Chapitre 7

Espaces L^p

7.1 Définition des espaces $\mathcal{L}^p$

On fixe un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

7.1.1 Définitions et exemples

Définition 7.1.1. *Soit* $1 \leq p < +\infty$. *On dénote par* $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ *l'ensemble des fonctions mesurables* $f : X \to \mathbb{C}$ *telles que*

$$\int_X |f(x)|^p d\mu(x) < +\infty.$$

Définition 7.1.2. *Une fonction mesurable* $f : X \to \mathbb{C}$ *est dit essentiellement bornée s'il existe une constante* $m > 0$ *telle que* $|f(x)| \leq m$ *p.p L'espace des fonctions essentiellement bornées se not* $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Remarque (1)**:** $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ est l'ensemble des fonctions sommables. $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ contient les fonctions mesurables bornées. si $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mu =$ la mesure de comptage, on note cet espace $\ell^p(\mathbb{N})$ ou tout simplement ℓ^p $(1 \leq p < \infty)$. C'est l'ensemble des suites $(u_n)_{n\geq 0}$ à valeurs complexes, telles que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^p < +\infty.$$

Proposition 7.1.3. *Pour tout* $1 \leq p \leq +\infty$, $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ *est un espace vectoriel.*

Démonstration. Soit $f, g \in \mathcal{L}^p$, et $\lambda \in \mathbb{C}$.

Cas $p = +\infty$. Soient $0 \leq m_1, m_2 < +\infty$ et $E_1, E_2 \in \mathcal{A}$ de mesure nulle, tels que

$$|f(x)| \leq m_1 \ \forall x \notin E_1, \ |g(x)| \leq m_2 \ \forall x \notin E_2.$$

Alors $|f(x) + \lambda g(x)| \leq m_1 + |\lambda| m_2 < +\infty$ pour tout $x \notin E_1 \cup E_2$, et $E_1 \cup E_2$ est de mesure nulle, cqfd.

Cas $1 \leq p < +\infty$. On remarque que pour tout $a, b \in \mathbb{C}$,

$$|a+b|^p \leq (|a| + |b|)^p \leq \Big(2\max(|a|, |b|)\Big)^p = 2^p \max(|a|^p, |b|^p) \leq 2^p(|a|^p + |b|^p).$$

Donc

$$\int |f + \lambda g|^p d\mu \leq 2^p \int |f|^p d\mu + (2|\lambda|)^p \int |g|^p d\mu < +\infty,$$

et on a bien $f + \lambda g \in \mathcal{L}^p$, cqfd. $\square$

Exemple 1 **:** les fonctions indicatrices d'ensemble E mesurables de mesure finie sont dans tous les $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, $1 \le p \le +\infty$., ainsi que leurs combinaisons linéaires. Dans le cas des espaces ℓ^p cela correspond aux suites à support fini.
Exemple 2 **:** sur $X = \mathbb{R}$, toute fonction f mesurable bornée telle que

$$f(x) = O(|x|^{-q}),\ x \to \pm\infty,\ pq > 1$$

est dans $\mathcal{L}^p$. Une fonction de $\mathcal{L}^p$ ($p < +\infty$) n'est pas nécessairement bornée. Exemple

$$f(x) = \frac{1}{x^q}\mathbf{1}_{]0,1[} \in \mathcal{L}^p,\ \forall\, qp < 1.$$

Un fonction de $\mathcal{L}^\infty$ non plus, exemple

$$f(x) = 1 \text{ si } x \notin \mathbb{Q},\ f(x) = x \text{ si } x \in \mathbb{Q}.$$

7.1.2 Conséquences de l'inégalité de Hölder

Proposition 7.1.4 (Inégalité de Hölder)**.** *Si $p \in]1, +\infty[$, soit $q \in]1, +\infty[$ l'exposant conjugué de p, défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On a pour toutes $f, g : X \to [0, +\infty]$ mesurables,*

$$\int fg d\mu \le \left(\int f^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int f^q d\mu\right)^{1/q}.$$

Démonstration. Remarquons que pour tout $a, b \in [0, +\infty]$ on a

$$ab \le \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q. \tag{7.1}$$

C'est évident si $a = +\infty$ ou $b = +\infty$. Si $a, b < +\infty$, fixer b et poser $\varphi(a) = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q - ab$. Le calcul des dérivées est évident, et le tableau de variations donne un minimum de $\varphi(a)$ quand a est l'unique solution de $\varphi'(a) = 0$, c'est-à-dire $a = b^{\frac{1}{p-1}}$. Ainsi (on rappelle que $q = \dfrac{p}{p-1}$) :

$$\varphi(a) \ge \varphi(b^{\frac{1}{p-1}}) = \frac{1}{p}b^{\frac{p}{p-1}} + \frac{1}{q}b^q - b^{\frac{1}{p-1}+1} = 0,\ \text{cqfd.}$$

