

Théorème de convergence dominée

Exercice 1 [00921] [correction]

Calculer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

$$\text{a) } u_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x \, dx \quad \text{b) } v_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n + e^x}$$

Exercice 2 [00746] [correction]

Calculer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

$$\text{a) } u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^n x}{x^2} \, dx \quad \text{b) } u_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n \, dx}{x^{n+2} + 1} \quad \text{c) } u_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n \, dx}{x^{2n} + 1}$$

Exercice 3 [00922] [correction]

Etudier

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} \, dx$$

Exercice 4 [00923] [correction]

Déterminer un équivalent de

$$\int_0^n \sqrt{1 + \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n} \, dx$$

Exercice 5 [00924] [correction]

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée.

Déterminer la limite quand $n \rightarrow +\infty$ de

$$\int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1 + n^2 x^2} \, dx$$

Exercice 6 [00925] [correction]

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue et intégrable.

Déterminer la limite quand $n \rightarrow +\infty$ de

$$n \int_0^1 \frac{f(nt)}{1+t} \, dt$$

Exercice 7 [00926] [correction]

Calculer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin^n(t) \, dt$$

Exercice 8 [00927] [correction]

Etablir que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \, dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \, dt$$

Exercice 9 [03013] [correction]

Existence et calcul de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{e^t} \, dt$$

Indice : utiliser une suite de fonctions judicieuse.

Exercice 10 [02435] [correction]

Etudier la limite de

$$\int_0^1 f(t^n) \, dt$$

où $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

Exercice 11 [02862] [correction]

Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n!}{\prod_{k=1}^n (k+x)} \, dx$$

Exercice 12 [02982] [correction]

Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(\cos \frac{x}{n}\right)^{n^2} \, dx$$

Exercice 13 [00150] [correction]

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ bornée. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^{+\infty} n f(t) e^{-nt} dt$$

Déterminer la limite de I_n quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 14 [03159] [correction]

Soit F une application continue décroissante de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , tendant vers 1 en $-\infty$ et vers 0 en $+\infty$. Soient deux réels h et δ vérifiant $0 < h < \delta$.

a) Déterminer la limite éventuelle de

$$I_n = \int_0^1 F(\sqrt{n}(\delta t - h)) dt$$

b) On pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} F\left(\sqrt{n}\left(\delta \frac{k+1}{n} - h\right)\right)$$

Déterminer un équivalent de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 15 [03294] [correction]

Montrer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_1^{+\infty} e^{-x^n} dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$$

Exercice 16 [03650] [correction]

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 intégrable ainsi que sa dérivée.

a) Déterminer pour $x > 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} n \cos t (\sin t)^n f(xt) dt$$

b) Préciser le mode de convergence.

Exercice 17 [03362] [correction]

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, 1[$, on pose

$$f_n(x) = \frac{x^{2n+1} \ln x}{x^2 - 1}$$

a) Montrer que f_n est intégrable sur $]0, 1[$. On pose

$$J_n = \int_0^1 f_n(x) dx$$

b) Montrer que la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

c) Montrer que

$$J_n = \frac{1}{4} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

Exercice 18 [03800] [correction]

Etudier la limite éventuelle, quand n tend vers $+\infty$, de la suite

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1 + x^{n+2}} dx$$

Exercice 19 [03807] [correction]

Montrer que la fonction f_n donnée par

$$f_n(x) = \frac{\ln(1 + x/n)}{x(1 + x^2)}$$

est intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

Montrer que la suite de terme général $u_n = n \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ converge vers une limite à préciser.

Exercice 20 [02392] [correction]

Soit f une application réelle de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$ avec $0 < a < 1 < b$ et $f(1) \neq 0$.

