Département de Mathématiques d'Orsay

UNIVERSITÉ PARIS SUD
Comprendre le monde, construire l'avenir®

cnrs
dépasser les frontières

Intégration

François de Marçay
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Sud, France

« Je propose, sans être ému, de déclamer à grande voix la strophe sérieuse et froide que vous allez entendre. » Isidore Ducasse, Comte de Lautréamont.

La science en formation présente un caractère changeant et humain, qu'elle perd avec le recul de l'époque, en se décharnant du superflu, en se rétractant à l'essentiel, pour devenir impersonnelle et squelettique. Arnaud Denjoy.

Table des matières

Intégrale de Riemann

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Sud, France

1. Concept de fonction

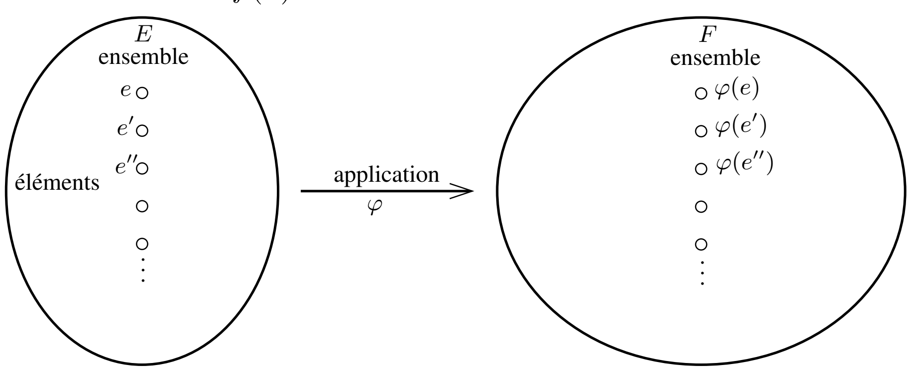
> Toute la Science mathématique repose sur l'idée de *fonction*, c'est-à-dire de dépendance entre deux ou plusieurs grandeurs, dont l'étude constitue le principal objet de l'Analyse. Il a fallu longtemps avant qu'on se rendît compte de l'étendue extraordinaire de cette notion ; c'est là, d'ailleurs, une circonstance qui a été très heureuse pour les progrès de la Science. [...] Dans les époques vraiment créatrices, une vérité incomplète ou approchée peut être plus féconde que la même vérité accompagnée des restrictions nécessaires.
> Émile PICARD

Dans les mathématiques contemporaines, une *fonction* réelle :

$$f\colon\quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

est une *application*, c'est-à-dire qu'à tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$ est associé un unique nombre réel $f(x) \in \mathbb{R}$, ce qui paraît très simple.

Mais contrairement à notre intuition habituelle, il se pourrait qu'un tel concept n'ait en fait rien d'évident, puisqu'*a priori*, aucune règle, aucune formule, aucune expression ne donne concrètement $x \longmapsto f(x)$.



En tout cas, depuis l'avènement de la théorie des ensembles dans les années 1890–1930, on admet le concept d'*application* :

$$\begin{aligned} \varphi\colon\quad E &\longrightarrow F \\ e &\longmapsto \varphi(e), \end{aligned}$$

dans une abstraction absolue, pure, non mystérieuse, aussi transparente et limpide que sur une figure 'simplette'.

Mais nous insisterons ici sur le fait que l'intuition minimale qui accompagne notre sentiment d'évidence lorsque nous écrivons :

$$x \longmapsto f(x)$$

cache de nombreuses questions mathématiques profondes qui sont encore loin d'être résolues à notre époque. Même la plus classique et la plus connue des intégrales, celle de Riemann à laquelle est consacrée ce chapitre, répond intelligemment à la question mathématique :

Comment définir l'intégrale $\int f(x)\,dx$ d'une fonction ?

C'est le mathématicien allemand Bernhard Riemann qui, vers 1854 et dans la lignée de Peter Lejeune-Dirichlet son maître, fut l'un des premiers à avoir conceptualisé la notion de fonction dans la généralité maximale $x \longmapsto f(x)$, bien avant la théorie des ensembles, *et Riemann voyait surtout qu'un tel concept très général de fonction ouvrait des questions mathématiques nouvelles et très difficiles*.

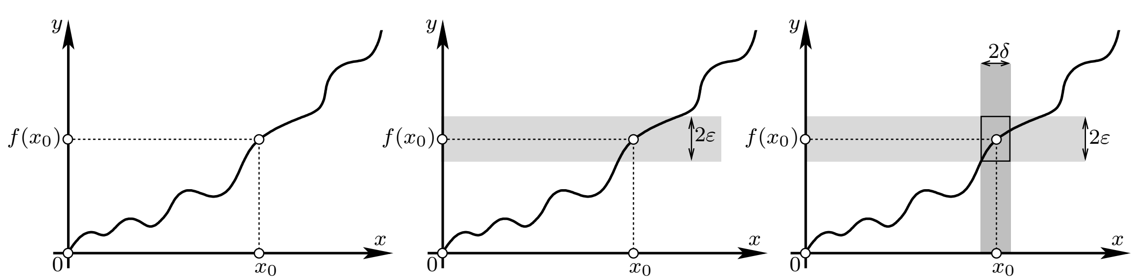
En fait, quelques décennies après Cauchy qui avait élaboré sa théorie des fonctions au début des années 1800, l'histoire de la théorie de l'intégration est essentiellement devenue une histoire des *tentatives* de donner à la notion d'*intégrale* l'extension la plus grande possible, afin d'embrasser le plus de fonctions *discontinues* possible, et ce, jusque dans les années 1950.

En effet, au bout d'un certain temps, les mathématiciens ont considéré qu'intégrer des fonctions continues, c'était '*trop facile*', et donc, qu'il fallait passer à des fonctions plus compliquées, qu'il fallait être plus ambitieux, ne serait-ce que pour des applications à la physique.

Mais tout d'abord, qu'est-ce qu'une fonction *continue* ?

Encore d'un point de vue moderne et très élaboré, la définition classique due à Weierstrass stipule que f est continue en un point $x_0 \in \mathbb{R}$ lorsque :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \Big(\forall\, x \quad |x - x_0| \leqslant \delta \implies \big|f(x) - f(x_0)\big| \leqslant \varepsilon\Big).$$



Géométriquement, quelle que soit la finesse $2\,\varepsilon > 0$ d'une bande horizontale centrée autour de la droite horizontale $\{y = f(x_0)\}$, il existe une bande verticale de largeur $2\,\delta$ assez petite centrée autour de la droite verticale $\{x = x_0\}$ telle que toute la partie du graphe correspondante *reste entièrement enfermée dans la bande horizontale choisie à l'avance*.

Mais historiquement, ce n'est pas du tout ainsi que les notions de fonction et de continuité sont apparues.

Fonctions définies par des expressions explicites arbitrairement complexes En 1718, Bernouilli écrit dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* :

> **Définition :** On appelle ici **fonction** d'une grandeur variable, une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes.

Euler prend la suite en 1734, et dans une note de l'Académie de Saint Pétersbourg, il introduit la notation :

$$f\left(\tfrac{x}{a}+c\right),$$

> pour désigner une fonction arbitraire de $\frac{x}{a}+c$.

En 1748, dans son *Introduction in analysis infinitorum*, Euler reprend la définition de Bernoulli en ajoutant le mot *analytique*, à savoir *développable en série entière convergente* :

> En conséquence, toute expression analytique dans laquelle, à côté de la variable z, toutes les quantités qui composent cette expression sont des constantes, est une fonction de cette même z ; ainsi $a+3\,z$, $a-4\,zz$, *etc.*

Qui plus est, Euler a essayé d'éclaircir l'idée de quantité constante et de quantité variable.

> **1.** Une quantité constante est une quantité déterminée, qui conserve toujours la même valeur.
>
> **2.** Une quantité variable est une quantité indéterminée, ou, si l'on veut, une quantité universelle, qui comprend toutes les valeurs déterminées.
>
> **3.** Une quantité variable devient déterminée, lorsqu'on lui attribue une valeur déterminée quelconque.
>
> **4.** Une fonction de quantité variable est une expression analytique composée, de quelque manière que ce soit, de cette même quantité et de nombres, ou de quantités constantes.
>
> **5.** Une fonction d'une variable est donc aussi une quantité variable.

Voici quelques exemples plus élaborés de fonctions au sens d'Euler — inutile de chercher à comprendre lorsqu'on ne connaît pas, il s'agit juste d'une visite sans guide d'un jardin zoologique mystérieux — :

$$\frac{e^{az}+e^{-az}}{e^{az}-e^{-az}},$$

$$\Gamma(z) := \frac{e^{-\gamma\, z}}{z}\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1} e^{\frac{z}{n}},$$

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)},$$

$$\sum_{-\infty\leqslant n\leqslant\infty}(-1)^n\, q^{\frac{3\,n^2-n}{2}},$$

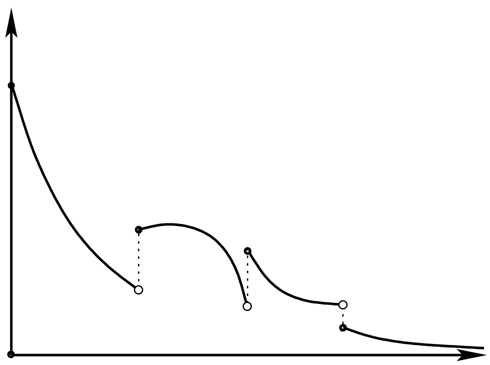
$$z^{z-\frac{1}{2}}\, e^{-z}\sqrt{2\pi}\left[1+\frac{1}{12\,z}+\frac{1}{288\,z^2}-\frac{139}{51840\,z^3}\right],$$

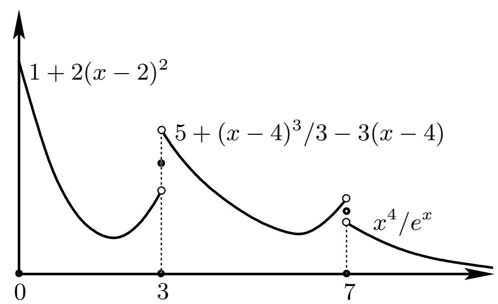
$$\int_0^{\pi/2}\sin^k x\, dx,$$

$$\frac{t}{1+t^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2\cdots(2k)}{3\cdot(2k+1)}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^k.$$

En résumé, nous pouvons dire qu'une fonction au sens d'Euler est une fonction de la variable réelle, non constante, définie par une expression analytique, avec une totale liberté dans la complexité formelle, une fonction, donc, qui est donnée par des formules essentiellement explicites, en utilisant l'addition, la multiplication, la composition d'une manière arbitrairement complexe, et en incorporant aussi diverses constantes sympathiques.

Fonctions discontinues. En réponse à d'Alembert qui voulait maintenir que les fonctions devaient être données par une unique expression algébrique ou développables en série entière convergente, Euler a été conduit à admettre que les courbes puissent être '*irrégulières*', ou '*discontinues*', au sens où elles soient formées d'un nombre fini de courbes différentes, mais toujours données par des formules.





En effet, longtemps dans l'histoire des mathématiques, les fonctions *discontinues* n'étaient que des fonctions lisse ($\mathscr{C}^\infty$) ou analytiques ($\mathscr{C}^\omega$) par morceaux, données par des formules explicites sur un nombre fini d'intervalles successifs.

Ainsi, ce qu'on appelait *discontinuité* ne désignait qu'un *changement de formule* en traversant un point spécifique.

L'Idée de fonction abstraite pure qui déclenche des Questions mathématiques. Mais avec Dirichlet et Riemann, le statut des fonctions change radicalement : le concept de fonction devient une abstraction idéale qui *provoque des questions mathématiques nouvelles*.

Rappelons que l'*épure totale du concept* de fonction conduit à demander seulement qu'à tout réel $x \in \mathbb{R}$ est associé un unique réel $f(x) \in \mathbb{R}$, sans aucune hypothèse de continuité, sans formules, sans supposer que le nombre de points de discontinuité soit fini ou discret, en un mot : *sans aucune hypothèse*.

Si donc on admet un tel concept de fonction le plus général possible, alors de nombreuses questions surgissent :

Question. *Comment définir l'intégrale d'une fonction réelle* $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *quelconque ?*

Question. *L'intégrale d'une fonction* f *existe-t-elle toujours ?*

Question. *Y-a-t-il un unique concept d'intégrale, ou* plusieurs concepts d'intégrale *qui ne sont pas équivalents entre eux ?*

Ce cours présentera trois concepts d'intégrale :

Intégrale de Riemann

Intégrale de Kurzweil-Henstock

Intégrale de Lebesgue

La plus classique est l'*Intégrale de Riemann*.

L'*intégrale de Kurzweil-Henstock* est la seule qui montre véritablement que l'intégration :

$$\int f' = f$$

d'une fonction dérivée f' redonne la fonction f dont on est parti, ce qui semble être le minimum de tenue correcte qu'on puisse exiger de l'intégrale à son examen d'entrée en L3 d'Intégration !

Enfin, à un niveau supérieur d'abstraction, c'est l'*Intégrale de Lebesgue* qui fait l'unanimité dans les mathématiques contemporaines pour sa plasticité, sa généralité, et sa complétude.

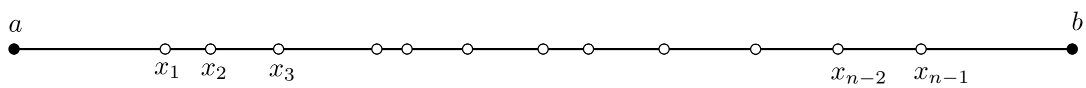
Donc en France et dans le monde, les cours de L3 en Mathématiques se font un devoir de présenter ce joyau de pensée qu'est la célèbre *Intégrale de Lebesgue*, bien qu'elle soit quelque peu difficile d'accès lors d'une toute première rencontre.

Alors pour faciliter une telle première rencontre, nous allons commencer par effectuer des révisions sur l'Intégrale de Riemann, en dévoilant quelques théorèmes nouveaux qui anticiperont la longue théorie de l'Intégrale de Legesgue.

2. **Définition de l'intégrale de Riemann**

Soient deux nombres réels $-\infty < a < b < \infty$ et soit l'intervalle fermé borné donc compact :

$$[a, b] \subset \mathbb{R}.$$



Définition 2.1. [Subdivisions] Une *subdivision* Δ d'un tel intervalle $[a, b]$ est une suite finie de nombres réels $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ satisfaisant :

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

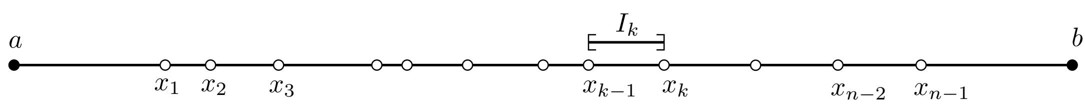
Étant donné une telle subdivision, considérons les intervalles :

$$I_k := \big[x_{k-1}, x_k\big] \qquad\qquad {\scriptstyle (k\,=\,1\,\cdots\,n)},$$

et notons :

$$\big|I_k\big| := x_k - x_{k-1}$$

leurs longueurs.



Définition 2.2. [Sommes de Darboux] À toute fonction $\boxed{\textit{bornée}}$:

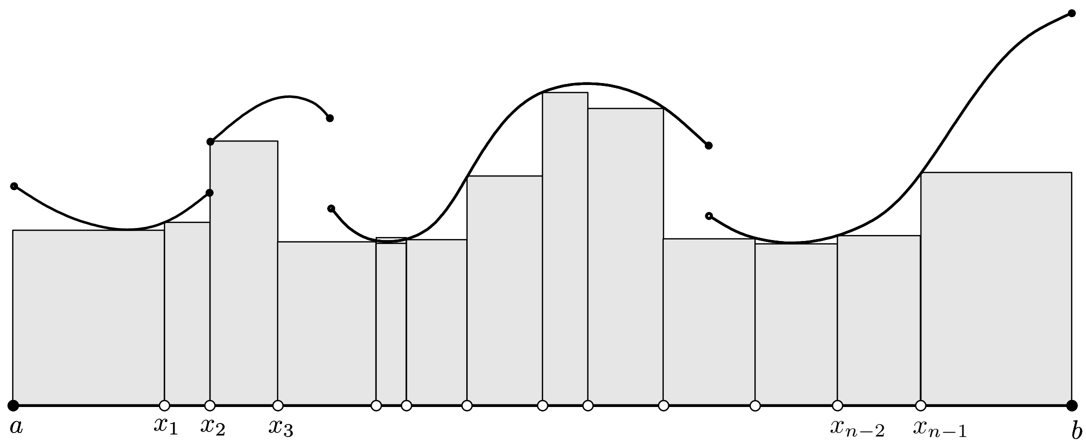
$$f\colon\quad [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},$$

à savoir qui satisfait :

$$-\infty \,<\, \inf_{a\leqslant x\leqslant b} f(x) \,\leqslant\, \sup_{a\leqslant x\leqslant b} f(x) \,<\, \infty,$$

sont associées premièrement la *somme de Darboux inférieure* relativement à la subdivision Δ :

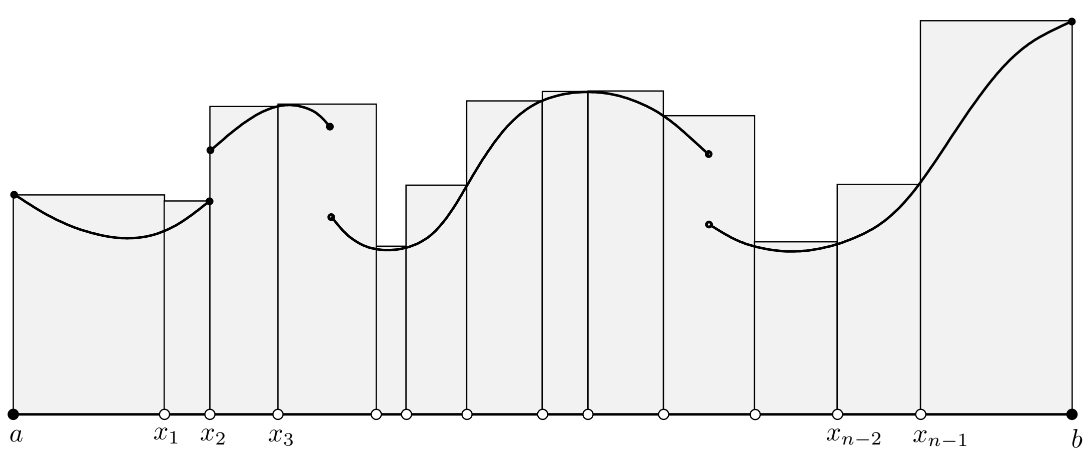
$$\begin{aligned}\Sigma_\Delta(f) &:= \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - x_{k-1}\big) \inf_{x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k} f(x)\\ &= \sum_{k=1}^{n} |I_k| \inf_{x\,\in\, I_k} f,\end{aligned}$$



et deuxièmement la *somme de Darboux supérieure* :

$$\begin{aligned}\Sigma^\Delta(f) &:= \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - x_{k-1}\big) \sup_{x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k} f\\ &= \sum_{k=1}^{n} |I_k| \sup_{x\,\in\, I_k} f(x).\end{aligned}$$

La fonction n'est pas supposée continue, ni même discontinue seulement en un nombre fini de points (malheureusement, nos piètres figures sont incapables de montrer plus que 3 points de discontinuité), et aussi, il n'y a aucune raison pour que la subdivision Δ s'adapte aux points de discontinuité de f lorsqu'il en existe.



Comme sur les diagrammes, la fonction f n'est pas supposée continue ici, mais ces deux sommes finies existent simplement parce que toutes les quantités :

$$\inf_{x \in I_k} f \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \sup_{x \in I_k} f$$

sont des nombres réels *finis*, puisque f est supposée *bornée*.

De plus, la somme de Darboux inférieure est minorée uniformément, comme le montre un délicieux calcul téléscopique facile :

$$\begin{aligned}
\Sigma_\Delta(f) &= \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - x_{k-1}\big) \inf_{I_k} f \\
&\geqslant \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - x_{k-1}\big) \inf_{[a,b]} f \\
&= \Big(b - x_{k-1} + x_{k-1} - x_{k-2} + \cdots + x_2 - x_1 + x_1 - a\Big) \inf_{[a,b]} f \\
&= (b-a) \inf_{[a,b]} f \\
&> -\infty,
\end{aligned}$$

et, de manière symétrique, la somme supérieure est elle aussi majorée uniformément :

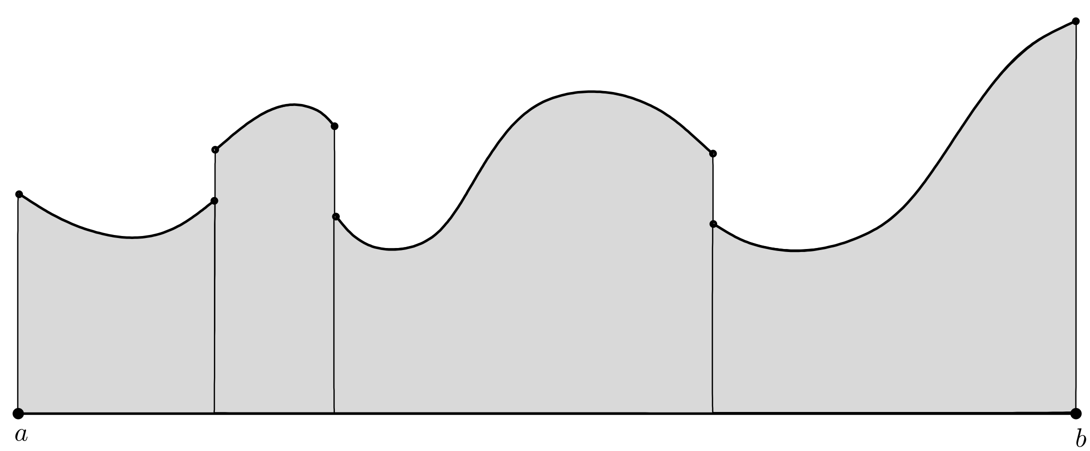
$$\begin{aligned}
\Sigma^\Delta(f) &\leqslant (b-a) \sup_{[a,b]} f \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Enfin, puisque :

$$\inf_{I_k} f \leqslant \sup_{I_k} f,$$

pour tout $k = 1, \dots, n$, ces sommes satisfont toujours manifestement (exercice direct) :

$$\boxed{\Sigma_\Delta(f) \leqslant \Sigma^\Delta(f).}$$

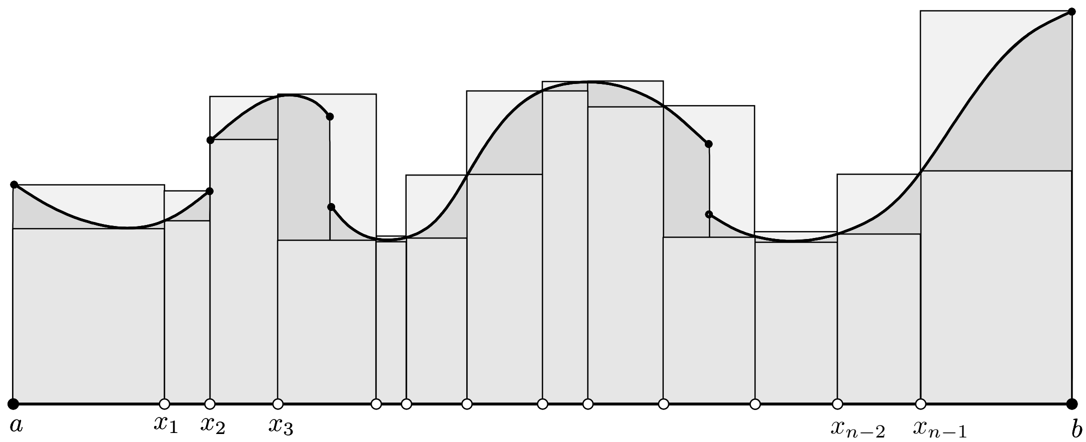


Interprétation géométrique en termes de l'aire de l'hypographe de f. Lorsque f est suffisamment régulière, disons continue $f \in \mathscr{C}^0$, voire même continûment différentiable $f \in \mathscr{C}^1$, et lorsque de plus $f \geqslant 0$ ne prend que des valeurs positives, l'aire de la région :

$$\text{hypographe}(f) := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\big\},$$

du Grec '*hypo*', '*sous*' — si tant est qu'on puisse donner à une telle aire un sens puisque la recherche de définitions variées pour la notion d'*intégrale* vise justement à se donner les moyens de calculer de telles aires —, sera visiblement approchée en-dessous par $\Sigma_\Delta(f)$, et approché au-dessus par $\Sigma^\Delta(f)$:

$$\boxed{\Sigma_\Delta(f) \leqslant \mathsf{Aire}\big(\mathsf{hypographe}(f)\big) \leqslant \Sigma^\Delta(f).}$$



Notons que l'*hypo*thèse[1] ici faite que $f \geqslant 0$ est positive n'est essentiellement pas restrictive, puisque l'on peut toujours remplacer f par $f + \text{C}$ où $\text{C} \gg 1$ est une constante assez grande pour que $f + \text{C} \geqslant 0$.

Définition 2.3. [Intégrabilité au sens de Riemann] Une fonction *bornée* $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *intégrable au sens de Riemann*, ou de manière abrégée *Riemann-intégrable*, si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision Δ de $[a,b]$ telle que :

$$\Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) \leqslant \varepsilon.$$

Par exemple, les fonctions constantes $f(x) \equiv \text{C} \in \mathbb{C}$ sont trivialement Riemann-intégrables (exercice), heureusement, d'ailleurs.

Afin d'attribuer une valeur à l'*intégrale* de f :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathbf{?},$$

il faut s'assurer que les sommes de Darboux inférieure $\Sigma_\Delta(f)$ et supérieure $\Sigma^\Delta(f)$ convergent vers *une même valeur réelle* à mesure que $\varepsilon \to 0$, *i.e.* comme on s'y attend, à mesure que la subdivision s'enrichit de plus en plus de points pour que ces gratte-ciel de plus en plus étroits serrés les uns contre les autres approchent de mieux en mieux l'aire de l'hypographe de f.

Définition 2.4. Une subdivision Δ' de l'intervalle $[a,b]$ est dite être *plus fine* qu'une subdivision Δ de $[a,b]$ lorsque Δ' contient tous les points Δ et éventuellement aussi, de nombreux autres points.

Attention ! On ne dira *jamais* que Δ est '*plus grosse*' que Δ', cela ne serait pas mathématiquement correct !

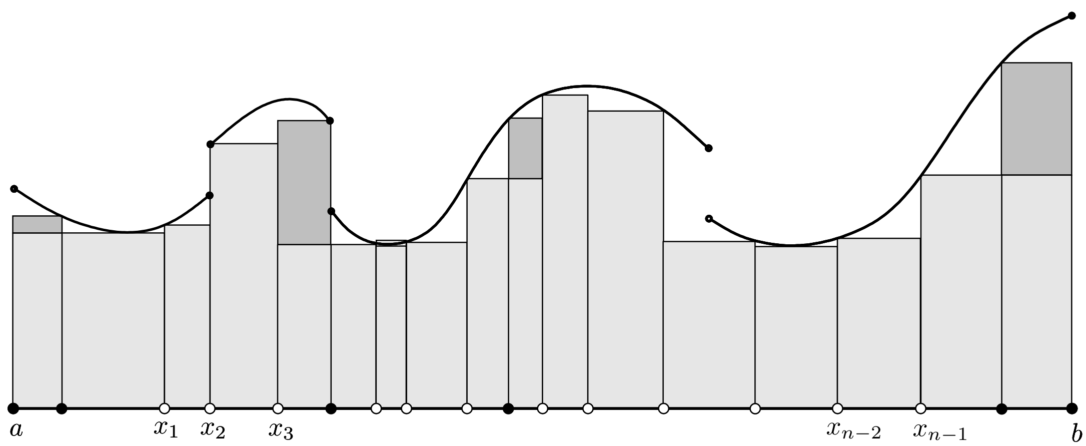
1. Il y a des '*hypo*' partout ! Décidément, les Grecs sont envahissants !

Alors, en ajoutant juste un point à la fois pour passer pas à pas de Δ à Δ', on démontre aisément par récurrence le :

Lemme 2.5. [Propriété cruciale de monotonie par rapport aux subdivisions] *Si une subdivision Δ' est plus fine qu'une subdivision Δ, on a toujours :*

$$\Sigma_\Delta(f) \leqslant \Sigma_{\Delta'}(f) \leqslant$$
$$\leqslant \Sigma^{\Delta'}(f) \leqslant \Sigma^\Delta(f),$$

ce qui veut dire que le raffinement des subdivisions améliore l'approximation inférieure et l'approximation supérieure tout en réduisant l'écart qui les sépare.

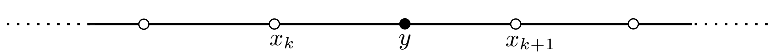


Plus sveltes sont les gratte-ciel, meilleures sont les approximations inférieure et supérieure.

Démonstration. En effet, ajoutons juste un point supplémentaire y à la subdivision quelconque Δ. Ce point appartiendra à un certain intervalle ouvert :

$$y \in]x_k, x_{k+1}[,$$

pour un certain entier $0 \leqslant k \leqslant n-1$.



Traitons seulement le cas des sommes de Darboux inférieures, le cas des sommes de Darboux supérieures étant complètement similaire.

Alors la seule différence entre la somme de Darboux inférieure associée à Δ et celle associée à $\Delta \cup \{y\}$, c'est qu'on remplace le terme :

$$\mathsf{I} := \big(x_{k+1} - x_k\big) \inf_{x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}} f$$

par les deux termes (repérer le signe '$+$') :

$$\mathsf{II} := \big(x_{k+1} - y\big) \inf_{y \leqslant x \leqslant x_{k+1}} f + \big(y - x_k\big) \inf_{x_k \leqslant x \leqslant y} f,$$

les autres termes restant intouchés.

Mais puisque pour toute application bornée $F \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ d'un espace topologique X à valeurs dans $\mathbb{R}$ satisfait trivialement, pour tous sous-ensembles quelconques $A, B \subset X$:

$$\inf_{A \cup B} F \leqslant \inf_A F \qquad \text{et} \qquad \inf_{A \cup B} F \leqslant \inf_B F,$$

on obtient ici par un calcul simple :

$$\begin{aligned}
\mathsf{I} &= \big(x_{k+1}-x_k\big)\inf_{x_k\leqslant x\leqslant x_{k+1}} f \\
&= \big(x_{k+1}-y+y-x_k\big)\inf_{x_k\leqslant x\leqslant x_{k+1}} f \\
&= \big(x_{k+1}-y\big)\inf_{x_k\leqslant x\leqslant x_{k+1}} f + \big(y-x_k\big)\inf_{x_k\leqslant x\leqslant x_{k+1}} f \\
&\leqslant \big(x_{k+1}-y\big)\inf_{y\leqslant x\leqslant x_{k+1}} f + \big(y-x_k\big)\inf_{x_k\leqslant x\leqslant y} f \\
&= \mathsf{II},
\end{aligned}$$

la majoration qui conclut. □

Corollaire 2.6. [Miracle logique de l'intégrale de Riemann] *Étant donné deux subdivisions quelconques Δ_1 et Δ_2 de l'intervalle $[a,b]$, on a toujours :*

$$\Sigma_{\Delta_1}(f) \,\leqslant\, \Sigma^{\Delta_2}(f).$$

Démonstration. La subdivision-réunion :

$$\Delta_1 \cup \Delta_2,$$

est simultanément plus fine que Δ_1 et plus fine que Δ_2, donc la monotonie cruciale qui vient d'être énoncée et démontrée assure que :

$$\Sigma_{\Delta_1}(f) \,\leqslant\, \Sigma_{\Delta_1\cup\Delta_2}(f) \,\leqslant\, \Sigma^{\Delta_1\cup\Delta_2}(f) \,\leqslant\, \Sigma^{\Delta_2}(f),$$

ce qu'il fallait faire voir. □

Rappelons maintenant le :

Théorème de la borne Supérieure/Inférieure. *Pour tout sous-ensemble quelconque $E \subset \mathbb{R}$* borné*, à savoir satisfaisant :*

$$E \subset [m, M],$$

pour certains réels $m < M$, il existe deux nombres réels uniques :

$$\mathsf{inf}\, E \in \mathbb{R} \qquad\text{et}\qquad \mathsf{sup}\, E \in \mathbb{R}$$

tels que :

$$E \,\subset\, \big[\mathsf{inf}\, E,\ \mathsf{sup}\, E\big],$$

et qui sont optimaux *au sens où E n'est* pas *contenu dans :*

$$\begin{aligned}
E &\not\subset \big[\mathsf{inf}\, E+\varepsilon,\ \mathsf{sup}\, E\big], \\
E &\not\subset \big[\mathsf{inf}\, E,\ \mathsf{sup}\, E-\varepsilon\big],
\end{aligned}$$

quel que soit $\varepsilon > 0$. □

Grâce au Lemme 2.5 de monotononie par rapport aux subdivisions, grâce à l'encadrement fixe valable pour toute subdivision Δ :

$$-\infty \,<\, \underbrace{(b-a)\inf_{[a,b]} f}_{=:\,m} \,\leqslant\, \Sigma_\Delta(f) \,\leqslant\, \Sigma^\Delta(f) \,\leqslant\, \underbrace{(b-a)\sup_{[a,b]} f}_{=:\,M} \,<\, \infty,$$

et grâce au Théorème de la borne supérieure/inférieure les deux nombres réels :

$$I_*(f) := \sup_\Delta \Sigma_\Delta(f) \qquad\text{et}\qquad I^*(f) := \inf_\Delta \Sigma^\Delta(f)$$

existent et ils satisfont :

$$\Sigma_\Delta(f) \overset{\text{croissant}}{\longrightarrow} I_*(f) \leqslant I^*(f) \overset{\text{décroissant}}{\longleftarrow} \Sigma^\Delta(f).$$

Autrement dit, les aires-sommes de gratte-ciel approchées en-dessous et au-dessus convergent toutes deux vers deux limites, éventuellement différentes, d'ailleurs.

Mais demander que f soit Riemann-intégrable au sens de la Définition 2.3, c'est justement demander (exercice mental) que :

$$I_*(f) = I^*(f).$$

Définition 2.7. L'intégrale au sens de Riemann d'une fonction *bornée* $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est alors cette valeur commune :

$$\int_a^b f(x)\,dx := I_*(f) = I^*(f).$$

Nous laissons au lecteur en exercice de compréhension le soin de se convaincre de la véracité de l'énoncé synthétique suivant.

Lemme 2.8. *Une fonction bornée* $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est Riemann-intégrable d'intégrale* $\int_a^b f(x)\,dx$ *si et seulement si, pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe une subdivision* Δ *de l'intervalle* $[a,b]$ *telle que :*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx - \varepsilon \leqslant \Sigma_\Delta(f) \leqslant \Sigma^\Delta(f) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon,}$$

ou, de manière équivalente, telle que :

$$\Sigma^\Delta(f) - \varepsilon \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \Sigma_\Delta(f) + \varepsilon. \qquad \square$$

Une définition alternative équivalente de la Riemann-intégrabilité d'une fonction bornée $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ pourrait être de demander sur toutes les subdivisions Δ de $[a,b]$ que l'on ait :

$$\sup_\Delta \Sigma_\Delta(f) = \inf_\Delta \Sigma^\Delta(f),$$

mais techniquement parlant, une telle définition s'avèrerait être moins économique que la Définition 2.3 lorsqu'il s'agit d'établir que certaines classes naturelles de fonctions sont automatiquement Riemann-intégrables, donc nous ne l'utiliserons pas.

En fait, c'est la Définition 2.3 que nous avons donné plus haut qui est la plus pratique, mais qu'exprime-t-elle au juste ? Elle dit plus précisément qu'une fonction $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est *Riemann-intégrable* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision $\Delta = \Delta(\varepsilon)$ de l'intervalle $[a,b]$:

$$\Delta = \big\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\big\},$$

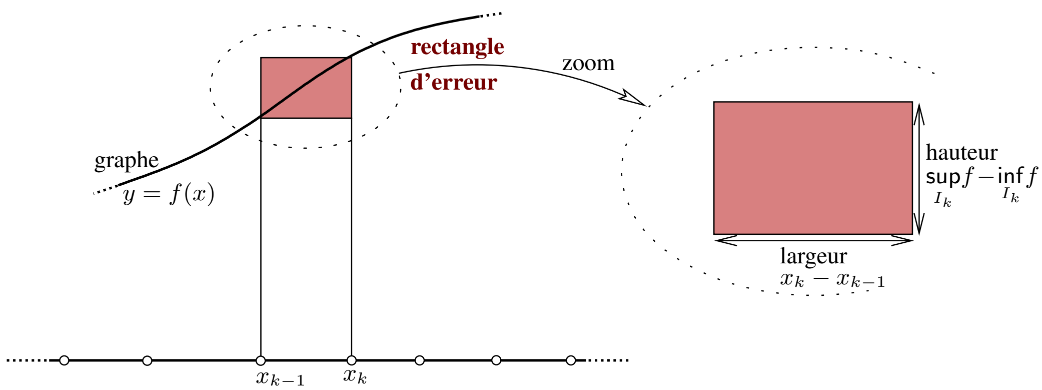
telle que :

$$\big(0 \leqslant\big) \quad \Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) \leqslant \varepsilon,$$

mais justement, cette différence entre la somme de Darboux supérieure $\Sigma^\Delta(f)$ et la somme de Darboux inférieure $\Sigma_\Delta(f)$ se calcule comme :

$$\Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) = \sum_{k=1}^n \underbrace{|I_k| \bigg(\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f\bigg)}_{k\text{-ème terme d'erreur}},$$

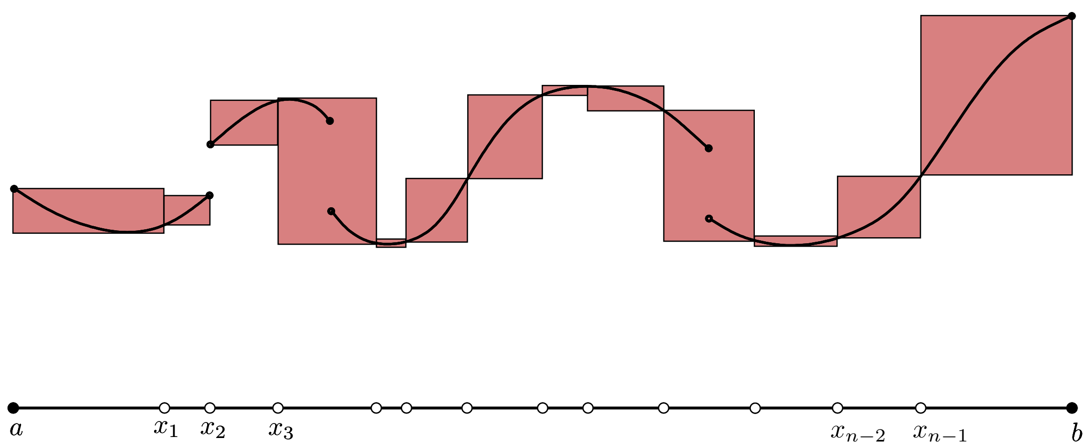
et géométriquement, le k-ème terme d'erreur représente l'aire d'un rectangle — plutôt assez écrasé en général — qui est la différence entre le k-ème gratte-ciel supérieur et le k-ème gratte-ciel inférieur.



On suppose sur la figure que $f \geqslant 0$, ce à quoi on peut toujours se ramener après translation.

