indépendantes et, dans ce cas, l'équation non homogène $u - Tu = f$ est résoluble si et seulement si f vérifie n conditions d'orthogonalité: $f \in N(I - T^*)^\perp$.

Exemple 4.10 On considère l'équation intégrale

$$u(x) - \int_a^b e^{x-t} u(t)dt = f(x), \quad x \in [a, b] \tag{4.17}$$

Il est clair que la solution de cette équations est de la forme

$$u(x) = f(x) + ce^x \tag{4.18}$$

où c est une constante. En substituant (4.18) dans l'équation (4.17), on obtient l'équation

$$c\{1 - (b - a)\} = \int_a^b e^{-t} f(t)dt \tag{4.19}$$

Maintenant, si $b - a \neq 1$, alors (4.19) admet une solution unique et l'équation intégrale (4.17) admet ainsi une solution unique donnée par

$$u(x) = f(x) + \frac{\int_a^b e^{-t} f(t)}{1 - (b - a)} e^x \tag{4.20}$$

si $b - a = 1$, alors (4.19) est résoluble si et seulement si

$$\int_a^b e^{-t} f(t)dt = 0 \tag{4.21}$$

et dans ce cas l'équation (4.19) est satisfaite pour tout c. Notons que $v(x) = e^{-x}$ est la solution de l'équation homogène adjointe

$$v(x) - \int_a^b e^{t-x} v(t)dt = 0, \quad x \in [a, b] \tag{4.22}$$

Et donc (4.21) coïncide avec la condition de résolubilité de l'alternative de Fredholm.

Exercice 4.1 Montrer que l'équation intégrale

$$u(x) = f(x) + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(x+t)u(t)dt \tag{4.23}$$

n'admet aucune solution si $f(x) = x$, mais pour $f(x) = 1$, elle possède une infinité de solutions.

Preuve. a) Soit $E_1 = N(I-T)$. Alors $B_{E_1} \subset T(B_E)$ et donc B_{E_1} est compact. D'après le théorème 4.12, E_1 est de dimension finie.
b) Soit $f_n = u_n - Tu_n \to f$. Il faut montrer que $f \in R(I-T)$. Posons $d_n = \text{dist }(u_n, N(I-T))$. Comme $N(I-T)$ est de dimension finie, il existe $v_n \in N(I-T)$ tel que $d_n = \|u_n - v_n\|$. On a

$$f_n = (u_n - v_n) - T(u_n - v_n). \tag{4.24}$$

Montrons que $\|u_n - v_n\|$ reste borné. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une sous-suite telle que $\|u_{n_k} - v_{n_k}\| \to \infty$. Posons $w_n = \dfrac{u_n - v_n}{\|u_n - v_n\|}$. On aurait grâce à (4.24) $w_{n_k} - Tw_{n_k} \to 0$. Extrayant une sous-sous-suite (notée encore w_{n_k} pour simplifier) on peut supposer que $Tw_{n_k} \to z$. Donc $w_{n_k} \to z$ et $z \in N(I-T)$. D'autre part

$$\text{dist }(w_n, N(I-T)) = \frac{\text{dis }(u_n, N(I-T))}{\|u_n - v_n\|} = 1$$

(puisque $v_n \in N(I-T)$). À la limite, on obtient dist $(z, N(I-T)) = 1$, ce qui est absurde. Par conséquent, $\|u_n - v_n\|$ reste borné et comme T est compact, on peut extraire une sous suite telle que $T(u_{n_k} - v_{n_k}) \to \ell$.
On déduit de (4.24) que $u_{n_k} - v_{n_k} \to f + \ell$; posons $g = f + \ell$ on a $g - Tg = f$ i.e. $f \in R(I-T)$. On a donc montré que l'opérateur $I - T$ est à image fermée.
c) Il est facile de montrer maintenant les relations

$$R(I-T) = N(I-T^*)^\perp \quad \text{et} \quad R(I-T^*) = N(I-T)^\perp$$

d) Prouvons d'abord l'implication directe.
Raisonnons par l'absurde et supposons que

$$E_1 = R(I-T) \neq E.$$

E_1 est un sous espace de Banach et $T(E_1) \subset E_1$. Donc $T_{|E_1} \in \mathcal{K}(E_1)$ et $E_2 = (I-T)(E_1)$ est un sous-espace fermé de E_1. De plus $E_2 \neq E_1$ (puisque $(I-T)$ est injectif). Posant $E_n = (I-T)^n(E)$ on obtient ainsi une suite strictement croissante de sous-espaces fermés. D'après le lemme de Riesz il existe une suite (u_n) telle que $u_n \in E_n, \|u_n\| = 1$ et dist $(u_n, E_{n+1}) \geq \frac{1}{2}$. On a

$$Tu_n - Tu_m = -(u_n - Tu_n) + (u_m - Tu_m) + (u_n - u_m).$$

Notons que si $n > m$ $E_{n+1} \subset E_n \subset E_{m+1} \subset E_m$ et par conséquent

$$-(u_n - Tu_n) + (u_m - Tu_m) + u_n \in E_{m+1}.$$

Donc $\|Tu_n - Tu_m\| \geq \dfrac{1}{2}$, ce qui est absurde puisque T est compact. Donc $R(I-T) = E$.

Chapitre 5

Approximation numérique

Nous avons vu que des difficultés considérables peuvent survenir dans le calcul de la résolvante, même avec des noyaux continues relativement simples. Ainsi, l'utilisation des méthodes numériques revêt une importance critique dans la recherche des solutions approchées aux équations intégrales de seconde espèce. Dans ce chapitre, nous allons considérer plusieurs approches élémentaires au problème de la détermination de la solution approchée d'une équation intégrale.

5.1 Méthode de quadrature

On considère l'équation intégrale de Volterra

$$u(x) = f(x) + \int_0^x k(x,t,u(t))dt, \quad 0 \leq x \leq T \tag{5.1}$$

dont les conditions suivantes sont remplies

(i) $f(x)$ est une fonction continue sur $0 \leq x \leq T$,

(ii) le noyau $k(x,t,z)$ est continu sur $0 \leq t \leq x \leq T, -\infty < z < \infty$.