Soit (f_n) la suite de fonctions telle que

$$f_n(x) = \frac{f(x)}{1 + x^n}$$

a) Déterminer la limite simple de (f_n) .

b) Etablir l'égalité suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^1 f(t) dt$$

c) Montrer que

$$\int_a^1 t^{n-1} f_n(t) dt \sim \frac{\ln 2}{n} f(1)$$

Exercice 21 [01771] [correction]

Vérifier que la suite de terme général

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{nt + t^2} dt$$

est bien définie et étudier sa convergence.

Exercice 22 [02568] [correction]

Montrer que

$$u_n = (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$$

est définie pour $n \geq 1$.

Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$$

En déduire la nature de la série de terme général u_n .

Exercice 23 [02567] [correction]

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ continue.

On suppose que la fonction f converge en $+\infty$ vers une limite ℓ .

Déterminer la limite quand $n \rightarrow +\infty$ de

$$\mu_n = \frac{1}{n} \int_0^n f(t) dt$$

Exercice 24 [02517] [correction]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{x^2}{2n^2}\right)^{2n^4}$$

Soit g une fonction continue sur \mathbb{R} et nulle en dehors d'un segment $[a, b]$.

Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) g(x) dx = g(0)$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

A chaque fois, on vérifie que les fonctions engagées sont continues par morceaux.

a) Sur $[0, \pi/4[$, $\tan^n x \xrightarrow{CVS} 0$ $|\tan^n x| \leq 1 = \varphi(x)$ intégrable sur $[0, \pi/4[$ donc

$$u_n \rightarrow \int_0^{\pi/4} 0 \, dx = 0$$

b) Sur $[0, +\infty[$, $\frac{1}{x^n + e^x} \xrightarrow{CVS} f(x)$ avec $f(x) = e^{-x}$ sur $[0, 1[$ et $f(x) = 0$ sur $]1, +\infty[$.

De plus $\left| \frac{1}{x^n + e^x} \right| \leq e^{-x} = \varphi(x)$ avec φ intégrable sur $[0, +\infty[$ donc

$$v_n \rightarrow \int_0^1 e^{-x} \, dx = \frac{e-1}{e}$$

Exercice 2 : [énoncé]

A chaque fois, on vérifie que les fonctions engagées sont continues par morceaux.

a) Ici, on ne peut appliquer le théorème de convergence dominée sur $]0, +\infty[$ après une majoration de $|\sin x|$ par 1 car la fonction dominante $\varphi(x) = 1/x^2$ ne sera pas intégrable sur $]0, +\infty[$. Pour contourner cette difficulté, on découpe l'intégrale.

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^n x}{x^2} \, dx = \int_0^1 \frac{\sin^n x}{x^2} \, dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin^n x}{x^2} \, dx$$

On a

$$\left| \int_0^1 \frac{\sin^n x}{x^2} \, dx \right| \leq \int_0^1 |\sin^{n-2}(x)| \, dx \text{ car } |\sin x| \leq |x|$$

Sans difficultés, par le théorème de convergence dominée

$$\int_0^1 |\sin^{n-2}(x)| \, dx \rightarrow 0$$

et donc

$$\int_0^1 \frac{\sin^n x}{x^2} \, dx \rightarrow 0$$

Aussi

$$\left| \int_1^{+\infty} \frac{\sin^n x}{x^2} \, dx \right| \leq \int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|^n}{x^2} \, dx$$

Or $\frac{|\sin x|^n}{x^2} \xrightarrow{CS} f(x)$ avec $f(x) = 0$ pour tout $x \neq \pi/2 \in]\pi]$.

De plus $\frac{|\sin x|^n}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} = \varphi(x)$ avec φ intégrable sur $[1, +\infty[$ donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|^n}{x^2} \, dx \rightarrow \int_1^{+\infty} f(x) \, dx = 0$$

puis $u_n \rightarrow 0$.

b) On écrit

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n \, dx}{x^{n+2} + 1} + \int_1^{+\infty} \frac{x^n \, dx}{x^{n+2} + 1}$$

On a

$$\left| \int_0^1 \frac{x^n \, dx}{x^{n+2} + 1} \right| \leq \int_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{n+1}$$

et

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^n \, dx}{x^{n+2} + 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$$

en vertu du théorème de convergence dominée et via la domination $\left| \frac{x^n}{x^{n+2} + 1} \right| \leq \frac{1}{x^2}$ sur $[1, +\infty[$.