Signification géométrique fondamentale de la Riemann-intégrabilité. *Une fonction $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est Riemann-intégrable lorsque, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut approximer son hypographe $\{(x,y)\colon\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ en-dessous et au-dessus par des rectangles verticaux serrés les uns contre les autres, assez effilés et assez nombreux pour que :*

$$\text{somme des aires de tous les rectangles d'erreur} \leqslant \varepsilon.$$



3. Continuité uniforme des fonctions continues définies sur un intervalle compact

Soient à nouveau deux nombres réels :

$$-\infty < a < b < \infty,$$

et considérons l'intervalle réel fermé borné, donc compact :

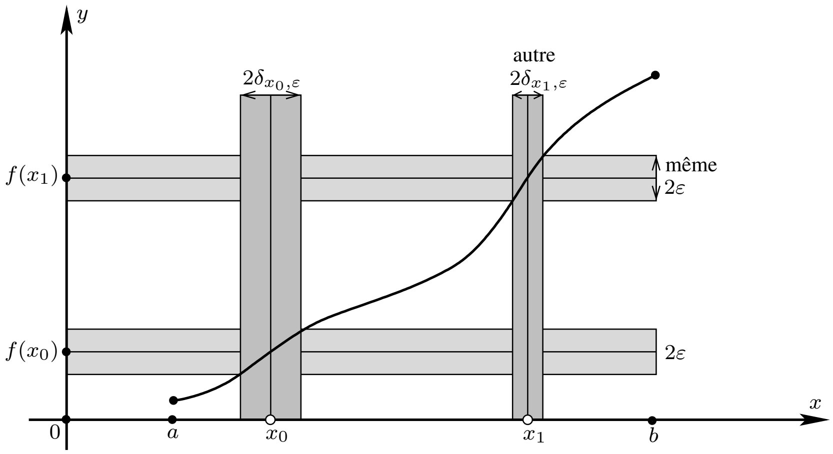
$$[a,b].$$

Définition 3.1. Une fonction $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *continue en un point* $x_0 \in [a,b]$ si :

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta_{x_0,\varepsilon} > 0 \quad \Big(\forall\,x \quad |x - x_0| \leqslant \delta_{x_0,\varepsilon} \implies \big|f(x) - f(x_0)\big| \leqslant \varepsilon\Big).$$

Ici, le $\delta_{x_0,\varepsilon}$ dépend en général inévitablement :

- du $\varepsilon > 0$ *arbitrairement petit* qu'on s'est donné à l'avance ;
- du point x_0 en lequel on teste si f est continue.



En un autre point $x_1 \in [a, b]$ en lequel f serait aussi continue, si l'on prenait le même $\varepsilon > 0$ très petit, il se pourrait en effet très bien qu'un $\delta_{x_1,\varepsilon}$ convenable en x_1 soit beaucoup plus petit que le premier $\delta_{x_0,\varepsilon}$ en x_0.

Définition 3.2. Une fonction $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *continue* lorsqu'elle est continue en *tout* point $x_0 \in [a, b]$.

Alors le fait qu'un $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ ne dépende pas du point x_0 en lequel on se situe, mais seulement de $\varepsilon > 0$, est exprimé par le concept mathématique important et classique de *continuité uniforme*.

Définition 3.3. Une fonction $f\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est dite *uniformément continue* lorsque :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_\varepsilon > 0 \quad \Big(\forall\, x' \in E \;\; \forall\, x'' \in E \quad |x' - x''| \leqslant \delta_\varepsilon \implies \big|f(x') - f(x'')\big| \leqslant \varepsilon\Big).$$

Théorème 3.4. [dit de Heine] *Toute fonction $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle fermé borné (donc compact) qui est continue en* tout *point $x \in [a, b]$ est en fait uniformément continue sur $[a, b]$.*

Le bonus, donc, c'est que le δ_ε ne dépend pas du point x, et c'est *vraiment* le fait que $[a, b]$ est *compact* qui va garantir une telle uniformité avantageuse.

Attention ! Lorsque f n'est définie et continue que sur un intervalle *ouvert* $]a, b[$, elle n'y est pas forcément uniformément continue (Exercice 1).

Démonstration. Fixons $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. Par hypothèse, en tout point $x \in [a, b]$, il existe $\delta_{x,\varepsilon} > 0$ tel que :

$$\forall\, x' \quad |x' - x| \leqslant \delta_{x,\varepsilon} \implies \big|f(x') - f(x)\big| \leqslant \varepsilon.$$

Bien entendu, ces $\delta_{x,\varepsilon} > 0$ doivent être au moins assez petits pour que les intervalles :

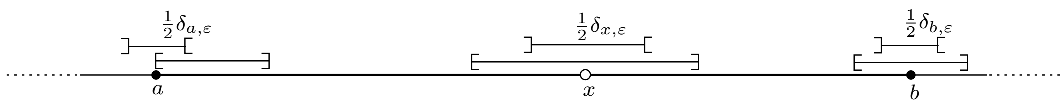
$$\big[x - \delta_{x,\varepsilon},\; x + \delta_{x,\varepsilon}\big] \;\subset\; \big[a,\; b\big]$$

soient contenus dans le domaine de définition de f. Mais à ce sujet, deux points spéciaux méritent attention, à savoir les extrémités :

$$x = a \qquad \text{et} \qquad x = b,$$

puisqu'alors il faut se restreindre à considérer les intervalles :

$$\big[a,\, a + \delta_{a,\varepsilon}\big] \qquad \text{et} \qquad \big[b - \delta_{b,\varepsilon},\, b\big].$$



Considérons alors plutôt les intervalles *ouverts* rétrécis d'un facteur $\frac{1}{2}$:

$$I_x := \big]x - \tfrac{1}{2}\delta_{x,\varepsilon},\; x + \tfrac{1}{2}\delta_{x,\varepsilon}\big[,$$

la raison pour laquelle on choisit $\frac{1}{2}$ devant être comprise plus tard, et aux extrémités a et b, considérons aussi de même les deux intervalles ouverts complets :

$$\big]a - \tfrac{1}{2}\delta_{a,\varepsilon},\; a + \tfrac{1}{2}\delta_{a,\varepsilon}\big[, \qquad \text{et} \qquad \big]b - \tfrac{1}{2}\delta_{b,\varepsilon},\; b + \tfrac{1}{2}\delta_{b,\varepsilon}\big[,$$

lesquels débordent donc légèrement de $[a, b]$.

Puisque l'on a trivialement :

$$\bigcup_{x \in [a,b]} \{x\} = [a, b],$$

et puisque chaque intervalle ouvert $I_x \ni x$ contient x, on voit que :

$$\bigcup_{x \in [a,b]} I_x \supset [a, b].$$

Nous pouvons donc appliquer un résultat censé être bien connu en L3 MFA (si tel n'est pas le cas, résoudre l'Exercice 2, ou lire la suite de ce chapitre).

Théorème 3.5. [dit de Heine-Borel] *De tout recouvrement d'un intervalle fermé borné (donc compact) :*

$$[a, b] \;\subset\; \bigcup_{j \in J} I_j,$$

par une famille quelconque *d'intervalles* ouverts *non vides :*

$$I_j \subset \mathbb{R},$$

indexée par un ensemble J de cardinal éventuellement arbitrairement grand, on peut extraire *un sous-recouvrement* fini*, à savoir il existe un entier $n \geqslant 0$ et $(n + 1)$ indices :*

$$j_0, j_1, j_2, \dots, j_n \;\in\; J$$

tels que, en fait :

$$[a, b] \;\subset\; \underbrace{I_{j_0} \cup I_{j_1} \cup I_{j_2} \cup \cdots \cup I_{j_n}}_{\text{un nombre fini d'intervalles ouverts suffit en fait pour recouvrir}}. \qquad \square$$

Une application de ce résultat fondamental donne un nombre $(n+1) \geqslant 2$ de points distincts :

$$x_0,\, x_1,\, \dots,\, x_{n-1},\, x_n \,\in\, [a,b]$$

ordonnés de manière croissante avec nécessairement (exercice : pourquoi ?) :

$$x_0 = a \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad x_n = b,$$

tels que la réunion de nos intervalles ouverts réduits à moitié :

$$\bigcup_{0\leqslant k\leqslant n} \big]x_k - \tfrac{1}{2}\delta_{x_k,\varepsilon},\ x_k + \tfrac{1}{2}\delta_{x_k,\varepsilon}\big[\ \supset\ [a,b]$$

recouvre tout l'intervalle $[a,b]$ de définition de f.

Or souvenons-nous qu'à chacun des points $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ de $[a,b]$ sont associées des quantités :

$$\delta_{x_0,\varepsilon} > 0,\ \delta_{x_1,\varepsilon} > 0,\ \dots\dots,\ \delta_{x_{n-1}} > 0,\ \delta_{x_n} > 0,$$

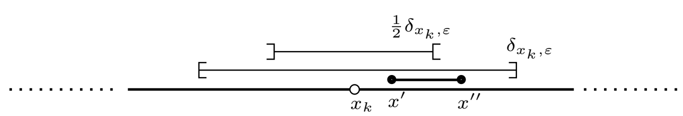
et définissons alors la plus petite d'entre elles :

$$\begin{aligned}\delta_\varepsilon &:= \min\big(\delta_{x_0,\varepsilon},\, \delta_{x_1,\varepsilon},\, \dots,\, \delta_{x_{n-1},\varepsilon},\, \delta_{x_n,\varepsilon}\big)\\ &> 0.\end{aligned}$$

Pour conclure la démonstration que f est uniformément continue, il suffit de prouver une :

Assertion 3.6. *Avec ce $\delta_\varepsilon > 0$, pour tous $x', x'' \in [a,b]$, on a :*

$$|x' - x''| \leqslant \tfrac{1}{2}\,\delta_\varepsilon \ \Longrightarrow\ \big|f(x') - f(x'')\big| \leqslant 2\,\varepsilon.$$



En effet premièrement, puisque nos intervalles ouverts recouvrent $[a,b]$, il existe un point de référence x_k tel que :

$$x' \in \big]x_k - \tfrac{1}{2}\delta_{x_k,\varepsilon},\ x_k + \tfrac{1}{2}\delta_{x_k,\varepsilon}\big[,$$

et donc par définition de $\delta_{x_k,\varepsilon}$:

$$\big|f(x') - f(x_k)\big| \leqslant \varepsilon.$$

Deuxièmement, par une simple inégalité triangulaire, on a aussi :

$$\begin{aligned}|x'' - x_k| &\leqslant |x'' - x'| + |x' - x_k|\\ &\leqslant \tfrac{1}{2}\,\delta_\varepsilon + \tfrac{1}{2}\,\delta_{x_k,\varepsilon}\\ &\leqslant \delta_{x_k,\varepsilon},\end{aligned}$$

ce qui nous fait comprendre pourquoi nous avions rétréci les intervalles d'un facteur $\frac{1}{2}$ puisque nous voyons ainsi que x'' appartient aussi à l'intervalle qui nous permet de déduire que :

$$\big|f(x'') - f(x_k)\big| \leqslant \varepsilon.$$

Enfin, une dernière inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}\big|f(x') - f(x'')\big| &\leqslant \big|f(x') - f(x_k)\big| + \big|f(x_k) - f(x'')\big|\\ &\leqslant \varepsilon + \varepsilon,\end{aligned}$$

nous fournit la conclusion terminale. □

En Topologie Générale, on démontre d'une manière très analogue le :

Théorème 3.7. *Une application continue $F\colon X \longrightarrow Y$ d'un espace topologique métrique (X, d) munie d'une distance d à valeurs dans un autre espace topologique (Y, e) munie d'une distance e est nécessairement uniformément continue lorsque X est* compact. □

4. Classes élémentaires de fonctions Riemann-intégrables

Définition 4.1. Une fonction bornée $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ à valeurs complexes, décomposée en parties réelle et en partie imaginaire comme :

$$f(x) = u(x) + \sqrt{-1}\, v(x),$$

est dite *intégrable au sens de Riemann* si u et v le sont, et on définit :

$$\int_a^b f(x)\, dx := \int_a^b u(x)\, dx + \sqrt{-1} \int_a^b v(x)\, dx.$$

Théorème 4.2. *Toute fonction continue :*

$$f \in \mathscr{C}^0\big([a, b], \mathbb{C}\big)$$

est Riemann-intégrable.

Démonstration. Rappelons que toute fonction continue $F\colon X \to \mathbb{C}$ sur un espace topologique X *compact* est uniformément continue.

Ici, l'intervalle fermé borné $[a, b] \Subset \mathbb{R}$ est compact, donc f est uniformément continue, ce qui s'exprime en caractères symboliques comme :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \quad \Big(\forall\, x'\ \forall\, x'' \in [a, b], \quad \big|x' - x''\big| \leqslant \delta(\varepsilon) \implies \big|f(x') - f(x'')\big| \leqslant \varepsilon\Big).$$

Pour montrer que f est Riemann-intégrable, en partant de $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il s'agit de trouver une subdivision Δ de l'intervalle $[a, b]$ telle que :

$$\big(0 \leqslant\big) \quad \Sigma^{\Delta}(f) - \Sigma_{\Delta}(f) \leqslant \varepsilon.$$

Or nous prétendons que si l'entier $n \gg 1$ est choisi assez grand pour que :

$$\frac{b - a}{n} \leqslant \delta(\varepsilon),$$

alors la subdivision la plus simple à n intervalles, à savoir celle qui est équidistribuée à écarts horizontaux constants tous de même longueur $\frac{1}{n}$:

$$\Delta = \bigg\{a,\ \underbrace{a + \frac{b - a}{n}}_{=:\, x_1},\ \underbrace{a + 2\,\frac{b - a}{n}}_{=:\, x_2},\ \ldots\ldots,\ \underbrace{a + (n-1)\,\frac{b - a}{n}}_{=:\, x_{n-1}},\ b\bigg\},$$

va facilement convenir.

En effet, pour une telle subdivision, les sommes de Darboux inférieure et supérieure de f sont :

$$\begin{aligned}\Sigma_\Delta(f) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} \inf\left\{f(x)\colon\ a+(k-1)\frac{b-a}{n} \leqslant x \leqslant a+k\frac{b-a}{n}\right\},\\ \Sigma^\Delta(f) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} \sup\left\{f(x)\colon\ a+(k-1)\frac{b-a}{n} \leqslant x \leqslant a+k\frac{b-a}{n}\right\},\end{aligned}$$

et donc en abrégeant comme d'habitude $I_k := [x_{k-1}, x_k]$, leur soustraction vaut :

$$\begin{aligned}0 &\leqslant \Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f)\\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n}\left(\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f\right).\end{aligned}$$

Mais comme $f\big|_{I_k}$ est *continue* sur l'intervalle *compact* I_k, elle y atteint d'après un théorème connu sa borne inférieure et sa borne supérieure :

$$\begin{aligned}&\exists\, x_k^- \quad \text{tel que} \quad f(x_k^-) = \inf_{I_k} f,\\ &\exists\, x_k^+ \quad \text{tel que} \quad f(x_k^+) = \sup_{I_k} f.\end{aligned}$$

De plus, comme $x_k^- \in I_k$ et $x_k^+ \in I_k$ avec par choix de $n \gg 1$:

$$|I_k| = \frac{b-a}{n} \leqslant \delta(\varepsilon),$$

on voit instantanément que :

$$|x_k^- - x_k^+| \leqslant \delta(\varepsilon),$$

et donc au final :

$$\begin{aligned}0 &\leqslant \Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f)\\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n}\Big(\underbrace{f(x_k^+) - f(x_k^-)}_{\leqslant\,\varepsilon}\Big)\\ &\leqslant \varepsilon\,(b-a)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\\ &\leqslant \varepsilon\,(b-a),\end{aligned}$$

ce qui conclut, quitte à remplacer ε à l'avance par $\varepsilon/(b-a)$. □

Définition 4.3. Une fonction $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *croissante* lorsque :

$$\forall\, x'\ \forall\, x'' \in [a,b] \quad x' \leqslant x'' \implies f(x') \leqslant f(x'').$$

Elle est dite *décroissante* lorsque :

$$\forall\, x'\ \forall\, x'' \in [a,b] \quad x' \leqslant x'' \implies f(x') \geqslant f(x'').$$

Définition 4.4. Une fonction $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *monotone* lorsqu'elle est ou bien croissante, ou bien décroissante sur *tout* l'intervalle $[a,b]$.

Il faut bien faire attention que la notion de monotonie peut être *localisée :* une fonction peut fort bien ne pas être monotone sur l'intervalle $[a, b]$ tout entier, mais être monotone sur des sous-intervalles assez petits $J \subset [a, b]$, penser par exemple à $\theta \mapsto \sin\theta$ sur $[0, 2\pi]$, fonction qui est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, puis décroissante sur $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, et enfin croissante sur $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$.

Notons aussi que toute fonction monotone $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, par exemple croissante, est nécessairement bornée, puisque :

$$a \leqslant x \leqslant b \implies \underbrace{f(a)}_{>-\infty} \leqslant f(x) \leqslant \underbrace{f(b)}_{<\infty}.$$

Théorème 4.5. *Toute fonction monotone (bornée) f sur un intervalle fermé borné $[a, b] \subset \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable.*

Démonstration. Pour fixer les idées, nous supposerons f croissante, car le cas où f est décroissante se traiterait de manière entièrement similaire. D'ailleurs, c'est un exercice facile de vérifier qu'une fonction f est Riemann-intégrable si et seulement si son opposée $-f$ l'est, et donc, si on partait d'une fonction décroissante f, on se ramènerait de toute façon à une fonction croissante en travaillant avec $-f$.

Prenons une subdivision quelconque de l'intervalle $[a, b]$:

$$\Delta = \big\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\big\},$$

et attendons de voir naturellement quelle condition simple Δ doit satisfaire pour que $\Sigma^{\Delta}(f) - \Sigma_{\Delta}(f) \leqslant \varepsilon$.

Posons comme à l'accoutumée :

$$I_k := \big[x_{k-1}, x_k\big] \qquad\qquad {\scriptstyle (k = 1 \cdots n)}.$$

Pour calculer les sommes de Darboux inférieure et supérieure de f associées à Δ, comme f est supposée croissante, *on sait* ce que valent les bornes inférieures et supérieures de f sur les intervalles I_k :

$$f(x_{k-1}) \;=\; \inf_{I_k} f \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad f(x_k) \;=\; \sup_{I_k} f,$$

tout simplement parce que :

$$x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k \implies f(x_{k-1}) \leqslant f(x) \leqslant f(x_k).$$

Alors la différence entre les deux sommes de Darboux en question se majore aisément sans valeur absolue puisque tous les termes sont positifs :

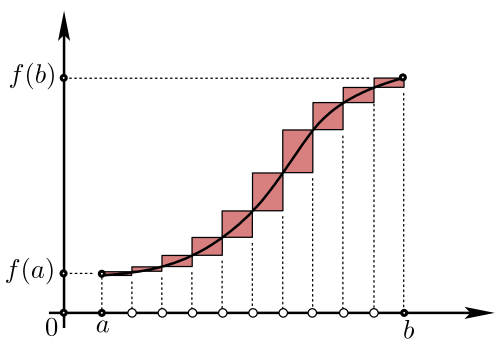
$$\begin{aligned}
0 \leqslant \Sigma^{\Delta}(f) - \Sigma_{\Delta}(f) &= \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - x_{k-1}\big) \Big(\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \big(\underbrace{x_k - x_{k-1}}_{\geqslant 0}\big) \Big(\underbrace{f(x_k) - f(x_{k-1})}_{\text{toujours} \geqslant 0}\Big) \\
&\leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \big(x_k - x_{k-1}\big) \sum_{k=1}^{n} \big(f(x_k) - f(x_{k-1})\big) \\
\text{[Somme téléscopique !]} \qquad &= \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \big(x_k - x_{k-1}\big) \Big[f(x_1) - f(a) + f(x_2) - f(x_1) + \cdots \\
&\qquad\qquad \cdots + f(x_{n-1}) - f(x_{n-2}) + f(b) - f(x_{n-1})\Big] \\
&= \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \big(x_k - x_{k-1}\big) \big[f(b) - f(a)\big].
\end{aligned}$$

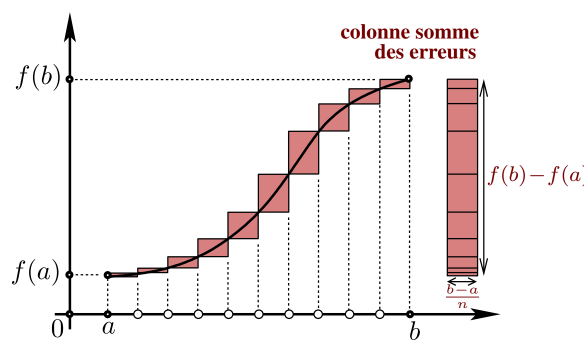
En conclusion, pourvu seulement que la subdivision Δ soit choisie assez resserrée pour que :

$$x_k - x_{k-1} \leqslant \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \qquad\qquad (k = 1 \cdots n),$$

on obtiendra bien $\Sigma^{\Delta}(f) - \Sigma_{\Delta}(f) \leqslant \varepsilon$. □

Graphiquement, la Riemann-intégrabilité des fonctions monotones s'illustre de manière spectaculairement éclairante.





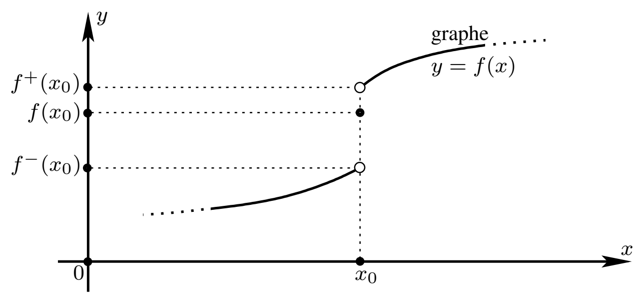
Pour simplifier, la figure est réalisée dans le cas d'une fonction croissante *continue*, avec une subdivision à pas constant $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$. Cette figure montre que la somme totale des erreurs correspond à une colonne dont la hauteur reste égale à $f(b) - f(a)$, donc bornée, tandis que la largeur de la base, égale à $\frac{b-a}{n}$, tend vers zéro quand $n \to \infty$. L'aire de ce rectangle-colonne vertical somme des erreurs :

$$\frac{b-a}{n} \times \big(f(b) - f(a)\big) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

tend donc bien vers zéro lorsque le pas de la subdivision tend vers 0.

Toutefois, il importe de noter que le théorème que nous venons de démontrer est valable pour toute fonction monotone sans hypothèse de continuité.

Il existe d'ailleurs des fonctions monotones qui ont un nombre fini, voire infini dénombrable, de points de discontinuité. Mais nous verrons que les fonctions monotones sont '*presque partout*' différentiables, où le sens qu'il convient de donner à l'expression '*presque partout*' dépendra d'une théorie supérieure, celle de Lebesgue, notre objectif principal dans ce cours.



En tout cas pour l'instant, rappelons que toute fonction monotone $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ admet, en tout point $x_0 \in [a,b]$, une *limite à gauche* et une *limite à droite*, à savoir plus précisément :

$$\forall\, x_0 \in [a,b] \quad \exists \lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) =: f^-(x_0),$$
$$\forall\, x_0 \in [a,b] \quad \exists \lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) =: f^+(x_0),$$

les deux notations $f^-(x_0)$ et $f^+(x_0)$ pour ces deux limites parlant tout à fait à l'intuition ; en effet, l'existence de ces deux limites découle simplement par monotonie de f d'une application du Théorème de la borne inférieure/supérieure :

$$f^-(x_0) = \sup \underbrace{\big\{f(x) \in \mathbb{R}\colon\ x < x_0\big\}}_{\text{ensemble borné} \subset [f(a), f(x_0)]},$$
$$f^+(x_0) = \inf \underbrace{\big\{f(x) \in \mathbb{R}\colon\ x > x_0\big\}}_{\text{ensemble borné} \subset [f(x_0), f(b)]}.$$

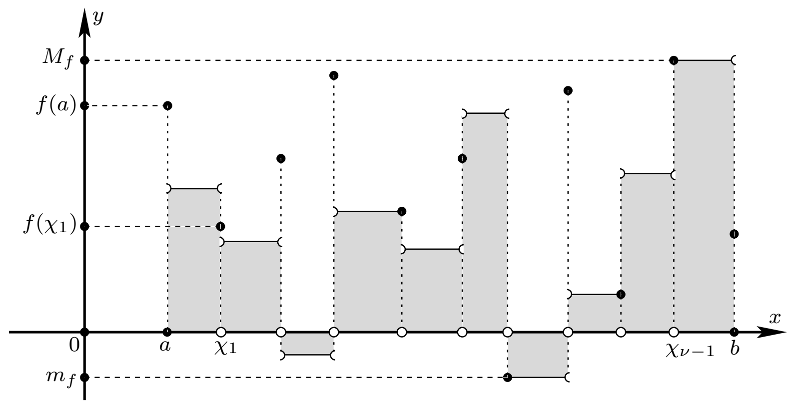
Définition 4.6. Une fonction bornée $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelée *fonction en escalier* sur $[a,b]$ s'il existe une suite croissante finie de 'points-seuils' :

$$a = \chi_0 < \chi_1 < \chi_2 < \cdots < \chi_{\nu-2} < \chi_{\nu-1} < \chi_\nu = b,$$

et s'il existe des constantes $c_1, c_2, \dots, c_{\nu-1}, c_\nu \in \mathbb{R}$ telles que :

$$\begin{aligned}
f(x) &= c_1 && \forall\, \chi_0 < x < \chi_1, \\
f(x) &= c_2 && \forall\, \chi_1 < x < \chi_2, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
f(x) &= c_{\nu-1} && \forall\, \chi_{\nu-2} < x < \chi_{\nu-1}, \\
f(x) &= c_\nu && \forall\, \chi_{\nu-1} < x < \chi_\nu,
\end{aligned}$$

aucune condition particulière n'étant demandée sur les valeurs $f(a)$, $f(\chi_1)$, …, $f(\chi_{\nu-1})$, $f(b)$, qui apparaissent en noir sur la figure.



Autrement dit, sur chaque intervalle ouvert $]\chi_{\lambda-1},\ \chi_\lambda[$, la fonction est constante :

$$f\big|_{]\chi_{\lambda-1},\chi_\lambda[} \equiv c_\lambda \qquad\qquad (1 \leqslant \lambda \leqslant \nu).$$

Même si les valeurs de $f(a)$, $f(\chi_1)$, ..., $f(\chi_{\nu-1})$, $f(b)$ sont éventuellement libres d'être totalement déconnectées des constantes $c_1, c_2, \ldots, c_{\nu-1}, c_\nu$, on est certain puisque la fonction est bornée que les deux quantités :

$$\begin{aligned} m_f &:= \inf_{x\in[a,b]} f(x) \ > \ -\infty, \\ M_f &:= \sup_{x\in[a,b]} f(x) \ < \ \infty, \end{aligned}$$

sont *finies*.

Théorème 4.7. *Toute fonction en escalier $f^{\mathsf{esc}}\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable, et plus précisément, dans les notations de la Définition générale 4.6, la valeur de son intégrale est la somme des aires (orientées) des rectangles :*

$$\int_a^b f^{\mathsf{esc}}(x)\,dx = \big(\chi_1 - a\big)\,c_1 + \big(\chi_2 - \chi_1\big)\,c_2 + \cdots + \big(\chi_{\nu-1} - \chi_{\nu-2}\big)\,c_{\nu-1} + \big(b - \chi_{\nu-1}\big)\,c_\nu.$$

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que :

$$m_{f^{\mathsf{esc}}} \ < \ M_{f^{\mathsf{esc}}},$$

car si au contraire on avait $m_{f^{\mathsf{esc}}} = M_{f^{\mathsf{esc}}}$, la fonction f^{esc} serait *constante*, auquel cas le théorème serait trivial.

Intuitivement, on pourrait être tenté de prétendre que la démonstration est immédiate, puisqu'il semble suffire de choisir la subdivision :

$$\square := \big\{a = \chi_0 < \chi_1 < \cdots < \chi_{\nu-1} < \chi_\nu = b\big\},$$

mais les 'inf' et les 'sup' qui apparaissent dans les sommes de Darboux inférieure $\Sigma_\square$ et $\Sigma^\square$ sont par définition à prendre sur les intervalles *fermés* $[\chi_{\lambda-1}, \chi_\lambda]$, et justement, comme on n'a aucune connaissance des valeurs aux extrémités $f(\chi_{\lambda-1})$ et $f(\chi_\lambda)$, il y a comme qui dirait '*un petit hic*'.

L'Exercice 5 montre qu'on peut modifier la définition des sommes de Darboux pour que ce problème technique disparaisse. Mais il vaut mieux mettre ici au point une démonstration indépendante, pour faire apparaître des idées géométriques qui resserviront ultérieurement.

Intuitivement, lorsqu'on interprète l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ comme étant l'aire de l'hypographe $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \colon 0\leqslant y\leqslant f(x)\}$ d'une fonction en escalier $f\colon [a,b]\longrightarrow\mathbb{R}_+$ à valeurs positives, les $(\nu+1)$ segments verticaux entre les immeubles :

$$\big\{0\leqslant y\leqslant f(a)\big\}\bigcup\big\{0\leqslant y\leqslant f(\chi_1)\big\}\bigcup\cdots\bigcup\big\{0\leqslant y\leqslant f(\chi_{\nu-1})\big\}\bigcup\big\{0\leqslant y\leqslant f(b),$$

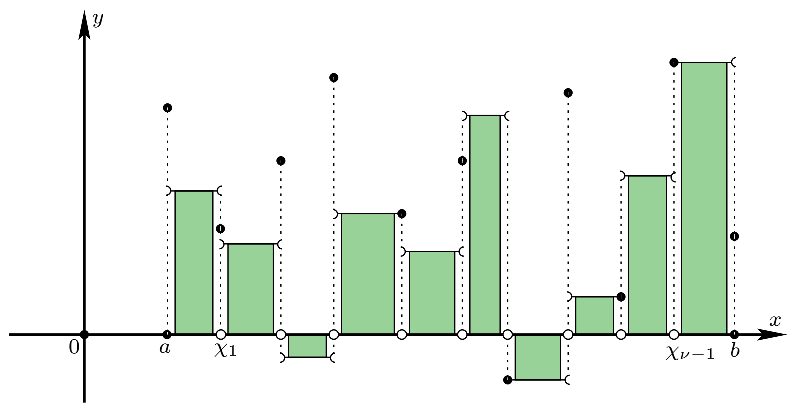
s'ils se mettent à dépasser commes des antennes de télécommunication attachées aux parois verticales, comptent de toute façon pour rien en termes de surface : ils sont *de mesure nulle*.

Pour rendre cette idée rigoureuse, adjoignons des points à la subdivision $\square$ en introduisant, pour un $\delta>0$ très petit, en tout cas plus petit que :

$$\delta<\tfrac{1}{2}\,\mathsf{min}\big\{\chi_1-a,\ \chi_2-\chi_1,\ \ldots\ldots,\ \chi_{\nu-1}-\chi_{\nu-2},\ b-\chi_{\nu-1}\big\},$$

à chaque fois deux points serrés de part et d'autre de chaque point de $\square$:

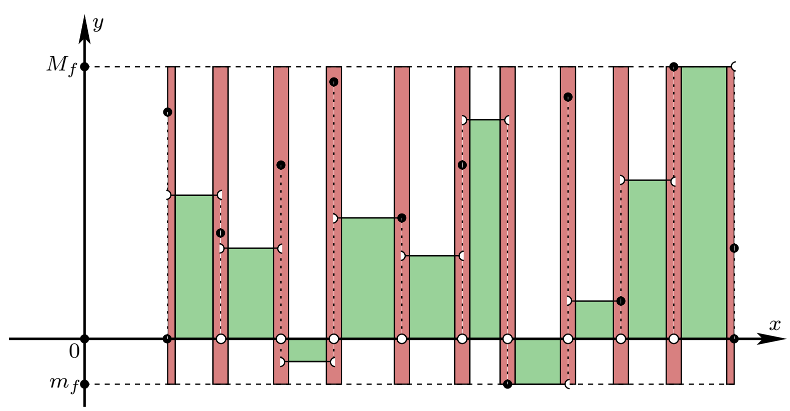
$$\Delta:=\Big\{a,\ a+\delta,\ \chi_1-\delta,\ \chi_1,\ \chi_1+\delta,\ \ldots\ldots,\ \chi_{\nu-1}-\delta,\ \chi_{\nu-1},\ \chi_{\nu-1}+\delta,\ b-\delta,\ b\Big\}.$$



À ce moment-là, on est certain que sur tous les intervalles *fermés :*

$$\big[a+\delta,\ \chi_1-\delta\big],\ \ \big[\chi_1+\delta,\ \chi_2-\delta\big],\ \ \ldots\ldots\ldots,\ \ \big[\chi_{\nu-2}+\delta,\ \chi_{\nu-1}-\delta\big],\ \ \big[\chi_{\nu-1}+\delta,\ b-\delta\big],$$

la fonction est bel et bien constante, y compris aux extrémités.



Pour cette subdivision Δ, nous laissons au lecteur le soin de se convaincre par la réflexion que l'erreur entre sommes de Darboux :

$$\Sigma^{\Delta}(f)-\Sigma_{\Delta}(f)$$

est majorée par la somme des aires de $(\nu+1)$ tours verticales ultra-fines entre les immeubles amaigris, toutes ces tours étant d'une hauteur égale à :

$$M_f - m_f \,>\, 0,$$

et toutes — excepté les deux demi-tours en a et en b — ayant une largeur à la base égale à :

$$2\,\delta,$$

donc au total la somme des erreurs possède le majorant :

$$\begin{aligned}\Sigma_\Delta(f) - \Sigma^\Delta(f) \;&\leqslant\; \big(M_f - m_f\big)\,\big(\delta + \underbrace{2\delta + \cdots + 2\delta}_{\nu-1\text{ fois}} + \delta\big) \\ &=\; \big(M_f - m_f\big)\,\nu\,2\,\delta\end{aligned},$$

une quantité qui peut être rendue arbitrairement petite, *i.e.* plus petite qu'un $\varepsilon > 0$ quelconque fixé à l'avance, pourvu que :

$$\delta \;\leqslant\; \frac{\varepsilon}{(M_f - m_f)\,2\,\nu},$$

ce qui conclut la démonstration et fournit la valeur annoncée pour $\int_a^b f(x)\,dx$ (exercice de compréhension). □

Au niveau de progression que nous venons d'atteindre, il importe de réinterpréter la Riemann-intégrabilité d'une fonction bornée $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ à l'aide du concept de fonction en escalier.

En effet, la somme de Darboux inférieure de f associée à une subdivision Δ de l'intervalle $[a,b]$:

$$\begin{aligned}\Sigma_\Delta(f) &= \sum_{k=1}^n \big(x_k - x_{k-1}\big) \inf_{x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k} f(x) \\ &= \int_a^b f_\Delta^{\mathsf{esc}}(x)\,dx,\end{aligned}$$

s'avère, grâce au théorème que nous venons de démontrer, être *égale* à l'intégrale d'une certaine *fonction en escalier inférieure* f_Δ^{esc} naturellement associée à f, laquelle est définie, en introduisant pour abréger les $(n+1)$ constantes :

$$c_\Delta^1(f) := \inf_{a\leqslant x\leqslant x_1} f(x), \qquad c_\Delta^2(f) := \inf_{x_1\leqslant x\leqslant x_2} f(x), \qquad \ldots\ldots, \qquad c_\Delta^n(f) := \inf_{x_{n-1}\leqslant x\leqslant x_n} f(x),$$

dans les n intervalles *ouverts* de la subdivision par :

$$\begin{array}{ll} f_\Delta^{\mathsf{esc}}(x) := c_\Delta^1(f) & \forall\, a < x < x_1, \\ f_\Delta^{\mathsf{esc}}(x) := c_\Delta^2(f) & \forall\, x_1 < x < x_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_\Delta^{\mathsf{esc}}(x) := c_\Delta^n(f) & \forall\, x_{n-1} < x < b, \end{array},$$

tandis que les valeurs de cette fonction en escalier inférieure f_Δ^{esc} aux points de la subdivision — sans importance pour la valeur de son intégrale $\int f_\Delta^{\mathsf{esc}}$ — sont simplement assignés à être celles de la fonction originale :

$$f_\Delta^{\mathsf{esc}}(a) := f(a), \qquad f_\Delta^{\mathsf{esc}}(x_1) := f(x_1), \qquad \ldots\ldots, \qquad f_\Delta^{\mathsf{esc}}(b) := f(b).$$

De manière entièrement similaire, la somme de Darboux supérieure de f associée à la même subdivision Δ :

$$\begin{aligned}\Sigma^{\Delta}(f) &= \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - x_{k-1}\big) \sup_{x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k} f(x) \\ &= \int_a^b f_{\mathsf{esc}}^{\Delta}(x)\,dx,\end{aligned}$$

s'avère être égale à l'intégrale d'une certaine *fonction en escalier supérieure* $f_{\mathsf{esc}}^{\Delta}$ dont il n'est pas nécessaire d'expliciter la définition.

En tout cas, ces deux fonctions en escalier *encadrent* f :

$$f_{\Delta}^{\mathsf{esc}} \leqslant f \leqslant f_{\mathsf{esc}}^{\Delta},$$

et en appliquant l'intégration $\int_a^b(\cdot)$ qui respecte les inégalités entre les fonctions grâce au Théorème 5.1 ci-dessous, on réobtient :

$$\underbrace{\Sigma_{\Delta}(f)}_{=\int_a^b f_{\Delta}^{\mathsf{esc}}} \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \underbrace{\Sigma^{\Delta}(f)}_{=\int_a^b f_{\mathsf{esc}}^{\Delta}}.$$

En accord avec les intuitions géométriques qui transparaissaient volontairement dans tous les diagrammes qui précèdent, nous pouvons alors effectivement énoncer une :

Proposition 4.8. [Réinterprétation fondamentale de la Riemann-intégrabilité] *Une fonction bornée $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ définie sur un intervalle compact $[a,b] \Subset \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe* deux *fonctions en escalier encadrant f :*

$$f_{1,\varepsilon}^{\mathsf{esc}} \leqslant f \leqslant f_{2,\varepsilon}^{\mathsf{esc}}$$

telles que :

$$\big(0 \leqslant\big) \qquad \int_a^b f_{2,\varepsilon}^{\mathsf{esc}} - \int_a^b f_{1,\varepsilon}^{\mathsf{esc}} \leqslant \varepsilon. \qquad \square$$

Sur un plan strictement *logique*, l'équivalence entre les deux définitions n'est pas immédiate, mais l'Exercice 6 propose de s'en convaincre rigoureusement.

5. Propriétés élémentaires de l'intégrale de Riemann

Théorème 5.1. *Si $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ et $g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ sont deux fonctions bornées Riemann-intégrables définies sur un intervalle compact $[a,b] \Subset \mathbb{R}$, alors :*

(i) [Additivité] *leur somme $f+g$ est elle aussi Riemann-intégrable avec :*

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx;$$

(ii) [Dilativité] *pour toute constante $\lambda \in \mathbb{C}$, la fonction $\lambda\,f$ est Riemann-intégrale avec :*

$$\int_a^b \lambda\,f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx;$$

(iii) [Croissance de l'intégrale] *si f et g sont à valeurs* réelles *et si :*

$$f(x) \leqslant g(x) \qquad {\scriptstyle (\forall\, x\in[a,b])},$$

alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx;$$

(iv) [Règle de Chasles] *pour tout* $c \in]a,b[$*, en restriction aux deux intervalles* $[a,c]$ *et* $[c,b]$*, la fonction* f *est Riemann-intégrable avec :*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

(v) [Dégénérescence] *Lorsque* $b = a$*, auquel cas l'intervale* $[a,a] = \{a\}$ *est réduit à un point :*

$$0 = \int_a^a f(x)\,dx.$$

Définition 5.2. [Convention de Chasles algébrique] En accord avec ces propriétés, lorsque les bornes d'intégration sont inversées, il convient de poser :

$$\boxed{\int_b^a f(x)\,dx \overset{\mathsf{def}}{=} -\int_a^b f(x)\,dx.}$$

Démonstration. Contentons-nous d'établir rigoureusement l'additivité **(i)**, les propriétés **(ii)** et **(iii)** se vérifiant par le même type d'arguments, tandis que **(iv)** demande simplement de raffiner les subdivisions concernées en leur ajoutant seulement le point c. Quant à **(v)**, *stricto sensu*, la théorie n'a été développée jusqu'à présent que pour $-\infty < a < b < \infty$, mais il est clair que lorsque $b = a$, quelle que soit la subdivision Δ choisie, toutes les différences $(x_k - x_{x-1})$ dans les sommes de Darboux sont nulles, d'où $0 = \Sigma_\Delta(f) = \Sigma^\Delta(f)$.