(iii) le noyau $k(x,t,z)$ satisfait la condition de Lipschitz

$$|k(x,t,z_1) - k(x,t,z_2)| \leq L|z_1 - z_2| \tag{5.2}$$

pour tout $0 \leq t \leq x \leq T$, et tout z_1, z_2.

Comme nous l'avons déjà montrer dans le chapitre ( ), ces conditions sont suffisantes pour assurer que l'équation (5.1) admet une solution unique et continue.

En pratique, il existe plusieurs approches qui utilise les formules de quadrature pour la résolution des équations intégrales. Dans ce qui suit, nous allons présenter une méthode classique et raisonnablement intuitive basée sur la règle d'intégration du trapèze.

x	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$
0.1	8.3455e-05	2.0841e-05	5.2088e-06
0.2	1.6690e-04	4.1681e-05	1.0418e-05
0.3	2.5034e-04	6.2521e-05	1.5626e-05
0.4	3.3378e-04	8.3361e-05	2.0835e-05
0.5	4.1721e-04	1.0420e-04	2.6044e-05
0.6	5.0063e-04	1.2504e-04	3.1252e-05
0.7	5.8404e-04	1.4588e-04	3.6461e-05
0.8	6.6745e-04	1.6672e-04	4.1670e-05
0.9	7.5084e-04	1.8755e-04	4.6878e-05
1.0	8.3424e-04	2.0839e-04	5.2087e-05

Table 5.1: Erreur absolue $|U_n - u(x_n)|$. Exemple (5.1)

5.1.1 Méthode du trapèze

Intuitivement, on peut obtenir une solution approchée pour l'équation (5.1) en utilisant le processus suivant. Soit la donnée d'un pas de discrétisation $h > 0$, supposons qu'on connu la solution aux points $x_i = ih, i = 0, 1, \cdots N-1$. Pour obtenir une approximation de $u(x_n)$, l'idée est de remplacer l'intégrale dans (5.1) par une somme finie. Si, on note U_n la valeur approchée de $u(x_n)$, alors pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, on a

$$U_n = f(x_n) + h\left\{\frac{1}{2}k(x_n, x_0, U_0) + \sum_{i=1}^{n-1} k(x_n, x_i, U_i) + \frac{1}{2}k(x_n, x_n, U_n)\right\}, \tag{5.3}$$

avec $U_0 = f(0)$.

Il est clair que l'inconnue U_n est définie implicitement par (5.3), cependant pour h suffisamment petit, l'équation admet une solution unique. Dans le cas linéaire, on peut évidemment résoudre le problème et déterminer directement les U_n comme solution d'un système d'équations triangulaire inférieur, dans le cas non linéaire, nous avons besoin normalement d'une certaine technique itérative pour résoudre le problème en U_n à une précision près.

Exemple 5.1 On considère l'équation intégrale linéaire de Volterra

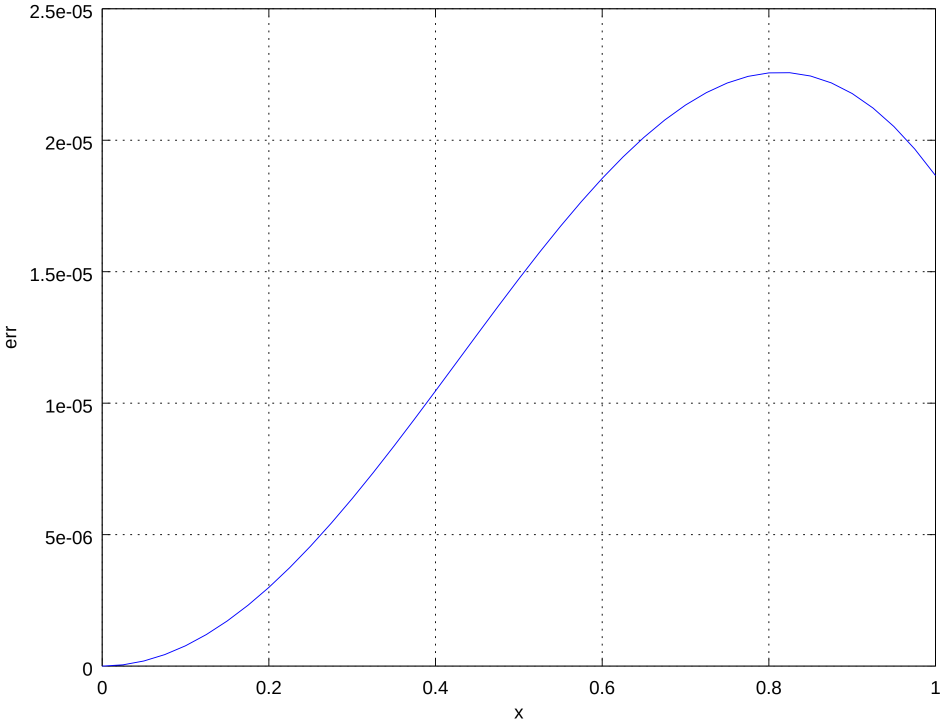
$$u(x) = e^x - \int_0^x e^{(x-t)} u(t)dt \tag{5.4}$$

où la solution exacte est $u(x) = 1$. Les résultats obtenus sont portés dans le tableau ci-dessous

Exemple 5.2 On considère l'équation non linéaire

$$u(x) = 1 + \sin^2(x) - 3\int_0^x \sin(x-t)u^2(t)dt \tag{5.5}$$

où la solution exacte est $u(x) = \cos(x)$. Les résultats obtenus sont portés dans le tableau ci-dessous



5.2 Méthode du noyau séparable

5.3 Méthode spectrale de Tchebychev

L'une des méthodes numériques les plus importantes pour résoudre les équations intégrales est la *méthode spectrale de Tchebychev*, qui consiste à approcher la solution $u(x)$ par une somme finie de la série de Tchebychev

$$u(x) = \frac{c_0}{2}T_0(x) + c_1T_1(x) + c_2T_2(x) + \cdots, \tag{5.6}$$

où $T_k(x) = \cos(k \arccos x)$, $k = 0, 1, \cdots$ sont les polynômes de Tchebychev de première espèce et les coefficients $c_k, k = 0, 1, \cdots$ sont inconnus. Une méthode spectrale est caractérisée par la manière de déterminer ces coefficients, elle peut être de Galerkin et Tau ou de collocation spectrale (pseudo-spectrale).