Ainsi $u_n \rightarrow 1$.

c) On écrit

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n \, dx}{x^{2n} + 1} + \int_1^{+\infty} \frac{x^n \, dx}{x^{2n} + 1}$$

On a

$$\left| \int_0^1 \frac{x^n \, dx}{x^{2n} + 1} \right| \leq \int_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{n+1}$$

et

$$\left| \int_1^{+\infty} \frac{x^n \, dx}{x^{2n} + 1} \right| \leq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{n-1}$$

donc $u_n \rightarrow 0$.

On peut aussi appliquer le théorème de convergence dominée mais c'est moins efficace.

Exercice 3 : [énoncé]

$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} \chi_{[0, n]}(x)$ sur $[0, +\infty[$.

$f_n(x) \xrightarrow{CS} e^{-x}$ et en vertu de l'inégalité $\ln(1+u) \leq u$ on a $|f_n(x)| \leq e^{-x} = \varphi(x)$

avec φ intégrable sur $[0, +\infty[$. Par application du théorème de convergence

dominée, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} \, dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} \, dx = 1$.

Exercice 4 : [énoncé]

Par changement de variable

$$\int_0^n \sqrt{1 + \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n} dx \underset{u=1-x/n}{=} n \int_0^1 \sqrt{1 - u^n} du$$

Par le théorème de convergence dominée

$$\int_0^1 \sqrt{1 - u^n} du \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

donc

$$\int_0^n \sqrt{1 + \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n} dx \sim n$$

Exercice 5 : [énoncé]

Par le changement de variable $u = nx$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1 + n^2x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{f(u/n)}{1 + u^2} du$$

Posons alors $f_n : u \mapsto \frac{f(u/n)}{1 + u^2}$ définie sur \mathbb{R}^+ .

La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers

$$f_\infty : u \mapsto \frac{f(0)}{1 + u^2}$$

Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux sur \mathbb{R}^+ .

$$|f_n(u)| \leq \frac{\|f\|_\infty}{1 + u^2} = \varphi(u)$$

avec φ intégrable sur \mathbb{R}^+ .

Par convergence dominée,

$$\int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1 + n^2x^2} dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{f(0)}{1 + u^2} du = \frac{\pi f(0)}{2}$$

Exercice 6 : [énoncé]

On a

$$n \int_0^1 \frac{f(nt)}{1 + t} dt \underset{u=nt}{=} \int_0^n \frac{f(u)}{1 + u/n} du = \int_0^{+\infty} f_n(u) du$$

avec

$$f_n(u) = \begin{cases} \frac{f(u)}{1 + u/n} & \text{si } u \in [0, n] \\ 0 & \text{si } u \in]n, +\infty[\end{cases}$$

On a $f_n \xrightarrow{CVS} f$ avec f_n et f continues et $|f_n| \leq |f| = \varphi$ avec φ continue par morceaux intégrable sur $[0, +\infty[$ indépendant de n .

Par convergence dominée

$$\int_0^{+\infty} f_n(u) du \rightarrow \int_0^{+\infty} f(u) du$$

Exercice 7 : [énoncé]

La fonction intégrée ne converge pas simplement en les $t = \pi/2 + \pi [2\pi]$. Pour contourner cette difficulté on raisonne à l'aide de valeurs absolues.

$$\left| \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin^n(t) dt \right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-t} |\sin^n t| dt$$

On a

$$f_n(t) = |e^{-t} \sin^n(t)| \xrightarrow{CS} f(t)$$

avec

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq \pi/2 \quad [\pi] \\ e^{-t} \sin & \end{cases}$$

Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux et

$$|f_n(t)| \leq e^{-t} = \varphi(t)$$

avec φ continue par morceaux intégrable sur $[0, +\infty[$ donc par convergence dominée :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin^n(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt = 0$$

Exercice 8 : [énoncé]

Les fonctions données par

$$f_n(t) = (1 + t^2/n)^{-n}$$

sont définies et continues par morceaux sur \mathbb{R} .