Grâce à la reformulation synthétique du Lemme 2.8, si on se donne un $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, la Riemann-intégrabilité de f et de g s'exprime en disant qu'il existe deux subdivisions :

$$\Delta_1 = \Delta_1(\varepsilon) \qquad \text{et} \qquad \Delta_2 = \Delta_2(\varepsilon)$$

de l'intervalle $[a,b]$ telles que :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx - \varepsilon \leqslant \Sigma_{\Delta_1}(f) \leqslant \Sigma^{\Delta_1}(f) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon,\\ \int_a^b g(x)\,dx - \varepsilon \leqslant \Sigma_{\Delta_2}(g) \leqslant \Sigma^{\Delta_2}(g) \leqslant \int_a^b g(x)\,dx + \varepsilon,\end{aligned}$$

simultanément. Bien entendu, on est instantanément tenté d'introduire leur *réunion :*

$$\Delta := \Delta_1 \cup \Delta_2,$$

car le Lemme 2.5 crucial de monotonie :

$$\begin{aligned}\Sigma_{\Delta_1}(f) \leqslant \Sigma_\Delta(f) \leqslant \Sigma^\Delta(f) \leqslant \Sigma^{\Delta_1}(f),\\ \Sigma_{\Delta_2}(g) \leqslant \Sigma_\Delta(g) \leqslant \Sigma^\Delta(g) \leqslant \Sigma^{\Delta_2}(g),\end{aligned}$$

assure qu'on aura aussi :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx-\varepsilon \;\leqslant\; \Sigma_\Delta(f) \;\leqslant\; \Sigma^\Delta(f) \;\leqslant\; \int_a^b f(x)\,dx+\varepsilon,\\ \int_a^b g(x)\,dx-\varepsilon \;\leqslant\; \Sigma_\Delta(g) \;\leqslant\; \Sigma^\Delta(g) \;\leqslant\; \int_a^b g(x)\,dx+\varepsilon,\end{aligned}$$

maintenant pour une seule et même subdivision Δ de $[a,b]$. Une addition directe de ces deux inégalités donne alors un résultat à conserver en mémoire :

$$\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx-2\,\varepsilon \;\leqslant\; \Sigma_\Delta(f)+\Sigma_\Delta(g) \;\leqslant\; \Sigma^\Delta(f)+\Sigma^\Delta(g) \;\leqslant\; \int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx+2\,\varepsilon.$$

Lemme 5.3. *Pour tout sous-intervalle fermé :*

$$I\subset[a,b],$$

on a :

$$\begin{aligned}\inf_{x\in I} f(x)+\inf_{x\in I} g(x) \;\leqslant \inf_{x\in I}\big((f+g)(x)\big)&\\ \sup_{x\in I}\big((f+g)(x)\big) \;\leqslant\; \sup_{x\in I} f(x)+\sup_{x\in I} g(x).&\end{aligned}$$

Démonstration. Contentons-nous de prouver l'inégalité sur les $\inf$, celle sur les $\sup$ étant similaire et équivalente (exercice).

Posons pour abréger :

$$\varphi:=\inf_{x\in I} f(x),\qquad\qquad \psi:=\inf_{x\in I} g(x),\qquad\qquad \chi:=\inf_{x\in I}\big(f(x)+g(x)\big).$$

Par définition, on a donc en particulier :

$$\varphi\leqslant f(x),\qquad\qquad \psi\leqslant g(x),\qquad\qquad \chi\leqslant f(x)+g(x)\qquad\qquad {\scriptstyle(\forall\,x\,\in\,I)},$$

mais puisqu'il s'agit de l'*infimum* pour cette troisième et dernière inégalité, il existe une suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments $x_n\in I$ telle que :

$$\chi+\varepsilon_n \;=\; f(x_n)+g(x_n),$$

avec un léger décalage supérieur $\varepsilon_n\geqslant 0$ qui tend vers zéro $\varepsilon_n\longrightarrow 0$ lorsque $n\to\infty$. Alors par jeu d'inégalités simples :

$$\begin{aligned}\varphi+\psi \;&\leqslant\; f(x_n)+g(x_n)\\ &=\; \chi+\varepsilon_n,\end{aligned}$$

et à la limite $\varphi+\psi\leqslant\chi$, ce qu'il fallait faire voir. □

Grâce à cette inégalité sur les inf, nous pouvons majorer l'addition des sommes de Darboux inférieures de f et de g :

$$\begin{aligned}
\Sigma_\Delta(f) + \Sigma_\Delta(g) &= \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - x_{k-1}\big) \inf_{I_k} f \; + \; \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - x_{k-1}\big) \inf_{I_k} g \\
&= \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - x_{k-1}\big) \Big[\inf_{I_k} f + \inf_{I_k} g \Big] \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - x_{k-1}\big) \inf_{I_k} \big(f+g\big) \\
&= \Sigma_\Delta(f+g),
\end{aligned}$$

et de manière entièrement similaire, le lecteur vérifiera que pour les sommes de Darboux supérieures, on a l'inégalité :

$$\Sigma^\Delta(f+g) \leqslant \Sigma^\Delta(f) + \Sigma^\Delta(g).$$

Une synthèse entre les deux inégalités obtenues s'exprime comme pour le mieux dans le meilleur des mondes :

$$\Sigma_\Delta(f) + \Sigma_\Delta(g) \leqslant \Sigma_\Delta(f+g) \underbrace{\leqslant}_{\substack{\text{toujours}\\ \text{vrai}}} \Sigma^\Delta(f+g) \leqslant \Sigma^\Delta(f) + \Sigma^\Delta(g).$$

Enfin, une comparaison visuelle avec le résultat conservé en mémoire ci-dessus fournit l'information finale :

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx - 2\,\varepsilon}_{\text{gendarme à gauche}} \leqslant \Sigma_\Delta(f+g) \leqslant \Sigma^\Delta(f+g) \leqslant \underbrace{\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx + 2\,\varepsilon}_{\text{gendarme à droite}},$$

grâce à laquelle, étant donné que :

$$\text{différence entre les deux gendarmes} = 4\,\varepsilon,$$

on voit que :

$$\Sigma^\Delta(f+g) - \Sigma_\Delta(f+g) \leqslant 4\,\varepsilon,$$

ce qui conclut que $f+g$ est Riemann-intégrable et en bonus automatique aussi, que $\int(f+g) = \int f + \int g$. □

Corollaire 5.4. *L'application :*

$$f \longmapsto \int_a^b f(x)\,dx$$

est une application linéaire sur l'espace des fonctions bornées Riemann-intégrables sur $[a,b]$. □

Proposition 5.5. *Soit* $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction bornée définie sur un intervalle compact* $[a,b] \Subset \mathbb{R}$*, et soit un point quelconque :*

$$c \in \,]a,b[.$$

Si, pour tout $\delta > 0$ *arbitrairement petit, les deux restrictions :*

$$f\big|_{[a,\,c-\delta]} \qquad \text{et} \qquad f\big|_{[c+\delta,\,b]}$$

sont Riemann-intégrables, alors f elle-même est Riemann-intégrable avec :

$$\int_a^b f(x)\,dx \,=\, \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Démonstration. Notons :

$$\sup_{[a,b]} |f| \,=:\, M_{|f|} \,<\, \infty,$$

et pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, choisissons $\delta > 0$ assez petit pour que :

$$4\,\delta\,M_{|f|} \,\leqslant\, \frac{\varepsilon}{3}.$$

Par hypothèse, il existe deux subdivisions Δ_1 de $[a, c-\delta]$ et Δ_2 de $[c+\delta, b]$ telles que les différences entre les sommes de Darboux associées sont arbitrairement petites :

$$\begin{aligned}
\big(0 \leqslant \big) \qquad \Sigma^{\Delta_1}\big(f\big|_{[a,c-\delta]}\big) - \Sigma_{\Delta_1}\big(f\big|_{[a,c-\delta]}\big) \,&\leqslant\, \frac{\varepsilon}{3},\\
\big(0 \leqslant \big) \qquad \Sigma^{\Delta_2}\big(f\big|_{[c+\delta,b]}\big) - \Sigma_{\Delta_2}\big(f\big|_{[c+\delta,b]}\big) \,&\leqslant\, \frac{\varepsilon}{3}.
\end{aligned}$$

Alors tout simplement pour la subdivision réunion :

$$\Delta := \Delta_1 \cup \Delta_2,$$

qui contient bien entendu $\{c-\delta\}$ et $\{c+\delta\}$ comme extrémité droite de Δ_1 et gauche de Δ_2 ce qui ajoute le seul segment $[c-\delta, c+\delta]$ de longueur $2\,\delta$, les sommes de Darboux deviennent :

$$\begin{aligned}
\Sigma_\Delta(f) &= \Sigma_{\Delta_1}(f) + 2\,\delta \inf_{[c-\delta,c+\delta]} f + \Sigma_{\Delta_2}(f),\\
\Sigma^\Delta(f) &= \Sigma^{\Delta_1}(f) + 2\,\delta \sup_{[c-\delta,c+\delta]} f + \Sigma^{\Delta_2}(f),
\end{aligned}$$

et donc par soustraction :

$$\begin{aligned}
\Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) \,&\leqslant\, \Sigma^{\Delta_1}(f) - \Sigma_{\Delta_1}(f) + 2\,\delta\,\Big(\sup_{[c-\delta,c+\delta]} f - \inf_{[c-\delta,c+\delta]} f\Big) + \Sigma^{\Delta_2}(f) - \Sigma_{\Delta_2}(f)\\
&\leqslant\, \frac{\varepsilon}{3} + 2\,\delta\,2\,M_{|f|} + \frac{\varepsilon}{3}\\
&\leqslant\, \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3},
\end{aligned}$$

quantité arbitrairement petite, ce qui conclut. □

Définition 5.6. Une fonction $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite *continue par morceaux* lorsqu'il existe une suite croissante de points :

$$a < \eta_1 < \eta_2 < \cdots < \eta_{\nu-1} < \eta_\nu < b,$$

telle que f est continue en restriction à chacun des intervalles :

$$[a, \eta_1[, \qquad]\eta_1, \eta_2[, \qquad \ldots\ldots, \qquad]\eta_{\nu-1}, \eta_\nu[, \qquad]\eta_\nu, b].$$

On notera :

$$f \,\in\, \mathscr{C}^0_{\mathsf{pm}}([a,b]).$$

Corollaire 5.7. *Toute fonction bornée $f \in \mathscr{C}^0_{\mathsf{pm}}([a,b])$ est Riemann-intégrable avec :*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{\eta_1} f(x)\,dx + \int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{\eta_{\nu-1}}^{\eta_\nu} f(x)\,dx + \int_{\eta_\nu}^b f(x)\,dx. \qquad \square$$

Une autre question importante est de déterminer si le *produit* fg de deux fonctions Riemann-intégrables est encore Riemann-intégrable. Cette propriété positive sera un corollaire de l'énoncé général suivant.

Théorème 5.8. *Si une fonction bornée* $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est Riemann-intégrable et si une fonction* $\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est continue, alors leur composée :*

$$\varphi \circ f\colon \quad [a,b] \overset{f}{\longrightarrow} \mathbb{R} \overset{\varphi}{\longrightarrow} \mathbb{R}$$

est elle aussi Riemann-intégrable sur $[a,b]$.

Démonstration. Par hypothèse, la quantité :

$$M_{|f|} := \sup_{x\in[a,b]} \big|f(x)\big| < \infty$$

est finie. Pour effectuer la composition $\varphi \circ f$, il suffit en fait de connaître φ seulement sur l'intervalle *compact :*

$$\big[-M_{|f|},\, M_{|f|}\big],$$

intervalle sur lequel, d'ailleurs, φ est — gratuitement grâce au Théorème 3.4 de Heine — uniformément continue :

$$\forall\,\varepsilon>0 \quad \exists\,\delta_\varepsilon>0 \quad \Big(\forall\,|y'|\leqslant M_{|f|} \;\; \forall\,|y''|\leqslant M_{|f|} \quad \big|y'-y''\big|\leqslant\delta_\varepsilon \implies \big|\varphi(y')-\varphi(y'')\big|\leqslant\varepsilon\Big).$$

Soit donc un tel $\varepsilon>0$ arbitrairement petit, et soit un $\delta_\varepsilon>0$ associé. Notons en passant qu'il est loisible de rapetisser $\delta_\varepsilon>0$ tout en conservant vraie cette implication $\Longrightarrow$ de continuité uniforme, et à la fin de la démonstration, nous aurons besoin d'avoir :

$$0<\delta_\varepsilon\leqslant\varepsilon,$$

ce que nous pouvons donc d'ores et déjà supposer.

Puisque f est Riemann-intégrable, en prenant le carré $(\delta_\varepsilon)^2$ de ce $\delta_\varepsilon>0$ comme quantité arbitrairement petite $\varepsilon^\sim>0$, il existe une subdivision :

$$\Delta = \Delta_{\varepsilon^\sim} = \Delta_{(\delta_\varepsilon)^2} = \big\{a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b\big\}$$

de l'intervalle $[a,b]$ assez fine pour que l'erreur entre les sommes de Darboux associées :

$$\Sigma^\Delta(f)-\Sigma_\Delta(f) \leqslant (\delta_\varepsilon)^2,$$

soit majorée par $(\delta_\varepsilon)^2$. Autrement dit, on adapte à l'avance une finesse extrême — puisque $\delta_\varepsilon^2 \ll \varepsilon$ — de la subdivision afin de compenser ce que va faire perdre la composition avec φ.

Comme à l'accoutumée, pour $k=1,\dots,n$, notons $I_k=[x_{k-1},x_k]$. Il s'agit maintenant de regarder et d'estimer la différence entre les sommes de Darboux de $\varphi\circ f$ associées à Δ :

$$\Sigma^\Delta(\varphi\circ f)-\Sigma_\Delta(\varphi\circ f) = \sum_{k=1}^n \big(x_k-x_{k-1}\big)\bigg(\sup_{x\in I_k}\varphi\circ f(x) - \inf_{x\in I_k}\varphi\circ f(x)\bigg).$$

À cet effet, décomposons l'ensemble des indices en *deux* classes *disjointes :*

$$\begin{aligned}\big\{1,2,\dots,n-1,n\big\} &= K\cup K',\\ \emptyset &= K\cap K',\end{aligned}$$

la première classe repérant tous les indices :

$$K := \Big\{ k \in \{1, \dots, n\} \colon \sup_{x \in I_k} f(x) - \inf_{x \in I_k} f(x) \leqslant \delta_\varepsilon \Big\},$$

pour lesquels on peut appliquer en composition la continuité uniforme de φ écrite ci-dessus, ce qui nous donne :

$$\sup_{x \in I_k} \varphi \circ f(x) - \inf_{x \in I_k} \varphi \circ f(x) \leqslant \varepsilon,$$

seulement donc lorsque $k \in K$.

Alors la première fraction concernée de la différence entre les sommes de Darboux supérieure et inférieure de $\varphi \circ f$:

$$\Sigma^\Delta(\varphi \circ f) - \Sigma_\Delta(\varphi \circ f) = \underbrace{\sum_{k \in K} \big(\text{même chose}\big)}_{\text{Erreur}(K)} + \underbrace{\sum_{k \in K'} \big(\text{même chose}\big)}_{\text{Erreur}(K')}$$

va être aisément majorée :

$$\begin{aligned}
\text{Erreur}(K) &= \sum_{k \in K} \big(x_k - x_{k-1}\big) \bigg(\underbrace{\sup_{I_k} \varphi \circ f - \inf_{I_k} \varphi \circ f}_{\leqslant \varepsilon} \bigg) \\
&\leqslant \varepsilon \sum_{k \in K} \big(x_k - x_{k-1}\big) \\
&\leqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - x_{k-1}\big) \\
&= \varepsilon \, (b - a),
\end{aligned}$$

par une quantité arbitrairement petite.

Ensuite et par ailleurs, lorsque $k \in K'$, à savoir par définition lorsque :

$$\delta_\varepsilon < \sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f,$$

en multipliant par $(x_k - x_{k-1})$ et en sommant seulement sur K', on déduit :

$$\begin{aligned}
\delta_\varepsilon \sum_{k \in K'} \big(x_k - x_{k-1}\big) &< \sum_{k \in K'} \big(x_k - x_{k-1}\big) \Big(\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f \Big) \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} \big(\text{même chose}\big) \\
\text{[Reconnaître]} \qquad &= \Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) \\
&\leqslant \big(\delta_\varepsilon\big)^2,
\end{aligned}$$

d'où après une division par δ_ε qui explique pourquoi on avait choisi $(\delta_\varepsilon)^2$ à l'avance :

$$\sum_{k \in K'} \big(x_k - x_{k-1}\big) \leqslant \delta_\varepsilon.$$

Grâce à cette inégalité, la *deuxième* fraction concernée de la différence entre les sommes de Darboux supérieure et inférieure de $\varphi \circ f$ va être majorée par :

$$\begin{aligned}\mathsf{Erreur}(K') &= \sum_{k \in K'} \big(x_k - x_{k-1}\big) \bigg(\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f\bigg) \\ &\leqslant 2\, M_{|f|} \sum_{k \in K'} \big(x_k - x_{k-1}\big) \\ &\leqslant 2\, M_{|f|}\, \delta_\varepsilon,\end{aligned}$$

car on a généralement :

$$\begin{aligned}\bigg|\sup_{I_k} f\bigg| &\leqslant \sup_{I_k} |f| \leqslant M_{|f|}, \\ \bigg|\inf_{I_k} f\bigg| &\leqslant \sup_{I_k} |f| \leqslant M_{|f|},\end{aligned}$$

pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ sans restriction.

Enfin, par simple addition des majorants des deux types d'erreurs :

$$\begin{aligned}\Sigma^\Delta(\varphi \circ f) - \Sigma_\Delta(\varphi \circ f) &= \mathsf{Erreur}(K) + \mathsf{Erreur}(K') \\ &\leqslant \varepsilon\,(b-a) + 2\, M_{|f|}\, \delta_\varepsilon \\ &\leqslant \varepsilon\, \big[(b-a) + 2\, M_{|f|}\big],\end{aligned}$$

quantité qui est manifestement arbitrairement petite puisque l'on a assuré à l'avance que $\delta_\varepsilon \leqslant \varepsilon$, ce qui conclut l'intégrabilité de $\varphi \circ f$. □

Plusieurs applications de ce Théorème 5.8 de composition tombent alors de l'arbre mathématique comme de délicieuses mirabelles bien mûres.

Corollaire 5.9. *Si $f \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions bornées Riemann-intégrables, alors leur produit :*

$$f\, g$$

est lui aussi Riemann-intégrable.

Démonstration. En effet, on sait déjà que $f + g$ et $f - g$ sont Riemann-intégrables, et alors le Théorème 5.8 appliqué avec $\varphi(y) := y^2$ assure que $(f + g)^2$ et $(f - g)^2$ sont aussi Riemann-intégrables, d'où la conclusion par l'identité algébrique élémentaire :

$$f\, g = \frac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4},$$

dont l'essence intime remonte aux mathématiques de la Préhistoire, temps béni de la cueillette. □

Corollaire 5.10. [Très souvent utile] *Si une fonction bornée $f \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable, alors la fonction valeur absolue :*

$$|f|$$

est elle aussi bornée Riemann-intégrable avec de plus :

$$\bigg|\int_a^b f(x)\, dx\bigg| \leqslant \int_a^b \big|f(x)\big|\, dx.$$

Démonstration. En effet, le même Théorème 5.8 s'applique instantanément à $\varphi(y) := |y|$, donc $|f|$ est Riemann-intégrable.

Ensuite, les deux inégalités triviales :

$$-|f| \leqslant f \leqslant |f|$$

restent vraies après intégration grâce à la propriété **(iii)** du Théorème 5.1 :

$$-\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int f(x)\,dx,$$

ce qui conclut. □

Corollaire 5.11. [Très souvent utile] *Soit une fonction bornée Riemann-intégrable :*

$$f\colon \quad [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Alors pour tout intervalle compact :

$$[c,d] \Subset [a,b],$$

on a la majoration :

$$\left|\int_c^d f(x)\,dx\right| \leqslant \max_{[c,d]} |f| \cdot \underbrace{(d-c)}_{\text{longueur de l'intervalle}}.$$

□

Dans la lignée de ces considérations élémentaires, il est parfois avisé de localiser la partie positive $\geqslant 0$ d'une fonction ainsi que sa partie négative $\leqslant 0$.

Définition 5.12. Si $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction définie sur un espace topologique X, soient :

$$f^+(x) := +\max\big(0,\ f(x)\big) \qquad {\scriptstyle (x\in X)},$$
$$f^-(x) := -\min\big(f(x), 0\big) \qquad {\scriptstyle (x\in X)},$$

deux fonctions à valeurs $\geqslant 0$ satisfaisant (exercice) :

$$f = f^+ - f^-.$$

Intuitivement, la '*partie positive*' de f est dans f^+, tandis que sa '*partie négative*' est dans $-f^-$.

Manifestement aussi :

$$|f| = f^+ + f^-.$$

Corollaire 5.13. *Si une fonction bornée $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable, alors ses parties positive et négative :*

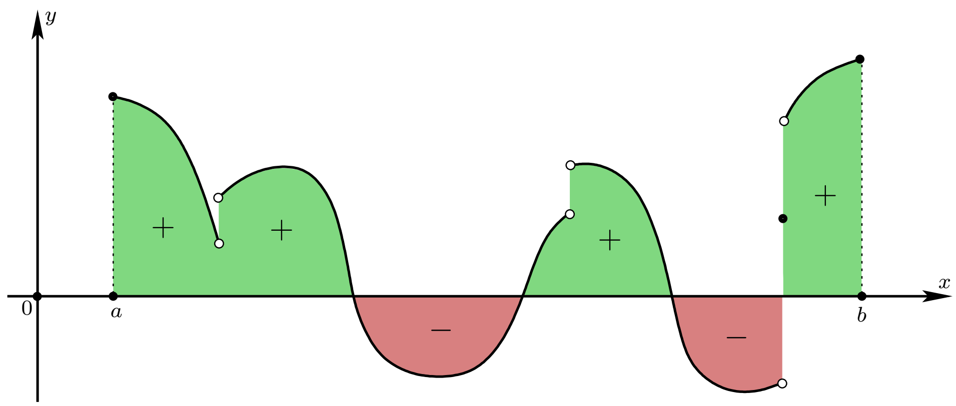
$$f^+ = \frac{|f|+f}{2} \qquad \text{et} \qquad -f^- = \frac{-|f|+f}{2}$$

sont elles aussi Riemann-intégrables, avec :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f^+(x)\,dx - \int_a^b f^-(x)\,dx,$$
$$\int_a^b \big|f(x)\big|\,dx = \int_a^b f^+(x)\,dx + \int_a^b f^-(x)\,dx.$$

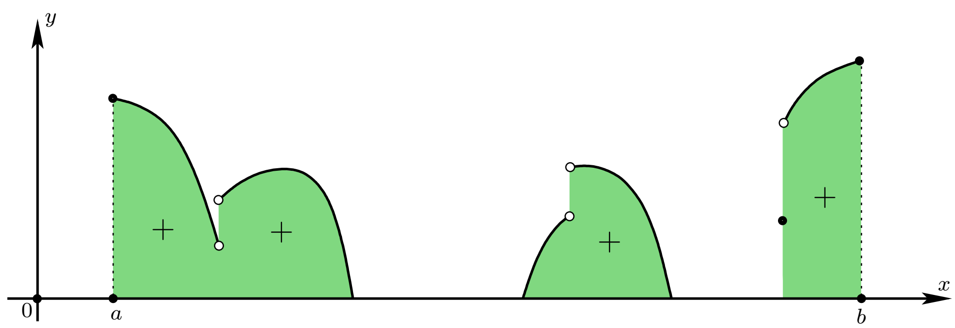
□

Géométriquement, le graphe d'une fonction réelle qui prend des valeurs positives et négatives délimite une région bidimensionnelle :



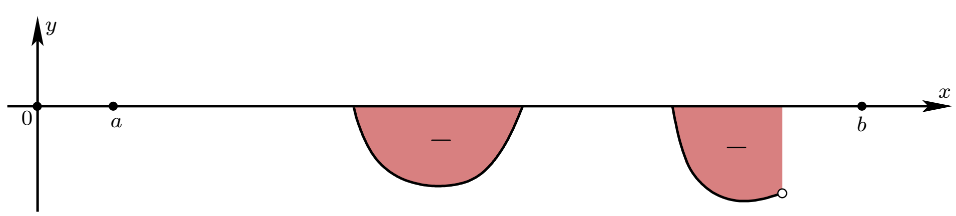
découpée par l'axe des x en une première région :

$$\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon\ 0\leqslant y\leqslant f^+(x)\big\}$$



et une deuxième région :

$$\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon\ -\,f^-(x)\leqslant y\leqslant 0\big\},$$



sachant que l'intégrale de f est la somme des aires orientés de ces deux régions :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx=\mathsf{Aire}\Big(\big\{0\leqslant y\leqslant f^+(x)\big\}\Big)-\mathsf{Aire}\Big(\big\{-\,f^-(x)\leqslant y\leqslant 0\big\}\Big);}$$

ici, la notion d'aire bidimensionnelle pourrait être précisée mathématiquement, mais nous nous en dispenserons, puisque la théorie de Lebesgue se chargera de le faire dans un cadre général et englobant.

Principe de proximité entre sommation discrète et intégration continue. *Intuitivement et philosophiquement, la version approchée, finie, discrète d'une intégrale étant une grande somme — par exemple de Darboux —, on peut s'imaginer que le signe de sommation :*

$$\sum$$

se métamorphose progressivement en le signe d'intégration :

$$\int,$$

ce qu'on résumera symboliquement par :

$$\boxed{\sum \approx \int}$$

En particulier, l'analogue de l'intégrale d'un produit :

$$\int fg$$

est la somme de produits de nombres :

$$\sum \lambda_i \mu_i.$$

Mais puisqu'il est déjà impossible d'exprimer une somme à deux termes :

$$\lambda_1 \, \mu_1 + \lambda_2 \, \mu_2$$

algébriquement en fonction de $\lambda_1 + \lambda_2$ et de $\mu_1 + \mu_2$, il n'y a aucune raison pour que l'intégrale $\int fg$ d'un produit de deux fonctions intégrables s'exprime algébriquement en fonction de $\int f$ et de $\int g$.

Toutefois, on sait qu'en *élevant au carré*, une identité remarquable élémentaire (exercice) :

$$\big(\lambda_1^2 + \lambda_2^2\big)\,\big(\mu_1^2 + \mu_2^2\big) - \big(\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2\big)^2 = \underbrace{\big(\lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2\big)^2}_{\text{toujours} \geqslant 0}$$

dont le second membre est positif, montre qu'on a toujours l'inégalité :

$$\big(\lambda_1^2 + \lambda_2^2\big)\,\big(\mu_1^2 + \mu_2^2\big) \;\geqslant\; \big(\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2\big)^2.$$

Plus généralement, avec $\lambda_1, \dots, \lambda_{\mathrm{N}} \in \mathbb{R}$ et $\mu_1, \dots, \mu_{\mathrm{N}} \in \mathbb{R}$, l'*identité de Lagrange* (laissée en exercice) :

$$\Big(\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_{\mathrm{N}}^2\Big)\,\Big(\mu_1^2 + \cdots + \mu_{\mathrm{N}}^2\Big) - \Big(\lambda_1\mu_1 + \cdots + \lambda_{\mathrm{N}}\mu_{\mathrm{N}}\Big)^2 = \underbrace{\sum_{1 \leqslant j \leqslant k \leqslant \mathrm{N}} \big(\lambda_j\mu_k - \mu_j\lambda_k\big)^2}_{\text{quantité toujours positive}}$$

conduit à l'*inégalité de Cauchy-Schwarz discrète :*

$$\Big(\lambda_1\mu_1 + \cdots + \lambda_{\mathrm{N}}\mu_{\mathrm{N}}\Big)^2 \;\leqslant\; \Big(\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_{\mathrm{N}}^2\Big)\,\Big(\mu_1^2 + \cdots + \mu_{\mathrm{N}}^2\Big).$$

À la limite lorsqu'il y a une infinité de termes, on aboutit intuitivement au :

Théorème 5.14. [Inégalité de Cauchy-Schwarz intégrale] *Si f et g sont deux fonctions réelles bornées Riemann-intégrables sur $[a,b]$, alors :*

$$\bigg|\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\bigg| \leqslant \bigg(\int_a^b f(x)^2\,dx\bigg)^{\frac{1}{2}} \bigg(\int_a^b g(x)^2\,dx\bigg)^{\frac{1}{2}}.$$

Démonstration. L'Exercice 10 propose de déduire ce théorème d'un passage à la limite dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz discrète, mais il existe une voie plus économique.

Grâce aux résultats qui précèdent, nous savons maintenant que les quatre fonctions :

$$f^2, \qquad g^2, \qquad f\,g, \qquad \big(t\,f+g\big)^2,$$

où $t \in \mathbb{R}$ est quelconque, sont Riemann-intégrables, et nous pouvons développer la quantité intégrale positive :

$$\begin{aligned}
0 \;&\leqslant\; \int_a^b \big(t\,f(x)+g(x)\big)^2\,dx \\
&=\; t^2 \underbrace{\int_a^b f(x)^2\,dx}_{=:\,\alpha\,\geqslant\,0} + t\,\underbrace{2\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}_{=:\,\beta} + \underbrace{\int_a^b g(x)^2\,dx,}_{=:\,\gamma\,\geqslant\,0}
\end{aligned}$$

ce qui conduit à un trinôme du second degré en t :

$$\alpha\,t^2+\beta\,t+\gamma,$$

lequel, pour être toujours $\geqslant 0$, doit avoir son discriminant :

$$\beta^2 - 4\,\alpha\,\gamma \;\leqslant\; 0$$

négatif ou nul (exercice), inégalité qui équivaut à celle de Cauchy-Schwarz. □

6. Intégrale de Riemann et primitives

Définition 6.1. Une fonction $F\colon E \longrightarrow \mathbb{C}$ définie sur un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est dite 1-*lipschitzienne* s'il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que :

$$\forall\,x' \in E \quad \forall\,x'' \in E \qquad \big|F(x') - F(x'')\big| \;\leqslant\; C\,\big|x'-x''\big|,$$

avec exposant 1 dans $|x'-x''|^1$.

En particulier, les fonctions 1-lipschitziennes sont continues, et même uniformément continues (exercice mental) !

Proposition 6.2. *Étant donné une fonction bornée Riemann-intégrable $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, donc Riemann-intégrable sur tout intervalle $[a,x]$ avec $a \leqslant x \leqslant b$, la fonction de x définie par :*

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

est continue et même 1-lipschitzienne sur $[a,b]$:

$$\big|F(x') - F(x'')\big| \;\leqslant\; M_{|f|}\cdot\big|x'-x''\big|,$$

avec la constante $M_{|f|} = \sup\limits_{[a,b]} |f|$.

Démonstration. En effet, partant donc de deux points quelconques :

$$x' \in [a,b] \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad x'' \in [a,b],$$

on majore aisément la différence :

$$\begin{aligned}\big|F(x') - F(x'')\big| &= \bigg|\int_a^{x'} f(t)\,dt - \int_a^{x''} f(t)\,dt\bigg| \\ &= \bigg|\int_{x''}^{x'} f(t)\,dt\bigg| \\ &\leqslant \big|x' - x''\big| \cdot \max_{[a,b]} |f|,\end{aligned}$$

ce qui prouve la 1-lipschitzianité de f. □

Théorème 6.3. *Soit une fonction continue donc bornée Riemann-intégrable :*

$$f\colon \quad [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Si, en un point $x_0 \in \,]a,b[$, la limite $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existe, à savoir si :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),$$

alors la fonction définie pour $a \leqslant x \leqslant b$ par :

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt,$$

est dérivable en x_0 avec :

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Démonstration. Il s'agit de déterminer si le quotient différentiel :

$$\begin{aligned}\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} &= \frac{1}{h}\bigg(\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt\bigg) \\ &= \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt\end{aligned}$$

admet une limite lorsque $h \xrightarrow{\neq} 0$.

Or par hypothèse, f est continue en x_0 :

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta_\varepsilon > 0 \quad \Big(\forall\,t \quad |t - x_0| \leqslant \delta_\varepsilon \implies |f(t) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon\Big).$$

Alors avec ce même $\delta_\varepsilon > 0$, puisque l'objectif est de montrer que $F'(x_0) = f(x_0)$, on estime la différence entre ce quotient différentiel, écrit pour un $h \neq 0$ satisfaisant $|h| \leqslant \delta_\varepsilon$, et cette valeur attendue :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-f(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt-\frac{h}{h}\,f(x_0)\right| \\
&= \left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} \big(f(t)-f(x_0)\big)\,dt\right| \\
&\leqslant \frac{1}{\underline{|h|}}\,\underbrace{\max_{|t-x_0|\leqslant|h|}\big|f(t)-f(x_0)\big|}_{\leqslant\,\varepsilon}\cdot\underline{|h|} \\
&\leqslant \varepsilon,
\end{aligned}$$

les deux quantités infimes $|h|\big/|h|=1$ disparaissant agréablement, ce qui conclut. □

Définition 6.4. Étant donné une fonction $f\colon [a,b]\longrightarrow\mathbb{C}$, on appelle *primitive* de f une fonction $F\colon [a,b]\longrightarrow\mathbb{C}$ dérivable en tout point dont la dérivée :

$$F'=f$$

redonne la fonction.

Assertion 6.5. *Deux primitives d'une fonction sur un intervalle $[a,b]$ diffèrent toujours seulement d'une constante, à savoir :*

$$F_1'=f \qquad\text{et}\qquad F_2'=f$$

implique :

$$\exists\,C\,\in\,\mathbb{C}\quad\forall\,x\in[a,b]\quad F_2(x)=F_1(x)+C.$$

Démonstration. En effet, une soustraction immédiate donne :

$$0=\big(F_1-F_2\big)',$$

et donc l'énoncé revient à dire qu'une fonction dérivable dont la dérivée est identiquement nulle est en fait une fonction constante, ce qui est connu. □

Corollaire 6.6. *Si $f\in\mathscr{C}^0\big([a,b],\,\mathbb{C}\big)$ est continue sur $[a,b]$, alors la fonction :*

$$F\colon\quad \begin{aligned} [a,b]\;&\longrightarrow\;\mathbb{C} \\ x\;&\longmapsto\;\int_a^x f(t)\,dt \end{aligned}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$, et c'est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Démonstration. On vient de voir que F est dérivable en tout point, de dérivée égale à f. Évidemment :

$$F(a)=\int_a^a f(x)\,dx=0.$$

Comme les primitives sont définies à une constante près, F est bien l'unique primitive en question. □

Théorème 6.7. [Théorème fondamental du calcul différentiel] *Soit $F\colon [a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment compact $[a,b]\Subset\mathbb{R}$ qui est dérivable en tout point. Si sa dérivée $f:=F'$ est Riemann-intégrable, alors :*

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a).$$

Démonstration. Soit une subdivision quelconque de $[a, b]$:

$$\Delta = \big\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\big\}.$$

Considérons la formule téléscopique :

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} \big[F(x_k) - F(x_{k-1})\big].$$

Comme F est continue et dérivable sur chaque intervalle $[x_{k-1}, x_k]$ de dérivée $f := F'$, le Théorème des valeurs intermédiaires assure, pour tout $k = 1, \dots, n$, qu'il existe un point :

$$c_k \in [x_{k-1}, x_k]$$

tel que :

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = \big(x_k - x_{k-1}\big)\, f(c_k).$$

Instantanément, il en découle que :

$$\big(x_k - x_{k-1}\big) \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f \;\leqslant\; F(x_k) - F(x_{k-1}) \;\leqslant\; \big(x_k - x_{k-1}\big) \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f.$$

En sommant $\sum_{k=1}^{n}(\cdot)$ ces deux inégalités, on obtient :

$$\Sigma_\Delta(f) \;\leqslant\; F(b) - F(a) \;\leqslant\; \Sigma^\Delta(f).$$

Mais comme f est Riemann-intégrable :

$$\sup_\Delta \Sigma_\Delta(f) = \inf_\Delta \Sigma^\Delta(f) = \int_a^b f(x)\, dx,$$

ce qui force :

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

et conclut. □

Théorème 6.8. [Intégration par parties] *Soient $f, g\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur un intervalle fermé borné $[a, b] \subset \mathbb{R}$ qui sont dérivables sur $[a, b]$ et telles que f' et g' sont Riemann-intégrables sur $[a, b]$. Alors on a la formule :*

$$\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx \;=\; f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx.$$

Démonstration. La fonction produit $f\, g$ est continue sur $[a, b]$, et grâce à la formule de Leibniz :

$$(f g)' = f'\, g + f\, g'.$$

Comme les quatre fonctions f, g, f', g' sont Riemann-intégrables, il en va de même pour $f\, g'$, $f'\, g$, $(f\, g)'$. Alors le Théorème qui précède donne :

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx + \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx \;&=\; \int_a^b (f\, g)'(x)\, dx \\ &=\; (f\, g)(b) - (f\, g)(a),\end{aligned}$$

ce qui est la formule annoncée. □

7. Changement de variable dans les intégrales

Soit comme précédemment un intervalle fermé borné :

$$[a, b] \Subset \mathbb{R},$$

et soit une application continue :

$$\varphi\colon \quad [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Un énoncé de Topologie Générale censé être connu dans ce cours, à savoir le :

Théorème 7.1. *Soit une application* continue :

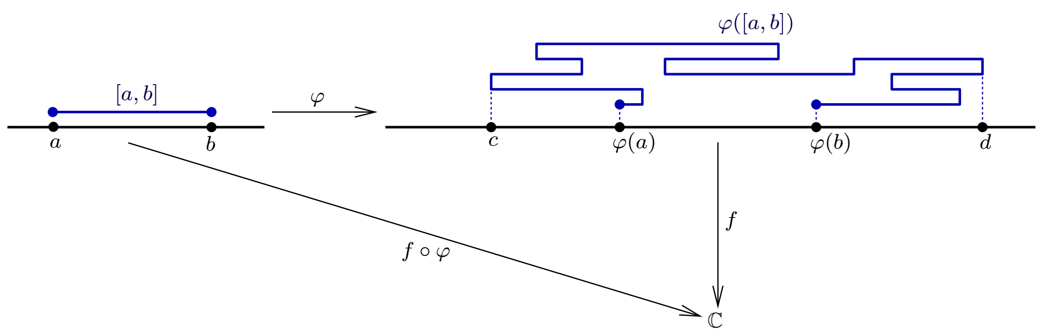
$$F\colon \quad X \longrightarrow Y$$

entre deux espaces topologiques X et Y. Si $K \Subset X$ est un sous-ensemble compact et connexe*, alors son image $F(K)$ est aussi compacte et connexe.* □

assure alors que l'image par φ de l'intervalle $[a, b]$:

$$\varphi\big([a, b]\big) = [c, d],$$

est aussi un certain intervalle fermé borné $[c, d] \Subset \mathbb{R}$.

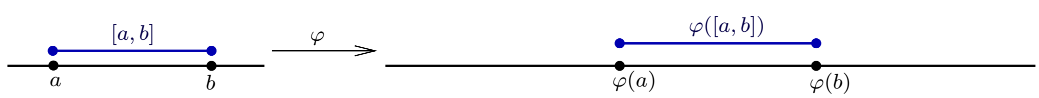


En fait, cet intervalle image contient :

$$[c, d] \supset \big[\varphi(a),\, \varphi(b)\big],$$

sachant qu'il faut plutôt écrire $[\varphi(b), \varphi(a)]$ lorsque $\varphi(b) < \varphi(a)$, mais, et c'est important de le faire remarquer géométriquement au moyen d'une figure intuitive éclairante, *une telle inclusion peut fort bien être stricte*.

Toutefois, dans les applications, il se trouve que la plupart du temps, φ est monotone. Dans ce cas, l'intuition simplette est correcte.