Si le membre de droite de l'inégalité à démontrer est nul ou infini, le résultat est évident. Sinon, on applique (7.1) avec

$$a^p = \frac{|f(x)|^p}{\int |f|^p d\mu},\ b^q = \frac{|g(x)|^q}{\int |g|^q d\mu},\ \text{cqfd.}$$

□

Définition 7.1.5. *Pour $1 \le p < +\infty$ et $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ on pose*

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p} \in [0, +\infty[(\text{ norme } p)$$

Pour $f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ on pose

$$\|f\|_\infty = \inf\{m \in [0, +\infty[; |f(x)| \le m \text{ p.p }\} \in [0, +\infty[. \text{ (borne sup. essentielle.)}$$

Remarque : c'est bien un minimum. Soit $m = \|f\|_\infty$, m_n une suite décroissante convergent vers m, $E_n \in \mathcal{A}$ de mesure nulle, tels que $|f(x)| \leq m_n\ \forall x \notin E_n$. Alors $|f(x)| \leq m\ \forall x \notin \cup_n E_n$, et $\cup_n E_n$ est de mesure nulle.

Corollaire 7.1.6. *Soit $1 \leq p, q \leq +\infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pour tout $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $g \in \mathcal{L}^q(X, \mathcal{A}, \mu)$, on a $fg \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ et*

$$\int |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Démonstration. Les cas $p = 1, q = +\infty$ et $p = +\infty, q = 1$ sont évidents. Les autres cas découlent de l'inégalité de Hölder. □

Corollaire 7.1.7. *Pour tout $p \in [1, +\infty]$, pour tout $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, f est sommable sur les ensembles de mesure finie.*

Démonstration. Prendre $g = \mathbf{1}_E$, qui est dans tous les $\mathcal{L}^q$. □

Remarque : d'où l'intérrêt de la condition $p \geq 1$. Si $0 < p < 1$ le corrollaire ci-dessus devient faux. Par exemple $f(x) = x^{-1}\mathbf{1}_{]0,1[}(x)$ est dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ pour tout $0 < p < 1$, mais n'est pas intégrable sur $]0, 1[$.

7.1.3 Conséquences de l'inégalité de Minkowski

Proposition 7.1.8. *Soit $1 \leq p \leq +\infty$. Pour tout $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$,*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|f\|_p \text{ (Inégalité de Minkowski).}$$

Démonstration. Soit $f, g \in \mathcal{L}^p$. Si $p = +\infty$ on a $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ p.p donc $f + g \in L^\infty$ et $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Si $p = 1$, on a $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ pour tout $x \in X$, donc

$$\|f + g\|_1 = \int |f + g| d\mu \leq \int (|f| + |g|) d\mu = \int |f| d\mu + \int |g| d\mu = \|f\|_1 + \|g\|_1.$$

Sinon, $p \in]1, +\infty[$, et de même $q = \dfrac{p}{p-1} \in]1, +\infty[$. Soit $h = |f| + |g|$. L'inégalité de Hölder donne

$$\begin{aligned}
\int h^p d\mu &= \int |f| h^{p-1} d\mu + \int |g| h^{p-1} d\mu \\
&\leq \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int h^{(p-1)q} d\mu\right)^{1/q} + \left(\int |g|^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int h^{(p-1)q} d\mu\right)^{1/q} \\
&= \left(\|f\|_p + \|g\|_q\right) \cdot \left(\int h^p d\mu\right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

Si $h = 0$ p.p, alors $f = 0$ et $g = 0$ p.p et il n'y a rien à démontrer. Sinon, on peut diviser chaque membre par $(\int h^p d\mu)^{1/q}$:

$$\|f + g\|_p \leq \|h\|_p = \left(\int h^p d\mu\right)^{1/p} = \left(\int h^p d\mu\right)^{1-1/q} \leq \|f\|_p + \|g\|_p, \text{ cqfd.}$$

□

Définition 7.1.9. *Une semi-norme sur un espace vectoriel V est une application $\|\cdot\| : V \to [0, +\infty[$ telle que $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ pour tout $v, w \in V$, et $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ pour tout $v \in V$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Corollaire 7.1.10. *Pour tout $p \in [1, +\infty]$, $\|\cdot\|_p$ est une quasi-norme.*

Démonstration. Clairement $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$, et Minkowski $\Rightarrow$ sous-additivité. Ce n'est pas une norme car l'indicatrice d'un ensemble de mesure nulle, par exemple, a pour "norme" 0. □

Remarque : il manque la condition $\|v\| = 0 \Rightarrow v = 0$ pour avoir une norme. Ici cette condition n'est pas satisfaite, puisque une fonction nulle p.p est de norme $\|\cdot\|_p$ nulle.