Théorème 5.1 *Soit u une fonction Lipschitzienne continue sur $[-1, 1]$. Alors u admet une représentation unique comme une série absolument et uniformément convergente*

$$u(x) = \frac{c_0}{2}T_0(x) + c_1T_1(x) + c_2T_2(x) + \cdots, \tag{5.7}$$

et les coefficient sont donnés par la formule

$$c_k = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{u(x)T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Soit u_{n-1} la série tronquée de Tchebychev,

$$u_{n-1}(x) = \frac{c_0}{2}T_0(x) + c_1T_1(x) + c_2T_2(x) + \cdots + c_{n-1}T_{n-1}(x) \tag{5.8}$$

Notons que tout intervalle $[a, b]$ peut être translaté et décalé à $[-1, 1]$ en utilisant les polynômes de Tchebychev décalés

$$T_k^*(x) = T_k(\alpha x + \beta), \quad \alpha = \frac{2}{b-a}, \beta = -\frac{b+a}{b-a}, x \in [a, b].$$

5.3.1 Interpolation

D'abord, il est utile de considérer un sous ensemble de n points de collocation $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de l'intervalle $[-1, 1]$ afin de trouver une bonne transformation entre l'approximation spectrale (5.8) de u et sa représentation physique $u(x_1), u(x_2), \ldots, u(x_n)$. Soit

$$p_{n-1}(x) = \frac{a_0}{2}T_0(x) + a_1T_1(x) + a_2T_2(x) + \cdots + a_{n-1}T_{n-1}(x) \tag{5.9}$$

le polynôme d'interpolation de $u(x)$ aux points $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Théorème 5.2 *Soit $u \in \mathcal{C}^n([-1, 1])$. Alors,*

$$u(x) - p_{n-1}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{n!}u^{(n)}(\xi)$$

pour un certain ξ, élément d'un intervalle engendré par x et les points d'interpolation.

Bien entendu, le choix optimal des points d'interpolation est donné par les zéros du polynôme de Tchebychev $T_n(x)$, qui sont

$$x_k = -\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{5.10}$$

Pour ces points x_k, les polynômes $\{p_{n-1}\}$ sont généralement presque aussi de bonnes approximations de u tout comme les polynômes $\{u_{n-1}\}$ et si u est une fonction analytique sur $[-1, 1]$, alors $\|u - u_{n-1}\|$ et $\|u - p_{n-1}\|$ décroisent géométriquement quand $n \to \infty$. C'est ce qu'on appelle *convergence spectrale*, i.e. la convergence vers zéro est plus rapide que $n^{-p}, p > 0$ quand $n \to \infty$.

5.3.2 Intégration

L'intégration numérique et l'interpolation de Lagrange sont très étroitement liées. Pour une fonction f continue sur $[-1, 1]$. Les formules standards de Newton-cotes sont de la forme

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k), \tag{5.11}$$

où les w_k sont les poids de quadrature

$$w_k = \int_{-1}^{1} \prod_{j=1, j\neq k}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} dx, \quad k = 1, 2, \ldots n.$$

Les *formules de quadrature de Gauss* sont basées sur les points optimaux de Legendre $x_k, k = 1, \ldots, n$ et ces formules sont exactes pour les polynômes de degré inférieur ou égal $2n - 1$. L'idée de la *formule de quadrature de Clenshaw-Curtis* est d'utiliser les points de Tchebychev au lieu des nœuds optimaux. En utilisant les points de Tchebychev (5.10) (points de Tchebychev de premier ordre) on obtient la formule classique de Clenshaw-Curtis. Cependant, si on utilise les zéros de la première dérivé du polynôme de Tchebychev en ajoutant les points ± 1, i.e. les extremums de Tchebychev

$$x_k = -\cos\frac{(k-1)\pi}{n-1}, \quad k = 1, \ldots, n$$

dans $[-1, 1]$ (points de Tchebychev de second ordre), on obtient la formule pratique de Clenshaw-Curtis. Les deux formules ont toutes les bonnes propriétés des formules de quadratures Gaussiennes.

5.3.3 Discrétisation de l'équation

On considère l'équation intégrale de Fredholm

$$u(x) = f(x) + \int_a^b k(x,t)u(t)dt = f(x) + Au(x), \quad x \in [a, b] \tag{5.12}$$

On procède à la discrétisation de l'opérateur intégral de Fredholm $Au(x)$ en utilisant les polynômes décalés de Tchebychev,

$$\begin{aligned} Au(x) &= \int_a^b k(x,t) \sum_{k=0}^{n-1} c_k T_k^*(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \int_a^b k(x,t)T_k^*(t)dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k I_k(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \sum_{j=0}^{n-1} k_{jk} T_j^*(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \left[\sum_{k=0}^{n-1} c_k k_{jk}\right] T_j^*(x). \end{aligned} \tag{5.13}$$

Par conséquent, si $c = (c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})^T$ sont les coefficients de u, alors Kc sont les coefficients de $A(u)$, où $K = (k_{jk})_{k,j=0,\ldots,n-1}$. Le calcul de cette matrice peut s'effectuer à partir des valeurs physiques de la manière suivante

$$I_k(x_s) = \int_a^b k(x_s,t)T_k^*(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} w_i k(x_s, x_i)T_k^*(x_i), \quad s, k = 0, ..., n-1.$$

Chapitre 6

Exercices

Exercice 1 Étudier l'existence des solutions pour les équations intégrales à noyau séparable suivantes

1. $u(x) = 1 + \int_0^1 (x+t)u(t)dt$.
2. $u(x) = 1 + (4\sqrt{3} - 6) \int_0^1 (x+t)u(t)dt$.
3. $u(x,y) = 1 + 2\int_0^1 \int_0^1 (x\xi + y\eta)u(\xi,\eta)d\xi d\eta$.