La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers f avec $f(t) = e^{-t^2}$ définie et continue par morceaux sur \mathbb{R} .

Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé et considérons

$$\varphi : x \mapsto -x \ln(1 + t^2/x)$$

φ' est croissante et $\lim_{+\infty} \varphi' = 0$ donc φ est décroissante et par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} = \exp(\varphi(n)) \leq \exp(\varphi(1)) = \frac{1}{1 + t^2}$$

La fonction $t \mapsto 1/(1 + t^2)$ est intégrable sur \mathbb{R} donc par convergence dominée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

Exercice 9 : [énoncé](#)

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{e^t} dt$ est définie car la fonction $t \mapsto \ln(t)e^{-t}$ est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$ puisque

$$\sqrt{t} \ln(t)e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0 \text{ et } t^2 \ln(t)e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, e^{-t} est la limite de

$$u_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \chi_{[0,n]}(t)$$

Le $n - 1$ de l'exposant n'est pas usuel et peut très bien être remplacé par un n . Néanmoins pour alléger les calculs à venir, le $n - 1$ est préférable...

On a

$$\ln(t)u_n(t) \rightarrow \ln(t)e^{-t}$$

et

$$|\ln(t)u_n(t)| \leq e \ln(t)e^{-t}$$

donc par convergence domine

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{e^t} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \ln(t) dt$$

On a

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \ln(t) dt = \int_0^1 n(1-u)^{n-1} \ln(nu) du$$

avec

$$\int_0^1 n(1-u)^{n-1} \ln(nu) du = \ln n + \int_0^1 n \ln(u)(1-u)^{n-1} du$$

et par intégration par parties

$$\int_0^1 n \ln(u)(1-u)^{n-1} du = [\ln(u)(1 - (1-u)^n)]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-u)^n - 1}{u} du$$

On notera qu'on a choisi $(1 - (1-u)^n)$ pour primitive de $n(1-u)^{n-1}$ car celle-ci s'annule en 0 de sorte que l'intégration par parties n'engage que des intégrales convergentes.

Enfin

$$\int_0^1 \frac{(1-u)^n - 1}{u} du = - \int_0^1 \frac{v^n - 1}{v-1} = - \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} v^k dv$$

puis

$$\int_0^1 \frac{(1-u)^n - 1}{u} du = - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = -\ln n - \gamma + o(1)$$

Finalement

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{e^t} dt = -\gamma$$

Exercice 10 : [énoncé](#)

Considérons la suite des fonctions $u_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ déterminée par $u_n(t) = f(t^n)$. Les fonctions u_n sont continues par morceaux et par continuité de f

$$u_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} f(0) & \text{si } t \in [0, 1[\\ f(1) & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

La suite de fonctions (u_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction u continue par morceaux.

Enfin, la fonction f étant continue sur un segment, elle y bornée ce qui permet d'introduire

$$M = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$$

Puisque

$$\forall t \in [0, 1], |u_n(t)| \leq M$$

avec $t \mapsto M$ intégrable sur $[0, 1]$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et affirmer

$$\int_0^1 f(t^n) dt \rightarrow \int_0^1 u(t) dt = f(0)$$

Exercice 11 : [énoncé]

On a

$$\left| \frac{n!}{\prod_{k=1}^n (k+x)} \right| \leq \frac{1 \times 2}{(x+1)(x+2)} \times 1 = \varphi(x)$$

avec φ intégrable sur $[0, +\infty[$.

Quand $n \rightarrow +\infty$,

$$\ln \left(\frac{n!}{\prod_{k=1}^n (k+x)} \right) = - \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{x}{k} \right) \rightarrow -\infty$$

car $\ln(1 + x/k) \sim x/k$ terme général d'une série à termes positifs divergente.