7.2 Espaces L^p

On fixe un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

7.2.1 Définition

Définition 7.2.1. *Soit $1 \leq p \leq +\infty$. Soit $\mathcal{N} \subset \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ le sous espace vetoriel formé des fonctions nulles p.p. Par définition, $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ est l'espace vectoriel quotient :*

$$L^p(X, \mathcal{A}, \mu) = \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)/\mathcal{N}.$$

Remarque : en pratique, $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ est l'espace $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ où l'on identifie les fonctions égales presque partout. Il est clair que si $f(x) = g(x)$ p.p, alors $\|f\|_p = \|g\|_p$ $(1 \leq p \leq +\infty)$. Donc l'application $\|\cdot\|_p$ passe au quotient : si $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, sa norme sera la norme de l'un quelconque de ses représentants.

Proposition 7.2.2. *Pour tout $p \in [1, +\infty]$, $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$.*

Démonstration. L'inégalité de Minkowski donne la sous-additivité. Si $f \in L^p$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, soit $f_0 \in \mathcal{L}^p$ un représentant de f. Alors λf_0 est un représentant de λf et on a

$$\|\lambda f\|_p =_{def} \|\lambda f_0\|_p = |\lambda| \|f_0\|_p =_{def} |\lambda| \|f\|_p.$$

Enfin, si $\|f\|_p = 0$ alors $\int |f_0|^p d\mu = 0$ donc $f_0(x) = 0$ p.p, donc $f = 0$. □

Remarque : on munira par la suite systématiquement $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ de sa structure d'espace vectoriel normé.

7.2.2 Complétude de L^p

Proposition 7.2.3. *Soit $p \in [1, +\infty]$. Soit f_n une suite de Cauchy de $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, c'est-à-dire telle que*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, m, n \geq N,\ \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon.$$

Il existe une sous-suite f_{n_k} convergent presque partout.

Remarque : en particulier cela s'applique a toute suite convergente.

Démonstration. Soit $f_n \in L^p$ une suite de Cauchy. Pour tout ε, soit $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $m, n \geq N(\varepsilon)$,

$$\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon.$$

Pour $k \geq 1$, on pose $n_k := N(2^{-1}) + N(2^{-2}) + \cdots + N(2^{-k})$. C'est une suite strictement croissante de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$. Par construction de n_k, $\left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_p \leq 2^{-k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Nous allons montrer que

$$\varphi(x) := \sum_{k=1}^{+\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| < +\infty \text{ p.p},$$

ce qui montrera que f_{n_k} converge p.p.
Cas $p=+\infty$. Soit, pour $k\in\mathbb{N}^*$, $E_k\in\mathcal{A}$ de mesure nulle, tel que $|f_{n_k}(x)-f_{n_{k+1}}(x)|\le\left\|f_{n_k}-f_{n_{k+1}}\right\|_\infty$ pour tout $x\notin E_k$. La réunion E des E_k est encore de mesure nulle. Pour tout $x\notin E$, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, on a

$$|f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)|<2^{-k},$$

donc $\varphi(x)<\sum_{k=1}^{+\infty}2^{-k}=1$ pour tout $x\notin E$.
Cas $1\le p<+\infty$. Le lemme de Fatou et l'inégalité de Minkowski donnent successivement

$$\begin{aligned}\int_X\varphi^p d\mu &= \int_X\left(\lim_N\sum_{k=1}^N|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}|\right)^p d\mu\le\liminf_N\int_X\left(\sum_{k=1}^N|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}|\right)^p d\mu\\ &\le\liminf_N\left(\sum_{k=1}^N\left\|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}\right\|_p\right)^p<\left(\sum_{k=1}^{+\infty}2^{-k}\right)^p=1<+\infty.\end{aligned}\tag{7.2}$$

Donc $\varphi(x)<+\infty$ p.p. □

Théorème 7.2.4 (de Riesz-Fisher)**.** *Pour tout $p\in[1,+\infty]$, $L^p(X,\mathcal{A},\mu)$ est un espace de Banach.*

Démonstration. Soit f_n une suite de Cauchy de L^p. On veut démontrer qu'elle converge dans L^p. Il suffit de voir qu'elle a une valeur d'adhérence, car une suite de Cauchy qui a une valeur d'adhérence est convergente.

