Chapitre 3

Théorèmes généraux de l'intégration

3.1 Convergence monotone

Dans toute la suite $(X, \mathcal{A}, \mu)$ désignera un espace mesuré.

Théorème 3.1.1. (*Théorème de la convergence monotone de Beppo-Levi*) Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite croissante de fonctions mesurables $f_n : X \rightarrow [0, +\infty]$, i.e $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \in X$, et soit $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$. Alors, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

En particulier, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu < +\infty$, alors f est intégrable.

Démonstration. Soit $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$. On a d'après les résultats du chapitre 2, f mesurable, et comme $f_n \leq f$, on a $\int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu$. Comme la suite $\int_X f_n d\mu$ est croissante, elle admet (dans $[0, +\infty]$) une limite vérifiant

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu.$$

Il nous reste donc à montrer l'inégalité inverse. Soit $g \leq f$ une fonction simple, et pour $0 < \varepsilon < 1$, posons

$$A_n = \{x \in X : f_n(x) \geq (1 - \varepsilon)g(x)\}.$$

Il est facile de vérifier que $(A_n)_{n \geq 1}$ est croissante (par rapport à l'inclusion) car $(f_n)_{n \geq 1}$ est croissante. On peut aussi vérifier que $\bigcup_{n \geq 1} A_n = X$. En posant $g = \sum_{j=1}^m \beta_j \mathbf{1}_{B_j}$, on a

$$\int_{A_n} g d\mu = \sum_{j=1}^m \beta_j \int_{A_n} \mathbf{1}_{B_j} d\mu = \sum_{j=1}^m \beta_j \int_{A_n} \mathbf{1}_{A_n \cap B_j} d\mu = \sum_{j=1}^m \beta_j \mu(A_n \cap B_j).$$

Mais d'après la proposition 1.2.1 du chapitre 1, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n \cap B_j) = \mu(X \cap B_j) = \mu(B_j)$.
D'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{A_n} g d\mu = \sum_{j=1}^m \beta_j \mu(B_j) = \int_X g d\mu.$$

D'autre part, on a $\int_X f_n d\mu \geq \int_{A_n} f_n d\mu \geq (1 - \varepsilon) \int_{A_n} g d\mu$. En passant à la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$, on obtient donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu \geq (1 - \varepsilon) \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{A_n} g d\mu = (1 - \varepsilon) \int_X g d\mu$$

ce qui donne en faisant tendre ε vers 0,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu \geq \int_X g d\mu.$$

On en déduit donc que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu \geq \sup_{g \text{ simple} \leq f} \int_X g d\mu = \int_X f d\mu.$$

Le théorème est ainsi démontré. □

Remarque 3.1.1. *Le théorème de la convergence monotone reste valable si l'on remplace le mot "croissante" par le mot "décroissante" mais en supposant en plus que l'une des fonctions f_n est intégrable.*

Nous avons le corollaire suivant concernant l'interversion de série et intégrale pour les fonctions positives :

Corollaire 3.1.1. *Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions mesurables $f_n : X \rightarrow [0, +\infty]$. Alors on a*

$$\int_X \sum_{n=1}^{+\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Démonstration. Conséquence directe du théorème de la convergence monotone appliqué à la suite de fonctions $g_n = f_1 + \dots + f_n$. □

Nous avons également le corollaire suivant pour des fonctions de signe quelconque :

Corollaire 3.1.2. *Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite croissante de fonctions intégrables $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, et soit $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu < +\infty$, alors f est intégrable et l'on a*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème de la convergence monotone à la suite de fonctions $g_n = f_n - f_1$ (Rédiger les détails en exercice). $\square$

Si on omet l'hypothèse de monotonie dans le théorème de la convergence monotone, on obtient le résultat suivant connu sous le nom de lemme de Fatou :

Théorème 3.1.2. (*Lemme de Fatou*) Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions mesurables $f_n : X \rightarrow [0, +\infty]$. Alors on a

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Démonstration. Soit $f = \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n$, et soit $g_n = \inf_{k \geq n} f_k$. Il est facile de voir que g_n est mesurable et que $(g_n)_{n \geq 1}$ est croissante avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n = f$. Comme $g_n \leq f_n$, on a aussi $\int_X g_n d\mu \leq \int_X f_n d\mu$, et en passant à la limite inférieure, on obtient

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X g_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Mais comme $(g_n)_{n \geq 1}$ est croissante, la suite $\int_X g_n d\mu$ l'est aussi, elle admet donc une limite qui vérifie

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X g_n d\mu = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X g_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu.$$

D'autre part, le théorème de la convergence monotone appliqué à g_n , donne

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X g_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu,$$

ce qui achève la démonstration du théorème. $\square$

Remarque 3.1.2. 1) Il est important de supposer $f_n \geq 0$ dans le lemme de Fatou. Il suffit en effet d'examiner dans $[0, 1]$ la suite de fonctions $f_n(x) = x - nx^n$.