Exercice 2 Discuter suivant les valeurs du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$, l'existence des solutions pour les équations intégrales suivantes

1. $u(x) = \cos(3x) + \lambda \int_0^\pi \cos(x+t)u(t)dt$.
2. $u(x) = e^x + \lambda \int_0^1 (5x^2 - 3)t^2 u(t)dt$.
3. $u(x) = 2x + \lambda \int_0^1 \sin(\log(x))u(t)dt$.
4. $u(x) = x + \lambda \int_0^{2\pi} |x - \pi| u(t)dt$.

Exercice 3 Déterminer pour quelles valeurs du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$, les équations intégrales homogènes suivantes admettent des solutions non triviales

1. $u(x) - \lambda \int_0^\pi (\cos^2 x \cos 2t + \cos 3x \cos^3 t)u(t)dt = 0$.
2. $u(x) - \lambda \int_0^1 (3x-2)tu(t)dt = 0$.
3. $u(x) - \lambda \int_0^1 (t\sqrt{x} - x\sqrt{t})u(t)dt = 0$.

Exercice 4 Transformer tout ces problèmes à valeurs initiales en équations intégrales de type Volterra

1. $u'' - u = 2, \quad u(0) = 0, u'(0) = 0$
2. $u'' + u = 0, \quad u(0) = 0, u'(0) = 1$

3. $u'' + u = \sin x, \quad u(0) = 0, u'(0) = 0$

4. $u'' + xu = 2x, \quad u(0) = 0, u'(0) = 0$

Exercice 5 Montrer que la résolution du problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} u'' + (\lambda^2 - q)u = 0, \\ u(0) = 1, \quad u'(0) = 0. \end{cases} \tag{6.1}$$

est équivalente à la résolution de l'équation intégrale

$$u(x) - \frac{1}{\lambda}\int_0^x q(t)\sin(\lambda(x-t))u(t)dt = \cos(\lambda x). \tag{6.2}$$

Exercice 6 Résoudre l'équation intégrale non linéaire suivante

$$u(x) = \lambda \int_0^1 xtu^2(t)dt \tag{6.3}$$

Exercice 7 Soit

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^\pi \sin(x-t)u(t)dt \tag{6.4}$$

Calculer la résolvante et déduire pour quelles valeurs de λ la solution existe-elle?

Exercice 8 Résoudre l'équation intégrale de Volterra

$$u(x) = x^2 + \int_0^x (x-t)u(t)dt \tag{6.5}$$

en utilisant

1. La méthode des approximations successives.

2. La méthode des noyaux itérés.

Exercice 9 Résoudre l'équation intégrale de Fredholm non homogène suivante

$$u(x) = ax + \lambda \int_0^1 xtu(t)dt \tag{6.6}$$

par deux manières

1. En utilisant la méthode du noyau séparable pour montrer que la solution unique de cette équation est donnée par

$$u(x) = \frac{ax}{1 - \frac{\lambda}{3}} \tag{6.7}$$

si $\lambda \neq 3$.

2. En utilisant la méthode des approximations successives, avec le choix initial $u_0(x) = ax$, pour calculer $u_n(x)$. Montrer que la limite $u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x)$ existe.

Exercice 10 Discuter suivant les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$, l'existence des solutions pour l'équation intégrale

$$u(x) = \sin x - \cos x + \lambda \int_0^\pi \sin(x+t)u(t)dt$$

Exercice 11 On considère l'équation intégrale non homogène suivante

$$u(x) = x^3 + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \sin\left(\frac{\pi x t}{2}\right) u(t)dt \tag{6.8}$$

1. Écrire le développement de Taylor à l'ordre 5 au voisinage de 0 de la fonction noyau.

2. En déduire une solution approchée $\tilde{u}(x)$ pour cette équation, et donner une estimation de l'erreur a priori au sens résiduel, i.e.

$$r(x) = \tilde{u}(x) - x^3 - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \sin\left(\frac{\pi x t}{2}\right) \tilde{u}(t)dt \tag{6.9}$$

Exercice 12 On considère l'équation intégrale

$$u(x) = x + \int_{-1}^{1} xtu(t)dt \tag{6.10}$$

1. Résoudre cette équation par la méthode de collocation, en utilisant les trois points $-1, 0, 1$ et la base formée des trois premiers polynômes de Legendre $P_n(x), n = 0, 1, 2$, i.e.

$$u_3(x) = c_1 + c_2 x + c_3 \frac{3x^2 - 1}{2} \tag{6.11}$$

2. Avec la même base, résoudre cette équation par la méthode de Galerkin.

Exercice 13 On considère l'équation de Fredholm

$$u(x) = f(x) + \int_a^b k(x,t)u(t)dt, \tag{6.12}$$

où a, b et les fonctions f, k sont données. Notre but dans cet exercice est d'approcher la fonction u sur l'intervalle $[a, b]$. Pour ce faire, on se donne une partition équidistante

$$x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b$$

et le problème se réduit à la résolution du système

$$u(x_i) = f(x_i) + \int_a^b k(x_i,t)u(t)dt, \quad i = 0, \ldots, m. \tag{6.13}$$

où les inconnues sont $u(x_0), u(x_1), \ldots, u(x_m)$. Les intégrales peuvent être évaluées en utilisant une formule de quadrature basée sur les nœuds $x_0, \ldots, x_m$. Soit maintenant $a = 0, b = 1, f(x) = x^2$ et $k(x,t) = e^{|x-t|}$.