Soit, pour tout n, $g_n\in\mathcal{L}^p$ un représentant de f_n. Par la proposition précédente, il existe $E\in\mathcal{A}$ de mesure nulle, une sous-suite g_{n_k} de g telle que $g_{n_k}(x)$ converge pour tout $x\notin E$. On pose $g(x)=\lim_k g_{n_k}(x)$ si $x\notin E$, et $g(x)=0$ sinon. La fonction g ainsi définie est mesurable, puisqu'elle est la limite simple des $g_{n_k}\mathbf{1}_E$.

Cas $p=+\infty$. Pour tout $k,\ell\in\mathbb{N}^*$, soit $E_{k,l}\in\mathcal{A}$ de mesure nulle, tel que $|g_{n_k}(x)-g_{n_\ell}(x)|\le\|g_{n_k}-g_{n_\ell}\|_\infty$ pour tout $x\notin E_{k,\ell}$. Soit F la réunion de E et des $E_{k,\ell}$. C'est un ensemble de mesure nulle. Et pour tout $x\notin F$, pour tout $k,\ell\in\mathbb{N}^*$,

$$|g_{n_k}(x)-g_{n_\ell}(x)|\le\|g_{n_k}-g_{n_\ell}\|_\infty.$$

Soit $\varepsilon>0$. Comme (f_n) est de Cauchy dans L^p, il existe $N\in\mathbb{N}^*$ tel que pour tous $k,\ell\ge N$, $\|f_{n_k}-f_{n_\ell}\|_\infty=\|g_{n_k}-g_{n_\ell}\|_\infty<\varepsilon$. Pour tout $x\notin F$ et tous $k,\ell\ge N$ on a donc $|g_{n_k}(x)-g_{n_\ell}(x)|<\varepsilon$. En faisant tendre $\ell\to+\infty$ on obtient $|g_{n_k}(x)-g(x)|\le\varepsilon$ pour tout $k\ge N$ et tout $x\notin F$. Cela prouve que g est essentiellement bornée, et que $\|g_{n_k}-g\|_\infty<\varepsilon$ pour tout $k\ge N$. Si f est la classe de g dans L^∞, on vient de montrer que $f_{n_k}\to f$ dans L^∞.

Cas $1\le p<+\infty$. Soit $\varepsilon>0$ et $N\in\mathbb{N}^*$ tel que pour tout $k,\ell\ge N$, $\|f_{n_k}-f_{n_\ell}\|_p=\|g_{n_k}-g_{n_\ell}\|_p<\varepsilon$. Par le lemme de Fatou, pour tout $k,\ell\ge N$,

$$\int_X|g_{n_k}-g|^p d\mu\le\liminf_{\ell\to+\infty}\int_X|g_{n_k}-g_{n_\ell}|^p d\mu\le\varepsilon^p<+\infty.$$

Ceci prouve d'une part que $g\in\mathcal{L}^p$, et d'autre part que $\|g_{n_k}-g\|_p<\varepsilon$ pour tout $k\ge N$. Si f est la classe de g dans L^p, on a donc montré que $f_{n_k}\to f$ dans L^p. □

7.2.3 Cas de l'espace L^2

Proposition 7.2.5. *Soit $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré. L'application*

$$(f,g)\to\int_X f\overline{g}d\mu$$

est un produit scalire sur $L^2(X,\mathcal{A},\mu)$, dont la norme associée est la norme $\|\cdot\|_2$.

Démonstration. Évident. On remarque que l'intégrale est bien définie d'après l'inégalité de Hölder ($p=2,q=2$). □

Théorème 7.2.6 (de Riesz)**.** *Soit $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré. L'espace $L^2(X,\mathcal{A},\mu)$ est un espae de Hilbert.*

Démonstration. Corollaire immédiat de Riesz-Fisher. □

7.3 Interpolation d'espaces L^p

7.3.1 Cas des mesures finies

Proposition 7.3.1. *Si μ est une mesure finie, alors on a pour tout $1 \leq p < q \leq +\infty$,*

$$L^q(X, \mathcal{A}, \mu) \subset L^p(X, \mathcal{A}, \mu).$$

L'inclusion est continue.

Démonstration. Cas $q = +\infty$. Soit $p \in [1, +\infty[$ et $f \in L^\infty$. On a $|f(x)|^p \leq \|f\|_\infty^p$ p.p donc

$$\|f\|_p \leq \left(\int \|f\|_\infty^p d\mu\right)^{1/p} = \|f\|_\infty \mu(X)^{1/p} < +\infty,$$

ce qui prouve que $L^\infty \subset L^p$ de manière continue.