Par suite

$$\frac{n!}{\prod_{k=1}^n (k+x)} \rightarrow 0$$

puis par le théorème de convergence dominée

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n!}{\prod_{k=1}^n (k+x)} dx = 0$$

Exercice 12 : [énoncé]

Posons $f_n(x) = (\cos \frac{x}{n})^{n^2}$ si $x \in [0, n]$ et $f_n(x) = 0$ si $x \in]n, +\infty[$.

Pour $x \in \mathbb{R}^+$, quand $n \rightarrow +\infty$,

$$f_n(x) = \left(\cos \frac{x}{n} \right)^{n^2} = \exp \left(n^2 \ln \left(1 - \frac{x^2}{2n^2} + o(1/n^2) \right) \right) \rightarrow e^{-x^2/2}$$

Ainsi $f_n \xrightarrow[CS]{[0, +\infty[} f$ avec $f : x \mapsto e^{-x^2/2}$.

Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux.

Soit $\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\psi(t) = 1 - t^2/4 - \cos t$. Par étude des variations,

$$\forall x \in [0, 1], \psi(x) \geq 0$$

On en déduit que, pour $x \in [0, n]$,

$$\ln \left(\cos \frac{x}{n} \right) \leq \ln \left(1 - \frac{x^2}{4n^2} \right) \leq -\frac{x^2}{4n^2}$$

puis

$$f_n(x) \leq e^{-x^2/4}$$

Cette inégalité vaut aussi pour $x \in]n, +\infty[$ et puisque la fonction $x \mapsto e^{-x^2/4}$ est intégrable, on peut appliquer le théorème de convergence dominée pour affirmer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(\cos \frac{x}{n} \right)^{n^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Exercice 13 : [énoncé]

Par le changement de variable $u = nt$

$$I_n = \int_0^{+\infty} f(u/n) e^{-u} du$$

Par convergence dominée, sachant

$$|f(u/n)| \leq \|f\|_{\infty} e^{-u} = \varphi(u)$$

avec φ intégrable, on obtient

$$I_n \rightarrow \int_0^{+\infty} f(u) e^{-u} du = f(0)$$

Exercice 14 : [énoncé]

a) Appliquons le théorème de convergence dominée.

Posons $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(t) = F(\sqrt{n}(\delta t - h))$$

Pour $t \in [0, h/\delta[$, on a $f_n(t) \rightarrow 1$.

Pour $t \in]h/\delta, 1]$, on a $f_n(t) \rightarrow 0$.

Enfin, pour $t = h/\delta$, $f_n(t) = F(0) \rightarrow F(0)$.

Ainsi la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers f définie par

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, h/\delta[\\ F(0) & \text{si } t = h/\delta \\ 0 & \text{si } t \in]h/\delta, 1] \end{cases}$$

Les fonctions f_n sont continues et la limite simple f est continue par morceaux.

Enfin

$$\forall t \in [0, 1], |f_n(t)| \leq 1 = \varphi(t)$$

avec φ continue par morceaux et intégrable.
Par convergence dominée,

$$I_n \rightarrow \int_0^1 f(t) dt = \int_0^{h/\delta} 1 dt = \frac{h}{\delta}$$

b) Par la décroissance de F , on peut écrire

$$\int_{(k+1)/n}^{(k+2)/n} F(\sqrt{n}(\delta t - h)) dt \leq \frac{1}{n} F\left(\sqrt{n}\left(\delta \frac{k+1}{n} - h\right)\right) \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} F(\sqrt{n}(\delta t - h)) dt$$

En sommant ces inégalités

$$\int_{1/n}^{(n+1)/n} F(\sqrt{n}(\delta t - h)) dt \leq \frac{S_n}{n} \leq I_n$$

et

$$\int_{1/n}^{(n+1)/n} F(\sqrt{n}(\delta t - h)) dt = \int_0^1 F(\sqrt{n}(\delta(t + 1/n) - h)) dt$$