Théorème 7.2. **[Changement de variable dans les intégrales simples]** *Soit une fonction de classe $\mathscr{C}^1$:*

$$\varphi\colon \quad [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},$$

définie sur un intervalle compact $[a, b] \Subset \mathbb{R}$, d'où :

$$\varphi\big([a, b]\big) =: [c, d] \supset \big[\varphi(a),\, \varphi(b)\big].$$

Alors pour toute fonction continue :

$$f\colon \quad [c, d] \longrightarrow \mathbb{C},$$

on a :

$$\boxed{\int_a^b f\big(\varphi(x)\big)\,\varphi'(x)\,dx \;=\; \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt.}$$

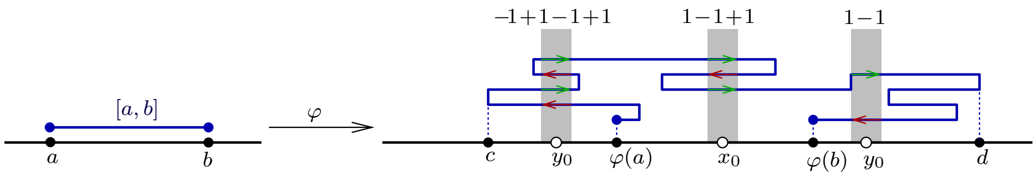
Rappelons que dans les vrais calculs, la recette classique, c'est d'écrire :

$$t = \varphi(x),$$

de différentier :

$$dt = \varphi'(x)\,dx,$$

et de remplacer.



Question. *Mais pourquoi l'intégrale à droite* $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}$ *porte-t-elle seulement sur l'intervalle* $[\varphi(a), \varphi(b)]$*, et non pas sur tout l'intervalle* $[c,d]$ *?*

Parce que au-dessus d'un point quelconque :

$$y_0 \in [c,d]\big\backslash\big[\varphi(a), \varphi(b)\big],$$

la somme géométrique des contributions s'annule toujours, tandis qu'au-dessus d'un point :

$$x_0 \in \big[\varphi(a), \varphi(b)\big],$$

elle vaut toujours $+1$, ce qui est illustré par le diagramme. Toutefois, cette vision géométrique sera totalement absente des arguments qui suivent.

Démonstration. Observons pour commencer que la fonction :

$$f \circ \varphi \cdot \varphi'$$

est continue sur $[a,b]$, donc bornée Riemann-intégrable.

Introduisons alors deux fonctions-intégrales :

$$F(u) := \int_{\varphi(a)}^{u} f(t)\,dt,$$

$$G(v) := \int_a^v f\big(\varphi(x)\big)\cdot\varphi'(x)\,dx.$$

Grâce au Corollaire 6.6 d'après lequel dériver une intégrale redonne la fonction intégrée, on a :

$$F' = f,$$

$$G' = f \circ \varphi \cdot \varphi'.$$

Or lorsqu'on dérive par ailleurs en appliquant une formule connue la fonction composée :

$$\begin{aligned}\big(F\circ\varphi\big)' &= F'\circ\varphi\cdot\varphi' \\ &= f\circ\varphi\cdot\varphi' \\ &= G',\end{aligned}$$

on retrouve la dérivée de la deuxième fonction, et comme ces deux fonctions qui ont donc partout la même dérivée s'annulent ensemble au point a :

$$F \circ \varphi(a) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(a)} = 0,$$
$$G(a) = \int_a^a = 0,$$

on obtient leur égalité partout :

$$F \circ \varphi(x) \equiv G(x),$$

ce qui, au point final $x = b$:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\, dt \;=\; F \circ \varphi(b) \;=\; G(b) \;=\; \int_a^b f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x)\, dx$$

apporte effectivement sur un plateau doré la formule de changement de variable annoncée, et ce, sans aucune intuition géométrique scintillante, hélas ! □

Corollaire 7.3. *Soit $c \in \mathbb{R}$. Pour toute fonction continue $f \colon [a+c,\, b+c] \longrightarrow \mathbb{C}$, on a :*

$$\int_a^b f(x+c)\, dx \;=\; \int_{a+c}^{b+c} f(t)\, dt. \qquad \square$$

Corollaire 7.4. *Soit $c \in \mathbb{R}^*$ non nul. Pour toute fonction continue $f \colon [ac, bc] \longrightarrow \mathbb{C}$, on a :*

$$\int_a^b f(cx)\, dx \;=\; \frac{1}{c} \int_{a\,c}^{b\,c} f(t)\, dt. \qquad \square$$

Dans ce deuxième corollaire extrêmement élémentaire, il faut bien prendre garde néanmoins que lorsque $c < 0$ est négatif, d'où :

$$ac \;>\; bc,$$

un redressement des bornes d'intégration $\int_{ac}^{bc} = -\int_{bc}^{ac}$ est en général nécessaire lorsqu'on cherche à réaliser des calculs concrets.

8. Approximation des fonctions Riemann-intégrables

Théorème 8.1. *Pour toute fonction bornée Riemann-intégrable définie sur un intervalle compact de* $\mathbb{R}$:

$$f \colon \quad [a,b] \longrightarrow \mathbb{C},$$

il existe une suite de fonctions continues :

$$\big(f_n\big)_{n \geqslant 1} \in \mathscr{C}^0\big([a,b], \mathbb{C}\big)$$

avec :

$$\sup_{[a,b]} \big|f_n\big| \;\leqslant\; \sup_{[a,b]} \big|f\big| \qquad\qquad (n \in \mathbb{N}),$$

qui approxime f en moyenne au sens intégral où :

$$0 \;=\; \lim_{n \to \infty} \int_a^b \big|f_n(x) - f(x)\big|\, dx.$$

De manière équivalente, on peut énoncer et démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction continue $f_\varepsilon \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que :

$$\int_a^b \big|f_\varepsilon(x) - f(x)\big|\, dx \,\leqslant\, \varepsilon.$$

Démonstration. En traitant séparément la partie réelle et la partie imaginaire de f, on peut bien entendu supposer que f est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Par hypothèse de Riemann-intégrabilité, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision de l'intervalle $[a,b]$:

$$\Delta = \Delta_\varepsilon = \big\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{\nu-1} < x_\nu = b\big\}$$

telle que les sommes de Darboux inférieure et supérieure associées satisfassent :

$$\big(0 \leqslant\big) \qquad \Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) \,\leqslant\, \varepsilon.$$

L'idée de la démonstration est alors simple et naturelle.

Étape 1 : Approximer dans un premier temps f par une fonction en escalier f^{esc}.

Étape 2 : « *Écorner les gratte-ciel et installer des toboggans vertigineux* » (regarder à l'avance les figures qui suivent), à savoir aplatir les angles de cette fonction en escalier f^{esc} pour la rendre continue en modifiant très peu les intégrales correspondantes.

Comme nous le savons déjà, deux fonctions en escalier sont naturellement associées aux deux sommes de Darboux $\Sigma_\Delta(f)$ et $\Sigma^\Delta(f)$, mais nous n'aurons besoin que d'une seule, par exemple la *fonction en escalier inférieure :*

$$f_\Delta^{\mathsf{esc}},$$

qui est définie, rappelons-le, par :

$$f_\Delta^{\mathsf{esc}}(x) = \begin{cases} \inf\limits_{[x_{\kappa-1}, x_\kappa]} f & \text{lorsque } \ x \in \,]x_{\kappa-1},\, x_\kappa[\ \text{ pour un } \ \kappa = 1, \dots, \nu; \\ f(x) & \text{lorsque } \ x = a, x_1, \dots, x_{\nu-1}, b. \end{cases}$$

Par construction :

$$f_\Delta^{\mathsf{esc}} \,\leqslant\, f,$$

d'où par intégration :

$$\Sigma_\Delta(f) = \int_a^b f_\Delta^{\mathsf{esc}}(x)\, dx \,\leqslant\, \underbrace{\int_a^b f(x)\, dx}_{\text{en fait aussi} \leqslant \Sigma^\Delta(f)},$$

et donc puisque $\Sigma^\Delta - \Sigma_\Delta \leqslant \varepsilon$, nous obtenons que :

$$0 \,\leqslant\, \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b f_\Delta^{\mathsf{esc}}(x)\, dx \,\leqslant\, \varepsilon,$$

et mieux encore, puisque l'on vient de voir que $f_\Delta^{\mathsf{esc}} \leqslant f$, c'est pour la *valeur absolue* de la différence qu'on a la majoration :

$$\int_a^b \big|f(x) - f_\Delta^{\mathsf{esc}}(x)\big|\, dx \,\leqslant\, \varepsilon.$$

Maintenant, puisque nous désirons une suite de fonctions approximantes continues $(f_n)_{n\geqslant 1}$, prenons :

$$\varepsilon := \frac{1}{2\,n},$$

et notons pour abréger :

$$f_\Delta^{\mathsf{esc}} = f_{\Delta_\varepsilon}^{\mathsf{esc}} = f_{\Delta_{\frac{1}{2n}}}^{\mathsf{esc}} =: g_n^{\mathsf{esc}}.$$

Avec cette suite de fonctions en escalier $(g_n^{\mathsf{esc}})_{n\geqslant 1}$ satisfaisant :

$$\int_a^b \big|f(x) - g_n^{\mathsf{esc}}(x)\big|\,dx \leqslant \frac{1}{2\,n},$$

nous avons donc réalisé l'Étape 1, mais ces fonctions g_n^{esc} ne sont pas continues !

Heureusement, l'Étape 2 est réalisée par un résultat fondamental et naturel.

Théorème 8.2. [Approximation intégrale des fonctions en escalier par des fonctions continues] *Sur un intervalle compact* $[a,b] \Subset \mathbb{R}$*, étant donné une fonction en escalier quelconque fixée :*

$$g^{\mathsf{esc}}\colon \quad [a,b] \longrightarrow \mathbb{C},$$

pour tout $\varepsilon > 0$*, il existe une fonction* continue :

$$g_\varepsilon \in \mathscr{C}^0\big([a,b],\mathbb{C}\big)$$

telle que :

$$\int_a^b \big|g^{\mathsf{esc}}(x) - g_\varepsilon(x)\big|\,dx \leqslant \varepsilon.$$

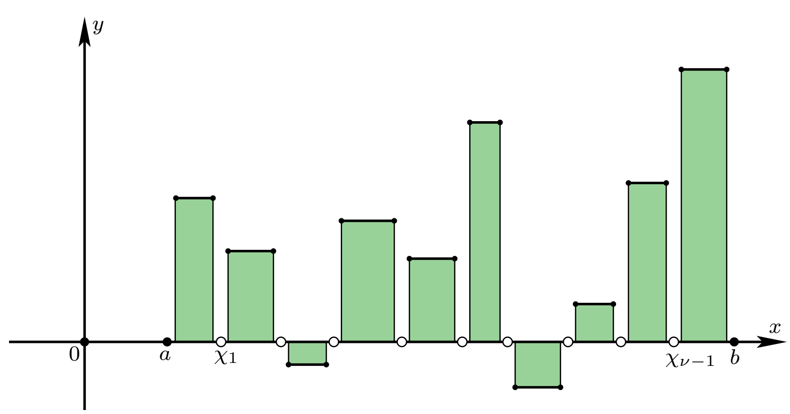
Démonstration. Comme dans la Définition 4.6 et dans le Théorème 4.7, à une telle fonction en escalier g^{esc} est attachée une certaine subdivision :

$$\square = \big\{a = \chi_0 < \chi_1 < \chi_2 < \cdots < \chi_{\nu-2} < \chi_{\nu-1} < \chi_\nu = b\big\}$$

de l'intervalle $[a,b]$ sur les intervalles ouverts $]\chi_{\kappa-1},\, \chi_\kappa[$ de laquelle g^{esc} est constante :

$$g^{\mathsf{esc}}(x) = c_\kappa \qquad\qquad \forall\, \chi_{\kappa-1} < x < \chi_\kappa \qquad\qquad {\scriptstyle (1\leqslant\kappa\leqslant\nu)},$$

avec $c_\kappa \in \mathbb{C}$.



Or rappelons que dans la démonstration du Théorème 4.7, afin d'établir que g^{esc} est Riemann-intégrable d'intégrale égale à :

$$\int_a^b g^{\mathsf{esc}}(x)\,dx \;=\; \sum_{\kappa=1}^{\nu} \big(\chi_\kappa - \chi_{\kappa-1}\big)\cdot c_\kappa,$$

nous avons enrichi la subdivision $\square$ de g^{esc} en ajoutant de part et d'autre de chaque point χ_κ les deux points :

$$\chi_\kappa - \delta \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \chi_\kappa + \delta$$

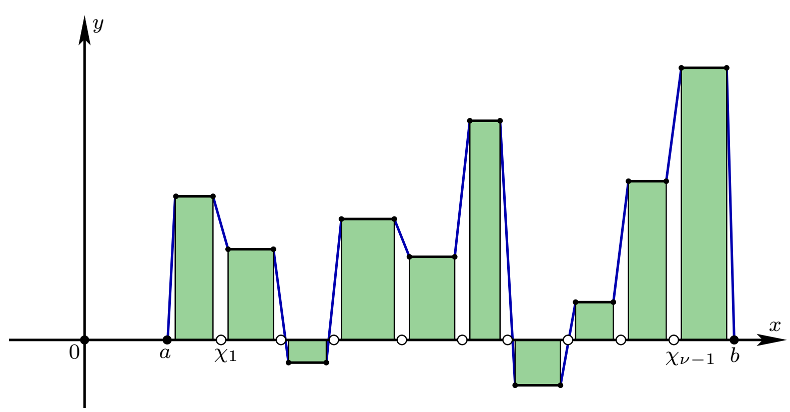
situés à une distance constante infime $\delta > 0$, ce qui nous donnait la subdivision :

$$\Delta := \Big\{a,\ a+\delta,\ \chi_1-\delta,\ \chi_1,\ \chi_1+\delta,\ \ldots\ldots,\ \chi_{\nu-1}-\delta,\ \chi_{\nu-1},\ \chi_{\nu-1}+\delta,\ b-\delta,\ b\Big\}.$$

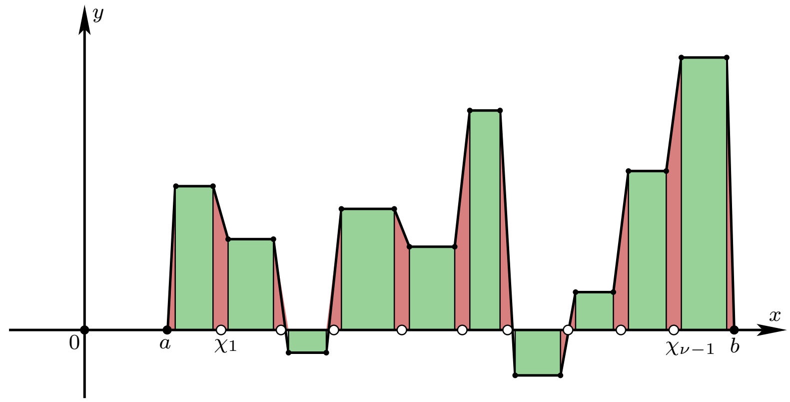
Sur les figures destinées à présenter les idées, on voit qu'il s'agit tout d'abord de restreindre la fonction en escalier g^{esc} à être définie seulement sur les ν intervalles fermés :

$$\big[a+\delta,\ \chi_1-\delta\big]\bigcup\big[\chi_1+\delta,\ \chi_2-\delta\big]\bigcup\cdots\cdots\bigcup\big[\chi_{\nu-1}+\delta,\ b-\delta\big],$$

ce qui fait apparaître des « *fossés très étroits entre les gratte-ciel* » de longueur $2\,\delta$, voire de longueur seulement δ aux extrémités a et b.



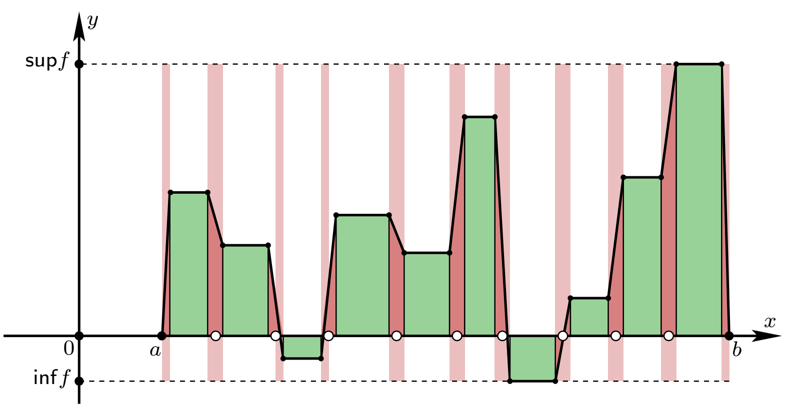
Mais puisque notre but est de trouver une fonction continue, décidons tout simplement de combler les fossés au moyen de fonctions affines qui joignent les coins supérieurs de nos gratte-ciel, comme de dangereux toboggans plongeant presque verticalement dans le vide, fils d'araignée virtuels dont seuls des funambules ne s'effrairaient pas. Nous obtenons ainsi le graphe d'une fonction *continue*, certes parfois très descendante et très ascendante — mais *continue*, Monsieur l'Inspecteur !



Alors la somme des erreurs commises, visible sous forme de la somme des aires d'un certain nombre de trapèzes très effilés va rester bornée par :

$$\underbrace{(\nu+1)}_{\substack{\text{nombre}\\ \text{de rues}}}\times\underbrace{2\,\delta}_{\substack{\text{largeur maximale}\\ \text{des rues}}}\times\underbrace{\Big(\sup_{[a,b]} g^{\mathsf{esc}}-\inf_{[a,b]} g^{\mathsf{esc}}\Big)}_{\substack{\text{hauteur maximale}\\ \text{jusqu'aux souterrains}}},$$

puisque les trapèzes en question sont toujours contenus dans des rectangles tout aussi allongés verticalement.



Mais comme $\delta > 0$ peut être choisi arbitrairement petit, cette somme d'erreurs peut devenir inférieure ou égale à un certain $\varepsilon > 0$ quelconque donné à l'avance, ce qui termine essentiellement la démonstration.

Toutefois, certes, ces fantômes drapés nous parlent le langage fort compréhensible des images, l'expression des fonctions affines qui interpolent entre les gratte-ciel importe relativement peu, mais détaillons quand même les arguments dans un langage analytique, afin de terminer rigoureusement la démonstration, puisque, en tant que mathématiciens, nous ne pouvons nous contenter de converser seulement avec les esprits, voire avec l'Esprit de Géométrie.

Fixons donc $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, choisissons comme suggéré :

$$0 < \delta \leqslant \frac{\varepsilon}{2\,\nu\,(\sup g^{\mathsf{esc}} - \inf g^{\mathsf{esc}})};$$

avec ν au lieu de $(\nu+1)$ au dénominateur (nous verrons pourquoi), et notons que sans perte de généralité, nous pouvons supposer à l'avance que :

$$\sup_{[a,b]} g^{\mathsf{esc}} > \inf_{[a,b]} g^{\mathsf{esc}},$$

car si au contraire ce '$\sup$' coïncidait avec cet '$\inf$', la fonction g^{esc} serait *constante*, donc continue, auquel cas le théorème serait trivial.

Comme l'ont montré nos diagrammes, la fonction continue recherchée g_ε sera alors égale à g^{esc} sur chacun des intervalles :

$$\big[\chi_{\kappa-1}+\delta,\ \chi_\kappa-\delta\big] \qquad {\scriptstyle (1\leqslant\kappa\leqslant\nu)},$$

et elle *interpolera de manière affine* cette fonction entre deux de ces intervalles consécutifs de longueur $2\,\delta$:

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} c_\kappa & \forall\, x\, \in\, \big[\chi_{\kappa-1}+\delta,\ \chi_\kappa-\delta\big] \qquad {\scriptstyle (1\leqslant\kappa\leqslant\nu)}, \\ c_\kappa + \dfrac{c_{\kappa+1}-c_\kappa}{2\,\delta}\,\big(x-\chi_\kappa+\delta\big) & \forall\, x\, \in\, \big[\chi_\kappa-\delta,\ \chi_\kappa+\delta\big] \qquad {\scriptstyle (1\leqslant\kappa\leqslant\nu-1)}, \end{cases}$$

tandis que l'interpolation affine sur les deux intervalles extrémités de longueur seulement δ :

$$[a,\ a+\delta] \qquad \text{et} \qquad [b-\delta,\ b]$$

sera pour simplifier constante :

$$g_\varepsilon(x) = c_1 \quad \forall\, x\in[a,\ a+\delta] \qquad \text{et} \qquad g_\varepsilon(x) = c_\nu \quad \forall\, x\in[b-\delta,\ b].$$

Lemme 8.3. *Cette fonction continue g_ε interpolante de g^{esc} reste encadrée par :*

$$\inf_{[a,b]} g^{\mathsf{esc}} \leqslant \min(c_1,\dots,c_\nu) \leqslant g_\varepsilon \leqslant \max(c_1,\dots,c_\nu) \leqslant \sup_{[a,b]} g^{\mathsf{esc}}.$$

Démonstration. En effet, pour tout κ avec $1\leqslant\kappa\leqslant\nu-1$, deux cas sont à distinguer :

$$c_{\kappa+1}\geqslant c_\kappa \qquad \text{ou} \qquad c_{\kappa+1}\leqslant c_\kappa.$$

Dans le premier cas :

$$\Big(\chi_\kappa-\delta\leqslant x\leqslant\chi_\kappa+\delta\Big) \implies \bigg(\underbrace{c_\kappa+0}_{=\,c_\kappa} \leqslant \underbrace{c_\kappa+\frac{c_{\kappa+1}-c_\kappa}{2\,\delta}\,\big(x-\chi_\kappa+\delta\big)}_{g_\varepsilon(x)} \leqslant \underbrace{c_\kappa+\frac{c_{\kappa+1}-c_\kappa}{2\,\delta}\,2\,\delta}_{=\,c_{\kappa+1}}\bigg),$$

tandis que dans le second cas, à cause du signe négatif de $c_{\kappa+1}-c_\kappa\leqslant 0$, les inégalités après l'implication changent simplement de sens :

$$\Big(\chi_\kappa-\delta\leqslant x\leqslant\chi_\kappa+\delta\Big) \implies \bigg(\underbrace{c_\kappa+0}_{=\,c_\kappa} \geqslant \underbrace{c_\kappa+\frac{c_{\kappa+1}-c_\kappa}{2\,\delta}\,\big(x-\chi_\kappa+\delta\big)}_{g_\varepsilon(x)} \geqslant \underbrace{c_\kappa+\frac{c_{\kappa+1}-c_\kappa}{2\,\delta}\,2\,\delta}_{=\,c_{\kappa+1}}\bigg).$$

Enfin, aux deux extrémités de l'intervalle, il n'y a rien à démontrer puisqu'on a déclaré g_ε constante égale à c_1 et à c_ν. □

Comme deux encadrements identiques sont satisfaits simultanément par g^{esc} et par g_ε :

$$\begin{aligned} \inf_{[a,b]} g^{\mathsf{esc}} &\leqslant g^{\mathsf{esc}} \leqslant \sup_{[a,b]} g^{\mathsf{esc}}, \\ \inf_{[a,b]} g^{\mathsf{esc}} &\leqslant g_\varepsilon \leqslant \sup_{[a,b]} g^{\mathsf{esc}}, \end{aligned}$$

on déduit par soustraction que :

$$\big|g^{\mathsf{esc}} - g_\varepsilon\big| \leqslant \sup_{[a,b]} g^{\mathsf{esc}} - \inf_{[a,b]} g^{\mathsf{esc}}.$$

Nous affirmons alors que :

$$\int_a^b \big|g^{\mathsf{esc}}(x) - g_\varepsilon(x)\big|\, dx \leqslant \varepsilon.$$

En effet, puisque g^{esc} est égale à g_ε excepté sur les petits intervalles de jonction, cette intégrale est égale à la somme des $(\nu+1)$ intégrales suivantes :

$$\int_a^b = \int_a^{a+\delta} + \int_{\chi_1-\delta}^{\chi_1+\delta} + \cdots + \int_{\chi_{\nu-1}-\delta}^{\chi_{\nu-1}+\delta} + \int_{b-\delta}^b,$$

et donc grâce à ce qui précède, on peut maintenant aisément majorer :

$$\begin{aligned}
\int_a^b \big|g^{\mathsf{esc}} - g_\varepsilon\big| &= \bigg(\int_a^{a+\delta} + \int_{\chi_1-\delta}^{\chi_1+\delta} + \cdots + \int_{\chi_{\nu-1}-\delta}^{\chi_{\nu-1}+\delta} + \int_{b-\delta}^b\bigg)\Big(\sup_{[a,b]} g^{\mathsf{esc}} - \inf_{[a,b]} g^{\mathsf{esc}}\Big) \\
&\leqslant \Big(\delta + \underbrace{2\,\delta + \cdots + 2\,\delta}_{(\nu-1)\text{ fois}} + \delta\Big)\Big(\sup_{[a,b]} g^{\mathsf{esc}} - \inf_{[a,b]} g^{\mathsf{esc}}\Big) \\
&= 2\,\nu\,\delta\Big(\sup_{[a,b]} g^{\mathsf{esc}} - \inf_{[a,b]} g^{\mathsf{esc}}\Big) \\
&\leqslant \varepsilon,
\end{aligned}$$

quantité qui est effectivement inférieure ou égale à ε, grâce au choix initial annoncé pour δ.

Ceci achève cette démonstration, volontairement conduite de manière à faire transparaître une *symbiose synthétique* entre la pensée géométrique inventive et l'exigence de réalisation formelle. □

Fin de la démonstration du Théorème 8.1. Repartons donc des fonctions en escalier g_n^{esc} abandonnées en chemin. Grâce au Théorème d'approximation 8.2 démontré à l'instant que l'on applique avec $\varepsilon := \frac{1}{2\,n}$, il existe pour tout $n \geqslant 1$ une fonction *continue* que nous noterons :

$$f_n \in \mathscr{C}^0\big([a,b], \mathbb{C}\big),$$

telle que :

$$\int_a^b \big|g_n^{\mathsf{esc}}(x) - f_n(x)\big|\, dx \leqslant \frac{1}{2\,n}.$$

Alors une simple inégalité triangulaire dans les intégrales :

$$\begin{aligned}
\int_a^b \big|f(x) - f_n(x)\big|\, dx &= \int_a^b \big|f(x) - g_n^{\mathsf{esc}}(x) + g_n^{\mathsf{esc}}(x) - f_n(x)\big|\, dx \\
&\leqslant \int_a^b \big|f(x) - g_n^{\mathsf{esc}}(x)\big|\, dx + \int_a^b \big|g_n^{\mathsf{esc}}(x) - f_n(x)\big|\, dx \\
&\leqslant \underbrace{\frac{1}{2\,n} + \frac{1}{2\,n}}_{\text{tend vers } 0},
\end{aligned}$$

fournit sans délai la conclusion finale. □

9. Sommes de Riemann

Les sommes de Darboux inférieure $\Sigma_\Delta(f)$ et supérieure $\Sigma^\Delta(f)$ d'une fonction bornée $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ relativement à une subdivision font intervenir les infima et les suprema de f sur les petits intervalles concernés, ce qui permet d'encadrer et d'approximer la valeur finale recherchée de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$. De cette façon, on fixe clairement les idées sur chaque petit intervalle.

Toutefois, ce n'est pas de cette manière-là que Riemann a introduit en 1854 l'intégrale qui porte maintenant son nom. Riemann raisonnait au contraire presque « *en probabiliste* », car il choisissait *au hasard* un point dans chaque intervalle, point en lequel la fonction n'a aucune raison d'atteindre son minimum ou son maximum.

Définition 9.1. Étant donné une subdivision :

$$\Delta = \big\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\big\}$$

d'un intervalle $[a,b] \Subset \mathbb{R}$, on appelle *somme de Riemann* d'une fonction bornée $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ toute somme :

$$R_\Delta(f,\xi) := \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - x_{k-1}\big)\, f(\xi_{k-1}),$$

dans laquelle les points :

$$\xi_{k-1} \in \big[x_{k-1},\, x_k\big] \qquad\qquad {\scriptstyle (k=1\,\cdots\, n)},$$

sont choisis librement.

Bien entendu, puisque sur chaque petit intervalle on a l'encadrement trivial :

$$\inf_{x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k} f(x) \ \leqslant\ f(\xi_k) \ \leqslant\ \sup_{x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k} f(x),$$

toute somme de Riemann est toujours encadrée par les sommes de Darboux inférieure et supérieure :

$$\Sigma_\Delta(f) \ \leqslant\ R_\Delta(f,\xi) \ \leqslant\ \Sigma^\Delta(f).$$

Le « *miracle* », maintenant, c'est que l'approche «*au hasard*» de Riemann va s'avérer être équivalente à celle « *bien encadrée* » de Darboux que nous avons développée jusqu'à présent.

Définition 9.2. On appelle *pas* d'une telle subdivision Δ quelconque la quantité :

$$\mathsf{pas}(\Delta) := \max_{1\leqslant k\leqslant n} \big(x_k - x_{k-1}\big).$$

En ces termes, on a en effet l'équivalence fondamentale suivante.

Théorème 9.3. [Équivalence entre deux définitions de la Riemann-intégrabilité] *Pour toute fonction bornée $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ définie sur un intervalle compact $[a,b] \Subset \mathbb{R}$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est Riemann-intégrable au sens de Darboux, à savoir :*

$$\sup_\Delta \Sigma_\Delta(f) \ =\ \inf_\Delta \Sigma^\Delta(f),$$

le supremum des sommes de Darboux inférieures et l'infimum des sommes de Darboux supérieures étant pris sur les subdivisions Δ de $[a,b]$;

(ii) *f est Riemann-intégrable au sens original de Riemann, à savoir les sommes de Riemann de f :*

$$\lim_{\mathsf{pas}(\Delta)\to 0} R_\Delta(f,\xi)$$

possèdent une limite bien définie lorsque le pas des subdivisions Δ tend vers zéro, indépendamment du choix des points $\xi_\bullet$ *appartenant aux intervalles de* Δ.

De plus, lorsque l'une ou l'autre de ces deux conditions équivalentes est satisfaite, les deux nombres en question coïncident*, et ils constituent par définition l'*intégrale de Riemann *de f :*

$$\boxed{\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &\stackrel{\mathsf{def}}{:=} \sup_\Delta \Sigma_\Delta(f) \,=\, \inf_\Delta \Sigma^\Delta(f)\\ &= \lim_{\mathsf{pas}(\Delta)\to 0} R_\Delta(f,\xi).\end{aligned}}$$

Il suffit bien entendu d'établir cette équivalence pour les fonctions à valeurs réelles.

Démonstration. **(i)** $\Longrightarrow$ **(ii)**. Notons en abrégé :

$$\sup_\Delta \Sigma_\Delta(f) \,=\, \inf_\Delta \Sigma^\Delta(f) \,=:\, I.$$

Puisque nous connaissons déjà l'encadrement :

$$\Sigma_\Delta(f) \,\leqslant\, R_\Delta(f,\xi) \,\leqslant\, \Sigma^\Delta(f),$$

il suffit de montrer que ce supremum et cet infimum sont tous deux des *limites*, à savoir il suffit de démontrer la :

Proposition 9.4. *Sous l'hypothèse* **(i)***, on a en fait :*

$$\lim_{\mathsf{pas}(\Delta)\to 0} \Sigma_\Delta(f) = \sup_\Delta \Sigma_\Delta(f) = I,$$

et de même aussi :

$$\lim_{\mathsf{pas}(\Delta)\to 0} \Sigma^\Delta(f) = \inf_\Delta \Sigma^\Delta(f) = I.$$

En effet, l'encadrement en question donnera alors instantanément :

$$\lim_{\mathsf{pas}(\Delta)\to 0} R_\Delta(f,\xi) = I.$$

Pour ce qui est de cette Proposition 9.4, contentons-nous de la première limite concernant $\Sigma_\Delta(f)$, le traitement de celle afférente à $\Sigma^\Delta(f)$ étant entièrement similaire.

Par l'hypothèse **(i)**, pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe une subdivision $\Delta = \Delta_\varepsilon$ de l'intervalle $[a,b]$:

$$\Delta = \big\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\big\},$$

telle que :

$$0 \,\leqslant\, I - \Sigma_\Delta(f) \,\leqslant\, \varepsilon.$$

Avec :

$$M_{|f|} := \max_{[a,b]} |f|,$$

introduisons :

$$\delta \,:=\, \min\left(\frac{\varepsilon}{4\,n\,M_{|f|}},\ \frac{\mathsf{pas}(\Delta)}{2}\right).$$

La première limite de la Proposition sera alors vérifiée grâce à une :

Assertion 9.5. *Alors pour toute autre subdivision quelconque de* $[a, b]$ *:*

$$\square := \big\{a = y_0 < y_1 < \cdots < y_{m-1} < y_m = b\big\},$$

ayant un pas assez petit satisfaisant :

$$\mathsf{pas}(\square) \leqslant \delta,$$

la somme de Darboux inférieure associée satisfait :

$$0 \leqslant I - \Sigma_\square(f) \leqslant 2\,\varepsilon,$$

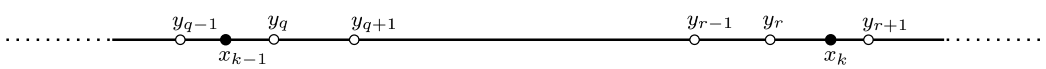
d'où :

$$\lim_{\mathsf{pas}(\square)\to 0} \Sigma_\square(f) = I.$$

Démonstration. Comme par arrangement à l'avance on a :

$$\mathsf{pas}(\square) \leqslant \delta \leqslant \frac{\mathsf{pas}(\Delta)}{2},$$

chaque intervalle $[x_{x-1},\, x_k]$ de la subdivision Δ contient toujours *au moins deux points* de la subdivision $\square$. Fixons donc un tel $[x_{k-1},\, x_k]$ quelconque.



Soient alors les deux indices q et r dans l'ensemble $\{0, 1, \dots, m-1, m\}$ des indices de $\square$ avec $0 \leqslant q < r \leqslant m$ qui satisfont :

$$y_{q-1} \notin [x_{k-1}, x_k], \qquad y_q, y_{q+1}, \dots, y_{r-1}, y_r \in [x_{k-1}, x_k], \qquad y_{r+1} \notin [x_{k-1}, x_k].$$

Dans la somme de Darboux inférieure qui nous intéresse :

$$\Sigma_\square(f) = \sum_{l=1}^{m} \big(y_l - y_{l-1}\big) \inf_{y_{l-1}\leqslant x\leqslant y_l} f(x),$$

apparaît la sous-somme qui correspond à ce qui est illustré par le diagramme, à savoir :

$$\big(y_q - y_{q-1}\big) \inf_{y_{q-1}\leqslant x\leqslant y_q} f(x) + \big(y_{q+1} - y_q\big) \inf_{y_q\leqslant x\leqslant y_{q+1}} f(x) + \cdots + \big(y_r - y_{r-1}\big) \inf_{y_{r-1}\leqslant x\leqslant y_r} f(x) + \big(y_{r+1} - y_r\big) \inf_{y_r\leqslant x\leqslant y_{r+1}} f(x).$$

Mais comme les deux segments extrêmes débordent à gauche au-delà de x_{k-1} et à droite au-delà de x_k, il est avisé de décomposer les deux termes correspondants chacun en deux morceaux :

$$\begin{aligned}
\big(y_q - y_{q-1}\big) \inf_{[y_{q-1}, y_q]} f &= \underline{\big(x_{k-1} - y_{q-1}\big) \inf_{[y_{q-1}, y_q]} f} + \big(y_q - x_{k-1}\big) \inf_{[y_{q-1}, y_q]} f, \\
\big(y_{r+1} - y_r\big) \inf_{[y_r, y_{r+1}]} f &= \big(x_k - y_r\big) \inf_{[y_r, y_{r+1}]} f + \underline{\big(y_{r+1} - x_k\big) \inf_{[y_r, y_{r+1}]} f}
\end{aligned}$$

et d'éliminer les morceaux hors de $[x_{k-1}, x_k]$, ce qui conduit à introduire :

$$\Sigma_\square^k(f) := \big(y_q - x_{k-1}\big) \inf_{[y_{q-1}, y_q]} f + \big(y_{q+1} - y_q\big) \inf_{[y_q, y_{q+1}]} f + \cdots + \big(y_r - y_{r-1}\big) \inf_{[y_{r-1}, y_r]} f + \big(x_k - y_r\big) \inf_{[y_r, y_{r+1}]} f.$$

Avec ces notations et de légères adaptations lorsque $x_{k-1} = a$, *i.e.* pour $k = 1$, et lorsque $x_k = b$, *i.e.* pour $k = n$, il est alors clair que :

$$\Sigma_\square(f) = \sum_{k=1}^{n} \Sigma_\square^k(f).$$

Et maintenant, nous pouvons minorer patiemment et astucieusement :

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\square}^{k}(f) &\geqslant -\big(y_q - x_{k-1}\big)\, M_{|f|} + \big[y_{q+1} - y_q + \cdots + y_r - y_{r-1}\big] \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f - \big(x_k - y_r\big)\, M_{|f|} \\
&= -\big(y_q - x_{k-1}\big)\, M_{|f|} + \big[y_r - y_q\big] \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f - \big(x_k - y_r\big)\, M_{|f|} \\
&= -\big(y_q - x_{k-1}\big)\, M_{|f|} + \big[-(x_k - y_r) + (x_k - x_{k-1}) - (y_q - x_{k-1})\big] \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f - \big(x_k - y_r\big)\, M_{|f|} \\
&\geqslant -\big(y_q - x_{k-1}\big)\, M_{|f|} - \big(x_k - y_r\big)\, M_{|f|} + \big(x_k - x_{k-1}\big) \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f - \big(y_q - x_{k-1}\big)\, M_{|f|} - \big(x_k - y_r\big)\, M_{|f|} \\
&\geqslant \big(x_k - x_{k-1}\big) \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f - 4\, M_{|f|}\, \mathsf{pas}(\square),
\end{aligned}$$

et une sommation finale sur k nous donne :

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\square}(f) = \sum_{k=1}^{n} \Sigma_{\square}^{k}(f) &\geqslant \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - x_{k-1}\big) \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f - 4\, n\, M_{|f|}\, \mathsf{pas}(\square) \\
&= \Sigma_{\Delta}(f) - 4\, n\, M_{|f|}\, \mathsf{pas}(\square) \\
&\geqslant \Sigma_{\Delta}(f) - \varepsilon \\
&\geqslant I - 2\,\varepsilon.
\end{aligned}$$

Mais comme de toute façon :

$$I = \sup_{\square} \Sigma_{\square}(f),$$

nous concluons bien que :

$$I - 2\,\varepsilon \leqslant \Sigma_{\square}(f) \leqslant I,$$

ce qui termine l'Assertion, la Proposition et la première implication **(i)** $\Longrightarrow$ **(ii)** du Théorème.

Traitons à présent à la deuxième implication **(ii)** $\Longrightarrow$ **(i)**. Notons en abrégé :

$$\lim_{\mathsf{pas}(\Delta) \to 0} R_{\Delta}(f, \xi) =: J$$

cette limite, qui existe. Soit $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, et soit une subdivision Δ de $[a, b]$ dont le pas est assez petit pour que :

$$\Big| R_{\Delta}(f, \xi) - J \Big| \leqslant \varepsilon,$$

c'est-à-dire telle que :

$$\bigg| \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - x_{k-1}\big)\, f(\xi_k) - J \bigg| \leqslant \varepsilon,$$

et ce, *quel que soit* le choix des ξ_k. Pour se rapprocher des sommes de Darboux inférieure et supérieure, l'astuce va donc consister à bien choisir chaque ξ_k de deux manières différentes afin d'approximer l'infimum et le supremum de f sur $[x_{k-1},\, x_k]$.