Si $1 \leq p < q < \infty$, soit $f \in L^q$. soit $t = q/p > 1$. On a $t' = q/(q-p)$. Par l'inégalité de Hölder,

$$\|f\|_p^p = \int |f|^p \cdot 1 d\mu \leq \left(\int |f|^{pt} d\mu\right)^{1/t} \left(\int 1^{t'} d\mu\right)^{1/t'} = \|f\|_q^p \mu(X)^{(q-p)/q} < +\infty.$$

□

7.3.2 Cas des espaces ℓ^p

Lemme 7.3.2. *Soit $1 \leq p < q < +\infty$, et (u_n) une suite de $[0, +\infty]$. On a*

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Démonstration. Soit

$$A = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^q\right)^{\frac{1}{q}}, \ B = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^p\right)^{\frac{1}{p}}, \ C = \sup_n u_n.$$

Il est clair que $C \leq B$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^q = u_n^p u_n^{q-p} \leq u_n^p C^{q-p}$, donc

$$A^q \leq B^p C^{q-p} \leq B^p B^{q-p} = B^q,$$

donc $A \leq B$. □

Proposition 7.3.3. *Pour tout $1 \leq p < q \leq +\infty$, on a $\ell^p \subset \ell^q$, et l'inclusion est continue.*

Démonstration. Soit $(u_n) \in \ell^p$. Si $1 \leq p < q = +\infty$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n| = (|u_n|^p)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |u_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty,$$

donc $(u_n) \in \ell^\infty$ et $\|(u_n)\|_\infty \leq \|(u_n)\|_p$.

Si $1 \leq p < q < +\infty$, le lemme donne immédiatement le résultat. □

7.3.3 Interpolation d'espaces L^p

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Proposition 7.3.4. *Soit $1 \le p < q \le +\infty$. Soit $f : X \to \mathbb{C}$ mesurable. Si $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ et si $f \in L^q(X, \mathcal{A}, \mu)$ alors $f \in L^r(X, \mathcal{A}, \mu)$ pour tout $p < r < q$. De plus, si t est l'unique $0 < t < 1$ tel que $\frac{1}{r} = \frac{t}{p} + \frac{1-t}{q}$. On a*

$$\|f\|_r \le \|f\|_p^t \|f\|_q^{1-t}.$$

Remarque : autrement dit, l'ensemble des p t.q $f \in L^p$ est un intervalle, et $p \to \|f\|_p$ est log-convexe.

Démonstration. Cas $q = +\infty$. On a $r < +\infty$, $t = p/r$, et

$$\|f\|_r = \left(\int |f|^r d\mu\right)^{1/r} = \left(\int |f|^{p+r-p} d\mu\right)^{1/r} \le \|f\|_\infty^{(r-p)/r} \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/r} = \|f\|_p^{p/r} \|f\|_\infty^{(r-p)/r}, \text{cqfd.}$$

Cas $q < +\infty$. Posons $r = sp + (1-s)q$ avec $0 < s < 1$. L'inégalité de Hölder avec exposants $1/s$ et $1/(1-s)$ donne

$$\begin{aligned}\left(\int |f|^r d\mu\right)^{1/r} &= \left(\int |f|^{sp} \cdot |f|^{(1-s)q} d\mu\right)^{1/r} \le \left(\int |f|^p d\mu\right)^{s/r} \left(\int |f|^q d\mu\right)^{(1-s)/r} \\ &= \|f\|_p^{ps/r} \|f\|_q^{(1-s)q/r}.\end{aligned}$$

□

Proposition 7.3.5. *Soit $r \in]1, +\infty[$ et $f \in L^r(X, \mathcal{A}, \mu)$. Il existe une décomposition $f = g + h$ avec $h \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ pour tout $p \le r$ et $h \in L^q(X, \mathcal{A}, \mu)$ pour tout $q \ge r$.*

Démonstration. Soit $g = f\mathbf{1}_{|f|>1}$ et $h = f\mathbf{1}_{|f|\le 1}$. On a $f = g + h$. Comme $|h| \le |f|$, on a $h \in L^r$. Comme $|h| \le 1$, on a $h \in L^\infty$. Par le lemme d'interpolation, on a donc $h \in L^q$ $\forall q \ge r$. Si $|f(x)| > 1$ on a $|f(x)|^p \le |f(x)|^r$ $(p \le r)$. Donc $|g|^p \le |f|^r$, et $g \in L^p$. □

7.4 Résultats de densité

7.4.1 Généralités

Définition 7.4.1. *Une fonction simple est une combinaison linéaire (sur $\mathbb{C}$) d'indicatrices d'ensembles de mesure finie.*

Proposition 7.4.2. *Une fonction simple est dans $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ pour tout $1 \le p \le +\infty$.*

Démonstration. En effet, si $E \in \mathcal{A}$ est de mesure finie, alors $\mathbf{1}_E$ est bornée, donc dans L^∞. De plus

$$\int (\mathbf{1}_E)^p d\mu = \int \mathbf{1}_E d\mu = \mu(E) < +\infty.$$

□

Théorème 7.4.3. *Les fonctions simples sont denses dans $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, pour tout $1 \le p < +\infty$.*

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{L}^p$ telle que $f(x) \geq 0$ pour tout x. Soit f_n une suite croissante de fonctions étagées convergent simplement vers f. Alors f_n est simple. On a $0 \leq f_n^p \leq f^p$, donc par le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty} \int |f_n - f|^p d\mu = 0,$$

ce qui prouve que $f_n \to f$ au sens de la norme $\|\cdot\|_p$.