Par convergence dominée, on obtient de façon analogue à ce qui précède, la limite de ce terme et on conclut

$$S_n \sim \frac{h}{\delta} n$$

Exercice 15 : [énoncé]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

La fonction $x \mapsto e^{-x^n}$ est définie et continue par morceaux sur $[1, +\infty[$. Etant de plus négligeable devant $1/x^2$ quand $x \rightarrow +\infty$, on peut affirmer qu'elle est intégrable et on peut donc introduire

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^n} dx$$

Par le changement de variable \mathcal{C}^1 strictement monotone donné par la relation $t = x^n$, on obtient

$$n \int_1^{+\infty} e^{-x^n} dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} t^{1/n} dt$$

Posons alors

$$f_n : t \mapsto \frac{e^{-t}}{t} t^{1/n}$$

Les fonctions f_n sont définies et continues par morceaux sur $[1, +\infty[$.

La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction

$$f : t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|f_n(t)| \leq e^{-t} = \varphi(t)$$

avec φ fonction continue par morceaux et intégrable puisque $t^2 \varphi(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.

On peut alors appliquer le théorème de convergence dominée et affirmer

$$n \int_1^{+\infty} e^{-x^n} dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} t^{1/n} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

Exercice 16 : [énoncé]

a) Pour $x > 0$, posons

$$u_n(x) = \int_0^{+\infty} n \cos t (\sin t)^n f(xt) dt$$

L'intégrabilité de f assure que $u_n(x)$ est bien définie.

Puisque f' est intégrable, la fonction f converge en $+\infty$ et, puisque f est aussi intégrable, f tend vers 0 en $+\infty$. Par intégration par parties, on obtient alors

$$u_n(x) = -\frac{n}{n+1} \int_0^{+\infty} (\sin t)^{n+1} x f'(xt) dt$$

Posons $g_n(x) = |\sin t|^{n+1} x f'(xt) dt$.

Chaque fonction g_n est continue par morceaux.

La suite de fonctions (g_n) converge simplement vers une fonction continue par morceaux, nulle en chaque $x \neq \pi/2 + k\pi$.

La fonction limite simple est continue par morceaux.

Enfin on a la domination

$$|g_n(x)| \leq x f'(xt) = \varphi(t)$$

avec la fonction φ intégrable.

Par convergence dominée

$$\int_0^{+\infty} g_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et par comparaison

$$u_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

b) On vient déjà d'obtenir une convergence simple de la suite de fonctions (u_n) vers la fonction nulle. Montrons qu'en fait il s'agit d'une convergence uniforme. Par changement de variable

$$u_n(x) = -\frac{n}{n+1} \int_0^{+\infty} (\sin(u/x))^{n+1} f'(u) du$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la fonction f' est intégrable, il existe $A \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\int_A^{+\infty} |f'(u)| du \leq \varepsilon$$

et alors

$$|u_n(x)| \leq M \int_0^A |\sin(u/x)|^{n+1} du + \varepsilon \text{ avec } M = \max_{u \in [0, A]} |f'(u)|$$

Pour $x \geq 4A/\pi$, on a

$$\forall u \in [0, A], 0 \leq \frac{u}{x} \leq \frac{A}{x} \leq \frac{\pi}{4}$$

et donc

$$\int_0^A |\sin(u/x)|^{n+1} du \leq \frac{A}{\sqrt{2}^{n+1}}$$

Pour $x \leq 4A/\pi$, on a par changement de variable

$$\int_0^A |\sin(u/x)|^{n+1} du = x \int_0^{A/x} |\sin t|^{n+1} dt$$

Pour k entier tel que $k\pi < A/x \leq (k+1)\pi$.

$$\int_0^A |\sin(u/x)|^{n+1} du \leq x \int_0^{(k+1)\pi} |\sin t|^{n+1} dt = x(k+1) \int_0^\pi (\sin t)^{n+1} dt$$