En effet, il est clair que pour tout $k = 1, \dots, n$, on peut trouver deux points ξ_k^- et ξ_k^+ appartenant à $[x_{k-1},\, x_k]$ tels que :

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant f(\xi_k^-) - \inf_{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k} f(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}, \\
0 &\leqslant \sup_{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k} f(x) - f(\xi_k^+) \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}.
\end{aligned}$$

Alors on peut majorer la différence (positive) :

$$
\begin{aligned}
\big(0 \leqslant \big) \qquad R_\Delta(f,\xi^-) - \Sigma_\Delta(f) &= \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - x_{k-1}\big) \Big[f(\xi_k^-) - \inf_{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k} f(x)\Big] \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - x_{k-1}\big) \frac{\varepsilon}{b-a} \\
&= \frac{\varepsilon}{b-a} \big[x_1 - a + x_2 - x_1 + \cdots + x_{n-1} - x_{n-2} + b - x_{n-1}\big] \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}
$$

ce qui aboutit à :

$$0 \leqslant R_\Delta(f,\xi^-) - \Sigma_\Delta(f) \leqslant \varepsilon.$$

En procédant d'une manière très similaire, on obtient de même :

$$0 \leqslant \Sigma^\Delta(f) - R_\Delta(f,\xi^+) \leqslant \varepsilon.$$

Mais si l'on se rappelle que l'hypothèse peut être appliquée librement à $\xi = \xi^-$ et à $\xi = \xi^+$, on a aussi gratuitement deux jeux supplémentaires d'inégalités :

$$
\begin{aligned}
-\varepsilon &\leqslant R_\Delta(f,\xi^-) - J \leqslant \varepsilon, \\
-\varepsilon &\leqslant R_\Delta(f,\xi^+) - J \leqslant \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Nous laissons alors au lecteur le soin de se convaincre que ces quatre inégalités conduisent (exercice) à :

$$J - 2\,\varepsilon \leqslant \Sigma_\Delta(f) \leqslant \Sigma^\Delta(f) \leqslant J + 2\,\varepsilon,$$

d'où découle :

$$0 \leqslant \Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) \leqslant 4\,\varepsilon,$$

ce qui démontre bien que f est Riemann-intégrable au sens de la Définition 2.3 que nous avons adoptée constamment dans ce chapitre.

Enfin, pour parachever les arguments, les deux implications **(i)** $\Longrightarrow$ **(ii)** et **(ii)** $\Longrightarrow$ **(i)** que nous venons de détailler montrent en filigrane (exercice mental) que $I = J$ dans les deux cas. $\square$

Dans la vraie vie des mathématiques, les sommes de Riemann les plus importantes et les plus utiles sont celles qui sont *à pas constant équidistribué :*

$$x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n},$$

et dans lesquelles on choisit ou bien $\xi_k = x_{k-1}$ ou bien $\xi_k = x_k$.

Théorème 9.6. *Pour toute fonction Riemann-intégrable $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ définie sur un intervalle compact $[a,b] \Subset \mathbb{R}$, on a la convergence :*

$$\boxed{\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\bigg(a + (k-1)\,\frac{b-a}{n}\bigg) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)\,dx,}$$

et aussi :

$$\boxed{\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\bigg(a + k\,\frac{b-a}{n}\bigg) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)\,dx.}$$

Par exemple, avec la fonction $f(x) := \frac{1}{1+x}$ qui est continue sur l'intervalle $[0,1]$, on détermine aisément une limite inconnue en reconnaissant une somme de Riemann :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \log 2.$$

10. **Interversion entre limite et intégrale**

Théorème 10.1. *Si une suite de fonctions Riemann-intégrables :*

$$f_n\colon\quad [a,b] \longrightarrow \mathbb{C} \qquad\qquad {\scriptstyle (n \geqslant 1)}$$

définies sur un intervalle compact $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *converge* uniformément *vers une certaine fonction :*

$$f\colon\quad [a,b] \longrightarrow \mathbb{C},$$

alors cette fonction-limite est elle aussi Riemann-intégrable, et on a de plus :

$$\boxed{\int_a^b f_n(x)\,dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)\,dx.}$$

Démonstration. L'Exercice 13, laissé au lecteur, établit la Riemann-intégrabilité de la fonction limite (uniforme) f.

Une fois ce résultat admis, les arguments sont naturels.

En effet, on a par hypothèse que les f_n convergent uniformément vers f :

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,n_\varepsilon \geqslant 1 \quad \forall\,n \geqslant n_\varepsilon \quad \forall\,x \in [a,b] \quad \big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Alors pour $n \geqslant n_\varepsilon$ une simple majoration :

$$\begin{aligned}
\bigg|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\bigg| &= \bigg|\int_a^b \big(f_n(x) - f(x)\big)\,dx\bigg| \\
&\leqslant \int_a^b \big|f_n(x) - f(x)\big|\,dx \\
&\leqslant (b-a)\,\frac{\varepsilon}{b-a)} \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

conclut. □

Théorème 10.2. [Convergence monotone en théorie de Riemann] *Sur un intervalle compact* $[a,b] \Subset \mathbb{R}$*, soit une suite de fonctions :*

$$f_n\colon\quad [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad {\scriptstyle (n \geqslant 1)},$$

qui sont toutes décroissantes :

$$\Big(a \leqslant x' \leqslant x'' \leqslant b\Big) \implies \Big(f(a) \geqslant f(x') \geqslant f(x'') \geqslant f(b)\Big),$$

donc bornées et Riemann-intégrables. On suppose qu'en tous les points $x \in [a,b]$*, les limites :*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x)$$

existent (convergence ponctuelle), donc définissent une certaine fonction :

$$f\colon \quad [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Alors cette fonction-limite est elle aussi décroissante, donc bornée Riemann-intégrable sur $[a,b]$*,* et surtout*, on a :*

$$\boxed{\int_a^b f_n(x)\,dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)\,dx.}$$

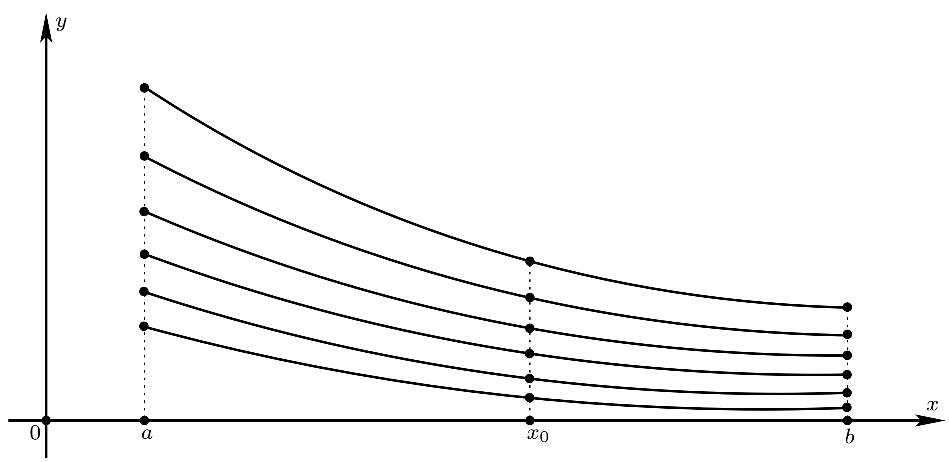
Ce résultat est vrai aussi pour des suites de fonctions qui sont toutes croissantes.

Démonstration. Tout d'abord, la décroissance de la fonction-limite :

$$\Big(x' \leqslant x''\Big) \implies \Big(f(x') \geqslant f(x'')\Big)$$

provient d'un simple passage à la limite dans les inégalités de décroissance des fonctions f_n :

$$\Big(x' \leqslant x''\Big) \implies \Big(f_n(x') \geqslant f_n(x'')\Big) \qquad\qquad {\scriptstyle (n \geqslant 1)}.$$

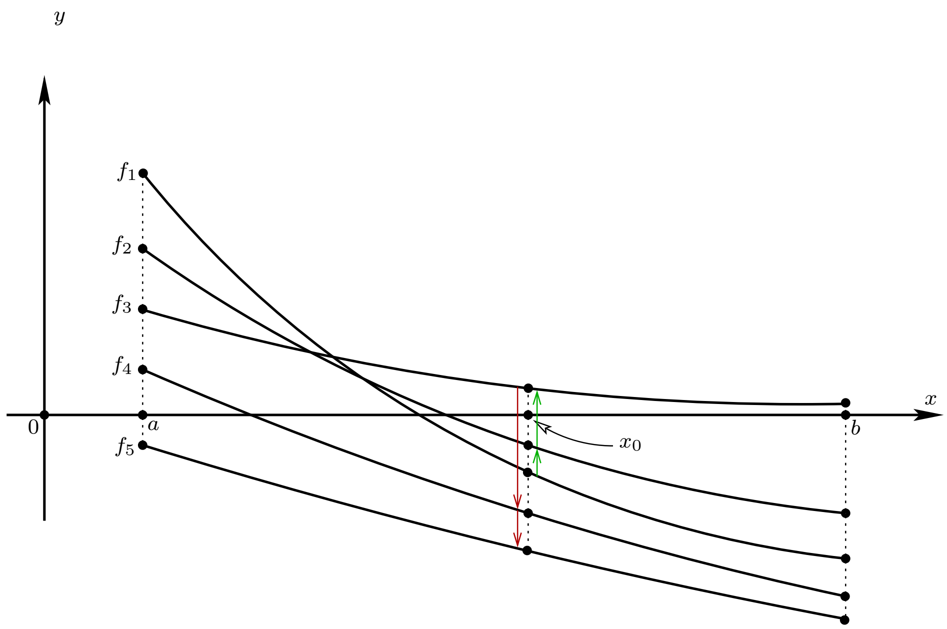


La figure qu'on a spontanément en tête pour se représenter mentalement une telle suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ de fonctions décroissantes est inexacte par excès de simplicité.

Certes, chaque fonction f_n est décroissante sur $[a,b]$, mais cela ne veut pas forcément dire qu'en un point fixé $x_0 \in [a,b]$, la suite de nombres réels :

$$\big(f_n(x_0)\big)_{n\geqslant 1}$$

soit elle-même décroissante ! Bien qu'une telle affirmation semble contre-intuitive, la figure suivante illustre ce qui peut tout à fait se produire.



En un point $x_0 \in [a, b]$, la suite $\big(f_n(x_0)\big)_{n \geqslant 1}$ peut donc effectivement commencer par croître, puis décroître, *etc.*

Gaston Bachelard disait qu'il faut constamment confronter, éduquer, transformer, métamorphoser, transcender, sublimer, son intuition mathématique. Or les figures, de part leur caractère souvent incomplet et maladroit, exposent salutairement à des questionnements impromptus.

En tout cas, puisque la fonction-limite f est décroissante, elle est Riemann-intégrable. Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision :

$$\Delta = \Delta_\varepsilon = \big\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{\nu-1} < x_\nu = b\big\}$$

de l'intervalle $[a, b]$ telle que :

$$\Sigma^\Delta(f) - \varepsilon \ \leqslant\ \int_a^b f(x)\, dx \ \leqslant\ \Sigma_\Delta(f) + \varepsilon.$$

Les points d'une telle subdivision Δ_ε sont en nombre fini, égal à $(\nu + 1)$. Or par hypothèse, la suite $(f_n)_{n \geqslant 1}$ converge *ponctuellement* vers f. En particulier, elle converge en *tous* les points de la subdivision :

$$\begin{aligned} f_n(a) &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(a), \\ f_n(x_1) &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x_1), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(x_{\nu-1}) &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x_{\nu-1}), \\ f_n(b) &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(b). \end{aligned}$$

Autrement dit, avec ce même $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned}
\exists\, n_\varepsilon^0 \geqslant 1 &\quad \Big(n \geqslant n_\varepsilon^0 \implies \big|f_n(a) - f(a)\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}\Big),\\
\exists\, n_\varepsilon^1 \geqslant 1 &\quad \Big(n \geqslant n_\varepsilon^1 \implies \big|f_n(x_1) - f(x_1)\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}\Big),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\exists\, n_\varepsilon^{\nu-1} \geqslant 1 &\quad \Big(n \geqslant n_\varepsilon^{\nu-1} \implies \big|f_n(x_{\nu-1}) - f(x_{\nu-1})\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}\Big),\\
\exists\, n_\varepsilon^\nu \geqslant 1 &\quad \Big(n \geqslant n_\varepsilon^\nu \implies \big|f_n(b) - f(b)\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}\Big).
\end{aligned}$$

Donc si nous prenons le *maximum* de tous ces entiers-seuils :

$$n_\varepsilon := \max\big(n_\varepsilon^0,\, n_\varepsilon^1,\, \dots,\, n_\varepsilon^{\nu-1},\, n_\varepsilon^\nu\big),$$

alors pour $n \geqslant n_\varepsilon$ nous sommes certains de contrôler par encadrement :

$$f(x_\kappa) - \frac{\varepsilon}{b-a} \leqslant f_n(x_\kappa) \leqslant f(x_\kappa) + \frac{\varepsilon}{b-a},$$

pour tous les indices $0 \leqslant \kappa \leqslant \nu$.

Et maintenant, le miracle argumentatif va être que la *monotonie* — ici la *décroissance* —, des fonctions f_n et f assurera que ce simple contrôle en le nombre fini des points de la subdivision Δ se propagera sur les intervalles de Δ.

En effet, si, toujours pour $n \geqslant n_\varepsilon$, nous estimons la somme de Darboux supérieure de f_n, alors la décroissance de f_n et les inégalités finies de contrôle obtenues à l'instant :

$$\begin{aligned}
\Sigma^\Delta(f_n) &= \sum_{\kappa=1}^{\nu} \big(x_\kappa - x_{\kappa-1}\big) \sup_{x_{\kappa-1}\leqslant x\leqslant x_\kappa} f_n(x)\\
\text{[f_n est décroissante !]} \qquad &= \sum_{\kappa=1}^{\nu} \big(x_\kappa - x_{\kappa-1}\big)\, f_n(x_{\kappa-1})\\
\text{[Contrôle aux points $x_{\kappa-1}$]} \qquad &\leqslant \sum_{\kappa=1}^{\nu} \big(x_\kappa - x_{\kappa-1}\big) \Big(f(x_{\kappa-1}) + \frac{\varepsilon}{b-a}\Big)\\
&= \sum_{\kappa=1}^{\nu} \big(x_\kappa - x_{\kappa-1}\big)\, f(x_{\kappa-1}) + \frac{\varepsilon}{b-a}\big(x_1 - a + \cdots + b - x_{\nu-1}\big)\\
\text{[f aussi est décroissante !]} \qquad &= \sum_{\kappa=1}^{\nu} \big(x_\kappa - x_{\kappa-1}\big) \sup_{x_{\kappa-1}\leqslant x\leqslant x_\kappa} f(x) + \varepsilon\\
\text{[Reconnaître Darboux]} \qquad &= \Sigma^\Delta(f) + \varepsilon,
\end{aligned}$$

produisent une majoration en termes de la somme de Darboux supérieure de la fonction-limite f.

Quant à une minoration de la somme de Darboux inférieure $\Sigma_\Delta(f_n)$, elle se déroule de manière similaire :

$$
\begin{aligned}
& & \Sigma_\Delta(f_n) &= \sum_{\kappa=1}^{\nu} \big(x_\kappa - x_{\kappa-1}\big) \inf_{x_{\kappa-1}\leqslant x\leqslant x_\kappa} f_n(x) \\
& \text{[f_n est décroissante !]} & &= \sum_{\kappa=1}^{\nu} \big(x_\kappa - x_{\kappa-1}\big)\, f_n(x_\kappa) \\
& \text{[Contrôle aux points $x_{\kappa-1}$]} & &\geqslant \sum_{\kappa=1}^{\nu} \big(x_\kappa - x_{\kappa-1}\big) \Big(f(x_\kappa) - \frac{\varepsilon}{b-a}\Big) \\
& & &= \sum_{\kappa=1}^{\nu} \big(x_\kappa - x_{\kappa-1}\big)\, f(x_\kappa) - \frac{\varepsilon}{b-a}\big(x_1 - a + \cdots + b - x_{\nu-1}\big) \\
& \text{[f aussi est décroissante !]} & &= \sum_{\kappa=1}^{\nu} \big(x_\kappa - x_{\kappa-1}\big) \inf_{x_{\kappa-1}\leqslant x\leqslant x_\kappa} f(x) - \varepsilon \\
& \text{[Reconnaître Darboux]} & &= \Sigma_\Delta(f) - \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Nous avons donc obtenu une majoration et une minoration :

$$
\Sigma^\Delta(f_n) \leqslant \Sigma^\Delta(f) + \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \Sigma_\Delta(f_n) \geqslant \Sigma_\Delta(f) - \varepsilon,
$$

qu'il vaut mieux récrire comme :

$$
\Sigma^\Delta(f_n) - 2\,\varepsilon \leqslant \Sigma^\Delta(f) - \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \Sigma_\Delta(f) + \varepsilon \leqslant \Sigma_\Delta(f_n) + 2\,\varepsilon,
$$

afin de synthétiser ces deux résultats avec l'inégalité de départ qui exprimait la Riemann-intégrabilité de f :

$$
\Sigma^\Delta(f) - \varepsilon \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \Sigma_\Delta(f) + \varepsilon,
$$

ce qui nous donne les inégalités agréables suivantes :

$$
\Sigma^\Delta(f_n) - 2\,\varepsilon \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \Sigma_\Delta(f_n) + 2\,\varepsilon.
$$

En effet, ces inégalités sont fort agréables parce que si nous nous souvenons que les sommes de Darboux supérieure et inférieure sont toujours au-dessus et en-desssous de la valeur d'une intégrale :

$$
\int_a^b f_n(x)\,dx \leqslant \Sigma^\Delta(f_n) \qquad \text{et} \qquad \Sigma_\Delta(f_n) \leqslant \int_a^b f_n(x)\,dx,
$$

nous obtenons instantanément un encadrement :

$$
\int_a^b f_n(x)\,dx - 2\,\varepsilon \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b f_n(x)\,dx + 2\,\varepsilon,
$$

d'où découle, et ce, toujours pour $n \geqslant n_\varepsilon$:

$$
\bigg| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \bigg| \leqslant 2\,\varepsilon,
$$

ce qui montre bien la convergence désirée $\int f_n \longrightarrow \int f$. □

11. Caractérisation des fonctions Riemann-intégrables

Nous avons observé que toutes les fonctions continues, voire continues par morceaux, sont Riemann-intégrables. Le but de cette section est de réaliser une étude plus aboutie des discontinuités des fonctions Riemann-intégrables, ce qui anticipera avantageusement certains concepts de la Théorie de l'intégrale de Lebesgue.

Définition 11.1. Un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est dit être *de mesure* 0 si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une famille *finie ou dénombrable* :

$$\{I_k\}_{k \geqslant 1}$$

d'intervalles *ouverts* $I_k \subset \mathbb{R}$ telle que :

(i) $E \subset \bigcup_{k \geqslant 1} I_k$;

(ii) $\sum_{k \geqslant 1} |I_k| \leqslant \varepsilon$, où $|I_k|$ désigne la longueur de l'intervalle I_k.

La première condition demande que la réunion des intervalles recouvre E, et la deuxième condition exprime que cette réunion peut être rendue de longueur totale arbitrairement petite. Dans cette définition, il importe au plus haut point que la famille des I_k soit de cardinal au plus dénombrable.

Lemme 11.2. *Lorsqu'un tel ensemble E de mesure nulle est de plus* compact*, il est en fait possible de le recouvrir par un nombre* fini *d'intervalles ouverts I_k tels que* $\sum_{k \geqslant 1} \big|I_k\big| \leqslant \varepsilon$.

Démonstration. Appliquer simplement le Théorème 3.5 de Heine-Borel pour extraire un recouvrement fini. □

Lemme 11.3. *Tout sous-ensemble* fini :

$$E = \big\{x_1, x_2, \dots, x_N\big\} \subset \mathbb{R}$$

est de mesure nulle.

Démonstration. En effet, pour tout $\delta > 0$, la réunion des N intervalles ouverts :

$$I_k := \big]x_k - \delta,\ x_k + \delta\big[\ \ni x_k \qquad {\scriptstyle (k = 1 \cdots n)}$$

recouvre manifestement E, et la somme de toutes leurs longueurs :

$$2\,\delta\,N \leqslant \varepsilon$$

sera inférieure à un $\varepsilon > 0$ quelconque pourvu seulement que $\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{2\,N}$. □

Lemme 11.4. *Tout sous-ensemble* dénombrable :

$$E = \big\{x_1, x_2, \dots, x_N, x_{N+1}, \dots\dots\big\} \subset \mathbb{R}$$

est aussi de mesure nulle

Démonstration. Au premier abord, cet énoncé semble exagérément optimiste, puisque si l'on s'en réfère à l'argument qui précède, à savoir si l'on recouvre les points de E par des intervalles ouverts de longueur $2\,\delta$, lorsque $N \to \infty$, la somme de leurs longueurs :

$$2\,\delta\,N \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \infty$$

ne pourra jamais être rendue arbitrairement petite !

Toutefois, rien n'interdit de *rapetisser de plus en plus* la longueur des intervalles qui contiennent les points $x_1, x_2, x_3, \dots$, et en effet, si l'on prend :

$$I_k := \big]x_k - \tfrac{1}{2}\tfrac{\varepsilon}{2^k},\ x_k + \tfrac{1}{2}\tfrac{\varepsilon}{2^k}\big[\ \ni x_k \qquad\qquad (k = 1 \cdots \infty),$$

alors la somme des longueurs correspondantes :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} &= 2\,\varepsilon\bigg(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \cdots\bigg) \\ &= 2\,\varepsilon\,\frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 2\,\varepsilon\end{aligned}$$

sera effectivement arbitrairement petite. □

Lemme 11.5. *Toute réunion* finie *ou* dénombrable *d'ensembles de mesure nulle est encore de mesure* 0*.*

Démonstration. L'idée est essentiellement la même que dans le lemme qui précède. Notons :

$$E_1,\ E_2,\ E_3,\ \dots,\ E_i,\ E_{i+1},\ \dots\dots$$

ces ensembles et notons :

$$E := \bigcup_{i \geqslant 1} E_i$$

leur réunion finie ou dénombrable.

Par hypothèse, chaque E_i est de mesure nulle. Pour chaque indice i, appliquons alors la définition non pas avec ε, mais avec $\frac{\varepsilon}{2^i}$, ce qui nous fournit des intervalles :

$$I_{i,1},\ I_{i,2},\ \dots,\ I_{i,k},\ \dots\dots$$

dont la réunion recouvre E_i :

$$E_i \subset \bigcup_{k \geqslant 1} I_{i,k},$$

et dont la somme totale des longueurs est donc majorée par :

$$\sum_{k \geqslant 1} \big|I_{i,k}\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Mais alors il est clair que la double réunion recouvre l'ensemble :

$$E \subset \bigcup_{i \geqslant 1} \bigcup_{k \geqslant 1} I_{i,k},$$

et un calcul simple montre que la somme totale des longueurs correspondantes :

$$\begin{aligned}\sum_{i \geqslant 1} \sum_{k \geqslant 1} \big|I_{i,k}\big| &\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} \\ &\leqslant \varepsilon\end{aligned}$$

est effectivement arbitrairement petite. □

Nous pouvons maintenant énoncer la caractérisation fondamentale des fonctions Riemann-intégrables en termes de leurs discontinuités, caractérisation qui mettra en lumière les limitations de cette théorie.

Théorème 11.6. [Caractérisation fondamentale des fonctions Riemann-intégrables] *Une fonction bornée $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ est Riemann-intégrable si et seulement si l'ensemble des points où elle n'est* pas *continue est de mesure* 0*.*

Autrement dit, on a Riemann-intégrabilité lorsque et seulement lorsque l'ensemble des points de discontinuité est de mesure nulle.

Mais au fait, qu'appelle-t-on un *point de discontinuité* d'une fonction f ? Avant d'entamer la démonstration de ce théorème, il convient de développer quelques préliminaires conceptuels.

Par définition, une fonction :

$$f\colon \quad [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

est *continue* en un point $c \in [a,b]$ si :

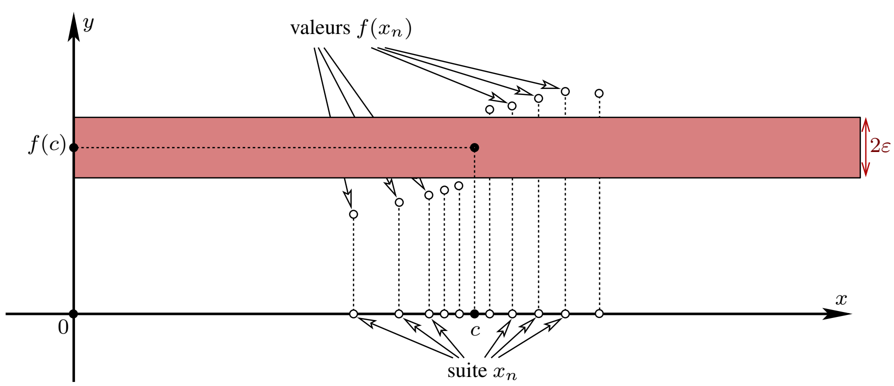
$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta > 0 \quad \forall\,x \quad |x-c| \quad \Longrightarrow \quad \big|f(x) - f(c)\big| \leqslant \varepsilon.$$

Si maintenant, nous nous rappelons que la négation d'une formule logique du premier ordre intervertit les symboles $\forall$ et $\exists$, la *non*-continuité de la fonction f en un point $c \in [a,b]$ s'exprimera comme :

$$\exists\,\varepsilon > 0 \quad \forall\,\delta > 0 \quad \exists\,x \quad |x-c| \leqslant \delta \quad \text{tel que} \quad \big|f(x) - f(c)\big| > \varepsilon.$$

Pour des raisons personnelles qui n'ont pas de fondement rationnel, l'auteur de ces lignes préfère les inégalités larges et nous écrirons plutôt $\geqslant \varepsilon$ à la fin, ce qui de toute façon, est *a fortiori* satisfait ici :

$$\exists\,\varepsilon > 0 \quad \forall\,\delta > 0 \quad \exists\,x \quad |x-c| \leqslant \delta \quad \text{tel que} \quad \big|f(x) - f(c)\big| \geqslant \varepsilon.$$



Assertion 11.7. *Une fonction $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$ est* non-*continue en un point $c \in [a,b]$ si et seulement si il existe $\varepsilon > 0$ et il existe une suite de points :*

$$\big(x_n\big)_{n \geqslant 1} \in [a,b]$$

qui tendent vers :

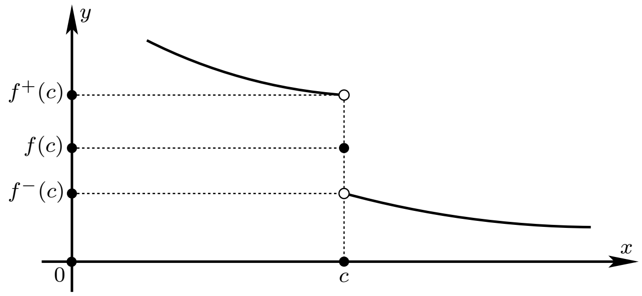
$$c = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

tels que :

$$\big|f(x_n) - f(c)\big| \geqslant \varepsilon \qquad\qquad (\forall\,n \geqslant 1).$$

Démonstration. Il s'agit de prendre une suite de nombres strictement positifs $\delta_n \to 0$ tendant vers 0, les détails de cet énoncé censé être connu étant laissés en exercice. $\square$

Intuitivement, donc, le graphe d'une fonction réelle f au voisinage d'un point de discontinuité saute, s'écarte, oscille. Mais comment conceptualiser cela plus avant ?



Définition 11.8. Une fonction $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$ est dite admettre une *discontinuité de première espèce* en un point :

$$c \in [a,b],$$

lorsque les deux limites suivantes à gauche et à droite :

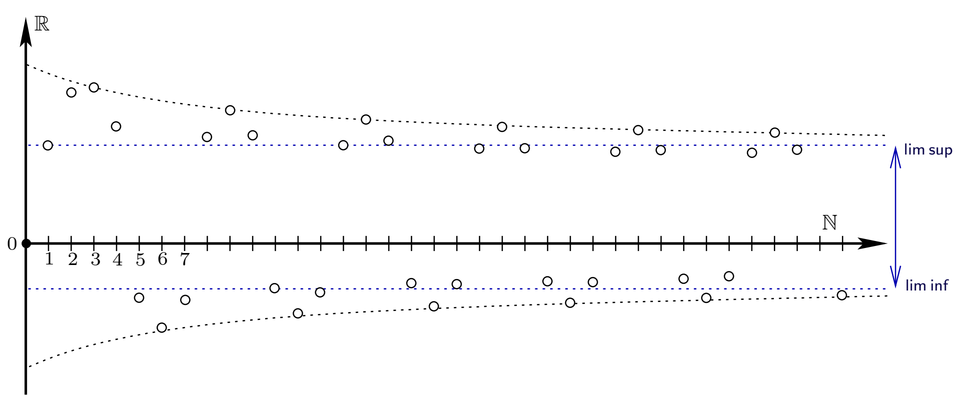
$$\lim_{\substack{x \to c \\ <}} f(x) =: f^-(c) \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{\substack{x \to c \\ >}} f(x) =: f^+(c) \in \mathbb{R}$$

existent et sont finies — pour $c = a$ ou $c = b$, l'une des deux limites n'est bien sûr pas à considérer.

Toutefois, ces discontinuités de première espèce qui sont bien connues sont un peu trop simples. Comment, alors, mieux s'imaginer la *vibration* d'une discontinuité ?

Un concept plus avancé, le concept d'*oscillation*, va *quantifier* la non-continuité d'une fonction en un point, en disant *de combien* une fonction est discontinue. Commençons par un élément d'inspiration.



Définition 11.9. L'*oscillation à l'infini* d'une suite de nombres réels :

$$\big(a_n\big)_{n \geqslant 1} \in \mathbb{R}$$

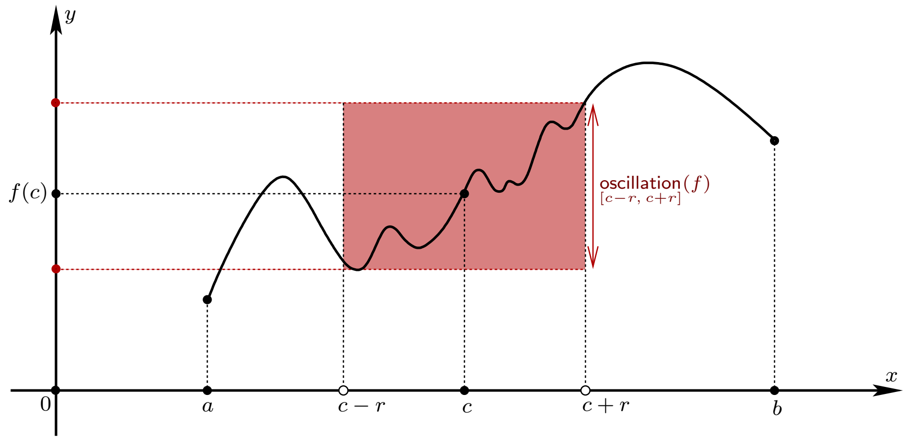
est la quantité :

$$\mathrm{oscillation}\big((a_n)_{n\geqslant 1}\big) := \limsup_{n\to\infty} a_n - \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

Si nous revenons donc à une fonction $f \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, pour capturer ce que l'on pourra se représenter comme étant son *oscillation microscopique* autour d'un point $c \in [a,b]$, il conviendra de regarder des intervalles centrés au point c :

$$\big[c - r,\, c + r\big]$$

de longueur $2\,r > 0$ petite et de regarder l'écartement maximal entre les valeurs de f sur cet intervalle.



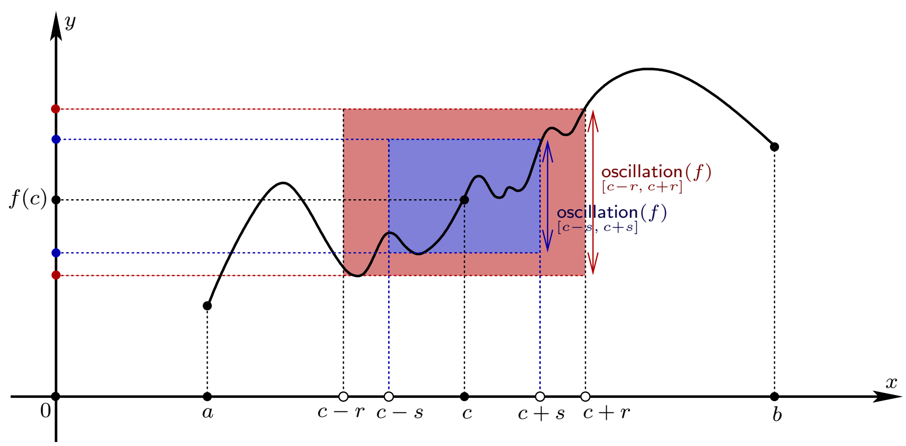
Définition 11.10. Sur un tel intervalle $[c - r,\, c + r]$, on introduit :

$$\underset{[c-r,\,c+r]}{\mathsf{oscillation}}(f) \;:=\; \sup_{x,y\in[c-r,c+r]} \big|f(x) - f(y)\big|.$$

Comme tout supremum décroît lorsqu'on réduit l'ensemble sur lequel on le prend, la fonction :

$$r \longmapsto \underset{[c-r,\,c+r]}{\mathsf{oscillation}}(f)$$

est *décroissante*. Elle admet donc certainement une limite lorsque $r \underset{>}{\longrightarrow} 0$.



Définition 11.11. En un point $c \in [a,b]$, l'*oscillation* d'une fonction $f \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$ est cette limite des oscillations macroscopiques sur des intervalles centrés en c qui rétrécissent indéfiniment :

$$\boxed{\mathsf{oscillation}\,(f, c) \;:=\; \lim_{r \underset{>}{\rightarrow} 0}\, \underset{[c-r,\,c+r]}{\mathsf{oscillation}}(f).}$$

On se convainc alors aisément (exercice) de la véracité de l'énoncé suivant.

Assertion 11.12. *Une fonction* $f \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est* continue *en un point* $c \in [a, b]$ *si et seulement si :*

$$0 = \mathsf{oscillation}(f, c). \qquad \square$$

De plus, si, pour $\varepsilon > 0$ quelconque, on introduit les ensembles :

$$\mathsf{Osc}_\varepsilon(f) \;:=\; \big\{c \in [a, b] \colon \text{ l'oscillation de } f \text{ en } c \text{ est } \geqslant \varepsilon\big\},$$

alors une conséquence directe de cette dernière assertion est que :

$$\boxed{\begin{aligned} \mathsf{Disc}(f) &:= \big\{c \in [a, b] \colon \; f \text{ n'est pas continue en } c\big\} \\ &= \bigcup_{\varepsilon > 0} \mathsf{Osc}_\varepsilon(f). \end{aligned}}$$

Lemme 11.13. *Pour* $\varepsilon > 0$ *fixé quelconque, le sous-ensemble :*

$$\mathsf{Osc}_\varepsilon(f) \;\subset\; [a, b]$$

est fermé*, donc* compact.

Démonstration. En raisonnant par l'absurde, supposons qu'il existe une suite de points dans ce sous-ensemble :

$$\big(c_n\big)_{n \geqslant 1} \;\in\; \mathsf{Osc}_\varepsilon(f)$$

qui tend vers un point $c \in [a, b]$ qui ne lui appartient *plus :*

$$c_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} c \;\notin\; \mathsf{Osc}_\varepsilon(f).$$

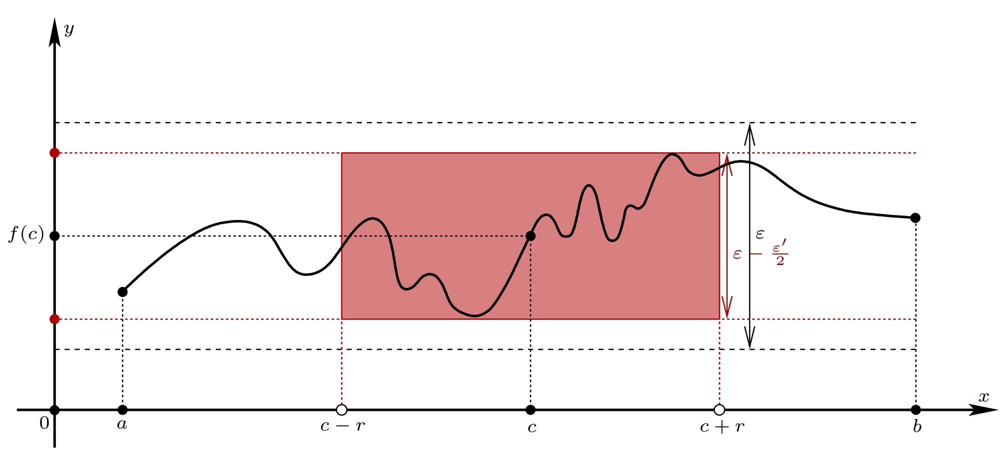
Ceci veut dire qu'en ce point, l'oscillation de f est strictement inférieure :

$$\mathsf{oscillation}(f, c) \;<\; \varepsilon,$$

ce qu'on peut ré-exprimer en disant qu'elle est égale à :

$$\varepsilon - \varepsilon' = \mathsf{oscillation}(f, c),$$

pour un certain $\varepsilon' > 0$ strictement positif.



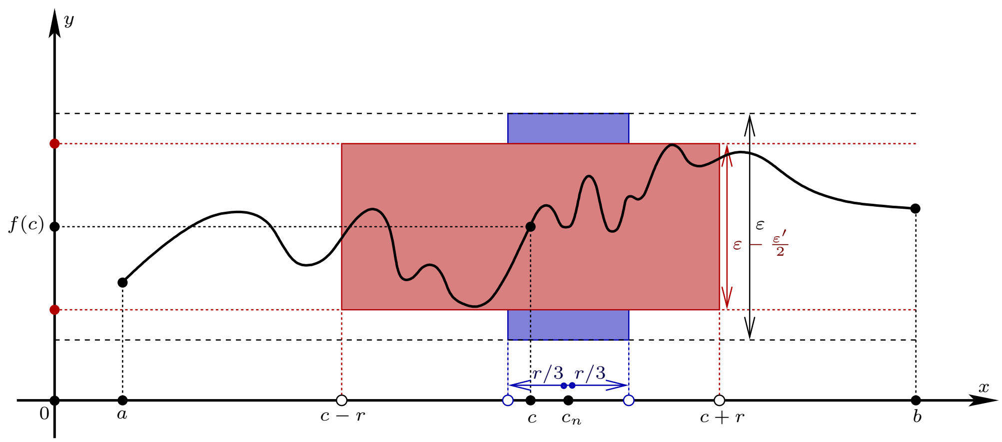
Or par définition, cette oscillation est une limite décroissante :

$$\varepsilon - \varepsilon' \,=\, \lim_{r \to 0} \underset{[c-r, c+r]}{\mathsf{oscillation}}(f),$$

donc il existe un $r > 0$ assez petit pour que :

$$\underset{[c-r, c+r]}{\mathsf{oscillation}}(f) \,\leqslant\, \varepsilon - \frac{\varepsilon'}{2} \,<\, \varepsilon,$$

soit toujours strictement inférieur à ε.