Soit maintenant $f \in L^p$ quelconque. On choisit un représentant $g \in \mathcal{L}^p$ de f, et on applique le résultat précédent aux parties positives et négatives des parties réelles et imaginaires de g. □

Corollaire 7.4.4. *Pour tout $1 \leq p < +\infty$, $L^\infty \cap L^1$ est dense dans L^p.*

Démonstration. Les fonctions simples sont des éléments de $L^1 \cap L^\infty$, et $L^1 \cap L^\infty \subset L^p$ par le lemme d'interpolation. □

Corollaire 7.4.5. *Si μ est finie, $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ est dense dans $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ pour tout $1 \leq p \leq +\infty$.*

Corollaire 7.4.6. *Pour tout $1 \leq p < +\infty$, ℓ^1 est dense dans ℓ^p.*

7.4.2 Espace L^p sur des espaces métriques de mesure finie

Proposition 7.4.7. *Soit (X, d) un espace métrique, μ une mesure finie sur $\mathcal{B}(X)$, et $E \in \mathcal{B}(X)$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe U ouvert et F fermé, tels que*

$$F \subset E \subset U, \text{ et } \mu(U \setminus F) < \varepsilon.$$

Démonstration. Soit $\mathcal{A}$ la famille des boréliens E vérifiant la conclusion. Nous allons montrer successivement que

(1) $\mathcal{A}$ contient les ouverts.

(2) $\mathcal{A}$ est stable par complémentaire.

(3) $\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable.

(1) : soit $U \subset X$ ouvert et

$$F_n = \left\{x \in X; d(x, U^c) \geq \frac{1}{n}\right\} = \left\{x \in X; \forall y \notin U,\ d(x, y) \geq \frac{1}{n}\right\}$$

C'est une suite croissante de fermés, dont la réunion est U, puisque U est ouvert. Donc $\mu(F_n) \to \mu(U)$. Comme μ est finie, on a $\mu(U \setminus F_n) = \mu(U) - \mu(F_n) \to 0$, cqfd.
(2) : on a $U^c \subset E^c \subset K^c$. L'ensemble U^c est fermé, et F^c est ouvert. De plus $F^c \setminus U^c = U \setminus F$, cqfd.
(3) : Soit $(E_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathcal{A}$. On choisit pour tout $n \geq 1$, F_n fermé et U_n ouvert, tels que $F_n \subset E_n \subset U_n$ et $\mu(U_n \setminus F_n) < 2^{-n}\varepsilon$. Soit E la réunion des E_n, U la réunion des U_n, et F la réunion des F_n. Alors U est ouvert, mais F n'est pas forcément fermé (mais c'est un F_σ). On a

$$U \setminus F = (\cup U_n) \setminus (\cup F_n) \subset \cup(U_n \setminus F_n) \Rightarrow \mu(U \setminus F) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(U_n \setminus F_n) < \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n}\varepsilon = \varepsilon.$$

La suite d'ensembles $U \setminus (F_1 \cup \cdots \cup F_n)$ est décroissante, d'intersection $U \setminus F$. Comme μ est finie, $\mu\Big(U \setminus (F_1 \cup \cdots \cup F_n)\Big) \to \mu(U \setminus F) < \varepsilon$, donc on peut trouver $n \geq 1$ tel que $\mu\Big(U \setminus (F_1 \cup \cdots \cup F_n)\Big) < \varepsilon$. Comme $F_1 \cup \cdots \cup F_n$ est fermé, on a le résultat.

Les relations (1), (2) et (3) prouvent que $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre contenant les ouverts, donc $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{A}$, et la proposition est démontrée. □

Contre exemple en mesure infinie : soit $X = \mathbb{R}$, $\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \delta_{1/n}$, et $E = \{0\}$. Pour tout $F \subset E$ fermé et $U \supset E$ ouvert, on a $\mu(F) = 0$, $\mu(U) = +\infty$.