1. Montrer que l'utilisation de la règle du trapèze mènent au système

$$\begin{aligned} u(0) &= f(0) + \frac{1}{2}\left[k(0,0)u(0) + k(0,1)u(1)\right], \\ u(1) &= f(1) + \frac{1}{2}\left[k(1,0)u(0) + k(1,1)u(1)\right] \end{aligned}$$

2. Résoudre le système résultant en utilisant la formule composite du trapèze pour $m = 4$.

3. Répéter la question 2) en utilisant la règle de Simpson.

♣

Solutions

1.1. Il est clair qu'une telle solution pour cette équation s'écrit sous la forme

$$u(x) = 1 + c_1 x + c_2,$$

En substituant cette formule dans l'équation, on obtient le système

$$\begin{cases} \frac{c_1}{2} - c_2 = 1 \\ -\frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

dont la solution est $c_1 = -12, c_2 = -7$. Par conséquent, la solution unique de l'équation intégrale est donnée par $u(x) = -12x - 6$.

1.2. Une éventuelle solution pour cette équation doit s'écrire sous la forme

$$u(x) = 1 + c_1(4\sqrt{3} - 6)x + c_2(4\sqrt{3} - 6)$$

on obtient le système

$$\begin{cases} \left[1 - \frac{4\sqrt{3}-6}{2}\right] c_1 + (4\sqrt{3} - 6)c_2 = 0 \\ (4\sqrt{3} - 6)c_1 + \left[1 - \frac{4\sqrt{3}-6}{2}\right] c_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

qui n'admet pas de solutions. Ainsi, l'équation intégrale à son tour n'admet pas de solutions.

1.3. Une telle solution pour cette équation s'écrit sous la forme

$$u(x, y) = 1 + 2c_1 x + 2c_2 y$$

En substituant cette formule dans l'équation intégrale, on obtient le système

$$\begin{cases} \frac{1}{3}c_1 - \frac{1}{2}c_2 = \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{3}c_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

dont la solution est $c_1 = -3, c_2 = -3$. Donc, la solution unique de l'équation intégrale est donnée par $u(x, y) = 1 - 6x - 6y$.

2.1. Nous pouvons réécrire l'équation sous la forme

$$u(x) = \lambda \int_0^\pi (\cos x \cos t - \sin x \sin t)u(t)dt + \cos 3x$$

Donc,

$$u(x) = c_1 \lambda \cos x - c_2 \lambda \sin x + \cos 3x$$

où

$$c_1 = \int_0^\pi u(t) \cos t dt, \quad c_2 = \int_0^\pi u(t) \sin t dt.$$

En substituant l'expression de $u(t)$ dans ces formules, on obtient le système :

$$\begin{cases} c_1 = \int_0^\pi (c_1 \lambda \cos t - c_2 \lambda \sin t + \cos 3t) \cos t dt \\ c_2 = \int_0^\pi (c_1 \lambda \cos t - c_2 \lambda \sin t + \cos 3t) \sin t dt \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} c_1(1-\lambda\frac{\pi}{2}) = 0 \\ c_2(1+\lambda\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 1+\lambda\frac{\pi}{2} \end{vmatrix} = 1 - \frac{\pi^2}{4}\lambda^2.$$

Si $\lambda \neq \mp\frac{2}{\pi}$, $(\Delta(\lambda) \neq 0)$, le système algébrique admet une solution unique $c_1 = c_2 = 0$, et donc

$$u(x) = \cos 3x.$$

Si $\lambda = \frac{2}{\pi}$, le système admet la solution $c_2 = 0, c_1$ arbitraire, et ainsi

$$u(x) = \frac{2}{\pi}c\cos x + \cos 3x$$

Si $\lambda = -\frac{2}{\pi}$, le système admet la solution $c_1 = 0, c_2$ arbitraire, et ainsi

$$u(x) = \frac{2}{\pi}c\sin x + \cos 3x$$

2.2.

$$u(x) = \lambda(e-2)(5x^2-3) + e^x, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

2.3. Si $\lambda \neq -2$

$$u(x) = \frac{2\lambda}{2+\lambda}\sin\log x + 2x$$

Si $\lambda = -2$, l'équation n'admet pas de solutions.

2.4. Si $\lambda \neq \frac{1}{\pi^2}$

$$u(x) = x + \frac{2\pi^2\lambda}{1-\pi^2\lambda}|x-\pi|$$

Si $\lambda = \frac{1}{\pi^2}$, l'équation n'admet pas de solutions.

3.1. On pose $c_1 = \int_0^\pi u(t)\cos 2t dt$, $c_2 = \int_0^\pi u(t)\cos^3 t dt$. D'où

$$u(x) = c_1\lambda\cos^2 x + c_2\lambda\cos 3x.$$

Par substitution dans l'équation, on trouve

$$\begin{cases} (1-\lambda\frac{\pi}{4})c_1 = 0 \\ (1-\lambda\frac{\pi}{8})c_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda\frac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & 1-\lambda\frac{\pi}{8} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{4}{\pi}, \lambda_2 = \frac{8}{\pi}$$

Pour $\lambda = \frac{4}{\pi}, c_2 = 0$, c_1 est arbitraire et

$$u(x) = c_1\lambda\cos^2 x.$$

Pour $\lambda = \frac{8}{\pi}, c_1 = 0$, c_2 est arbitraire et

$$u(x) = c_2\lambda\cos 3x.$$

3.2. Posons $c = \int_0^1 tu(t)dt$, donc la solution s'écrit

$$u(x) = c\lambda(3x - 2).$$

En substituant $u(x)$ dans l'équation, on trouve $c = 0$ et donc l'équation n'admet pas de solution non triviale.