Ensuite, comme $c_n \to c$ tend vers c, prenons un entier $n \gg 1$ assez grand pour que :

$$\big|c_n - c\big| \,\leqslant\, \frac{r}{3}.$$

En de tels points :

$$c_n \,\in\, \mathsf{Osc}_\varepsilon(f),$$

l'oscillation sur un intervalle est bien entendu supérieure à l'oscillation-limite :

$$\begin{aligned} \underset{[c_n - r/3,\, c_n + r/3]}{\mathsf{oscillation}}(f) \,&\geqslant\, \mathsf{oscillation}(f, c_n) \\ &\geqslant\, \varepsilon. \end{aligned}$$

Mais alors, puisqu'on a arrangé les choses de manière à avoir l'inclusion :

$$\big[c_n - \tfrac{r}{3},\ c_n + \tfrac{r}{3}\big] \,\subset\, \big[c - r,\ c + r\big],$$

on déduit un jeu d'inégalités :

$$\begin{aligned} \varepsilon \,&\leqslant\, \underset{[c_n - r/3,\, c_n + r/3]}{\mathsf{oscillation}}(f) \\ &=\, \sup_{x, y \in [c_n - r/3,\, c_n + r/3]} \big|f(x) - f(y)\big| \\ &\leqslant\, \sup_{x, y \in [c - r,\, c + r]} \big|f(x) - f(y)\big| \\ &=\, \underset{[c - r,\, c + r]}{\mathsf{oscillation}}(f) \\ &\leqslant\, \varepsilon - \frac{\varepsilon'}{2}, \end{aligned}$$

qui apporte une contradiction terminant l'argumentation. Géométriquement, la courbe qui est enfermée dans une boîte de hauteur $\varepsilon - \frac{\varepsilon'}{2}$ ne peut plus dépasser jusqu'à une hauteur ε autour de c_n. □

Démonstration du Théorème 11.6. Montrons la première implication :

$$\Big(f \text{ est Riemann-intégrable}\Big) \implies \Big(0 = \mathsf{Mesure}\big(\mathsf{Disc}(f)\big)\Big).$$

Nous savons que l'ensemble des points de discontinuité de f :

$$\mathsf{Disc}(f) \,=\, \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathsf{Osc}_{\frac{1}{n}}(f)$$

est la réunion *dénombrable* des ensembles où l'oscillation de f est $\geqslant 1/n$. Grâce au Lemme 11.5 d'après lequel la nullité de la mesure est stable par réunion dénombrable, il suffit de montrer pour tout $n \geqslant 1$ que :

$$0 \,=\, \mathsf{Mesure}\big(\mathsf{Osc}_{\frac{1}{n}}(f)\big).$$

Comme f est par hypothèse Riemann-intégrable, il existe une subdivision :

$$\Delta = \big\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{\nu-1} < x_\nu = b\big\}$$

de l'intervalle $[a, b]$ telle que :

$$\Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) \,\leqslant\, \frac{\varepsilon}{n}.$$

Soit un point quelconque :

$$x \,\in\, \mathsf{Osc}_{\frac{1}{n}}(f).$$

Il se peut que x soit l'un des points $a, x_1, \dots, x_{\nu-1}, b$ de la subdivision Δ, mais comme ces points sont en nombre *fini*, donc de mesure nulle, il suffit même de montrer :

Assertion 11.14. *Pour tout $n \geqslant 1$, on a :*

$$0 \,=\, \mathsf{Mesure}\big(\mathsf{Osc}_{\frac{1}{n}}(f)\big\backslash\{a, x_1, \dots, x_{\nu-1}, b\}\big).$$

Démonstration. L'intérêt, c'est que maintenant dans l'intervalle $[a, b]$ excisé de ces points, on n'a plus affaire qu'à des intervalles *ouverts :*

$$\mathring{I}_\kappa :=]x_{\kappa-1},\, x_\kappa[\qquad\qquad {\scriptstyle (1 \leqslant \kappa \leqslant \nu)},$$

lesquels conviendront mieux dans les arguments techniques. En effet, soit un point quelconque :

$$x \,\in\, \mathsf{Osc}_{\frac{1}{n}}(f)\big\backslash\{a, x_1, \dots, x_{\nu-1}, b\},$$

donc appartenant à un certain tel intervalle ouvert :

$$x \,\in\, \mathring{I}_\kappa \cap \mathsf{Osc}_{\frac{1}{n}}(f).$$

Alors par définition de l'oscillation de f en x :

$$\begin{aligned} \sup_{]x_{\kappa-1},\, x_\kappa[} f - \inf_{]x_{\kappa-1},\, x_\kappa[} f \,&\geqslant\, \mathsf{oscillation}(f, x) \\ &\geqslant\, \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

En revenant à la différence entre les sommes de Darboux supérieure et inférieure, on peut donc minorer :

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon}{n} &\geqslant \Sigma^{\Delta}(f) - \Sigma_{\Delta}(f)\\ &= \sum_{\kappa=1}^{\nu} \big|I_\kappa\big| \Big(\sup_{I_\kappa} f - \inf_{I_\kappa} f\Big)\\ &\geqslant \sum_{\big\{\kappa\colon\, \overset{\circ}{I}_\kappa \cap \mathsf{Osc}_{1/n}(f) \neq \emptyset\big\}} \big|I_\kappa\big| \cdot \frac{1}{n},\end{aligned}$$

ce qui, après division par $\frac{1}{n}$ donne la majoration :

$$\sum_{\big\{\kappa\colon\, \overset{\circ}{I}_\kappa \cap \mathsf{Osc}_{1/n}(f) \neq \emptyset\big\}} \big|I_\kappa\big| \,\leqslant\, \varepsilon,$$

et montre bien, finalement, qu'on a recouvert l'ensemble $\mathsf{Osc}_{\frac{1}{n}}(f)\big\backslash\{a, x_1, \dots, x_{\nu-1}, b\}$ par une réunion d'intervalles ouverts de mesure arbitrairement petite. $\square$

Montrons maintenant la deuxième implication :

$$\Big(f \text{ est Riemann-intégrable}\Big) \quad \Longleftarrow \quad \Big(0 = \mathsf{Mesure}\big(\mathsf{Disc}(f)\big)\Big).$$

Soit donc f une fonction dont les discontinuités sont de mesure nulle. Comme nous savons que l'ensemble de ces discontinuités est la réunion des points où l'oscillation est strictement positive :

$$\mathsf{Disc}(f) \,=\, \bigcup_{\varepsilon>0} \mathsf{Osc}_\varepsilon(f),$$

fixons donc un tel $\varepsilon > 0$. Par hypothèse :

$$0 \,=\, \mathsf{Mesure}\big(\mathsf{Osc}_\varepsilon(f)\big),$$

et comme ce sous-ensemble :

$$\mathsf{Osc}_\varepsilon(f) \subset [a, b]$$

est fermé grâce au Lemme 11.13, donc compact, le Lemme 11.2 assure qu'il existe un nombre *fini* $N \geqslant 1$ d'intervalles *ouverts* $I_k \subset \mathbb{R}$ le recouvrant :

$$\mathsf{Osc}_\varepsilon(f) \,\subset\, I_1 \cup \cdots \cup I_N,$$

et de longueur totale :

$$|I_1| + \cdots + |I_N| \,\leqslant\, \varepsilon.$$

Maintenant, ces I_k étant ouverts, le complémentaire :

$$[a, b]\big\backslash\big(I_1 \cup \cdots \cup I_N\big)$$

est fermé, borné, donc compact, et en l'un quelconque de ses points :

$$\begin{aligned} z \,&\in\, [a, b]\big\backslash\big(I_1 \cup \cdots \cup I_N\big)\\ &\subset\, [a, b]\big\backslash \mathsf{Osc}_\varepsilon(f)\\ &=\, [a, b]\big\backslash\big\{c \in [a, b]\colon\, \mathsf{oscillation}(f, c) \geqslant \varepsilon\big\}\end{aligned}$$

on a manifestement :

$$\mathsf{oscillation}(f, z) \,<\, \varepsilon.$$

Par conséquent, autour de tout tel point z, il existe un certain intervalle ouvert $J_z \ni z$ assez petit pour que l'oscillation associée de f satisfasse :

$$\sup_{x,y\in J_z} \big|f(x) - f(y)\big| \leqslant \varepsilon.$$

Le Théorème 3.5 de Heine-Borel assure alors que du recouvrement ouvert infini :

$$\bigcup_z J_z \supset [a,b] \backslash \big(I_1 \cup \cdots \cup I_N\big)$$

on peut extraire un recouvrement *fini*, que l'on notera :

$$J_1 \cup \cdots \cup J_M,$$

et donc au total les $I_\bullet$ et les $J_\bullet$ recouvrent tout l'intervalle de définition de f :

$$I_1 \cup \cdots \cup I_N \bigcup J_1 \cup \cdots \cup J_M \supset [a,b].$$

Maintenant, si nous prenons tous les points-extrémités de ces $(N+M)$ intervalles $I_\bullet$ et $J_\bullet$ qui appartiennent à $[a,b]$, nous obtenons une certaine subdivision :

$$\Delta = \big\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{\nu-1} < x_\nu = b\big\}.$$

Assertion 11.15. *Alors les sommes de Darboux supérieure et inférieure de f associées à cette subdivision satisfont :*

$$\Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) \leqslant \varepsilon\Big(2\sup_{[a,b]}|f| + b - a\Big).$$

Démonstration. En effet, remémorons-nous que cette différence s'explicite comme :

$$\Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \big(x_\kappa - x_{\kappa-1}\big)\Big(\sup_{[x_{\kappa-1},x_\kappa]} f - \inf_{[x_{\kappa-1},x_\kappa]} f\Big).$$

Alors si dans cette somme de ν termes, nous distinguons deux cas — pas forcément exclusifs (exercice mental) — :

Cas 1 : $[x_{\kappa-1},\, x_\kappa] \subset I_\bullet$,

Cas 2 : $[x_{\kappa-1},\, x_\kappa] \subset J_\bullet$,

nous pouvons la majorer comme suit :

$$\begin{aligned}
\Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) &\leqslant \sum_{\{\kappa\colon [x_{\kappa-1},x_\kappa]\subset I_\bullet\}} \big(x_\kappa - x_{\kappa-1}\big)\underbrace{\Big(\sup_{[x_{\kappa-1},x_\kappa]} f - \inf_{[x_{\kappa-1},x_\kappa]} f\Big)}_{\leqslant \sup_{[a,b]} f - \inf_{[a,b]} f} + \sum_{\{\kappa\colon [x_{\kappa-1},x_\kappa]\subset J_\bullet\}} \big(x_\kappa - x_{\kappa-1}\big)\underbrace{\Big(\sup_{[x_{\kappa-1},x_\kappa]} f - \inf_{[x_{\kappa-1},x_\kappa]} f\Big)}_{\leqslant \varepsilon, \text{ car } [x_{\kappa-1},x_\kappa] \text{ est un } J_\bullet} \\
&\leqslant \Big(\sup_{[a,b]} f - \inf_{[a,b]} f\Big) \sum_{\{\kappa\colon [x_{\kappa-1},x_\kappa]\subset I_\bullet\}} \big(x_\kappa - x_{\kappa-1}\big) + \varepsilon \sum_{\kappa=1}^{\nu} \big(x_\kappa - x_{\kappa-1}\big) \\
&\leqslant \Big(2\sup_{[a,b]}|f|\Big)\big(\underbrace{|I_1| + \cdots + |I_N|}_{\leqslant \varepsilon}\big) + \varepsilon\,(b-a) \\
&\leqslant \varepsilon\Big(2\sup_{[a,b]}|f| + b - a\Big),
\end{aligned}$$

ce qui conclut. □

Puisque $\varepsilon > 0$ était arbitrairement petit, cette dernière assertion montre bien que f est Riemann-intégrable, terminant donc le traitement de la deuxième implication.

La démonstration très détaillée de l'équivalence entre Riemann-intégrabilité et nullité de la mesure de l'ensemble des points de discontinuité est donc achevée. $\square$

12. Fonctions non Riemann-intégrables

Exemple 12.1. [Fonction de Dirichlet non Riemann-intégrable] La fonction indicatrice des nombres rationnels sur l'intervalle $[0,1]$:

$$\mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} = \begin{cases} 1 & \text{lorsque } \ x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \ \text{ est un nombre rationnel,} \\ 0 & \text{lorsque } \ x \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \cap [0,1] \ \text{ est un nombre } \textit{ir}\text{rationnel,} \end{cases}$$

est manifestement bornée.

Nous affirmons qu'elle n'est pas Riemann-intégrable.

En effet, pour toute subdivision de l'intervalle $[a,b]$:

$$\Delta = \big\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\big\},$$

grâce à la densité des nombres rationnels et à la densité des nombres irrationnels, pour tout $k = 1, \dots, n$, il existera toujours simultanément :

- au moins un nombre rationnel $\frac{p_k}{q_k} \in [x_{k-1}, x_k] \cap \mathbb{Q}$,
- au moins un nombre irrationnel $\alpha_k \in [x_{k-1}, x_k] \cap \big(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\big)$,

d'où nous déduisons :

$$\begin{aligned} 1 &= \sup_{I_k} \big(\mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}\big), \\ 0 &= \inf_{I_k} \big(\mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}\big), \end{aligned}$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned} \Sigma^{\Delta}\big(\mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}\big) &= \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{x_1}) \cdot 1 = 1, \\ \Sigma_{\Delta}\big(\mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}\big) &= \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{x_1}) \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

et donc puisque cela est vrai pour *toute* subdivision Δ, il n'y a absolument aucune chance de rendre l'erreur $\Sigma^{\Delta} - \Sigma_{\Delta}$ inférieure à un nombre $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit donné à l'avance.

Dans peu de temps, nous verrons que la théorie supérieure de l'intégrale de Lebesgue démontre que cette fonction 'Riemann-pathologique' $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ est en fait intégrable au sens de Lebesgue et qu'elle satisfait :

$$0 = \int_0^1 \mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}, \qquad \textit{et} \qquad 1 = \int_0^1 \mathbf{1}_{(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})\cap[0,1]},$$

ce qui est en cohérence avec le fait qu'il y a infiniment plus de nombres irrationnels que de nombres rationnels.

Notation 12.2. On note :

$$\mathscr{R}[a,b] := \Big\{ f\colon\, [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}\colon\; f \text{ est Riemann-intégrable} \Big\}.$$

Cet ensemble est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Définition 12.3. Sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie ou infinie, on appelle *semi-norme* une application :

$$N\colon \quad E \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

qui satisfait :

(i) [Homogénéité] pour tous $\lambda \in \mathbb{C}$ et $f \in E$:

$$N(\lambda\, f) = |\lambda|\, N(f);$$

(ii) [Inégalité triangulaire] pour tous $f, g \in E$:

$$N(f+g) \,\leqslant\, N(f) + N(g).$$

Dans cette définition, la troisième condition très forte nécessaire pour avoir une vraie norme :

$$N(f) = 0 \implies f = 0,$$

n'est *pas* demandée.

Proposition 12.4. *L'application :*

$$\begin{aligned} \mathscr{R}[a,b] &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ f &\longmapsto \int_a^b \big|f(x)\big|\, dx \end{aligned}$$

est une semi-norme.

Démonstration. La propriété **(i)** étant facile, pour vérifier **(ii)**, il suffit d'appliquer point par point l'inégalité triangulaire sur $\mathbb{C}$:

$$\big|f(x) + g(x)\big| \,\leqslant\, |f(x)| + |g(x)|,$$

et d'intégrer. □

Cette semi-norme intégrale de la valeur absolue d'une fonction n'est *pas* une norme — penser à une fonction en escalier nulle sur ses intervalles de définition et non nulle en leurs extrémités. *La théorie supérieure de Lebesgue montrera comment étendre le concept d'intégrale et comment mieux envisager les fonctions à une certaine équivalence près, afin que l'intégrale de la valeur absolue d'une fonction devienne une vraie norme*.

13. **Exercices**

Exercice 1. Montrer que la fonction $f\colon\;]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $x \longmapsto \frac{1}{x(1-x)}$ est continue, mais qu'elle n'est pas uniformément continue.

Exercice 2. Soient deux réels a et b avec $-\infty < a \leqslant b < \infty$, et soit l'intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$. On suppose comme dans le Théorème 3.5 que $[a,b] \subset \bigcup_{j\in J} I_j$ est recouvert par une réunion quelconque d'intervalles ouverts non vides $I_j \subset \mathbb{R}$, et on introduit l'ensemble :

$$\mathscr{C} := \big\{ c \in [a,b]\colon\; \text{l'intervalle } [a,c] \text{ admet un sous-recouvrement } \textit{fini} \text{ extrait de } \cup_{j\in J}\, I_j \big\}.$$

(a) Montrer que $a \in \mathscr{C}$.

(b) Pour $c \in \mathscr{C}$, montrer que tout c' avec $a \leqslant c' \leqslant c$ appartient aussi à $\mathscr{C}$.

(c) En déduire qu'il existe $b^* \in [a,b]$ tel que $\mathscr{C} = [a, b^*[$, ou tel que $\mathscr{C} = [a, b^*]$.

(d) Montrer qu'en fait, $b^* \in \mathscr{C}$.

(d) Montrer enfin que $b^* = b$ et conclure.

Exercice 3. Démontrer le Théorème 3.7.

Exercice 4. Montrer qu'une fonction bornée $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, où $-\infty < a < b < \infty$, est Riemann-intégrable si et seulement si son opposée $-f$ l'est.

Exercice 5. Montrer que la Définition 2.3 de Riemann-intégrabilité d'une fonction bornée $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ en termes de sommes de Darboux inférieure et supérieure dans lesquelles les $\inf$ et les $\sup$ sont pris sur des intervalles *fermés* $[x_{k-1}, x_k]$ est équivalente à celle où l'on prendrait les $\inf$ et les $\sup$ sur des intervalles *ouverts* $]x_{k-1}, x_k[$, à savoir plus précisément, montrer que f est Riemann-intégrable si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision :

$$\Delta = \big\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\big\}$$

de l'intervalle $[a,b]$ telle que :

$$\big(0 \leqslant\big) \qquad \Sigma_{\sim}^{\Delta} - \Sigma_{\Delta}^{\sim} \leqslant \varepsilon,$$

où :

$$\Sigma_{\Delta}^{\sim} := \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - x_{k-1}\big) \inf_{x_{k-1} < x < x_k} f(x),$$

$$\Sigma_{\sim}^{\Delta} := \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - x_{k-1}\big) \sup_{x_{k-1} < x < x_k} f(x).$$

Exercice 6. Montrer qu'une fonction bornée définie sur un intervalle compact est Riemann-intégrable si et seulement si elle est approchable en dessous et au-dessus par deux fonctions en escalier dont les valeurs intégrales peuvent être rendues arbitrairement proches, comme cela est stipulé dans la Proposition (4.8).

Exercice 7. Établir rigoureusement les propriétés **(ii)**, **(iii)** et **(iv)** du Théorème 5.1.

Exercice 8. Soit une fonction bornée $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Si $|f|$ est Riemann-intégrable, f l'est-elle ?

Exercice 9. Comparer $\int_0^2 f(x)\, g(x)\, dx$ et le produit $\int_0^2 f(x)\, dx \times \int_0^2 g(x)\, dx$ lorsque $f = \mathbf{1}_{[0,1]}$ et $g = \mathbf{1}_{]1,2]}$.

Exercice 10. Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz du Théorème 5.14 satisfaite par les paires de fonctions Riemann-intégrables en raisonnant avec des sommes de Darboux et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz discrète :

$$\Big(\lambda_1\mu_1 + \cdots + \lambda_{\rm N}\mu_{\rm N}\Big)^2 \leqslant \Big(\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_{\rm N}^2\Big)\Big(\mu_1^2 + \cdots + \mu_{\rm N}^2\Big).$$

Exercice 11. Soit $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction bornée Riemann-intégrable définie sur un intervalle compact $[a,b] \Subset \mathbb{R}$, et soit un point $x_0 \in]a,b[$. Montrer que si f admet une limite *à gauche* en x_0, à savoir si :

$$\lim_{x \underset{<}{\rightarrow} x_0} f(x) =: f^-(x_0) \quad \text{existe},$$

alors la fonction F définie par :

$$F(x) := \int_a^x f(t)\, dt$$

est dérivable *à gauche* en x_0 avec une valeur de sa dérivée à gauche $F'^-(x_0)$ justement égale à :

$$f^-(x_0) = F'^-(x_0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{h \underset{<}{\rightarrow} 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h}.$$

Traiter aussi le cas des limites à droite.

Exercice 12. Sans supposer f continue comme dans les Corollaires 7.3, 7.4, et en raisonnant avec des sommes de Darboux, montrer que si f est Riemann-intégrable sur les intervalles appropriés, les deux formules élémentaires :

$$\int_a^b f(x+c)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(y)\,dy \qquad {\scriptstyle (c\,\in\,\mathbb{R})},$$

$$c\int_a^b f(cx)\,dx = \int_{ac}^{bc} f(y)\,dy \qquad {\scriptstyle (c\,\in\,\mathbb{R}^*)},$$

sont encore valables.

Exercice 13. Le but est de démontrer que toute fonction qui est limite uniforme de fonctions Riemann-intégrables est encore Riemann-intégrable.

Sur un sous-ensemble quelconque $E \subset \mathbb{R}$, on suppose donnée une suite de fonctions $f_n \colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ qui converge uniformément vers une certaine fonction $f \colon E \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \geqslant n_\varepsilon \quad \forall\, x \in E \quad \big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \varepsilon.$$

(a) Montrer que f est elle aussi bornée.

(b) Montrer que pour tout $n \geqslant n_\varepsilon$:

$$\Big|\inf_E f_n - \inf_E f\Big| \leqslant \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \Big|\sup_E f_n - \sup_E f\Big| \leqslant \varepsilon,$$

et en déduire que :

$$\inf_E f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \inf_E f \qquad \text{et} \qquad \sup_E f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sup_E f.$$

On suppose dorénavant que $E = [a,b]$ avec $-\infty < a < b < \infty$ et on ajuste n_ε pour que :

$$n \geqslant n_\varepsilon \implies \bigg(\forall\, x \in [a,b] \quad \big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}\bigg).$$

(c) Si Δ est une subdivision quelconque de $[a,b]$, montrer que pour tout $n \geqslant n_\varepsilon$:

$$\Sigma_\Delta(f_n) - \varepsilon \leqslant \Sigma_\Delta(f) \leqslant \Sigma^\Delta(f) \leqslant \Sigma^\Delta(f_n) + \varepsilon.$$

(d) Montrer que f est Riemann-intégrable.

(e) On appelle *fonction réglée* toute fonction qui est limite uniforme de fonctions en escalier. Montrer que les fonctions réglées sont Riemann-intégrables.

(f) Montrer que la fonction indicatrice :

$$\mathbf{1}_K$$

de l'ensemble :

$$K := \big\{1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2^2},\ \tfrac{1}{2^3},\ \tfrac{1}{2^4},\ \tfrac{1}{2^5},\ \dots\big\}$$

est Riemann-intégrable mais n'est pas réglée.

Exercice 14. **(a)** Montrer qu'une fonction réglée $f \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ admet toujours des limites à droites et à gauche en tout point $x_0 \in [a,b]$.

(b) Montrer que la fonction $f \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = \sin(1/x)$ pour $0 < x \leqslant 1$ est Riemann-intégrable mais pas réglée.

Exercice 15. Soit $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique :

$$f(\theta + 2k\,\pi) = f(\theta) \qquad {\scriptstyle (\forall\,\theta\,\in\,\mathbb{R},\ \forall\,k\,\in\,\mathbb{Z})},$$

bornée :

$$M_{|f|} = \sup_{\theta\in[-\pi,\pi]} |f(\theta)| < \infty,$$

et Riemann-intégrable. Montrer qu'il existe une suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ de fonctions continues *et* 2π-périodiques :

$$f_n \colon \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C},$$

avec :

$$\sup_{\theta\in[-\pi,\pi]} |f_n(\theta)| \leqslant M_{|f|},$$

telles que :

$$0 = \lim_{n \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \big|f_n(\theta) - f(\theta)\big| \, d\theta.$$

Exercice 16. Soit une fonction réelle $f \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité $c \in [a, b]$ de f qui sont de *première espèce* au sens où f admet des limites à gauche et à droite en c, est un sous-ensemble de $[a, b]$ de cardinal au plus dénombrable.

Exercice 17. Montrer que l'oscillation à l'infini de la suite $n \longmapsto \cos n$ vaut 2.

Exercice 18. Montrer que la fonction $x \longmapsto 1/x$ de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ prolongée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $0 \mapsto 0$ a une oscillation égale à ∞ en $x = 0$, et une oscillation nulle ailleurs.

Montrer que la fonction $x \longmapsto \sin(1/x)$ de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ prolongée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $0 \mapsto 0$ a une oscillation égale à 2 en $x = 0$, et une oscillation nulle ailleurs.

Exercice 19. **(a)** Montrer que la fonction $f \colon [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{lorsque } x \text{ est irrationnel,} \\ 1 & \text{lorsque } x = 0, \\ \dfrac{1}{q} & \text{lorsque } x = \dfrac{p}{q} \text{ est une fraction irréductible,} \end{cases}$$

est Riemann-intégrable. Indication: Étant donné $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, construire une subdivision Δ de $[0, 1]$ telle que $\Sigma^{\Delta}(f) \leqslant \varepsilon$. Une autre démonstration consiste à établir que f est limite uniforme de fonctions en escalier.

(b) Utiliser cette fonction et la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ des rationnels de $[0, 1]$ pour montrer que la Riemann-intégrabilité n'est pas stable par composition.

(c) Utiliser de même la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ des rationnels de $[0, 1]$ pour montrer que la Riemann-intégrabilité n'est pas stable par limite simple.

Exercice 20. Le but est de donner une preuve alternative du Théorème 5.8. Soit $f \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée Riemann-intégrable définie sur un intervalle borné compact $[a, b] \Subset \mathbb{R}$, et soit φ une fonction définie sur un segment contenant $f([a, b])$.

(a) Lorsque φ est 1-lipschitzienne, montrer que $\varphi \circ f$ est Riemann-intégrable.

(b) Montrer que toute fonction continue sur un segment borné de $\mathbb{R}$ est limite uniforme de fonctions 1-lipschitziennes. Indication: Approximer φ par des fonctions affines par morceaux.

(c) En déduire que si φ est continue, alors $\varphi \circ f$ est Riemann-intégrable.

Exercice 21. Démontrer les trois résultats suivants :

(a)
$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} \,=\, \log 2;$$

(b)
$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{(n+k)^2} \,=\, \frac{1}{2};$$

(c)
$$\lim_{n \to \infty} n \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k^2} \,=\, \frac{1}{2}.$$

Exercice 22. Démontrer les trois résultats suivants :

(a)
$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2\,kn}} \,=\, \sqrt{3} - 1;$$

(b)
$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{2n} \frac{k}{k^2 + n^2} \,=\, \frac{1}{2} \log 5;$$

(c)
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{n-k}{n^3+n^2\,k}} \;=\; \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \;=\; \frac{\pi}{2}-1.$$

Exercice 23. En utilisant les sommes de Riemann, calculer les limites des suites suivantes :
$$a_n := \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{2\,n+3\,k}, \qquad b_n := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \cos^2\Big(\frac{k\,\pi}{n}\Big), \qquad c_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n^2-k^2}}{n^2},$$
$$d_n := \sum_{k=n}^{2\,n} \frac{\pi}{k}, \qquad e_n := \sum_{k=n}^{2\,n} \sin\Big(\frac{\pi}{k}\Big), \qquad f_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k^2}{n^3+k^3},$$
$$g_n := n^2 \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{4\,k}{n^2}}}.$$

Exercice 24. Calculer les trois limites suivantes :
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\log\big(\frac{k}{n}\big)}{n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos\big(\frac{k\pi}{2}\,n\big)}{n}.$$

Exercice 25. Évaluer les limites des deux sommes de Riemann suivantes :

(a)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 \sin\left(\frac{k\,\pi}{n}\right);$$

(b)
$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{1/n}.$$

Exercice 26. En utilisant les sommes de Riemann, calculer, si elle existe, la limite :
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\Big(\frac{n}{n^2+k^2}\Big).$$

Exercice 27. Sur un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ avec $-\infty < a < b < \infty$, soit une fonction continue positive $f \in \mathscr{C}^0\big([a,b],\mathbb{R}_+\big)$. Montrer que l'on a :
$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b \big[f(x)\big]^n\,dx\right)^{1/n} \;=\; \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

Exercice 28. Sur l'intervalle unité $[0,1]$, soit une fonction continue $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Déterminer :
$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 x^n\,f(x)\,dx.$$

Exercice 29. Pour $x \geqslant 0$ et $x \neq 1$, calculer :
$$\int_0^{2\pi} \log\big(1-2\,x\cos\theta+x^2\big)\,d\theta.$$

Indication: On utilisera les sommes de Riemann après avoir remarqué que $1-2x\cos\theta+x^2 = \big|1-x\,e^{i\,\theta}\big|^2$.

Exercice 30. Soit $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue, où $-\infty < a < b < \infty$.
(a) Montrer qu'il existe une subdivision $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ de $[a,b]$ telle que :
$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\,dt = \frac{1}{n}\int_a^b f(t)\,dt,$$
pour tout $k = 1,\ldots,n$.
(b) Étudier :
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}).$$

Exercice 31. Soit une fonction continue $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, où $[a,b] \Subset \mathbb{R}$ est un segment compact. Pour $n \geqslant 1$ quelconque, montrer que la fonction :

$$F_n(x) := \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\, f(t)\, dt$$

est une *primitive* n-*ème* de f au sens où $\frac{d^n F_n}{dx^n} = f$.

Exercice 32. Sur l'intervalle $[1,2] \subset \mathbb{R}$, on considère la fonction $f\colon x \mapsto \frac{1}{x^2}$. Pour un entier $n \geqslant 1$ quelconque, on note Δ_n la subdivision de $[1,2]$ équidistribuée en n intervalles tous de longueur $\frac{1}{n}$.

(a) Montrer que la somme de Darboux supérieure $\Sigma^{\Delta_n}(f)$ de f s'exprime comme :

$$\Sigma^{\Delta_n}(f) \,=\, n \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{(n+j)^2}.$$

(b) Établir les deux inégalités suivantes :

$$n \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{(n+j)(n+j+1)} \,<\, \Sigma^{\Delta_n}(f) \,<\, n \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{(n+j-1)(n+j)}.$$

(c) Montrer que :

$$\frac{1}{2} \,<\, \Sigma^{\Delta_n}(f) \,<\, \frac{n(n-2)}{n(2\,n-1)}.$$

Indication: Utiliser l'identité élémentaire :

$$\frac{1}{k(k+1)} \,=\, \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

(d) En déduire que :

$$\lim_{n\to\infty} \Sigma^{\Delta_n}(f) \,=\, \frac{1}{2}.$$

Exercice 33. [Première formule de la moyenne] Sur un segment compact $[a,b] \Subset \mathbb{R}$, soient deux fonctions Riemann-intégrables :

$$f,\, g\colon \quad [a,b] \longrightarrow \mathbb{R},$$

avec $g \geqslant 0$ *positive*.

(a) Montrer qu'il existe un nombre réel μ avec :

$$\inf f([a,b]) \,\leqslant\, \mu \,\leqslant\, \sup f([a,b])$$

tel que :

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \,=\, \mu \int_a^b g(x)\, dx.$$

(b) Si de plus f est *continue*, montrer qu'il existe un nombre réel $c \in [a,b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \,=\, f(c) \int_a^b g(x)\, dx.$$

Exercice 34. [Deuxième formule de la moyenne] Sur un segment compact $[a,b] \Subset \mathbb{R}$, soient deux fonctions Riemann-intégrables :

$$f,\, g\colon \quad [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

On suppose que f est *positive*, continûment différentiable, *décroissante*, et que g est *continue*.

(a) Introduire la fonction de $x \in [a,b]$ définie par :

$$G(x) := \int_a^x g(t)\, dt,$$

et montrer que :

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \,=\, f(b)\, G(b) - \int_a^b f'(x)\, G(x)\, dx.$$

(b) Montrer que :

$$\big(f(a)-f(b)\big)\inf_{[a,b]} G \leqslant \int_a^b \big(-f'(x)\big)\,G(x)\,dx \leqslant \big(f(a)-f(b)\big)\sup_{[a,b]} G.$$

(c) Montrer que :

$$f(a)\inf_{[a,b]} G \leqslant \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leqslant f(a)\sup_{[a,b]} G.$$

(d) En déduire le *second théorème de la moyenne*, à savoir montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(a)\int_a^c g(x)\,dx.$$

Exercice 35. Soient $f,g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions bornées définies sur un segment compact $[a,b] \Subset \mathbb{R}$ qui coïncident sauf en un nombre fini de points :

$$f(x) = g(x), \qquad \forall\, x \in [a,b]\backslash\{c_1,\dots,c_N\}.$$

Montrer que f est Riemann-intégrable si et seulement si g l'est, et lorsqu'il en est ainsi, montrer l'égalité :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

Exercice 36. Sur l'intervalle $[0,1]$, pour $n \geqslant 1$ entier, soit la subdivision Δ dont les points sont $x_k := \frac{k}{n}$ pour $k = 0,1,\dots,n$. Calculer les sommes de Darboux inférieure $\Sigma_\Delta(f)$ et supérieure $\Sigma^\Delta(f)$ pour la fonction $f(x) := x^2$. En déduire que $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$. Indication: Utiliser la formule $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 37. Sur un intervalle fermé $[a,b] \subset \mathbb{R}$ avec $-\infty < a < b < \infty$, soit une fonction continue $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant :

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

Montrer que f est en fait une fonction constante.

Exercice 38. Sur l'intervalle unité fermé $[0,1] \subset \mathbb{R}$ soit une fonction continue $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\frac{1}{2} = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$.

Exercice 39. Soit $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

(a) Si $g\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction en escalier, montrer que la fonction produit $f\,g$ est Riemann-intégrable sur $[0,1]$.

(b) Si, pour *toute* fonction en escalier $g\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, on a :

$$0 = \int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx,$$

montrer qu'en fait, la fonction f est nécessairement identiquement nulle.

Exercice 40. Soient trois nombres réels a, b, c avec $a \leqslant c < b$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, on définit la fonction $g_n\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) := \begin{cases} n & \text{lorsque } x \in [c, c+1/n], \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

(a) Si $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, montrer que l'on a :

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\,g_n(x)\,dx = f(c).$$

(b) Si $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction croissante, montrer que l'on a :

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\, g_n(x)\, dx \;=\; \lim_{\substack{x \to c \\ >}} f(x).$$

Exercice 41. Soit $\{q_k \colon k \geqslant 1\}$ une énumération des nombres rationnels de $\mathbb{Q} \cap [0,1[$, et soit $(a_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de nombres réels strictement positifs de somme :

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1.$$

On définit la fonction $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ par $f(0) := 0$, et pour $x > 0$ par :

$$f(x) := \sum_{k \in Q(x)} a_k, \qquad\qquad Q(x) := \big\{k \geqslant 1 \colon\; q_k \in [0,x[\,\big\}.$$

(a) Vérifier que $f(1) = 1$, et montrer que f est Riemann-intégrable.

(b) Montrer que f est discontinue en tout point rationnel de $[0,1[$, mais qu'elle est continue en tout point irrationnel.

Exercice 42. **(a)** Soit $f\colon [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) := \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{\sin x}\right) & \text{lorsque } \; x \neq 0, \pi, 2\pi, \\ 0 & \text{lorsque } \; x = 0, \pi, 2\pi. \end{cases}$$

Montrer que f est Riemann-intégrable.

(b) Soit $g\colon [0, 1/\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$g(x) := \begin{cases} \mathsf{signe}\big(\sin(1/x)\big) & \text{lorsque } \; x \neq 1/k\pi, \;\; k \in \mathbb{N}^*, \\ 0 & \text{lorsque } \; x = 0 \;\text{ ou }\; x = 1/k\pi, \;\; k \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Montrer que g est Riemann-intégrable.

Exercice 43. Soit $[a,b] \Subset \mathbb{R}$ un segment compact, soit $f_n \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite de fonctions dérivables dont les dérivées $f_n' \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sont toutes Riemann-intégrables. On suppose que $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ converge simplement, et que $f_n' \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g$ converge uniformément, où $g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue. Montrer que f est continûment différentiable sur $[a,b]$ et que $f' = g$.

Exercice 44. **(a)** Étant donné un segment compact $[c,d] \Subset \mathbb{R}$ et une fonction bornée quelconque $g\colon [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$, montrer que :

$$\sup_{x,\, y \in [c,d]} \big|g(x) - g(y)\big| \;=\; \sup_{[c,d]} g - \inf_{[c,d]} g.$$

Cette quantité commune est appelée l'*oscillation* de g sur $[c,d]$ et est notée :

$$\operatorname*{osc}_{[c,d]} g.$$

(b) Soit $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée sur un intervalle $[a,b] \Subset \mathbb{R}$ muni d'une subdivision :

$$\Delta = \big\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\big\}.$$

Pour $k = 1, \dots, n$, on note $I_k := [x_{k-1}, x_k]$, et on rappelle que :

$$\mathsf{pas}(\Delta) := \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \big|I_k\big|.$$

Étant donné un nombre $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit quelconque, soient :

$$A_\varepsilon := \Big\{k \in \{1, \dots, n\} \colon\; \operatorname*{osc}_{I_k} f := \sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f \;\geqslant\; \varepsilon\Big\},$$

$$B_\varepsilon := \Big\{k \in \{1, \dots, n\} \colon\; \operatorname*{osc}_{I_k} f \;<\; \varepsilon\Big\},$$

de telle sorte que :

$$A_\varepsilon \cup B_\varepsilon = \{1, \dots, n\} \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad A_\varepsilon \cap B_\varepsilon = \emptyset.$$

Soit enfin la somme des longueurs des intervalles sur lesquels l'oscillation de f est 'au moins ε-grande' :

$$s_\varepsilon(\Delta) := \sum_{k \in A_\varepsilon} |I_k|.$$

Montrer alors le Théorème originalement dû à Riemann d'après lequel la fonction f est Riemann-intégrable *si et seulement si*, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, cette somme $s_\varepsilon(\Delta) \longrightarrow 0$ tend vers zéro lorsque $\mathsf{pas}(\Delta) \longrightarrow 0$.

Exercice 45. Sur un segment compact $[a, b] \Subset \mathbb{R}$, soit $f \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle quelconque, pas forcément bornée. Montrer qu'on peut néanmoins définir sans modification la notion de Riemann-intégrabilité de f, mais montrer alors que si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision Δ de $[a, b]$ telle que $\Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) \leqslant \varepsilon$, alors ceci implique en fait que f est nécessairement bornée.

Exercice 46. $**$

Théorème de Borel-Lebesgue

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Sud, France

1. Ensembles compacts et ensembles précompacts

Définition 1.1. Un *espace métrique* (E, d) est un ensemble E muni d'une *fonction distance :*

$$\begin{aligned} d\colon \quad E \times E &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\longmapsto d(x, y), \end{aligned}$$

sujette à satisfaire les trois axiomes suivants :

(i) Symétrie : $d(x, y) = d(y, x) \geqslant 0$ pour tous $x, y \in E$;

(ii) Vraie distance : $d(x, y) = 0$ seulement lorsque $x = y$;

(iii) Inégalité triangulaire : Pour tous $x, y, z \in E$:

$$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z).$$

Dans un espace métrique, les ouverts-modèles sont les *boules ouvertes :*

$$B(x, r) := \big\{ y \in E\colon\ d(x, y) < r \big\},$$

de rayons variés $r > 0$ centrées en des points quelconques $x \in E$.

Généralement, un sous-ensemble

$$\mathscr{O} \subset E,$$

est un *ouvert* si en chacun de ses points, on peut centrer une boule ouverte de rayon assez petit pour qu'elle soit entièrement contenue dans $\mathscr{O}$.

Définition 1.2. Un espace métrique (E, d) est dit *compact* s'il satisfait la propriété, dite *de Bolzano-Weierstrass*, d'après laquelle, si on se donne une suite quelconque :

$$\big(x_n\big)_{n=1}^{\infty}$$

de points $x_n \in E$, on peut toujours *extraire* au moins une sous-suite :

$$\big(x_{n_k}\big)_{k=1}^{\infty} \qquad\qquad \text{avec } 1 \leqslant n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots ,$$

qui admet une limite :

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} =: x_\infty \in E$$

appartenant encore à E.

Par exemple, on démontre que tout intervalle fermé borné $[a, b] \subset \mathbb{R}$ est compact. En dimension quelconque $d \geqslant 1$, on démontre aussi que tout sous-ensemble fermé borné $K \subset \mathbb{R}^d$ est compact, et réciproquement d'ailleurs, que les compacts de $\mathbb{R}^d$ ne sont autres que les sous-ensembles fermés et bornés.