Corollaire 7.4.8. *Soit (X, d) un espace métrique, μ une mesure finie sur $\mathcal{B}(X)$. Les fonctions continues bornées sont denses dans $L^p(\mu)$, $1 \leq p < +\infty$.*

Remarque : la preuve montre que les fonctions Lipschitziennes bornées sont denses. La mesure étant finie, les fonctions f continues bornées sur X sont bien dans L^p, puisqu'elles sont mesurables, et

$$\int_X |f|^p d\mu \leq (\sup |f|)^p \, \mu(X) < +\infty.$$

Exemples : $X \subset \mathbb{R}^d$ compact et $\mu =$ la mesure de Lebesgue.

Démonstration. Il suffit de voir que l'on peut approcher en norme p, toute fonction indicatrice d'ensemble borélien, par une fonction continue.

Soit $E \in \mathcal{B}(X)$. Soit F fermé, U ouvert, tels que $F \subset E \subset U$ et $\mu(U \setminus F) < \varepsilon$. On remarque que pour tout $x \in X$,

$$d(x, U^c) + d(x, F) > 0.$$

En effet, F étant fermé, si $x \notin F$, $d(x, F) > 0$. Et si $x \in F$, U^c étant fermé, $d(x, U^c) > 0$. La fonction

$$f(x) = \frac{d(x, U^c)}{d(x, F) + d(x, U^c)}$$

est donc bien définie et continue. On a $f(x) = 1 = \mathbf{1}_E(x)$ si $x \in F$, $f(x) = 0 = \mathbf{1}_E(x)$ si $x \notin U$, et $0 < f(x) < 1$ sinon. Donc par Chasles

$$\int_X |f(x) - \mathbf{1}_E(x)|^p d\mu(x) = \int_{U \setminus F} |f(x) - \mathbf{1}_E(x)|^p d\mu(x) \leq \mu(U \setminus F) < \varepsilon, \text{ cqfd.}$$

□

7.4.3 Espaces $L^p(\mu)$ sur des espaces métriques de mesure σ-finie

Proposition 7.4.9. *Soit (X, d) un espace métrique, μ une mesure sur $\mathcal{B}(X)$. On suppose qu'il existe une suite X_n d'ouverts de mesure finie, dont la réunion est X. Alors pour tout $E \in \mathcal{B}(X)$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe F fermé, U ouvert, tels que $F \subset E \subset U$ et $\mu(U \setminus F) < \varepsilon$.*

Remarque : si μ est finie, en prenant $X_n = X$ on retrouve la proposition 7.4.7 comme cas particulier.

Démonstration. On applique la proposition 7.4.7 à X_n, muni de la toplologie induite. On a $\mu(X_n) < +\infty$ par hypothèse. Soit U_n ouvert de X_n et F_n fermé de X_n, tels que

$$F_n \subset E \cap X_n \subset U_n, \ \mu(U_n \setminus F_n) < 2^{-n-1}\varepsilon.$$

En particulier on a $\mu(U_n \setminus (E \cap X_n)) < 2^{-n-1}\varepsilon$. Comme X_n est ouvert dans X, U_n aussi, donc leur réunion U est un ouvert de X. De plus

$$U \setminus E = (\cup_n U_n) \setminus (\cup_n E \cap X_n) \subset \cup_n (U_n \setminus (E \cap X_n)) \Rightarrow \mu(U \setminus E) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(U_n \setminus (E \cap X_n)) < \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n-1}\varepsilon = \varepsilon.$$

En raisonnant sur E^c on trouve V ouvert contenant E^c tel que $\mu(V \setminus E^c) < \varepsilon$. Alors $F = V^c$ est fermé, $F \subset E \subset U$, et $\mu(U \setminus F) < 2\varepsilon$, cqfd. □

Corollaire 7.4.10. *Soit (X, d) un espace métrique, μ une mesure sur $\mathcal{B}(X)$. On suppose qu'il existe une suite X_n d'ouverts de mesure finie, de réunion X. Alors les fonctions continues bornées, nulles en dehors d'un ensemble de mesure finie, sont denses dans $L^p(\mu)$, pour $1 \leq p < +\infty$.*

Démonstration. Même démonstration que dans le cas des mesures finies. □

7.4.4 Espaces $L^p(\mu)$ pour les mesures de Radon

Définition 7.4.11. *Un espace métrique est dit σ-compact s'il est réunion dénombrable de compacts. Il est dit localement compact, si tout point admet un voisinage compact.*

Exemples : Tout ouvert et tout fermé de $\mathbb{R}^d$, et en particulier $\mathbb{R}^d$, est localement compact et σ-compact. $X = [0,1[$ est localement et σ-compact. $X = [0,1[\times[0,1]$ est σ-compact mais pas localement compact.

Définition 7.4.12. *Soit (X,d) un espace métrique, et μ une mesure sur $\mathcal{B}(X)$. On dit que μ est une mesure de Radon si elle est finie sur les compacts.*

Intérrêt : toute fonction continue est intégrable sur tout compact, par rapport à une mesure de Radon.