2) On peut bien avoir l'inégalité stricte dans le lemme de Fatou. On pourra considérer dans $\mathbb{R}$ la suite de fonctions $f_n(x) = \frac{n}{1+n^2x^2}$.

3.2 Convergence dominée

Théorème 3.2.1. (*Théorème de convergence dominée de Lebesgue*) Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions mesurables $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, qui converge simplement presque partout vers une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, i.e $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x)$ pour presque tout $x \in X$. On suppose qu'il existe $g : X \rightarrow [0, +\infty]$ intégrable telle que $|f_n(x)| \leq g(x)$ pour presque tout $x \in X$ et pour tout $n \geq 1$. Alors f et f_n sont intégrables pour tout $n \geq 1$ et l'on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Démonstration. Comme $|f_n| \leq g$ (p.p) et g est intégrable, on a aussi f_n intégrable. En passant à la limite dans l'inégalité $|f_n| \leq g$, on obtient $|f| \leq g$ (p.p), ce qui implique f est intégrable. En posant $g_n = g + f_n$, on a $g_n \geq 0$, et elle est mesurable. D'après le lemme de Fatou on a

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow +\infty} g_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X g_n d\mu = \int_X g d\mu + \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Or $\liminf_{n \rightarrow +\infty} g_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (g + f_n) = g + f$ (p.p), ce qui implique, puisque $\int_X g d\mu < +\infty$,

$$\int_X f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu.$$

De la même manière, en considérant la fonction $g_n = g - f_n$ au lieu de $g + f_n$, on obtient,

$$-\int_X f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X (-f_n) d\mu,$$

et comme $\liminf_{n \rightarrow +\infty} (-a_n) = -\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n$ pour toute suite (a_n) , on en déduit que

$$\int_X f d\mu \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Ainsi nous avons démontré :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu,$$

ce qui implique que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

□

Remarque 3.2.1. Dans le théorème de la convergence dominée on a une conclusion un peu plus forte. En effet, en appliquant le théorème à la suite $|f_n - f|$, on montre que l'on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0.$$

Nous avons le corollaire suivant concernant l'interversion de série et intégrale :

Corollaire 3.2.1. Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions mesurables $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n| \right) d\mu < +\infty.$$

Alors chaque f_n est intégrable, la série $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ est convergente (p.p), la série $\sum_{n \geq 1} \int_X f_n d\mu$ est convergente, et l'on a :

$$\int_X \sum_{n=1}^{+\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_X f_n d\mu.$$

3.3 Intégrales dépendant d'un paramètre

Dans cette section nous étudions, grâce au théorème de la convergence dominée, les propriétés de certaines fonctions s'exprimant comme intégrales dépendant d'un paramètre. On commence par la continuité :

Théorème 3.3.1. (*Continuité d'intégrale dépendant d'un paramètre*) Soit E un espace métrique, et soit $f : E \times X \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

- i) Pour tout t fixé dans E , la fonction $X \ni x \mapsto f(t, x)$ est mesurable.
- ii) Il existe $t_0 \in E$ tel que pour presque tout x fixé dans X , la fonction $E \ni t \mapsto f(t, x)$ soit continue en t_0 .
- iii) Il existe une fonction intégrable $g : X \rightarrow [0, +\infty[$ telle que $|f(t, x)| \leq g(x)$ pour presque tout $x \in X$ et pour tout $t \in E$.

Alors la fonction

$$F(t) = \int_X f(t, x) d\mu(x)$$

est bien définie sur E et est continue en t_0 .