3.3. la solution u est de la forme

$$u(x) = c_1\lambda\sqrt{x} - c_2\lambda x.$$

Pour c_1 et c_2, on trouve le système

$$\begin{cases} (1 - \frac{2\lambda}{5})c_1 + \frac{\lambda}{3}c_2 = 0 \\ -\frac{\lambda}{2}c_1 + (1 + \frac{2\lambda}{5})c_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta(\lambda) = 1 + \frac{\lambda^2}{150} \neq 0.$$

D'où $c_1 = c_2 = 0$, $u(x) = 0$. L'équation n'admet pas de solution non triviale.

5. On pose

$$c = \int_0^1 tu^2(t)dt \tag{6.14}$$

d'où

$$u(x) = c\lambda x \tag{6.15}$$

En substituant $u(x)$ donnée par la relation (6.15) dans l'équation (6.14) on obtient

$$c = \int_0^1 t\lambda^2 c^2 t^2 dt$$

ou encore

$$c = \frac{\lambda^2}{4}c^2.$$

Cette équation admet deux solutions

$$c_1 = 0, \qquad c_2 = \frac{4}{\lambda^2}.$$

Par conséquent, l'équation intégrale donnée a également deux solutions pour tout $\lambda \neq 0$

$$u_1(x) = 0, \qquad u_2(x) = \frac{4}{\lambda}x$$

7.1. En utilisant la méthode des substitutions successives, on définit la suite récurrente

$$u_{n+1}(x) = x^2 + \int_0^x (x - s)u_n(t)dt$$

avec $y_0(x) = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} u_1(x) &= x^2, \\ u_2(x) &= x^2 + \int_0^x (x-t)t^2 dt = x^2 + \frac{x^4}{12}, \\ &\dots. \\ u_n(x) &= x^2 + \frac{x^4}{12} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}.2, \end{aligned}$$

d'où

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x) = 2(\cosh x - 1)$$

En utilisant la méthode des noyaux itérés,

$$\begin{aligned}
k(x,t) &= x - t,\\
k_2(x,t) &= \int_t^x (x-z)(z-t)dz = \frac{(x-t)^3}{3!},\\
&\dots.\\
k_n(x,t) &= \frac{(x-t)^{2n-1}}{(2n-1)!}.
\end{aligned}$$

Alors

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} k_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[\sqrt{\lambda}(x-t)\right]^{2n-1}}{\sqrt{\lambda}(2n-1)!} = \frac{\sinh\sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}}$$

Dans notre cas $\lambda = 1$, d'où

$$\begin{aligned}
u(x) &= x^2 + 1\int_0^x R(x,t;1)t^2 dt\\
&= x^2 + 1\int_0^x \sinh(x-t)t^2 dt = 2(\cosh x - 1).
\end{aligned}$$

8.1. En utilisant la méthode du noyau séparable

$$u(x) = ax + \lambda\int_0^1 xtu(t)dt = ax + \lambda x\int_0^1 tu(t)dt = ax + \lambda xc$$

où

$$c = \int_0^1 tu(t)dt = \int_0^1 (a+\lambda c)t^2 dt = \frac{a+\lambda c}{3}$$

donc

$$c = \frac{a}{3\left(1 - \frac{\lambda}{3}\right)}$$

et par conséquent

$$u(x) = ax + \frac{\lambda ax}{3\left(1-\frac{\lambda}{3}\right)} = \frac{ax}{1 - \dfrac{\lambda}{3}},$$

8.2. En utilisant la suite des substitutions successives

$$u_n(x) = ax + \lambda\int_0^1 xtu_{n-1}(t)dt$$

avec $u_0(x) = ax$, on obtient

$$\begin{aligned}
u_1(x) &= ax + \lambda\int_0^1 xtu_0(t)dt = ax + a\lambda\int_0^1 xt^2 dt = ax + \frac{\lambda}{3}ax,\\
u_2(x) &= ax + \lambda\int_0^1 xtu_1(t)dt = ax + \lambda\int_0^1 xt\left(at + \frac{\lambda}{3}at\right)dt,\\
&= ax + ax\frac{\lambda}{3} + ax\frac{\lambda^2}{3^2} = ax\left(1 + \frac{\lambda}{3} + \frac{\lambda^2}{3^2}\right),
\end{aligned}$$

d'où

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x) = \lim_{n\to\infty} ax\left(1+\frac{\lambda}{3}+\cdots+\frac{\lambda^n}{3^n}\right) = \frac{ax}{1-\frac{\lambda}{3}}$$

9. L'équation peut être réécrite sous la forme

$$\begin{aligned} u(x) &= \sin x - \cos x + \lambda \int_0^\pi (\sin x\cos t + \cos x \sin t)u(t)dt \\ &= \sin x\left[\lambda\int_0^\pi \cos t u(t)dt + 1\right] + \cos x\left[\lambda\int_0^\pi \sin t u(t)dt - 1\right] \\ &= A\sin x + B\cos x \end{aligned} \tag{6.16}$$

En substituant la formule (6.16) dans l'équation donnée, on obtient

$$\begin{aligned} A\sin x + B\cos x &= \sin x - \cos x + \lambda\int_0^\pi \sin(x+t)\left[A\sin t + B\cos t\right]dt \\ &= \sin x\left[\lambda\int_0^\pi \cos t(A\sin t + B\cos t)dt + 1\right] + \\ &+ \cos x\left[\lambda\int_0^\pi \sin t(A\sin t + B\sin t)dt - 1\right] \\ &= \sin x\left(\lambda\frac{\pi}{2}B + 1\right) + \cos x\left(\lambda\frac{\pi}{2}A - 1\right). \end{aligned}$$

Ce qui revient à résoudre le système

$$\begin{cases} A - B\lambda\frac{\pi}{2} = 1, \\ B - A\lambda\frac{\pi}{2} = -1. \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & -\lambda\frac{\pi}{2} \\ -\lambda\frac{\pi}{2} & 1+\lambda\frac{\pi}{2} \end{vmatrix} = 1 - \frac{\pi^2}{4}\lambda^2.$$