Proposition 7.4.13. *Soit (X,d) un espace métrique localement compact et σ-compact, et μ une mesure de Radon sur X. Pour tout $E \in \mathcal{B}(X)$ de mesure finie, il existe K compact et U ouvert, tels que $K \subset E \subset U$ et $\mu(U \setminus K) < \varepsilon$.*

Remarque : la conclusion est impossible si $\mu(E) = +\infty$ car alors on a nécessairement $\mu(U \setminus K) = +\infty$.

Démonstration. On commence par montrer que X vérifie les hypothèses du corollaire 7.4.10. Pour cela il suffit de voir que tout compact K est contenu dans un ouvert U relativement compact (donc de mesure finie). Soit, pour tout $x \in X$, $V(x)$ un voisinage ouvert, d'adérence compacte, de x. On a

$$K \subset \cup_{x\in K} V(x),$$

donc par compacté il existe $I \subset K$ fini tel que

$$K \subset \cup_{x\in I} V(x).$$

$U := \cup_{x\in I} V(x)$ est une réunion finie d'ouverts relativement compact, donc l'est aussi, cqfd.

D'après la proposition 7.4.9, il existe F fermé et U ouvert tels que $\mu(U \setminus F) < \varepsilon$. Soit K_n une suite croissante de compacts de réunion X. La suite $U \setminus (K_n \cap F)$ est décroissante, d'intersection $U \setminus F$. Comme U est de mesure finie (puisque $U \subset E \cup (U \setminus F)$), il existe n tel que $\mu(U \setminus (K_n \cap F) < \varepsilon$. L'ensemble $K_n \cap F$ est compact car F est fermé, cqfd. □

Corollaire 7.4.14. *Soit (X,d) un espace métrique localement compact et σ-compact. Soit μ une mesure de Radon sur X. Alors les fonctions continues à support compact sont denses dans $L^P(\mu)$, pour $1 \leq p < +\infty$.*

Remarque : sous ces hypothèses, si f est continue, à support dans un compact K, elle est bornée sur K, donc on a

$$\int_X |f|^p d\mu = \int_K |f|^p d\mu \leq (\sup_K |f|)^p \mu(K) < +\infty,$$

donc f est bien dans L^p.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, K compact et U ouvert tels que $K \subset E \subset U$ et $\mu(U \setminus K) < \varepsilon$. Pour tout $x \in K$ soit $V(x)$ un voisinage ouvert de x relativement compact, inclus dans U. Par compacité il existe $I \subset K$ fini tel que

$$K \subset \cup_{x\in I} V(x).$$

Soit V le membre de droite. C'est un ouvert tel que $\overline{V}$ est compact et inclus dans U. La fonction

$$f(x) = \frac{d(d, V^c)}{d(x,K) + d(x,V^c)}$$

est bien définie, continue, nulle en dehors de V. Son support est inclus dans $\overline{V}$, qui est compact. On a

$$\int_X |f(x) - \mathbf{1}_E(x)|^p d\mu(x) = \int_{V\setminus K} |f(x) - \mathbf{1}_E(x)|^p d\mu(x) \leq \int_{V\setminus K} 1^p d\mu(x) = \mu(V \setminus K) \leq \mu(U \setminus K) < \varepsilon, \text{ cqfd.}$$

□

Corollaire 7.4.15 (continuité de la translation)**.** *Soit* $1 \leq p < +\infty$ *et* $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$*. L'application*

$$y \to \int_{\mathbb{R}^d} |f(x+y) - f(x)|^p dx$$

est continue.

Démonstration. Soit φ continue à support K compact, telle que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x) - \varphi(x)|^p dx < \varepsilon.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \|f(\cdot + y) - f\|_p &\leq \|f(\cdot + y) - \varphi(\cdot + y)\|_p + \|\varphi(\cdot + y) - \varphi\|_p + \|\varphi - f\|_p \\ &= 2\|f - \varphi\|_p + \|\varphi(\cdot + y) - \varphi\|_p < 2\varepsilon + \|\varphi(\cdot + y) - \varphi\|_p. \end{aligned}$$

Soit

$$K' = \{x \in \mathbb{R}^d; d(x, K) \leq 1\}.$$

C'est un compact. Pour tout $x \notin K'$, pour tout $y \in \mathbb{R}^d$ tel que $\|y\| \leq 1$, on a $\varphi(x+y) = 0 = \varphi(x)$. Donc

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x+y) - \varphi(x)|^p dx = \int_{K'} |\varphi(x+y) - \varphi(x)|^p,$$

et le second membre tend vers 0 par uniforme continuité de φ sur K'. □