Démonstration. Comme $|f(t, x)| \leq g(x)$ (p.p) (en x) on a d'après les résultats du chapitre 2, f est intégrable (sur X) pour chaque t fixé dans E . On en déduit que F est bien définie sur E . Par caractérisation de la continuité dans les espaces métriques, il suffit de montrer que pour toute suite (s_n) qui converge vers t_0 dans E , on a $F(s_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} F(t_0)$. Il suffit pour cela d'appliquer le théorème de la convergence dominée à la suite de fonctions $f_n(x) = f(s_n, x)$. □

Exemple On considère la fameuse fonction Γ définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx.$$

En utilisant le théorème précédent, on montre que Γ est bien définie et continue sur $]0, +\infty[$.

Théorème 3.3.2. (*Dérivation sous signe intégrale*) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \times X \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

- i) Pour tout t fixé dans I , la fonction $X \ni x \mapsto f(t, x)$ est intégrable.
- ii) Pour presque tout x fixé dans X , la fonction $I \ni t \mapsto f(t, x)$ est dérivable sur I .
- iii) Il existe une fonction intégrable $g : X \rightarrow [0, +\infty[$ telle que $\sup_{t \in I} \left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \right| \leq g(x)$ pour presque tout $x \in X$.

Alors la fonction

$$F(t) = \int_X f(t, x) d\mu(x)$$

est dérivable sur I et sa dérivée vaut

$$F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) d\mu(x).$$

Démonstration. Soit t_1 fixé dans I , et soit (s_n) une suite dans I qui converge vers t_1 . Considérons le quotient différentiel

$$\frac{F(s_n) - F(t_1)}{s_n - t_1} = \int_X \frac{f(s_n, x) - f(t_1, x)}{s_n - t_1} d\mu(x).$$

En posant $f_n(x) = \frac{f(s_n, x) - f(t_1, x)}{s_n - t_1}$, on a $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(t_1, x)$ pour presque tout $x \in X$, et en utilisant le théorème des accroissements finis, on a $|f_n(x)| \leq g(x)$ pour presque tout $x \in X$. D'où par le théorème de la convergence dominée, on obtient que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F(s_n) - F(t_1)}{s_n - t_1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t_1, x) d\mu(x).$$

Comme (s_n) est une suite quelconque qui converge vers t_1 , le résultat du théorème en découle. $\square$

Exemple On considère la fonction

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} \cos(tx) dx.$$

En utilisant le théorème précédent, on vérifie que F est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par

$$F'(t) = - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x \sin(tx) dx.$$

Une intégration par parties donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x \sin(tx) dx = t \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos(tx) dx = -tF(t),$$

ce qui implique que $F(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2} F(0)$.

3.4 Intégration sur des espaces produits

Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ deux espaces mesurés. On rappelle que la tribu produit $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ sur $X \times Y$ est engendrée par la famille des ensembles de la forme $A \times B$ avec $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$ (de tels ensembles sont appelés pavés mesurables de $X \times Y$). Dans toute la suite, l'ensemble $X \times Y$ sera muni de la tribu produit $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Pour construire l'intégrale de Lebesgue sur $X \times Y$ on aura besoin d'une mesure. Pour cela nous allons tout d'abord introduire quelques préliminaires.

Pour toute partie $E \subset X \times Y$, pour tout $x \in X$ et $y \in Y$, on définit

$$E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}, \quad E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\}.$$

Ces ensembles sont appelés section de E selon x et section de E selon y respectivement. Notons ici que $E_x \subset Y$ et $E^y \subset X$. Nous avons le tout premier résultat concernant la mesurabilité des sections :

Proposition 3.4.1. *Si $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, alors $E_x \in \mathcal{B}$ et $E^y \in \mathcal{A}$ pour tout $x \in X$ et tout $y \in Y$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $E_x \in \mathcal{B}$, le résultat concernant E^y se fait de la même façon. Pour cela considérons la famille $\mathcal{F}$ des parties de Y constituée des ensembles $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ telle que $E_x \in \mathcal{B}$ pour tout $x \in X$. Il est facile de vérifier que $\mathcal{F}$ est une tribu sur Y (le faire à titre d'exercice) et qu'elle contient la famille des pavés mesurables de $X \times Y$, i.e les ensembles de la forme $A \times B$ avec $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$. Par définition d'une tribu engendrée par une famille d'ensembles (voir chapitre 1) on a $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ (en fait on a égalité!). On en déduit par définition de $\mathcal{F}$ le résultat souhaité. $\square$