Or $x(k+1)\pi \leq A + x\pi \leq 5A$ donc

$$\int_0^A |\sin(u/x)|^{n+1} du \leq 5A$$

Finalement, pour tout $x > 0$,

$$|u_n(x)| \leq 5AM + \frac{AM}{\sqrt{2}^{n+1}} + \varepsilon$$

et donc pour n assez grand, on a pour tout $x > 0$.

$$|u_n(x)| \leq 2\varepsilon$$

Exercice 17 : [énoncé]

a) Considérons la fonction

$$\varphi : x \mapsto \frac{x \ln x}{x^2 - 1}$$

La fonction φ est définie et continue par morceaux sur $]0, 1[$.

Quand $x \rightarrow 0^+$, $\varphi(x) \rightarrow 0$ et quand $x \rightarrow 1^-$,

$$\varphi(x) = \frac{x}{x+1} \frac{\ln x}{x-1} \rightarrow \frac{1}{2}$$

Puisque φ se prolonge par continuité en 0 et en 1, φ est intégrable sur $]0, 1[$.

Or

$$|f_n(x)| = x^{2n} |\varphi(x)| \leq |\varphi(x)|$$

donc, par domination, la fonction f_n est elle aussi intégrable sur $]0, 1[$.

b) La suite de fonctions f_n converge simplement vers la fonction nulle et est dominée par la fonction intégrable φ donc par convergence dominée

$$J_n \rightarrow 0$$

c) On a

$$J_k - J_{k+1} = - \int_0^1 x^{2k+1} \ln(x) dx$$

Réalisons une intégration par parties

$$- \int_\varepsilon^a x^{2k+1} \ln(x) dx = - \left[\frac{x^{2k+2}}{2k+2} \ln x \right]_\varepsilon^a + \int_\varepsilon^a x^{2k+1} dx$$

Quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$ et $a \rightarrow 1^-$, on obtient

$$J_k - J_{k+1} = \frac{1}{(2k+2)^2}$$

et donc

$$J_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} (J_k - J_{k+1}) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(2k+2)^2}$$

Enfin par translation d'indice

$$J_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(2k+2)^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

Exercice 18 : [énoncé]

En découpant l'intégrale

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{n+2}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+2}} dx$$

En appliquant le théorème de convergence dominée aux deux intégrales, on obtient

$$I_n \rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$$

Exercice 19 : [énoncé]

f_n est définie et continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

Quand $x \rightarrow 0^+$, $f_n(x) \rightarrow \frac{1}{n}$, on peut donc la prolonger par continuité.

Quand $x \rightarrow +\infty$, $f_n(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Par suite f_n est intégrable sur $]0, +\infty[$.

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{n \ln(1+x/n)}{x(1+x^2)} dx$$

Posons

$$g_n(x) = \frac{n \ln(1+x/n)}{x(1+x^2)} = n f_n(x)$$

Pour $x > 0$, quand $n \rightarrow +\infty$, $g_n(x) \rightarrow \frac{1}{1+x^2}$.

De plus, sachant $\ln(1+u) \leq u$, on a $|g_n(x)| \leq \frac{1}{1+x^2} = \varphi(x)$ avec φ intégrable.

Par convergence dominée,

$$u_n \rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 20 : [énoncé]

a) (f_n) converge simplement vers la fonction f donnée par

$$f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [a, 1[\\ f(1)/2 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x \in]1, b] \end{cases}$$

b) Sachant $|f_n(x)| \leq |f(x)|$ avec f intégrable sur $[a, b]$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et on obtient directement le résultat proposé.

c) Par une intégration par parties

$$\int_a^1 t^{n-1} f_n(t) dt = \left[\frac{1}{n} \ln(1+t^n) f(t) \right]_a^1 - \frac{1}{n} \int_a^1 \ln(1+t^n) f'(t) dt$$

D'une part

$$\left[\frac{1}{n} \ln(1+t^n) f(t) \right]_a^1 = \frac{\ln 2}{n} f(1) + \frac{\ln(1+a^n)}{n} f(a) = \frac{\ln 2}{n} f(1) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

car $\ln(1+a^n) \rightarrow 0$.