Définition 1.3. Un espace métrique (E, d) est dit *précompact* lorsque, pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe un entier $N = N_\varepsilon \geqslant 1$ et des points :

$$x_1, \dots, x_N \in E,$$

tels que E est recouvert par les N boules ouvertes de rayon ε centrées en ces points :

$$E = B(x_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup B(x_N, \varepsilon).$$

Or la langue française nous dit que tout ce qui est « *pré-* » — par exemple un préliminaire qui précède prématurément le présage des préposés concernant l'examen préparatoire — se situe avant la chose. Alors pour garantir que notre belle langue française ne se sente pas froissée, on a heureusement une :

Proposition 1.4. *Tout espace métrique compact (E, d) est précompact.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que E n'est recouvert par *aucune* famille finie de boules ouvertes de rayon ε.

Partant donc d'un point quelconque $x_1 \in E$, il existe un point $x_2 \in E$ hors de la boule $B(x_1, \varepsilon)$, et ainsi de suite indéfiniment :

$$\begin{aligned}
&\exists\, x_2 \in E \big\backslash B(x_1, \varepsilon), \\
&\exists\, x_3 \in E \big\backslash \big[B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon)\big], \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\exists\, x_{n+1} \in E \big\backslash \big[B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon) \cup \cdots \cup B(x_n, \varepsilon)\big], \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Mais comme E est compact, de cette suite infinie $\big(x_n\big)_{n=1}^{\infty}$, on doit pouvoir extraire au moins une certaine sous-suite :

$$\big(x_{n_k}\big)_{k=1}^{\infty}$$

qui converge vers un certain point $x_\infty \in E$:

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x_\infty.$$

En particulier, cette sous-suite doit être de Cauchy puisqu'elle converge :

$$\exists\, K = K_\varepsilon \gg 1 \quad \Big(k \geqslant K \implies d\big(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}\big) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\Big).$$

Mais comme pour tous les entiers compris entre n_k et $n_{k+1} > n_k$, à savoir les entiers :

$$n_k + 1,\ n_k + 2,\ \cdots,\ n_{k+1} - 1,\ n_{k+1},$$

on a su choisir choisir :

$$\begin{aligned}
&x_{n_k+1} \notin B(x_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup B(x_{n_k}, \varepsilon), \\
&x_{n_k+2} \notin B(x_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup B(x_{n_k}, \varepsilon) \cup B(x_{n_k+1}, \varepsilon), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&x_{n_{k+1}} \notin B(x_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup \underline{B(x_{n_k}, \varepsilon)} \cup B(x_{n_k+1}, \varepsilon) \cup \cdots \cup B(x_{n_{k+1}-1}, \varepsilon),
\end{aligned}$$

il vient que la distance entre x_{n_k} et $x_{n_{k+1}}$, *lequel n'appartient pas à* $B(x_{n_k}, \varepsilon)$, restait *de facto* toujours supérieure à ε :

$$d\big(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}\big) \geqslant \varepsilon,$$

ce qui est la contradiction recherchée. □

Proposition 1.5. *Dans un espace métrique compact* (E, d)*, soit une famille d'ouverts :*

$$\big(\mathscr{O}_i\big)_{i \in I}$$

paramétrée par un ensemble quelconque d'indices I*, qui le recouvrent complètement :*

$$E = \bigcup_{i \in I} \mathscr{O}_i.$$

Alors il existe un rayon strictement positif $r > 0$ *assez petit pour que toute boule ouverte de rayon* r *soit contenue dans au moins un ouvert de la famille :*

$$\forall\, x \in E \quad \exists\, i = i_x \in I \quad B(x, r) \subset \mathscr{O}_i.$$

Démonstration. Raisonnons encore par l'absurde, et supposons au contraire que pour tout rayon arbitrairement petit $r > 0$ de la forme :

$$r = \frac{1}{n},$$

avec $n \geqslant 1$ entier, il existe un certain mauvais point :

$$x_n \in E,$$

autour duquel la boule de rayon $\frac{1}{n}$ n'est contenue dans *aucun* ouvert de la famille :

$$(*) \qquad B\big(x_n, \tfrac{1}{n}\big) \not\subset \mathscr{O}_i \qquad (\forall\, i \in I).$$

Bien entendu, la compacité de E nous permet alors d'extraire de ces x_n une certaine sous-suite :

$$\big(x_{n_k}\big)_{n=1}^{\infty}$$

convergente :

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} =: x_\infty \in E.$$

Mais alors, puisque E est recouvert par les ouverts $\mathscr{O}_i$, ce point-limite appartient à au moins l'un d'entre eux :

$$\exists\, i_\infty \in I, \quad \text{tel que} \quad x_\infty \in \mathscr{O}_{i_\infty}.$$

Or par ouverture de $\mathscr{O}_{i_\infty}$, il existe $\delta > 0$ assez petit pour que :

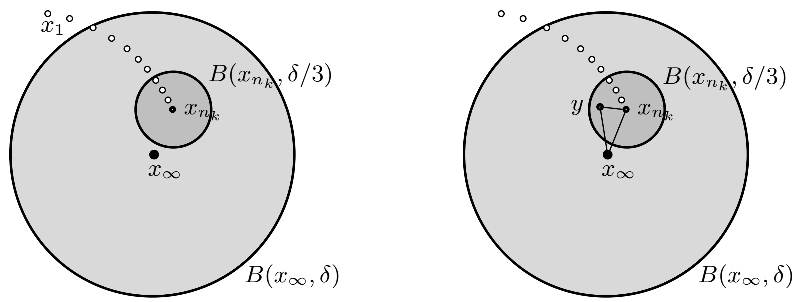
$$B(x_\infty, \delta) \subset \mathscr{O}_{i_\infty}.$$

Maintenant, nous pouvons choisir un entier $K \gg 1$ assez grand pour avoir simultanément :

$$k \geqslant K \implies \begin{cases} \dfrac{1}{n_k} \leqslant \dfrac{\delta}{3}, \\ d\big(x_{n_k}, x_\infty\big) \leqslant \dfrac{\delta}{3}. \end{cases}$$

Pour de tels indices $k \geqslant K$, l'inégalité triangulaire :

$$d\big(y, x_\infty\big) \leqslant d\big(y, x_{n_k}\big) + d(x_{n_k}, x_\infty)$$



permet alors de vérifier — exercice mentalo-visuel — que :

$$\begin{aligned} B\big(x_{n_k}, \tfrac{1}{n_k}\big) \;&\subset\; B\big(x_{n_k}, \tfrac{\delta}{3}\big) \\ &\subset\; B(x_\infty, \delta) \\ &\subset\; \mathscr{O}_{i_\infty}, \end{aligned}$$

ce qui contredit manifestement le choix des x_n fait par $(*)$ ci-dessus ! □

Nous pouvons maintenant énoncer un théorème tellement fondamental qu'il est utilisé des milliers de fois dans tous les exercices d'Analyse en L1, en L2, en L3, en M1, en M2, sur la Lune, et sur Mars !

Théorème 1.6. [Borel-Lebesgue] *De tout recouvrement d'un espace métrique compact* (E, d) :

$$E \,=\, \bigcup_{i \in I} \mathscr{O}_i,$$

par une famille quelconque *d'ouverts non vides :*

$$\mathscr{O}_i \subset E,$$

indexée par un ensemble I de cardinal éventuellement arbitrairement grand, on peut extraire *un sous-recouvrement* fini*, à savoir il existe un nombre fini $n \geqslant 1$ d'indices :*

$$i_1, \dots, i_n \,\in\, I$$

tels que, en fait :

$$E \,=\, \underbrace{\mathscr{O}_{i_1} \cup \cdots \cup \mathscr{O}_{i_n}.}_{\text{un nombre fini d'ouverts suffit en fait pour recouvrir}}$$

Démonstration. Soit donc $\big(\mathscr{O}_i\big)_{i \in I}$ un tel recouvrement ouvert de E.

La Proposition 1.5 fournit un rayon $r > 0$ tel que toute boule ouverte $B(x, r)$ de rayon r et de centre quelconque $x \in E$ est contenue dans au moins un ouvert $\mathscr{O}_i$:

$$\forall\, x \in E \quad \exists\, i(x) \in I \quad \text{tel que} \quad B(x, r) \,\subset\, \mathscr{O}_{i(x)}.$$

Mais de surcroît, avec ce même rayon $r > 0$, la précompacité de E assure d'après la Proposition 1.4 que parmi l'infinité de boules :

$$\big(B(x, r)\big)_{x \in E},$$

un nombre fini suffit en fait pour recouvrir E, à savoir il existe un nombre fini $n \geqslant 1$ de points $x_1, \dots, x_n \in E$ tels que :

$$E \,=\, B(x_1, r) \cup \cdots \cup B(x_n, r).$$

Alors il devient tout à fait clair que :

$$\begin{aligned} E &= B(x_1, r) \cup \cdots \cup B(x_n, r) \\ &\subset \mathscr{O}_{i(x_1)} \cup \cdots \cup \mathscr{O}_{i(x_n)}, \end{aligned}$$

est effectivement recouvert par une sous-famille finie d'ouverts ! □

En exercice, nous proposons d'établir la réciproque, classique, de ce théorème.

2. Paradoxes historico-épistémologiques

$\boxed{\textbf{Fill ??}}$

3. Exercices

Exercice 1. On dit qu'un espace métrique (E, d) *satisfait la propriété de Borel-Lebesgue* lorsque, de tout recouvrement :

$$E = \bigcup_{i \in I} \mathscr{O}_i$$

par des ouverts $\mathscr{O}_i \subset E$, on peut extraire un sous-recouvrement ouvert *fini :*

$$E = \mathscr{O}_{i_1} \cup \cdots \cup \mathscr{O}_{i_n}.$$

Montrer qu'un tel espace est toujours nécessairement compact. Indication: Montrer d'abord qu'une intersection dénombrable de sous-ensembles fermés non vides $F_n \supset F_{n+1}$ emboîtés les uns dans les autres de manière décroissante est au final non vide :

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset.$$

Partant d'une suite quelconque $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ de points $x_k \in E$, introduire ensuite les fermés :

$$F_n := \overline{\{x_k \in E \colon\ k \geqslant n\}} \qquad\qquad (n \geqslant 1),$$

et montrer que tout point :

$$x_\infty \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$

est limite d'une certaine sous-suite $(x_{k_l})_{l=1}^{\infty}$.

Exercice 2. $**$

Intégrale de Kurzweil-Henstock : rudiments

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Sud, France

1. Problème fondamental de l'intégration

Sur un intervalle compact :

$$[a, b] \Subset \mathbb{R},$$

soit une fonction réelle :

$$F\colon \quad [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

qu'on suppose seulement et uniquement *dérivable en tout point :*

$$\forall\, x \in [a, b] \qquad \exists\, F'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h},$$

sans autre hypothèse particulière, et notamment, sans s'imaginer que la fonction dérivée $F'(x)$ est continue sur $[a, b]$, ni même bornée, d'ailleurs.

Intuitivement et moralement, on s'imagine naturellement que *l'intégration doit être l'opération exactement inverse de la dérivation*.

Par conséquent, toute théorie de l'intégration digne de ce nom se doit de pouvoir affirmer que :

$$\int_a^b F'(x)\, dx \;=\; F(b) - F(a).$$

Bien entendu, une telle égalité naturelle est vraie lorsque F' est une fonction bornée Riemann-intégrable — grâce à la théorie qui vient d'être traitée exhaustivement dans le chapitre précédent ! — *mais la dérivée F' d'une fonction dérivable quelconque n'a aucune raison d'être continue, bornée, voire Riemann-intégrable*.

Exemple 1.1. Soit la fonction $F\colon [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$F(x) := \begin{cases} 0 & \text{lorsque } \ x = 0, \\ x^2 \cos\big(\frac{1}{x^2}\big) & \text{lorsque } \ 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Clairement, F est dérivable en tout point x tel que $0 < x \leqslant 1$. Mais elle est aussi dérivable en $x = 0$ de dérivée nulle :

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{F(h) - F(0)}{h} &= \lim_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{h^2 \cos\big(\frac{1}{h^2}\big)}{h} \\ &= \lim_{\substack{h \to 0 \\ >}} h \cos\big(\tfrac{1}{h^2}\big) \\ &= 0, \end{aligned}$$

puisque la fonction cosinus est majorée par 1 en valeur absolue. En somme, la fonction dérivée vaut :

$$F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{lorsque } x = 0, \\ 2x\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{lorsque } 0 < x \leqslant 1, \end{cases}$$

mais on voit alors par cette expression que F' est sauvagement non continue en $x = 0$, puisque :

$$\underbrace{2x\cos\left(\tfrac{1}{x^2}\right)}_{\substack{\text{tend vers } 0 \\ \text{quand } x \to 0}} - \underbrace{\tfrac{2}{x}\sin\left(\tfrac{1}{x^2}\right)}_{\substack{\text{oscille} \\ \text{sauvagement} \\ \text{entre } -\infty \text{ et } +\infty}}.$$

Pour une telle fonction pathologique qui est la dérivée d'une vraie fonction fringante et en bonne santé, on aimerait quand même bien pouvoir écrire et reconstituer :

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_0^1}_{\substack{\text{quelle} \\ \text{intégrale} \\ \text{iventer ?}}} F'(x)\,dx &= F(1) - F(0) \\ &= \cos(1). \end{aligned}$$

Surgit donc le problème de savoir si on peut inventer une théorie plus puissante que celle de Riemann dans laquelle la véracité de cette formule $\int F' = F$ serait pleinement justifiée. Un tel objectif est plus ambitieux que de se poser seulement la question de déterminer, avec une théorie établie comme celle de Riemann, pour quelle classe de fonctions la formule $\int F' = F$ sera valide.

La théorie de l'intégrale de Lebesgue — point d'orgue de ce cours — étendra considérablement la véracité de cette formule, mais sans couvrir vraiment toutes les fonctions dérivées F' d'une fonction F. Toutefois, la théorie de Lebesgue résoudra de multiples autres questions, ce qui garantit la centralité de son intérêt mathématique, et explique pourquoi elle est enseignée partout dans le monde terrestre sublunaire.

À vrai dire, c'est une autre théorie, dite de Kurzweil-Henstock, qui, en raffinant quelque peu celle de Riemann, va répondre pleinement à la question de savoir comment rendre universellement vraie la formule en question :

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Il y a là un fait philosophique général : tandis que la théorie de Lebesgue embrasse simultanément plusieurs questions d'invention conceptuelle — notamment la question d'attribuer une mesure aux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ —, celle de Kurzweil-Henstock se concentre à l'origine sur une question unique, et donc — fait philosophique concernant les mathématiques — les deux théories s'avèrent n'être pas complètement équivalentes, et des divergences essentiellement mineures se manifestent inévitablement.

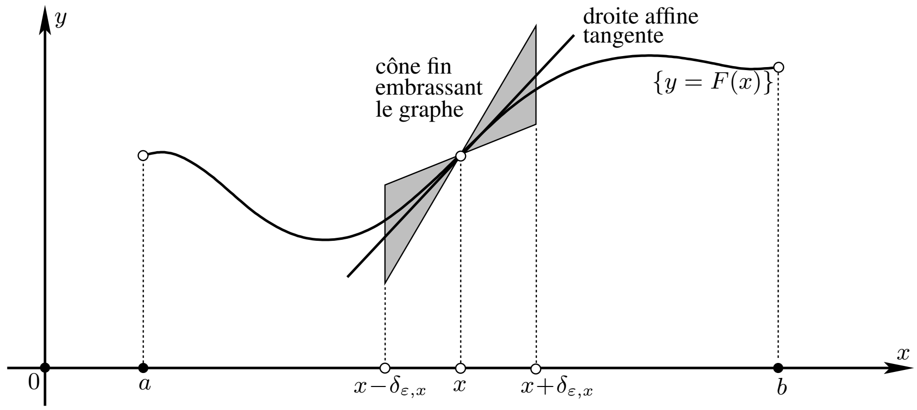
Maintenant, pour une fonction F, que veut dire au juste « *être dérivable* » ? Et surtout, par quel concept nouveau d'intégration pourrait-on « *récupérer* » la fonction en intégrant sa dérivée ?

Dire qu'en un point quelconque $x \in [a, b]$, la limite :

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} =: F'(x),$$

existe, c'est dire précisément avec des quantificateurs que :

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta_{\varepsilon,x} > 0 \quad \left(\forall\,h \quad |h| \leqslant \delta_{\varepsilon,x} \implies \left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - F'(x)\right| \leqslant \varepsilon\right).$$



Géométriquement, donc, au-dessus du très petit intervalle :

$$\big[x - \delta_{\varepsilon,x},\ x + \delta_{\varepsilon,x}\big],$$

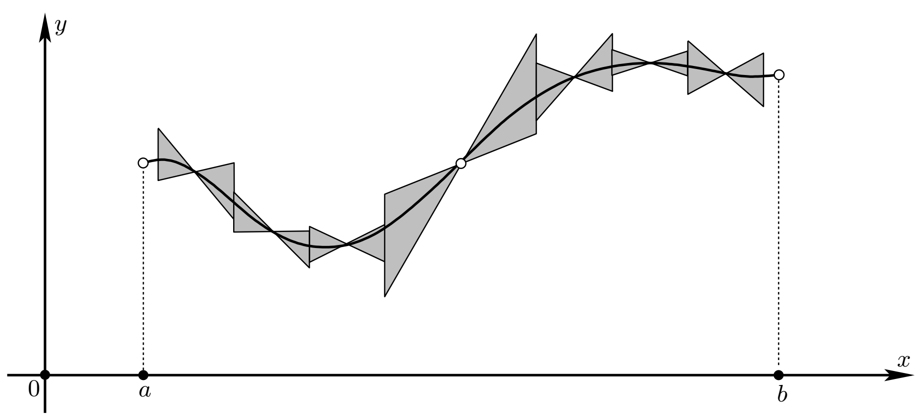
le graphe de F est contenu dans un cône fin resserré de manière très étroite autour de la tangente en $(x, F(x))$ à la courbe droite d'équation :

$$Y - f(x) = F'(x)\big(X - x\big),$$

à savoir (exercice) le cône défini par les inéquations :

$$\begin{aligned} \big|X - x\big| &\leqslant \delta_{\varepsilon,x}, \\ \left|\frac{Y - F(x)}{X - x} - F'(x)\right| &\leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

Intégrer la fonction dérivée $F'(x)$ et retrouver $F(b) - F(a)$ revient donc géométriquement à suivre pas à pas une canalisation par des cônes.



Pourvu que les cônes approximent suffisamment bien les morceaux du graphe, on espère intuitivement qu'en partant de $F(a)$ à gauche, la canalisation avec erreurs contrôlées redonnera $F(b)$ à $\pm\varepsilon$ près.

Plus précisément, on espère qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ et une subdivision :

$$\big\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\big\}$$

de l'intervalle $[a, b]$ telle qu'en sommant les erreurs :

$$\big|F(x_k + h_k) - F(x_k) - h_k\, F'(x_k)\big| \leqslant \varepsilon\, |h_k|,$$

et en effectuant une somme téléscopique agréable, on obtienne au final :

$$\big|F(b) - F(a)\big| \leqslant \varepsilon\, \underbrace{\sum_k |h_k|}_{\approx\, b-a},$$

ce qui montrerait que la valeur $F(b)$ peut être rendue arbitrairement proche de $F(a)$.

Mais afin de réaliser cela, il faut s'arranger pour que la taille des intervalles sur lesquels on dispose de telles inégalités soit assez grande pour contenir les deux points voisins immédiats de la subdivision.

Non seulement cela va être effectivement possible, mais encore cela va nous faire découvrir des subdivisions plus générales et plus adaptées que celles que nous avons vues dans la théorie de Riemann.

2. Partitions finies pointées, et jauges

Il est temps maintenant de présenter les concepts fondamentaux de la théorie de Kurzweil-Henstock.

Étant donné un intervalle quelconque $[a, b] \subset \mathbb{R}$ avec :

$$-\infty < a < b < \infty,$$

on va considérer des subdivisions quelconques dont les segments sont munis d'un point de référence.

Définition 2.1. Une famille finie de sous-intervalles fermés :

$$I_1, \dots, I_n \subset [a, b]$$

est une *partition finie* de $[a, b]$ si :

$$[a, b] = \bigcup_{1 \leqslant k \leqslant n} I_k,$$

et si les intersections de segments deux à deux sont soit vides soit réduites à un point :

$$\mathrm{Card}\,\big(I_{k_1} \cap I_{k_2}\big) = 0 \text{ ou } 1 \qquad\qquad {\scriptstyle (1 \leqslant k_1, k_2 \leqslant n)}.$$

Autrement dit, après réordonnancement, les intervalles $I_1, \dots, I_n$ remplissent $[a, b]$ lorsqu'on les met bout à bout l'un à la suite de l'autre.

Définition 2.2. Une *partition finie pointée* de $[a, b]$ est une partition finie $I_1, \dots, I_n$ dont chaque intervalle :

$$I_k \ni \xi_k$$

est muni d'un point distingué ξ_k qui lui appartient.

Bien entendu, à toute partition finie pointée est associée la *somme de Riemann-Kurzweil-Henstock :*

$$\sum_{k=1}^{n} \big|I_k\big|\, f(\xi_k),$$

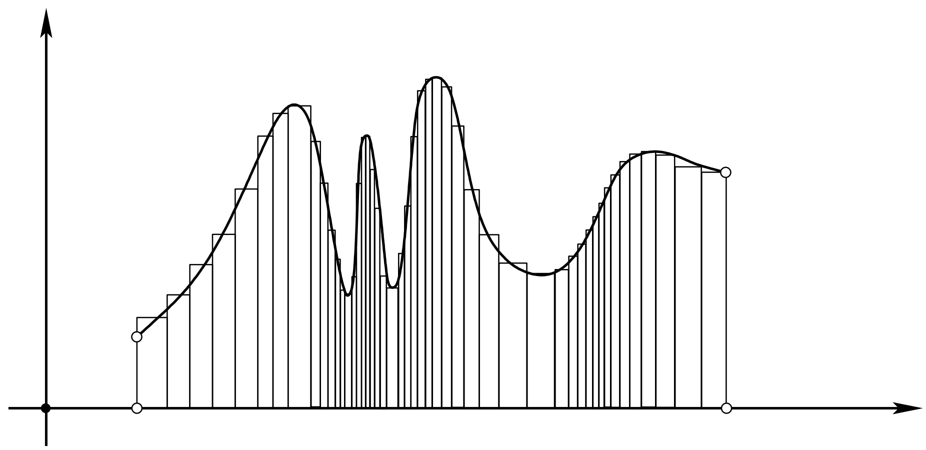
qui n'est d'ailleurs rien d'autre que ce que nous avons appelé *somme de Riemann* dans le chapitre précédent.

Contrairement à ce que nous avons requis dans la théorie de Riemann, nous demanderons en général non seulement que le pas des subdivisions :

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} |I_k| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

tende vers zéro, mais aussi, *nous adapterons librement la finesse des subdivisions à chaque fonction que nous souhaitons intégrer en concentrant plus de points là où cela est nécessaire*.

On s'imaginera donc que dans certaines zones de l'intervalle $[a, b]$, le pas se resserrera plus vite vers zéro que dans d'autres zones.



Pour conceptualiser une notion de finesse variable des subdivisions, introduisons alors le concept de *jauge*, qui est une application réelle à valeurs strictement positives servant à exercer un contrôle sur les intervalles d'une partition finie pointée.

Définition 2.3. Une application quelconque :

$$\delta\colon \quad [a, b] \longrightarrow]0, \infty[$$

est appelée une *jauge* sur $[a, b]$.

La valeur d'une jauge en un point quelconque $x \in [a, b]$ est donc finie et strictement positive :

$$0 < \delta(x) < \infty,$$

ce qui est important.

Définition 2.4. Étant donné une jauge $\delta\colon [a, b] \longrightarrow]0, \infty[$, on dit qu'une partition finie pointée $\big(I_k \ni \xi_k\big)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est *δ-fine* si ses intervalles sont embrassés par δ au sens où :

$$\xi_k \in I_k \subset \big[\xi_k - \delta(\xi_k),\ \xi_k + \delta(\xi_k)\big].$$

3. Intégrale de Kurzweil-Henstock des fonctions dérivées d'une fonction

Un premier lemme réalise de manière élémentaire la construction de partitions subordonnées à une jauge, pièce du puzzle que nous avons vue plus haut comme étant nécessaire.

Lemme 3.1. [Cousin] *Étant donné une jauge quelconque $\delta\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, il existe toujours (au moins) une partition finie pointée de $[a, b]$ qui est δ-fine.*

Démonstration. Raisonnons par contradiction, à savoir supposons par l'absurde que l'intervalle $[a,b]$ n'admette pas de partition finie pointée δ-fine.

Effectuons alors une *dichotomie* de $[a,b]$ (littéralement en Grec « *couper en deux* ») :

$$[a,b] = \big[a,\ \tfrac{a+b}{2}\big] \bigcup \big[\tfrac{a+b}{2},\ b\big],$$

et observons que pour une raison purement logique, si chacun de ces deux sous-intervalles admettait une partition finie pointée δ-fine, alors la réunion simple de ces deux dernières constituerait une partition finie δ-fine sur $[a,b]$; par conséquent, au moins l'un de ces deux sous-intervalles n'admet pas de partition pointée δ-fine ; notons alors $[a_1,b_1]$ un tel sous-intervalle de longueur $\frac{b-a}{2}$.

Par récurrence, pour tout entier $k \geqslant 2$, on trouve alors un sous-intervalle :

$$[a_k,\ b_k] \ \subset\ [a,b]$$

de longueur :

$$\frac{b-a}{2^k}$$

contenu dans le précédent $[a_k,b_k] \ \subset\ [a_{k_1},b_{k-1}]$ qui n'admet toujours pas de partition finie pointée δ-fine. Prenons alors gaillardement l'intersection infinie de tous ces intervalles emboîtés :

$$\bigcap_{k\geqslant 1} [a_k,b_k] =: x_\infty,$$

laquelle consiste, d'après un théorème censé être connu au niveau où nous en sommes, en un unique point $x_\infty \in [a,b]$.

Mais alors puisqu'en ce point on a :

$$\delta(x_\infty) \ >\ 0,$$

il suffit en fait de choisir $k \gg 1$ assez grand au sens où :

$$\delta(x_\infty) \ \geqslant\ \frac{b-a}{2^k},$$

pour assurer que :

$$x_\infty \ \in\ [a_k,b_k] \ \subset\ \big[x_\infty - \delta(x_\infty),\ x_\infty + \delta(x_\infty)\big],$$

ce qui apporte manifestement une contradiction conclusive en montrant que $[a_k,b_k]$ admet une partition pointée δ-fine réduite au seul intervalle $[a_k,b_k]$! □

Nous pouvons maintenant introduire la définition principale.

Définition 3.2. [Intégrabilité au sens de Kurzweil-Henstock] Une fonction réelle :

$$f\colon \quad [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

est dite *intégrable au sens de Kurzweil-Henstock* d'intégrale le nombre réel noté :

$$\int_a^b f,$$

si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une jauge :

$$\delta_\varepsilon\colon \quad [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

telle que pour toute partition finie pointée de $[a,b]$:

$$\big(I_k \ni \xi_k\big)_{1\leqslant k\leqslant n},$$

qui est δ_ε-fine :

$$\xi_k \,\in\, I_k \,\subset\, \big[\xi_k - \delta_\varepsilon(\xi_k),\, \xi_k + \delta_\varepsilon(\xi_k)\big] \qquad\qquad {\scriptstyle (k\,=\,1\,\cdots\,n)},$$

la somme de Riemann-Kurzweil-Henstock associée satisfait :

$$\bigg|\sum_{k=1}^n \big|I_k\big|\, f(\xi_k) - \int_a^b f\bigg| \,\leqslant\, \varepsilon.$$

L'*intégrabilité au sens de Riemann* correspond alors au choix le plus simple d'une jauge constante, car en effet, on vérifie (exercice) la reformulation suivante.

Théorème 3.3. *Une fonction réelle $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable d'intégrale le nombre réel $\int_a^b f(x)\,dx$ si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une jauge* constante *$[a,b] \longrightarrow \{\delta_\varepsilon\}$ avec $\delta_\varepsilon > 0$ telle que pour toute subdivision :*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

de points centraux :

$$\xi_k := \tfrac{x_k + x_{k-1}}{2} \qquad\qquad {\scriptstyle (k\,=\,1\,\cdots\,n)},$$

satisfaisant :

$$[x_{k-1}, x_k] \subset \big[\xi_k - \delta_\varepsilon,\; \xi_k + \delta_\varepsilon\big]$$

on a :

$$\bigg|\sum_{k=1}^n \big(x_k - x_{k-1}\big)\, f(\xi_k) - \int_a^b f(x)\,dx\bigg| \,\leqslant\, \varepsilon. \qquad \square$$

Mais notre objectif principal était de démontrer un résultat annoncé plusieurs fois, résultat par lequel s'achèvera ce très bref chapitre.

Théorème 3.4. *La dérivée F' d'une fonction $F\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable en tout point $x \in [a,b]$ est intégrable au sens de Kurzweil-Henstock et elle satisfait :*

$$\int_a^b F' = F(b) - F(a).$$

Démonstration. À un nombre réel arbitrairement petit $\varepsilon > 0$, il est à présent intuitivement clair qu'on doit associer la jauge :

$$\delta_\varepsilon(x) := \delta_{\varepsilon,x},$$

qui exprime précisément la *dérivabilité* de F en tout point $x \in [a,b]$:

$$(*) \qquad\qquad \forall\, h \quad |h| \leqslant \delta_\varepsilon(x) \implies \big|F(x+h) - F(x) - h\,F'(x)\big| \,\leqslant\, |h|\,\varepsilon.$$

Or grâce au Lemme 3.1 de Cousin, il existe une partition finie pointée de $[a,b]$:

$$\big(I_k \ni \xi_k\big)_{1\leqslant k\leqslant n}$$

qui est δ_ε-fine. Plus précisément, si les intervalles I_k sont ordonnées pour apparaître bout à bout dans un ordre croissant, et si on donne un nom à leurs extrémités :

$$I_k =: \big[x_{k-1}, x_k\big] \qquad\qquad {\scriptstyle (k\,=\,1\,\cdots\,n)},$$

avec donc :

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

alors on a :

$$\xi_k \in \big[x_{k-1}, x_k\big].$$

Maintenant, il s'agit de faire voir que la différence entre $F(b) - F(a)$ et la somme de Riemann-Kurzweil-Henstock pour F' peut être rendue arbitrairement petite, ce que nous effectuons sans sourciller à coup de somme téléscopique et d'inégalités triangulaires :

$$\begin{aligned}
\bigg|F(b) - F(a) - \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - x_{k-1}\big)\, F'(\xi_k)\bigg| &= \bigg|\sum_{k=1}^{n} \big\{F(x_k) - F(x_{k-1})\big\} - \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - x_{k-1}\big)\, F'(\xi_k)\bigg| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} \Big|F(x_k) - F(x_{k-1}) - \big(x_k - x_{k-1}\big)\, F'(\xi_k)\Big| \\
\text{[Insérer } \xi_k\text{]} \qquad &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \Big|F(x_k) - F(\xi_k) - (x_k - \xi_k)\, F'(\xi_k)\Big| + \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n} \Big|F(\xi_k) - F(x_{k-1}) - (\xi_k - x_{k-1})\, F'(\xi_k)\Big| \\
\text{[Utiliser la dérivabilité } (*)\text{]} \qquad &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \Big\{\big(x_k - \xi_k\big)\,\varepsilon + \big(\xi_k - x_{k-1}\big)\,\varepsilon\Big\} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - x_{k-1}\big)\,\varepsilon \\
&= \varepsilon\,(b-a),
\end{aligned}$$

et nous obtenons à la fin un majorant qui tend vers 0 lorsque $\varepsilon \to 0$, ce qui conclut en beauté notre court périple dans la « contrée KH ». □

Mentionnons que la « Théorie KH » dont nous venons de donner un succinct aperçu peut être développée bien au-delà, *cf.* [1].

Mais cédons sans attendre à l'appel des belles sirènes de la « Théorie L », et changeons maintenant de chapitre.

4. **Exercices**

Exercice 1. Comme dans l'Exemple 1.1 soit la fonction $F\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$F(x) := \begin{cases} 0 & \text{lorsque } x = 0, \\ x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{lorsque } 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Pourquoi F' est elle Kurzweil-Henstock-intégrable ? Montrer en revanche que $|F'|$ ne l'est pas.

Exercice 2. **(a)** Soit $K \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble fermé borné, donc compact, et soit $\delta\colon K \longrightarrow]0,\infty[$ une jauge sur K. Montrer qu'il existe une famille finie d'intervalles presque disjoints fermés $I_1, \dots, I_N$ dont la réunion recouvre K et tels que pour tout $k = 1, \dots, N$, il existe $x_k \in I_k \cap K$ avec $I_k \subset \big[x_k - \delta(x_k),\, x_k + \delta(x_k)\big]$.

(b) Soit généralement $E \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble quelconque, et soit $\delta\colon E \longrightarrow]0,\infty[$ une jauge sur E. Montrer qu'il existe une famille dénombrable d'intervalles presque disjoints fermés $I_1, \dots, I_k, \dots$ dont la réunion complète recouvre K et tels que pour tout $k \geqslant 1$, il existe $x_k \in I_k \cap K$ avec $I_k \subset \big[x_k - \delta(x_k),\, x_k + \delta(x_k)\big]$.

Exercice 3. Montrer que la fonction $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{lorsque } x = 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} & \text{lorsque } 0 < x \leqslant 1, \end{cases}$$

est Kurzweil-Henstock-intégrable, d'intégrale égale à 2.

Exercice 4. Sur un intervalle compact $[a,b] \Subset \mathbb{R}$, soient deux fonctions Kurzweil-Henstock-intégrables $f, g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, et soit un nombre réel $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $c\,f$ et $f+g$ sont Kurzweil-Henstock-intégrables, avec :

$$\int_a^b \lambda\, f = \lambda \int_a^b f \qquad \text{et} \qquad \int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Exercice 5. Soit $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) := \begin{cases} \log x & \text{lorsque } \ 0 < x \leqslant 1; \\ 0 & \text{pour } \ x = 0. \end{cases}$$

Étant donné un nombre réel $p > 1$ fixé, pour $N \geqslant 1$ entier quelconque, on introduit la partition finie pointée :

$$\bigg(\bigg[\frac{p^j}{p^N}, \ \frac{p^j+1}{p^N}\bigg] \ni \xi_j := \frac{p^j}{p^N}\bigg)_{0 \leqslant j \leqslant N}.$$

(a) Montrer que la somme de Riemann-Kurzweil-Henstock associée s'exprime explicitement comme :

$$S_{p,N}(f) := -(p-1)\log(p) \sum_{j=1}^{N-1} \frac{j}{p^j}.$$

(b) Montrer que :

$$\sum_{j=1}^{N-1} j\,X^j \ = \ X\, \frac{1 + (N-1)\,X^N - N\,X^{N-1}}{(1-X)^2}.$$

(c) En déduire une formule close pour $S_{p,N}(f)$.

(d) On ajuste maintenant le réel $p > 0$ et l'entier $N \geqslant 2$ de manière à ce que :

$$p^N \ = \ N^2.$$

Montrer alors que :

$$\lim_{N\to\infty} S_{p,N}(f) = -1.$$

Indication: Utiliser le fait que $\lim\limits_{p \underset{>}{\to} 1} \frac{\log(p)}{p-1} = 1$.

(e) Montrer que la fonction f est intégrable au sens de Kurzweil-Henstock, d'intégrale égale à $\int_0^1 f = -1$.

Exercice 6. **(a)** Montrer qu'une fonction $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle compact $[a,b] \Subset \mathbb{R}$ qui est nulle en dehors d'un sous-ensemble dénombrable $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $[a,b]$ est intégrable au sens de Kurzweil-Henstock, d'intégrale $\int_0^1 f = 0$ nulle. Indication: Avec $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, choisir une fonction de jauge $\delta\colon [a,b] \longrightarrow]0,\infty[$ satisfaisant :

$$\delta(x_k) \ \leqslant \ \varepsilon\, \frac{1}{2^k}\, \frac{1}{1 + |f(x_k)|} \qquad\qquad {\scriptstyle (k \in \mathbb{N})}.$$

(b) Montrer que si deux fonctions $g, h\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ diffèrent uniquement sur une partie dénombrable $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $[a,b]$, alors f est Kurzweil-Henstock intégrable si et seulement si g l'est, et dans ce cas, montrer que $\int_a^b f = \int_a^b g$.

(c) Soit la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$, définie par :

$$\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x) := \begin{cases} 1 & \text{lorsque } \ x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{lorsque } \ x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}. \end{cases}$$

Montrer qu'elle est Kurzweil-Henstock intégrable. Mais est-elle aussi Riemann-intégrable ?

Exercice 7. $**$

RÉFÉRENCES

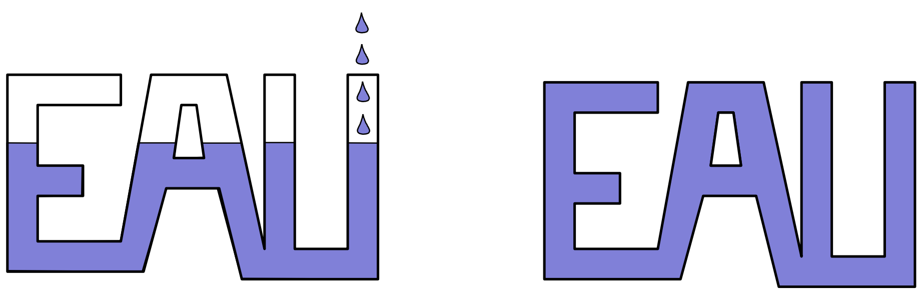
[1] KESSELMARK, C. ; MOONENS, L. : *Les théorèmes fondamentaux du calcul intégral : énoncés généraux et (in)compatibilités*, Gazette des mathématiciens, **141**, juillet 2014, 49–67.

Mesure de Jordan dans $\mathbb{R}^d$

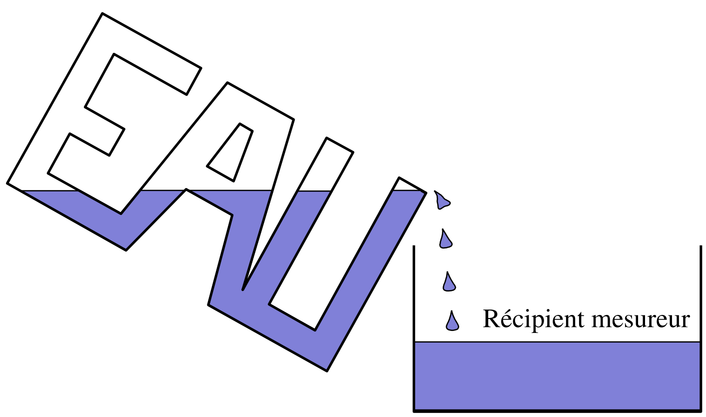
François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Sud, France

1. Prologue Physique ironique

Comment calculer les aires des surfaces et comment calculer les volumes des solides ?



Telle est la question cruelle que le physicien, goguenard comme le renard des laboratoires, lance au mathématicien avec un regard des plus narquois qui soit.



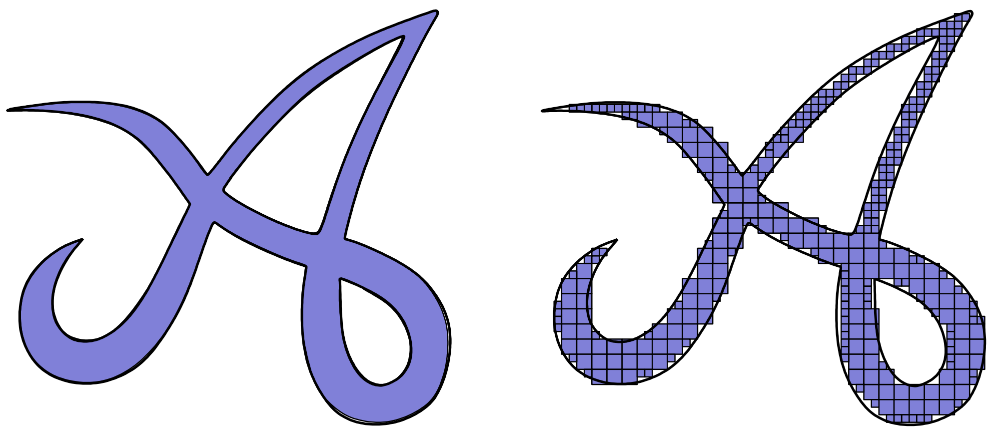
Comment ? lance-t-il insolemment ! Vous les mathématiciens, êtres aussi stupides qu'une rangée d'asperges transies sur le sol gelé de la Vallée du Rhône lors d'une tempête polaire imprévue au mois d'Avril, dans vos théories rigides et archaïques comme l'Antarctique, vous n'avez toujours pas intégré la bonne vieille méthode des égyptiens qui consiste simplement à remplir les surfaces et les volumes d'un fluide incompressible tel que l'eau du Nil pour en déterminer sans effort la surface ou le volume ?