Soit $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$. Pour tout $x \in X$, on définit la coupe de f selon x par $f_x : Y \rightarrow \mathbb{R}$, $f_x(y) = f(x, y)$ pour tout $y \in Y$. De même, on définit pour $y \in Y$, la coupe de f selon y par $f^y : X \rightarrow \mathbb{R}$, $f^y(x) = f(x, y)$ pour tout $x \in X$. Nous avons le résultat suivant concernant la mesurabilité des coupes

Proposition 3.4.2. *Soit $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable ($X \times Y$ étant muni de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$). Alors*

- i) *pour tout $x \in X$, f_x est mesurable*
- ii) *pour tout $y \in Y$, f^y est mesurable.*

Démonstration. Conséquence directe de la proposition 3.4.1. $\square$

Le résultat suivant nous permet de définir une mesure positive sur l'espace produit $X \times Y$. Nous supposons que les mesures μ et ν sont σ -finies (voir chapitre 1).

Théorème 3.4.1. *Soit $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Soit $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, on définit les fonction $\varphi : X \rightarrow [0, +\infty]$ et $\psi : Y \rightarrow [0, +\infty]$*

$$\varphi(x) = \nu(E_x), \quad \psi(y) = \mu(E^y).$$

Alors les fonctions φ et ψ sont mesurables et l'on a

$$\int_X \varphi d\mu = \int_Y \psi d\nu.$$

La fonction notée $\mu \otimes \nu : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \rightarrow [0, +\infty]$ définie par

$$\mu \otimes \nu(E) = \int_X \varphi d\mu = \int_Y \psi d\nu.$$

est une mesure positive sur $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$. On l'appelle mesure produit sur $X \times Y$. En particulier, si $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$, on a

$$\mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A)\nu(B). \quad (*)$$

De plus, $\mu \otimes \nu$ est l'unique mesure positive sur $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ vérifiant la relation () pour tout $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$.*

Démonstration. La preuve sera proposée en devoir maison. $\square$

Nous arrivons maintenant à l'un des théorèmes clés de cette section :

Théorème 3.4.2. (*Théorème de Fubini-Tonelli*) Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ deux espaces mesurés qui sont σ -finis. Soit $f : X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$ une fonction mesurable, et soit

$$\varphi(x) = \int_Y f(x, y) d\nu(y), \quad \psi(y) = \int_X f(x, y) d\mu(x).$$

Alors les fonctions φ et ψ , définies sur X et Y respectivement, sont mesurables et l'on a

$$\int_X \varphi(x) d\mu(x) = \int_Y \psi(y) d\nu(y) = \int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu).$$

Démonstration. Montrons tout d'abord le théorème pour les fonctions simples. Il suffit pour cela de le faire pour les indicatrices d'ensembles mesurables puisque toute fonction simple est combinaison linéaire d'indicatrices d'ensembles mesurables. Mais dans ce cas il est clair que le résultat est une conséquence directe du théorème 3.4.1. Maintenant, si $f : X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$ est mesurable, il existe une suite croissante de fonctions simples $f_n : X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$ qui converge simplement vers f (Proposition 2.1.8, Chapitre 2). Il suffit ensuite d'appliquer le théorème de la convergence monotone. $\square$

Le corollaire suivant est très utile dans la pratique :

Corollaire 3.4.1. Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ deux espaces mesurés qui sont σ -finis, et soit $f : X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$ une fonction mesurable. Si

$$\int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y) < +\infty \quad \text{ou} \quad \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) < +\infty,$$

alors $f \in L^1(X \times Y)$.

Nous avons maintenant le résultat le plus important de cette section :

Théorème 3.4.3. (*Théorème de Fubini*) Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ deux espaces mesurés qui sont σ -finis, et soit $f \in L^1(X \times Y)$. Alors

i) pour presque tout $x \in X$, on a $f_x \in L^1(Y)$

ii) pour presque tout $y \in Y$, on a $f^y \in L^1(X)$.