Si $\lambda \neq \mp\frac{2}{\pi}$, $(\Delta(\lambda) \neq 0)$,

10. 1. En utilisant le développement de Taylor,

$$\sin\left(\frac{\pi xt}{2}\right) \approx \frac{1}{2}\pi xt - \frac{1}{48}\pi^3x^3t^3 + \frac{1}{3840}\pi^5x^5t^5$$

2. On peut déterminer une solution approchée $\tilde{u}(x)$ de $u(x)$ par la résolution de l'équation

$$\tilde{u}(x) = x^3 + \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}\pi xt - \frac{1}{48}\pi^3x^3t^3 + \frac{1}{3840}\pi^5x^5t^5\right)\tilde{u}(t)dt$$

après un simple calcul, on obtient

$$\tilde{u}(x) = 0.565620x + 0.847692x^3 + 0.014047x^5.$$

L'erreur au sens résiduel est donnée par

$$\begin{aligned} r(x) &= \tilde{u}(x) - x^3 - \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \sin\left(\frac{\pi xt}{2}\right)\tilde{u}(t)dt \\ &\approx 0.000660x^7 - 0.000018x^9. \end{aligned}$$

Chapitre 7

Équations intégrales singulières

Une équation intégrale est dite singulière si son noyau est non borné sur le domaine donné, ou si l'une des bornes d'intégration ou les deux sont infinies. Évidement, une telle équation peut être singulière dans les deux sens. Dans ce chapitre, nous allons étudier quelques types d'équations intégrales singulières. Elles apparaissent fréquemment dans les différents domaines de la physique et de la technologie. Cependant, il n'existe pas une théorie générale pour ces équations. Mais, on trouve dans la littérature certaines méthodes qui traitent quelques cas particuliers.

7.1 Équation intégrale d'Abel

L'équation d'Abel est définie par

$$f(x) = \int_a^x \frac{u(t)}{(x-t)^\alpha} dt, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{7.1}$$

Pour résoudre cette équation, on multiplie les deux cotés par $dx/(y-x)^{1-\alpha}$, et on intègre par rapport à x de a à y, on obtient

$$\int_a^y \frac{f(x)dx}{(y-x)^{1-\alpha}} = \int_a^y \frac{dx}{(y-x)^{1-\alpha}} \int_a^x \frac{u(t)dt}{(x-t)^\alpha},$$

En échangeant l'ordre d'intégration dans le coté droit de cette équation, on obtient

$$\int_a^y \frac{f(x)dx}{(y-x)^{1-\alpha}} = \int_a^y u(t)dt \int_t^y \frac{dx}{(y-x)^{1-\alpha}(x-t)^\alpha}. \tag{7.2}$$

Maintenant, si on pose

$$z = \frac{y-x}{y-t}$$

dans la deuxième intégrale, de sorte que

$$\int_t^y (y-x)^{\alpha-1}(x-t)^{-\alpha} dx = \int_0^1 z^{\alpha-1}(1-z)^{-\alpha} dz = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi},$$

Ici, on a utilisé la fonction bêta d'Euler $\beta(\alpha, 1-\alpha) =$. Ainsi, la relation (7.2) devient

$$\frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_a^y \frac{f(x)dx}{(y-x)^{1-\alpha}} = \int_a^y u(t)dt. \tag{7.3}$$

Finalement, la dérivation des deux cotés de cette relation donne

$$u(t) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \frac{d}{dt} \left[\int_a^t \frac{f(x)}{(t-x)^{1-\alpha}} dx \right]. \tag{7.4}$$

D'une manière similaire, la solution de l'équation intégrale

$$\int_s^b \frac{u(t)}{(t-x)^{\alpha}} dt = f(s), \quad 0 < \alpha < 1. \tag{7.5}$$

est donnée par

$$u(t) = -\frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \frac{d}{dt} \left[\int_t^b \frac{f(x)}{(x-t)^{1-\alpha}} dx \right]. \tag{7.6}$$

Plusieurs équations de ce type peuvent êtres résolus de la même manière, par exemple la solution de la forme générale de l'équation d'Abel

$$\int_a^x \frac{u(t)dt}{[h(x)-h(t)]^{\alpha}} = f(x), \quad 0 < \alpha < 1 \tag{7.7}$$

où $h(x)$ est une fonction strictement croissante, différentiable et $h'(x) \neq 0$ sur $a \leq x \leq b$ est donnée par

$$u(t) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \frac{d}{dt} \left[\int_a^t \frac{h'(y)f(y)dy}{[h(t)-h(y)]^{1-\alpha}} \right]. \tag{7.8}$$

Ainsi, la solution de l'équation

$$\int_x^b \frac{u(t)dt}{[h(t)-h(x)]^{\alpha}} = f(x), \quad 0 < \alpha < 1 \tag{7.9}$$

est

$$u(t) = -\frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \frac{d}{dt} \left[\int_t^b \frac{h'(y)f(y)dy}{[h(y)-h(t)]^{1-\alpha}} \right]. \tag{7.10}$$

Exemple 7.1

(a) La solution de l'équation

$$\int_0^x \frac{u(t)dt}{(x-t)^{1/2}} = x, \quad 0 < x < 1$$

est

$$u(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \left[\int_0^x \frac{tdt}{(x-t)^{1/2}} \right] = \frac{2\sqrt{x}}{\pi}.$$

(b) La solution de

$$\int_a^x \frac{u(t)dt}{(\cos x - \cos t)^{1/2}} = f(x), \quad 0 < x < 1$$

est donnée par

$$u(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \left[\int_a^x \frac{(\sin t) f(t)dt}{(\cos t - \cos x)^{1/2}} \right].$$