D'autre part

$$\left| \frac{1}{n} \int_a^1 \ln(1+t^n) f'(t) dt \right| \leq \frac{1}{n} \|f'\|_\infty \int_0^1 t^n dt = O\left(\frac{1}{n^2}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

sachant $\ln(1+u) \leq u$.

Au final, on obtient

$$\int_a^1 t^{n-1} f_n(t) dt = \frac{\ln 2}{n} f(1) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 21 : [énoncé]

Posons

$$f_n : t \mapsto \frac{\sin(nt)}{nt+t^2}$$

La fonction f_n est définie et continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

Quand $t \rightarrow 0^+$, $f_n(t) \sim \frac{nt}{nt+t^2} \rightarrow 1$.

Quand $t \rightarrow +\infty$; $f_n(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

On peut donc affirmer que f_n est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Pour $t \in]0, +\infty[$.

Quand $n \rightarrow +\infty$, $f_n(t) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ donc la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.

De plus, pour $t \leq \pi/2$, on a, sachant $|\sin u| \leq |u|$,

$$|f_n(t)| \leq \frac{nt}{nt+t^2} \leq 1$$

et pour $t \geq \pi/2$,

$$|f_n(t)| \leq \frac{1}{nt+t^2} \leq \frac{1}{t^2}$$

Ainsi $|f_n| \leq \varphi$ avec

$$\varphi : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, \pi/2] \\ 1/t^2 & \text{si } t \in]\pi/2, +\infty[\end{cases}$$

La fonction φ étant intégrable sur $]0, +\infty[$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et affirmer

$$u_n \rightarrow \int_0^{+\infty} 0 dt = 0$$

Exercice 22 : [énoncé]

La fonction $t \mapsto \frac{1}{(1+t^3)^n}$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ et on observe

$$\frac{1}{(1+t^3)^n} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{3n}}$$

avec $3n > 1$ donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$ est bien définie pour $n \geq 1$.

Par application du théorème de convergence dominée (en prenant $\varphi(t) = \frac{1}{1+t^3}$ pour dominatrice), on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n} = 0$$

La décroissance de $(|u_n|)$ et la positivité de l'intégrale étant des propriétés immédiates, on peut appliquer le critère spécial et affirmer que $\sum u_n$ converge.

Exercice 23 : [énoncé]

Par changement de variable

$$\mu_n = \int_0^1 f(ns) ds$$

Par convergence dominée

$$\mu_n \rightarrow \ell$$

Exercice 24 : [énoncé]

L'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)g(x)dx = \int_a^b f_n(x)g(x)dx$$

est bien définie.

Par le changement de variable $x = u/n$ bijectif de classe \mathcal{C}^1

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)g(x)dx = \int_{na}^{nb} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{u^2}{2n^4}\right)^{2n^4} g(u/n)du = \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(u)du$$

avec

$$h_n(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{u^2}{2n^4}\right)^{2n^4} g(u/n)\chi_{[na, nb]}$$

h_n est continue par morceaux, (h_n) converge simplement vers h continue par morceaux avec

$$h(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} g(0)$$

Pour n assez grand de sorte que $|a/n|, |b/n| \leq 1$ on a pour tout $u \in [na, nb]$, $|u^2/2n^4| \leq 1/2 < 1$,

$$|h_n(u)| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{2n^4 \ln(1-u^2/2n^4)} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} = \varphi(u)$$

et cette inégalité vaut aussi pour $u \notin [na, nb]$.

La fonction φ étant continue par morceaux et intégrable sur \mathbb{R} , on peut appliquer le théorème de convergence dominée et conclure sachant

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$$