De plus, les fonctions $x \mapsto \int_Y f_x d\nu$ et $y \mapsto \int_X f^y d\mu$, qui sont définies presque partout sur X et Y respectivement, sont intégrables sur X et Y respectivement, et l'on a

$$\int_X \left(\int_Y f_x d\nu \right) d\mu = \int_Y \left(\int_X f^y d\mu \right) d\nu = \int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu).$$

Démonstration. On sait par la proposition 3.4.2 que pour tout $x \in X$, la fonction f_x est mesurable. Appliquons le théorème de Fubini-Tonelli à la fonction $|f|$. On obtient ainsi

$$\int_X \left(\int_Y |f_x(y)| d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_{X \times Y} |f| d(\mu \otimes \nu) < +\infty,$$

ce qui implique $\int_Y |f_x(y)| d\nu(y) < +\infty$ pour presque tout $x \in X$ (Proposition 2.2.3, Chapitre 2), i.e $f_x \in L^1(Y)$. La preuve de la partie ii) du théorème se fait de la même façon. Pour démontrer la dernière partie du théorème, il suffit d'appliquer le théorème de Fubini-Tonelli aux fonctions f^+ et f^- et d'utiliser la définition de l'intégrale :

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_{X \times Y} f^+ d(\mu \otimes \nu) - \int_{X \times Y} f^- d(\mu \otimes \nu).$$

□

Nous avons le corollaire suivant

Corollaire 3.4.2. *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ deux espaces mesurés qui sont σ -finis. Soient $f_1 \in L^1(X)$ et $f_2 \in L^1(Y)$. Alors la fonction $f = f_1 \otimes f_2$ définie par $f_1 \otimes f_2(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ pour tout $(x, y) \in X \times Y$, vérifie $f \in L^1(X \times Y)$ et l'on a*

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \left(\int_X f_1 d\mu \right) \left(\int_Y f_2 d\nu \right).$$

Remarque 3.4.1. 1) *Dans la suite, l'intégrale d'une fonction f de deux variables sur un ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^2$ sera notée $\int_E f(x, y) dx dy$, et on ne se préoccupera plus de l'ordre d'intégration grâce au théorème de Fubini.*

2) *En général on applique le théorème de Fubini-Tonelli à la valeur absolue d'une fonction f pour montrer qu'elle est intégrable sur $X \times Y$, ce qui permet de se placer dans les conditions du théorème de Fubini, et d'appliquer ce dernier.*

Exemple Calculer l'intégrale de Gauss $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$ en se servant de la fonction de deux variables $f(x, y) = e^{-x(1+y^2)}$.

3.5 Intégrale et changement de variables

Avant d'énoncer le théorème de changement de variables nous avons besoin de rappeler quelques notions de calcul différentiel.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et soit $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$ une application différentiable. La jacobienne de φ est la matrice représentant sa différentielle :

$$d\varphi(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice s'appelle le jacobien de φ et il sera noté J_φ .

On dira qu'une application $\varphi : U \rightarrow V$, où U et V sont deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, est un difféomorphisme de classe C^1 si φ est une bijection, et φ ainsi que son application inverse φ^{-1} sont de classe C^1 .

Théorème 3.5.1. (*Théorème de changement de variables*) Soit U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, et soit $\varphi : U \rightarrow V$ un difféomorphisme de classe C^1 .

i) Si $f : V \rightarrow [0, +\infty]$ est mesurable, alors la fonction $f \circ \varphi : U \rightarrow [0, +\infty]$ est mesurable et

$$\int_V f(y)dy = \int_U f \circ \varphi(x)|J_\varphi(x)|dx.$$

ii) Si $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable sur V , la fonction $f \circ \varphi|J_\varphi| : U \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable sur U et

$$\int_V f(y)dy = \int_U f \circ \varphi(x)|J_\varphi(x)|dx.$$

Parmi les changements de variables les plus connus, on a les coordonnées polaires. Pour cela considérons dans $\mathbb{R}^2$ les deux ouverts $U =]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$ et $V = \mathbb{R}^2 \setminus D$, où $D = \{(x, 0) : x \geq 0\}$. Soit $\varphi : U \rightarrow V$ définie par $\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, $(r, \theta) \in U$. On peut vérifier que φ est un difféomorphisme de classe C^1 et que l'on a

$$d\varphi(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

et donc $J_\varphi(r, \theta) = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$. On en déduit donc le corollaire suivant

Corollaire 3.5.1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable. Alors on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)dx dy = \int_V f(x, y)dx dy = \int_U f(r \cos \theta, r \sin \theta)r dr d\theta.$$