7.2 Équations intégrales à noyau de Cauchy

On considère

$$f(x) + \lambda \int_0^1 \frac{u(t)}{t-x} dt = u(x), \quad a < x < b \tag{7.11}$$

qui est une équation intégrale singulière à noyau de Cauchy non homogène. Cette intégrale est prise au sens de la valeur principale de Cauchy. Pour résoudre cette équation on fait appelle à l'identité

$$\int_0^y \frac{dt}{(y-t)^{\alpha-1} t^\alpha (t-x)} = \begin{cases} \dfrac{\pi \cot \alpha\pi}{(y-x)^{1-\alpha} x^\alpha}, & 0 < x < y \\ \dfrac{-\pi \csc \alpha\pi}{(x-y)^{1-\alpha} x^\alpha}, & y < x \end{cases} \tag{7.12}$$

et on définit la fonction $\phi(x, y)$ comme suit

$$\phi(x, y) = \frac{1}{(y-x)^{1-\alpha} x^\alpha}, \quad 0 < x < y, \tag{7.13}$$

où α est tel que $-\pi \cot \alpha\pi = (1/\lambda)$. Alors $\phi(x, y)$ est une solution de l'équation intégrale

$$-\lambda \int_0^y \frac{\phi(t, y)}{t-x} dt = \phi(x, y), \quad 0 < x < y \tag{7.14}$$

En outre,

$$\int_0^y \frac{\phi(t, y)}{t-x} dt = -\frac{\pi \csc \alpha\pi}{(x-y)^{1-\alpha} x^\alpha}, \quad y < x. \tag{7.15}$$

Si, on multiplie (7.11) par x, on obtient

$$\lambda \int_0^1 \frac{t u(t)}{t-x} dt = x u(x) - x f(x) + c, \tag{7.16}$$

où $c = \lambda \int_0^1 u(t) dt$. Maintenant, on multiplie les deux cotés de la relation (7.16) par $\phi(x, y)$ et on intègre de 0 à y et en échangeant l'ordre d'intégration, on trouve

$$\begin{aligned} &-\lambda \int_0^y t u(t) dt \int_0^y \frac{\phi(x, y) dx}{x-t} \\ &-\lambda \int_y^1 t u(t) dt \int_0^y \frac{\phi(x, y) dx}{x-t} = \int_0^y x u(x) \phi(x, y) dx - \int_0^y x f(x) \phi(x, y) dx + c \int_0^y \phi(x, y) dx. \end{aligned}$$

En utilisant les relations (7.14) et (7.15) et que $\int_0^y \phi(x, y) dx = \pi \csc \alpha\pi$, on obtient la relation

$$\lambda \pi \csc \alpha\pi \int_y^1 \frac{t^{1-\alpha} u(t)}{(t-y)^{1-\alpha}} dt = -\int_0^y x f(x) \phi(x, y) dx + c\pi \csc \alpha\pi. \tag{7.17}$$

qui est une équation intégrale d'Abel dont la solution s'écrit sous la forme

$$\lambda t^{1-\alpha} u(t) = \frac{\sin^2 \alpha\pi}{\pi^2} \frac{d}{dt} \left[\int_t^1 \int_0^y (y-t)^{-\alpha} (y-x)^{\alpha-1} x^{1-\alpha} f(x) dx dt \right] + \frac{c \sin \alpha\pi}{\pi(1-t)^\alpha} \tag{7.18}$$

Maintenant, on utilise la relation $-\pi \cot \alpha\pi = 1/\lambda$, et après certains calculs, on obtient

$$\begin{aligned} u(x) = -\frac{f(x)}{1+\pi^2\lambda^2} &+ \frac{\lambda}{(1+\pi^2\lambda^2) x^{1-\alpha} (1-x)^\alpha} \int_0^1 \frac{(1-t)^\alpha t^{1-\alpha} f(t) dt}{t-x} \\ &+ \frac{c}{x^{1-\alpha} (1-x)^\alpha \sqrt{1+\pi^2\lambda^2}}. \end{aligned} \tag{7.19}$$

7.3 Singularité logarithmique

On considère l'équation intégrale

$$\int_{-1}^{1} \ln|x-t|u_0(t)dt = 1, \quad -1 < x < 1. \tag{7.20}$$

En posant $x = \cos\alpha, t = \cos\beta$, l'équation (7.20) devient

$$\int_{0}^{\pi} \ln|\cos\alpha - \cos\beta|U(\beta)d\beta = 1, \quad 0 < \alpha < \pi. \tag{7.21}$$

où $U(\beta) = u_0(\cos\beta)\sin\beta$. Soit maintenant le développement $U(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos n\beta$, alors

$$\ln|\cos\alpha - \cos\beta| = -\ln 2 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha \cos n\beta}{n}. \tag{7.22}$$

L'équation (7.21) devient

$$\int_{0}^{\pi} \left[-\ln 2 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha \cos n\beta}{n}\right] \times \left[\sum_{n=0}^{\infty} b_m \cos m\beta\right] d\beta = 1,$$

De l'orthogonalité des fonctions cosinus, il en résulte,

$$-\pi b_0 \ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \pi b_n \frac{\cos n\alpha}{n} = 1.$$

ainsi, $b_0 = -(1/(\pi \ln 2)), b_n = 0, n \geq 1$, et on trouve que la solution de l'équation (7.20) est donnée par

$$u_0(t) = -\frac{1}{\pi \ln 2} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}. \tag{7.23}$$

Remarque : En substituant cette solution dans l'équation (7.20), on obtient l'identité importante suivante

$$\int_{-1}^{1} \frac{\ln|x-t|}{\sqrt{1-t^2}} dt = -\pi \ln 2, \quad -1 < x < 1. \tag{7.24}$$

Maintenant, on considère l'équation intégrale

$$\int_{-1}^{1} \ln|x-t|u(t)dt = f(x), \quad -1 < x < 1. \tag{7.25}$$

La dérivation par rapport à x, donne

$$\int_{-1}^{1} \frac{u(t)}{x-t} dt = f'(x), \quad -1 < x < 1. \tag{7.26}$$

Lemme 7.1 *(Formule de Leibniz)*

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{a(x)}^{b(x)} u(x,t)dt = u(b(x),x)b'(x) - u(a(x),x)a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} dt \tag{7.27}$$

rrterterterterteliom