Passez votre chemin, insignifiants suppôts de Platon ! la Physique fera toujours beaucoup mieux en la matière que toutes vos piètres Mathématiques !

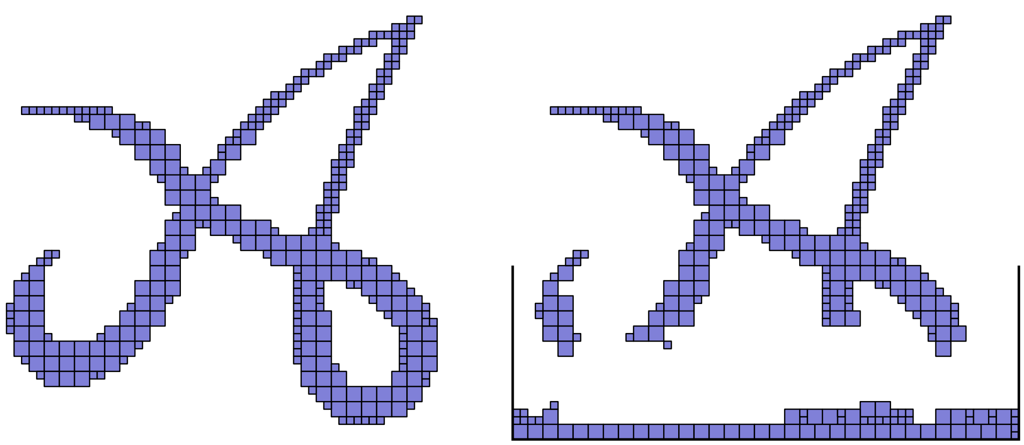
2. Redressement des Mathématiques

> Lorsqu'un mathématicien a prévu plus ou moins nettement une proposition, au lieu d'avoir recours à l'expérience, comme le ferait un physicien, il cherche une démonstration logique ; la vérification logique remplace pour lui la vérification expérimentale. En somme, il ne cherche pas à découvrir du nouveau, il essaie de prendre conscience des richesses qu'il possède déjà inconsciemment, qui sont enfermées dans les définitions et les axiomes. D'où l'importance capitale de ces définitions et axiomes qui, certes, ne sont assujetis logiquement qu'à la condition d'être compatibles, mais qui ne conduiraient qu'à une science purement formelle, vide de sens, s'ils étaient sans rapport avec la réalité. Henri LEBESGUE

Pour les mathématiciens qui n'ont pas à leur disposition les fluides magiques de la Physique, l'idée d'origine et pour ainsi dire *préhistorique*, lorsqu'on cherche à calculer le volume d-dimensionnel d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$, consiste à approximer cet ensemble par une réunion d'autres sous-ensembles dont la géométrie est simple, et dont le volume est connu, par exemple des carrés, des rectangles, des cubes, ou des parallellépipèdes.



Et les physiciens ont beau objecter avec force raison qu'il ne sert à rien de remplir les volumes de petits cubes pour les approximer de mieux en mieux, nous mathématiciens dont les forces sont si faibles que nous en sommes réduits à écrire au tableau avec de la craie à 2 centimes le bâtonnet, nous ne pouvons nous empêcher de développer des théories austères que nous souhaitons être entièrement fruit de notre cerveau.



Et Toc ! Non mais des fois ! Les physiciens, eux, ils se cantonnent au concret prosaïque — aucune capacité à idéaliser !

3. Préliminaires

Dans l'approche que nous développons ici dans $\mathbb{R}^d$ avec $d \geqslant 1$, nous utiliserons donc des rectangles et des cubes d-dimensionnels, comme briques de construction de la mesure. En fait ces 'briques' sont des segments dans $\mathbb{R}^1$, de vrais rectangles euclidiens dans $\mathbb{R}^2$, et dans un $\mathbb{R}^{d \geqslant 1}$ général, ce sont des produits d'intervalles, que nous appellerons sans plus de façons *rectangles* quelle que soit la dimension, parce que ce qui se voit le plus dans ces briques, c'est que leurs côtés sont parallèles aux axes de coordonnées rectangulaires. Qui plus est, en dimension quelconque $d \geqslant 1$, de tels rectangles sont faciles à manipuler, et leur volume est le produit des longueurs de leurs côtés.

Nous parlerons généralement de *volume* dans $\mathbb{R}^d$, même si en dimensions $d = 1$, $d = 2$, et même $d \geqslant 4$, il vaudrait mieux parler de longueur, de surface, voire d'hypervolume, respectivement.

4. Sous-ensembles de $\mathbb{R}^d$: topologie

Nous utilisons ici des notations très standard. Soit $d \geqslant 1$ un entier, censé être la *dimension ambiante*. Un *point* $x \in \mathbb{R}^d$ consiste en un d-uplet de nombres réels :

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_d), \qquad \text{avec } x_i \in \mathbb{R} \text{ pour } i = 1, \dots, d.$$

Pour $c \in \mathbb{R}$, on note :

$$c\,x = \big(c\,x_1, \dots, c\,x_d\big).$$

Définition 4.1. La *norme* (euclidienne) de x, notée $|x|$, est la quantité positive :

$$|x| := \big(x_1^2 + \cdots + x_d^2\big)^{1/2}.$$

Elle satisfait bien entendu les trois axiomes d'une norme :

- $|c\,x| = |c|\,|x|$;
- $|x + y| \leqslant |x| + |y|$;
- $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$.

À toute norme est associée une distance, qui, dans le cas euclidien standard, n'est autre que la *distance euclidienne :*

$$\mathrm{dist}(x, y) := |x - y|.$$

Définition 4.2. Le *complémentaire* E^c d'un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ collecte tous les points qui ne lui appartiennent pas :

$$E^c := \big\{x \in \mathbb{R}^d : \ x \notin E\big\}.$$

Plus généralement, si $E \subset \mathbb{R}^d$ et $F \subset \mathbb{R}^d$ sont deux sous-ensembles quelconques, le *complémentaire de* F *dans* E est défini par :

$$E \backslash F := \big\{x \in \mathbb{R}^d : \ x \in E \text{ mais } x \notin F\big\}.$$

Alors avec ces notations :

$$E^c = \mathbb{R}^d \backslash E.$$

Définition 4.3. La *différence symétrique* entre deux sous-ensembles $E \subset \mathbb{R}^d$ et $F \subset \mathbb{R}^d$, notée $E \Delta F$, est l'ensemble des points qui n'appartiennent qu'à l'un d'entre eux :

$$E \Delta F := (E \backslash F) \cup (F \backslash E).$$

Définition 4.4. La *distance* entre deux sous-ensembles $E \subset \mathbb{R}^d$ et $F \subset \mathbb{R}^d$ est la quantité :

$$\mathsf{dist}(E, F) \;:=\; \inf_{x \in E,\; y \in F} |x - y|.$$

Maintenant, effectuons de brefs rappels sur les notions topologiques fondamentales d'ensemble ouvert, d'ensemble fermé, d'ensemble borné, d'ensemble compact.

La *boule ouverte* de rayon $r > 0$ centrée en un point $x \in \mathbb{R}^d$ est l'ensemble :

$$B_r(x) := \big\{ y \in \mathbb{R}^d :\; |y - x| < r \big\}.$$

La *boule fermée* de rayon $r \geqslant 0$ centrée en un point $x \in \mathbb{R}^d$ est l'ensemble :

$$\overline{B}_r(x) := \big\{ y \in \mathbb{R}^d :\; |y - x| \leqslant r \big\}.$$

Elle se réduit au singleton $\{x\}$ lorsque $r = 0$.

Définition 4.5. Un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ est dit *ouvert* lorsqu'en chacun de ses points $x \in E$, on peut centrer une boule ouverte $B_{r_x}(x)$ de rayon $r_x > 0$ assez petit pour qu'elle soit entièrement contenue dans E :

$$\forall\, x \in E \qquad \exists\, r_x > 0 \qquad B_{r_x}(x) \subset E.$$

Définition 4.6. Un sous-ensemble $F \subset \mathbb{R}^d$ est dit *fermé* lorsque son complémentaire $\mathbb{R}^d \backslash F$ est ouvert.

On a alors une propriété fondamentale des ensembles ouverts et fermés, qui est d'ailleurs prise comme *définition* dans les sphères plus élevées de la Topologie Générale abstraite. La vérification est laissée en exercice.

Proposition 4.7. *Toute réunion absolument quelconque d'ensembles ouverts dans $\mathbb{R}^d$ est encore un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Toute intersection* finie *d'ouverts dans $\mathbb{R}^d$ est encore un ouvert de $\mathbb{R}^d$.* □

Rappelons que la restriction de finitude sur les intersections est inévitable, puisque par exemple dans $\mathbb{R}$, l'intersection *infinie* d'intervalles ouverts :

$$\bigcap_{n \geqslant 1} \big] - \tfrac{1}{n},\; \tfrac{1}{n} \big[= \{0\}$$

n'est *pas* un ouvert.

De manière équivalente, en passant aux complémentaires, on a :

Proposition 4.8. *Toute intersection absolument quelconque d'ensembles fermés dans $\mathbb{R}^d$ est encore un fermé de $\mathbb{R}^d$. Toute réunion* finie *de fermés dans $\mathbb{R}^d$ est encore un fermé de $\mathbb{R}^d$.*

Définition 4.9. Un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ est dit *borné* lorsqu'il est contenu dans une boule centrée à l'origine de rayon assez grand :

$$\exists\, R > 0 \qquad B_R(0) \supset E.$$

Ici, le fait que la boule soit ouverte et centrée à l'origine importe peu, puisque (exercice) :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^d \qquad \forall\, r > 0 \qquad \forall\, y \in \mathbb{R}^d \qquad \exists\, s > 0 \qquad \overline{B}_r(x) \subset B_s(y).$$

Définition 4.10. Un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ est *compact* lorsqu'il est à la fois fermé et borné.

Rappelons que les sous-ensembles compacts jouissent toujours de la propriété recouvrement fini.

Théorème 4.11. [Heine-Borel] *Soit $E \subset \mathbb{R}^d$ un sous-ensemble compact recouvert par une réunion absolument quelconque :*

$$E \subset \bigcup_\alpha \mathscr{O}_\alpha,$$

de sous-ensembles ouverts $\mathscr{O}_\alpha \subset \mathbb{R}^d$. *Alors en fait, il existe toujours une sous-famille* finie $\mathscr{O}_{\alpha_1}$, $\mathscr{O}_{\alpha_2}$, ..., $\mathscr{O}_{\alpha_N}$ *de tels ouverts qui recouvrent déjà E :*

$$E \subset \mathscr{O}_{\alpha_1} \cup \cdots \cup \mathscr{O}_{\alpha_N}. \qquad \square$$

En d'autres termes, de *tout* recouvrement ouvert d'un compact, on peut extraire un sous-recouvrement ouvert *fini*.

Définition 4.12. Un point $x \in E$ d'un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ est un *point intérieur* à E lorsqu'on y peut centrer une boule ouverte $B_r(x)$ de rayon $r > 0$ assez petit pour qu'elle soit entièrement contenue dans E :

$$\exists\, r > 0 \qquad B_r(x) \subset E.$$

L'ensemble des points qui sont intérieurs à E est alors appelé l'*intérieur* de E, il est noté :

$$\mathsf{Int}\, E,$$

et c'est manifestement un sous-ensemble de E, égal à E si et seulement si E lui-même est ouvert.

Définition 4.13. Un point $x \in \mathbb{R}^d$ est un *point adhérent* à un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ lorsque, pour tout $r > 0$, la boule ouverte $B_r(x)$ contient des points de E.

Autrement dit, il y a des points de E qui sont arbitrairement proches de x, et bien sûr, tout point de E est adhérent à E.

Définition 4.14. L'adhérence, notée $\overline{E}$, d'un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ consiste en la réunion de E avec tous les points de $\mathbb{R}^d$ qui sont adhérents à E.

Noter (exercice) que $\overline{E}$ est toujours un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^d$. De plus, un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ est fermé si et seulement si $\overline{E} = E$ (exercice).

Définition 4.15. Le *bord*, noté ∂E, d'un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$:

$$\partial E := \overline{E} \big\backslash \mathsf{Int}\, E$$

consiste en tous les points adhérents à E qui ne sont pas points intérieurs.

Définition 4.16. Un *point isolé* d'un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ est un point $x \in E$ en lequel on peut centrer une boule ouverte $B_r(x)$ de rayon $r > 0$ assez petit pour qu'elle ne rencontre plus d'autres points de E :

$$B_r(x) \cap E = \{x\}.$$

Définition 4.17. Un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ est dit *parfait* lorsqu'aucun de ses points n'est isolé.

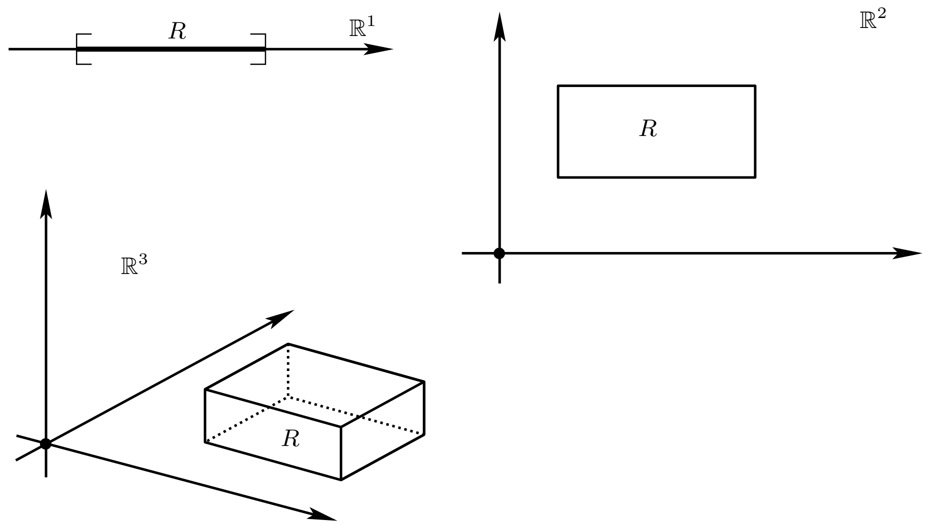
5. Rectangles et cubes dans $\mathbb{R}^d$

Définition 5.1. Un *rectangle fermé* $R \subset \mathbb{R}^d$ est le produit de d intervalles fermés bornés de $\mathbb{R}$:

$$R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_d, b_d],$$

avec :

$$-\infty < a_j \leqslant b_j < \infty \qquad\qquad (j = 1 \cdots d).$$



En d'autres termes :

$$R = \big\{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \colon\ a_j \leqslant x_j \leqslant b_j \ \text{ pour tout } \ j = 1, \dots, d\big\}.$$

Observons que dans notre définition, les rectangles ont leurs côtés *parallèles* aux axes de coordonnées. Dans $\mathbb{R}^1$, les rectangles sont précisément les intervalles fermés bornés, tandis que dans $\mathbb{R}^2$, ce sont les rectangles (fermés) usuels de la géométrie euclidienne. Dans $\mathbb{R}^3$, ce sont les paralléllépipèdes fermés.

Définition 5.2. Un *rectangle ouvert* $R \subset \mathbb{R}^d$ est le produit de d intervalles ouverts bornés de $\mathbb{R}$:

$$R = \,]a_1, b_1[\, \times \cdots \times \,]a_d, b_d[\,.$$

On vérifie (exercice) que l'intérieur, au sens de la Définition 4.12, d'un rectangle fermé :

$$[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d],$$

avec $-\infty < a_j < b_j < \infty$ pour tout $j = 1, \dots, d$, n'est autre que le rectangle ouvert :

$$]a_1, b_1[\, \times \cdots \times \,]a_d, b_d[\,,$$

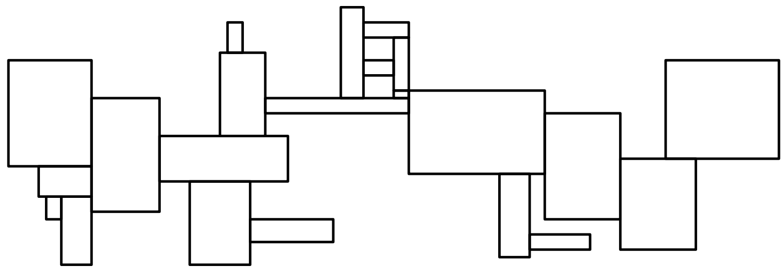
tandis que si une seule inégalité $a_j = b_j$ a lieu, l'interieur en question est réduit à l'ensemble vide.

Les *longueurs* (euclidiennes) des côtés d'un rectangle ouvert ou fermé $R \subset \mathbb{R}^d$ sont les nombres réels $b_j - a_j$ pour $j = 1, \dots, d$.

Définition 5.3. Le *volume* (euclidien) d'un rectangle ouvert ou fermé $R \subset \mathbb{R}^d$ est le nombre réel :

$$|R| := (b_1 - a_1) \cdots (b_d - a_d).$$

Bien entendu, lorsque $d = 1$, le 'volume' est une longueur, et lorsque $d = 2$, c'est une aire. Notons encore que si une seule inégalité $a_j = b_j$ a lieu, le volume est nul. Notons aussi que le volume est le même, que le rectangle soit ouvert ou fermé. En particulier, les *faces* (exercice : définir cette notion) comptent pour zéro dans le volume.



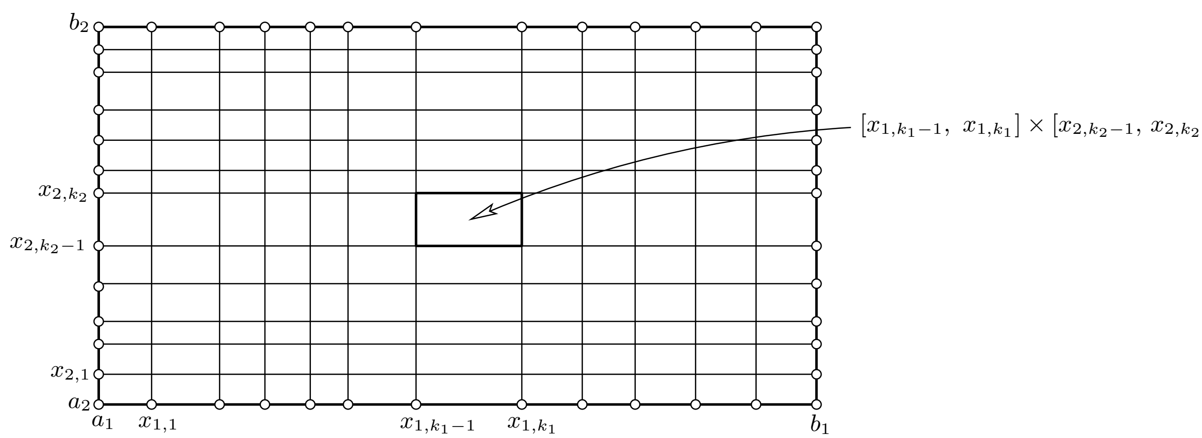
Définition 5.4. Une réunion finie de rectangles ouverts ou fermés dans $\mathbb{R}^d$ est dite *presque disjointe* si les intérieurs des rectangles qui la constitue sont deux à deux d'intersection *vide*.

Enfin, certains rectangles méritent une attention spéciale.

Définition 5.5. Un cube ouvert ou fermé est un rectangle ouvert ou fermé, respectivement, dont les côtés sont tous de longueur égale :

$$b_1 - a_1 = \cdots = b_d - a_d.$$

Si donc ℓ est cette longueur commune, le volume du cube vaut ℓ^d.



Lemme 5.6. *Si on se donne un rectangle fermé de $\mathbb{R}^d$ d'intérieur non vide :*

$$R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d] \qquad\qquad {\scriptstyle (a_1 < b_1\ \cdots\ a_d < b_d)},$$

et si chacun de ses d intervalles constituants est subdivisé en $n_1 \geqslant 1$, ..., $n_d \geqslant 1$ segments :

$$a_1 = x_{1,0} < x_{1,1} < \cdots < x_{1,n_1-1} < x_{1,n_1} = b_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_d = x_{d,0} < x_{d,1} < \cdots < x_{d,n_d-1} < x_{d,n_d} = b_d,$$

alors R se décompose comme réunion de $n_1 \cdots n_d$ rectangles fermés $R_{k_1,\dots,k_d}$ presque disjoints :

$$R = \bigcup_{\substack{1 \leqslant k_1 \leqslant n_1 \\ \cdots\cdots \\ 1 \leqslant k_d \leqslant n_d}} \underbrace{\big[x_{1,k_1-1},\ x_{1,k_1}\big] \times \cdots \times \big[x_{d,k_d-1},\ x_{d,k_d}\big]}_{=:\, R_{k_1,\dots,k_d}},$$

et le volume de R est la somme des volumes de ces $n_1 \times \cdots \times n_d$ sous-rectangles :

$$|R| = \sum_{\substack{1 \leqslant k_1 \leqslant n_1 \\ \cdots\cdots \\ 1 \leqslant k_d \leqslant n_d}} \big|R_{k_1,\dots,k_d}\big|.$$

Le même énoncé vaut également pour tout rectangle ouvert non vide.

Démonstration. La figure bidimensionnelle illustre clairement comment la décomposition de R s'effectue par un pavage dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées.

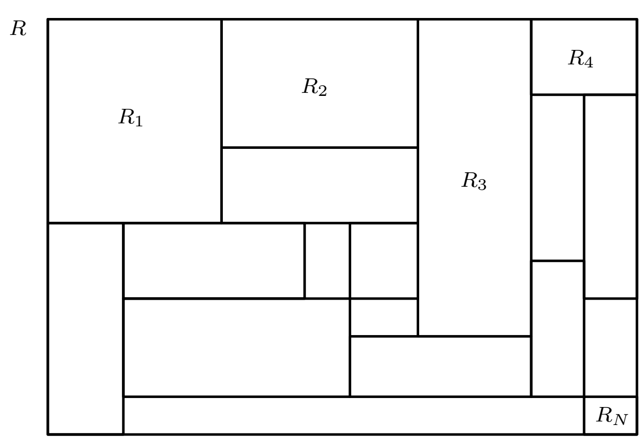
Ensuite, on a par hypothèse :

$$\begin{aligned} b_1 - a_1 &= \sum_{1 \leqslant k_1 \leqslant n_1} \big(x_{1,k_1} - x_{1,k_1-1}\big), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_d - a_d &= \sum_{1 \leqslant k_d \leqslant n_d} \big(x_{d,k_d} - x_{d,k_d-1}\big), \end{aligned}$$

et alors le simple développement algébrique d'un produit de d facteurs :

$$\begin{aligned} |R| &= \big(b_1 - a_1\big) \cdots \big(b_d - a_d\big) \\ &= \bigg(\sum_{1 \leqslant k_1 \leqslant n_1} \big(x_{1,k_1} - x_{1,k_1-1}\big)\bigg) \cdots \bigg(\sum_{1 \leqslant k_d \leqslant n_d} \big(x_{d,k_d} - x_{d,k_d-1}\big)\bigg) \\ &= \sum_{1 \leqslant k_1 \leqslant n_1} \cdots \sum_{1 \leqslant k_d \leqslant n_d} \big(x_{1,k_1} - x_{1,k_1-1}\big) \cdots \big(x_{d,k_d} - x_{d,k_d-1}\big) \\ &= \sum_{\substack{1 \leqslant k_1 \leqslant n_1 \\ \cdots\cdots \\ 1 \leqslant k_d \leqslant n_d}} \big|R_{k_1,\dots,k_d}\big| \end{aligned}$$

explique l'assertion concernant les volumes. □



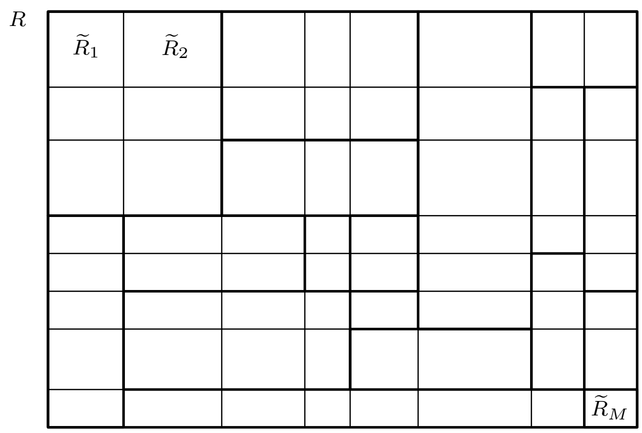
Ce lemme se généralise substantiellement à la situation de type *puzzle* où le rectangle fermé R est réunion finie quelconque de sous-rectangles fermés presque disjoints, pas forcément issus de subdivisions des intervalles qui constituent son produit.

Lemme 5.7. *Si un rectangle ouvert ou fermé R est* égal *à la réunion presque disjointe d'un nombre fini d'autres rectangles ouverts ou fermés :*

$$R = \bigcup_{k=1}^{N} R_k,$$

alors son volume est la somme simple des volumes de ses composantes :

$$|R| = \sum_{k=1}^{N} |R_k|.$$



Démonstration. Comment se ramener au lemme précédent ?

L'idée *jaillit* du diagramme : on considère la grille formée par prolongement infini des côtés de tous les rectangles $R_1, \dots, R_N$. Cette construction fournit un nombre $M \geqslant N$ plus grand mais encore fini de sous-rectangles de R :

$$\widetilde{R}_1, \dots, \widetilde{R}_M \subset R,$$

tels que chaque R_k est réunion de certains $\widetilde{R}_j$, ce qu'on notera :

$$R_k = \bigcup_{j \in J_k} \widetilde{R}_j \qquad\qquad (k = 1 \cdots N),$$

ces réunions portant sur les éléments J_k d'une certaine partition de l'ensemble total des indices-tildes :

$$J_1 \cup \cdots \cup J_N = \{1, 2, 3, \dots, M\} \qquad\qquad (J_{k_1} \cap J_{k_2} = \emptyset, k_1 \neq k_2).$$

Ensuite, on se convainc en inspectant visuellement les deux diagrammes que :

• R est une réunion des $\widetilde{R}_l$ qui est issue d'une certaine subdivision de ses d intervalles constituants, et donc le lemme qui précède s'applique immédiatement pour donner :

$$|R| = \sum_{l=1}^{M} \big|\widetilde{R}_l\big|;$$

• qui plus est (second exercice visuel), chaque rectangle R_k est une réunion des $\widetilde{R}_j$ pour $j \in J_k$ qui est elle aussi issue d'une subdivision de ses d intervalles constituants, et donc à nouveau, le lemme qui précède s'applique immédiatement pour donner :

$$\big|R_k\big| = \sum_{j\in J_k} \big|\widetilde{R}_j\big| \qquad\qquad {\scriptstyle (k=1\cdots N)}.$$

Un calcul absolument élémentaire de décomposition/regroupement de sommes :

$$\begin{aligned}|R| &= \sum_{l=1}^{M} \big|\widetilde{R}_l\big| \\ &= \sum_{k=1}^{N} \sum_{j\in J_k} \big|\widetilde{R}_j\big| \\ &= \sum_{k=1}^{N} \big|R_k\big|,\end{aligned}$$

termine alors élégamment la démonstration de ce lemme certes intuitivement trivial, mais qui a requis du travail rédactionnel. □

Une adaptation de ces arguments apporte l'extension suivante, tout aussi triviale intuitivement.

Lemme 5.8. *Si un rectangle ouvert ou fermé R est* contenu *dans une réunion finie quelconque d'autres rectangles R_k :*

$$R \subset \bigcup_{k=1}^{N} R_k,$$

pas forcément presque disjoints, alors on a toujours :

$$|R| \leqslant \sum_{k=1}^{N} \big|R_k\big|.$$

Démonstration. Après avoir formé la grille infinie de tous les côtés des $(N+1)$ rectangles R, $R_1, \dots, R_N$, on réalise la réunion totale :

$$R \cup R_1 \cup \cdots \cup R_N = \bigcup_{l=1}^{M} \widetilde{R}_l$$

comme puzzle constitué de rectangles aux côtés tous parallèles aux axes de coordonnées. On se ramène alors (exercice) à des applications multiples du lemme précédent. □

6. Mesurabilité des ensembles élémentaires

À partir de maintenant, et jusqu'à la fin de ce chapitre, un certain nombre d'énoncés seront laissés en exercice parce que la théorie de la mesure due Jordan, que nous souhaitons réviser ici par souci de complétude, est d'une portée assez restreinte par rapport à celle de Borel-Lebesgue, que nous développerons à l'inverse dans les moindres détails.

Définition 6.1. Un *rectangle général* $R \subset \mathbb{R}^d$ est un produit de d intervalles de $\mathbb{R}$ de l'une des quatre formes possibles :

$$\begin{aligned}&[a_j, b_j],\\&[a_j, b_j[,\\&]a_j, b_j],\\&]a_j, b_j[,\end{aligned}$$

avec $-\infty < a_j \leqslant b_j \leqslant \infty$ pour $j = 1, \dots, d$.

Comme dans le cas des rectangles ouverts ou fermés, le *volume* d'un rectangle général R est alors le produit :

$$|R| := \big(b_1 - a_1\big) \cdots \big(b_d - a_d\big).$$

Définition 6.2. Un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ est dit *élémentaire* lorsqu'il est réunion d'un nombre *fini* de rectangles généraux

L'intérêt des ensembles élémentaires dont les briques sont des rectangles plus généraux que les rectangles ouverts ou fermés, c'est que leur classe est stable par les opérations ensemblistes finies.

Lemme 6.3. [Exercice] *Si $E \subset \mathbb{R}^d$ et $F \subset \mathbb{R}^d$ sont deux ensembles élémentaires, alors :*

$$\begin{aligned}&E \cup F,\\&E \backslash F,\\&E \Delta F := (E \backslash F) \cup (F \backslash E)\end{aligned}$$

sont aussi des ensembles élémentaires. □

Lemme 6.4. *Tout sous-ensemble élémentaire $E \subset \mathbb{R}^d$ peut être réalisé comme réunion finie de rectangles généraux* disjoints.

Démonstration. Dans le cas de la dimension $d = 1$, l'ensemble E est réunion d'une collection finie d'intervalles $I_1, \dots, I_N \subset \mathbb{R}$, tous de l'une des quatre formes $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$, $]a, b[$. Ordonnons alors les extrémités de ces intervalles par ordre croissant, sans répétition. Si nous extrayons les intervalles ouverts entre ces extrémités qui appartiennent à E, et que nous sélectionnons seulement les extrémités d'intervalles qui appartiennent à E, nous obtenons une décomposition disjointe en rectangles généraux.

Le cas de la dimension $d \geqslant 2$ est laissé en exercice (tracer d'abord des figures exploratoires en dimension $d = 2$). □

Il importe de faire remarquer qu'il existe toujours une *infinité* de décompositions en réunions finies de rectangles généraux disjoints, ne serait-ce parce qu'un seul intervalle est indéfiniment décomposable :

$$[0, 1] = [0, x[\cup \{x\} \cup]x, 1] \qquad {\scriptstyle (0 \leqslant x \leqslant 1)}.$$

Toutefois, à tout ensemble élémentaire, on peut quand même attribuer une mesure d'une manière naturelle.

Proposition 6.5. [Mesurabilité des ensembles élémentaires] *Si un ensemble élémentaire E est représenté comme réunion finie* disjointe :

$$E = R_1 \cup \cdots \cup R_N \qquad {\scriptstyle (R_{k_1} \cap R_{k_2} = \emptyset,\ k_1 \neq k_2)},$$

de rectangles généraux, alors la quantité :

$$\mathsf{mesure}(E) := |R_1| + \cdots + |R_N|$$

est indépendante d'une telle partition.

Démonstration. Ici apparaît une idée nouvelle : introduire des *discrétisations* de plus en plus fines. En renormalisant le sous-ensemble $\mathbb{Z}^d \subset \mathbb{R}^d$ des points à coordonnées entières par un facteur rationnel $\frac{1}{n}$ de plus en plus petit :

$$\tfrac{1}{n}\,\mathbb{Z}^d \,\subset\, \mathbb{R}^d,$$

on crée en effet un réseau de points équidistribués dans $\mathbb{R}^d$ qui est de plus en plus dense lorsque l'entier $n \geqslant 1$ croît.

En dimension $d = 1$, on se convainc alors aisément (exercice) que si $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle quelconque ayant l'une des quatre formes possibles $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$, $]a, b[$, alors sa longueur $|I| = b - a$ peut être retrouvée en comptant les points-atomes de ces réseaux à l'échelle $\frac{1}{n}$ qui lui appartiennent, à savoir :

$$|I| \,=\, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\,\mathsf{Card}\,\big(I \cap \tfrac{1}{n}\,\mathbb{Z}\big).$$

Une fois que la dimension $d = 1$ a été comprise, il suffit de prendre des produits cartésiens pour en déduire (exercice) le résultat analogue en dimension arbitraire $d \geqslant 1$:

$$|R| \,=\, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^d}\,\mathsf{Card}\,\big(R \cap \tfrac{1}{n}\,\mathbb{Z}^d\big),$$

valable pour un rectangle général $R \subset \mathbb{R}^d$.

Si donc $R_1, \dots, R_N$ sont des rectangles généraux *disjoints* dont la réunion est égale à E, on en déduit aisément que :

$$\begin{aligned}
|R_1| + \cdots + |R_N| \,&=\, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^d}\,\mathsf{Card}\,\big(R_1 \cap \tfrac{1}{n}\,\mathbb{Z}^d\big) + \cdots + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^d}\,\mathsf{Card}\,\big(R_N \cap \tfrac{1}{n}\,\mathbb{Z}^d\big) \\
&=\, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^d}\,\mathsf{Card}\,\Big(\big[R_1 \cup \cdots \cup R_N\big] \cap \tfrac{1}{n}\,\mathbb{Z}^d\Big) \\
&=\, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^d}\,\mathsf{Card}\,\big(E \cap \tfrac{1}{n}\,\mathbb{Z}^d\big).
\end{aligned}$$

Mais alors, pour toute autre partition quelconque de E par des rectangles généraux $R'_{l'}$ eux aussi disjoints :

$$E = R'_1 \cup \cdots \cup R'_{N'} \qquad\qquad {\scriptstyle (R'_{l'_1} \cap R'_{l'_2} = \emptyset,\; l'_1 \neq l'_2)},$$

le même résultat est instantanément valable :

$$|R'_1| + \cdots + |R'_{N'}| \,=\, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\,\mathsf{Card}\,\big(E \cap \tfrac{1}{n}\,\mathbb{Z}^d\big),$$

et comme ce dernier cardinal ne concerne que l'ensemble considéré E, une simple fusion entre égalités apporte :

$$|R_1| + \cdots + |R_N| \,=\, |R'_1| + \cdots + |R'_{N'}|$$

ce qui est l'indépendance annoncée relativement à toute décomposition de E. $\square$

Ayant atteint ce point, on pourrait être tenté de définir la *mesure* d'un sous-ensemble quelconque $A \subset \mathbb{R}^d$ par la même formule :

$$\mathsf{mesure}(A) \overset{\text{def?}}{:=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\,\mathsf{Card}\,\big(A \cap \tfrac{1}{n}\,\mathbb{Z}^d\big),$$

puisque cela fonctionne bien avec les ensembles élémentaires. Cependant, une telle définition n'est pas satisfaisante pour plusieurs raisons.

En effet, on peut tout d'abord concocter des exemples pour lesquels une telle limite n'existe pas. Mais même dans les cas où la limite existe, un tel concept n'obéirait pas la propriété indispensable d'invariance par translation. Par exemple, en dimension $d = 1$, une telle définition donnerait une mesure égale à 1 à l'ensemble :

$$\mathbb{Q} \cap [0,1],$$

tandis qu'elle donnerait (exercice) une mesure égale à 0 à son tanslaté irrationnel :

$$\sqrt{2} + \mathbb{Q} \cap [0,1].$$

Cependant, nous allons définir dans peu de temps les sous-ensembles *Jordan-mesurables* $A \subset \mathbb{R}^d$, sous-ensembles auxquels nous pourrons attribuer — en procédant différemment — une mesure :

$$\mathsf{mesure}(A) \in [0,\infty[\,,$$

et nous verrons (Exercice 12) que pour ces sous-ensembles, *mais seulement pour ces sous-ensembles*, la formule en question :

$$\mathsf{mesure}(A) \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\,\mathsf{Card}\,\big(A \cap \tfrac{1}{n}\,\mathbb{Z}^d\big),$$

est effectivement valide. De plus, les ensembles Jordan-mesurables conserveront leur mesure par une translation quelconque. Nous verrons alors aussi que le sous-ensemble $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ n'est *pas* mesurable au sens de Jordan, ce qui expliquera le paradoxe exhibé ci-dessus. En fait, seule la théorie supérieure de Borel-Lebesgue sera capable d'attribuer une mesure à $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, et ce sera une mesure égale à 0, exactement comme nous l'avons déjà vu à la fin du chapitre sur l'intégrale de Riemann.

7. **Propriétés élémentaires de la mesure de Jordan**

D'après les définitions, il est clair que pour tout sous-ensemble élémentaire $E \subset \mathbb{R}^d$, la quantité $\mathsf{mesure}(E)$ est un nombre réel $\in [0,\infty[$, avec bien entendu :

$$0 = \mathsf{mesure}(\emptyset).$$

Ensuite, si $E \subset \mathbb{R}^d$ et $F \subset \mathbb{R}^d$ sont deux sous-ensembles élémentaires *disjoints*, alors :

$$\mathsf{mesure}(E \cup F) = \mathsf{mesure}(E) + \mathsf{mesure}(F).$$

Plus généralement, une récurrence facile montre que si $E_1, \dots, E_N$ sont des sous-ensembles élémentaires de $\mathbb{R}^d$ *disjoints deux à deux*, alors on a la *propriété d'additivité finie disjointe :*

$$\mathsf{mesure}(E_1 \cup \cdots \cup E_N) = \mathsf{mesure}(E_1) + \cdots + \mathsf{mesure}(E_N).$$

Sans même qu'il soit besoin de le mentionner, on aura implicitement compris que la mesure ainsi définie coïncide avec le volume sur les rectangles généraux $R \subset \mathbb{R}^d$:

$$\mathsf{mesure}(R) = |R|.$$

On démontre aussi sans difficulté que si $E \subset F$ sont deux sous-ensembles élémentaires emboîtés, alors :

$$\mathsf{mesure}(E) \leqslant \mathsf{mesure}(F).$$

On en déduit (exercice) que pour deux ensembles élémentaires quelconques $E, F \subset \mathbb{R}^d$, on a toujours :

$$\mathsf{mesure}\big(E \cup F\big) \leqslant \mathsf{mesure}(E) + \mathsf{mesure}(F),$$

et plus généralement par récurrence, que :

$$\mathsf{mesure}\big(E_1 \cup \cdots \cup E_N\big) \leqslant \mathsf{mesure}(E_1) + \cdots + \mathsf{mesure}(E_N),$$

lorsque $E_1, \dots, E_N \subset \mathbb{R}^d$ sont élémentaires (à nouveau pas forcément disjoints).

Enfin, puisque le volume des rectangles généraux est par définition invariant par translation, on voit que la mesure de Jordan jouit de la propriété d'*invariance par translation :*

$$\mathsf{mesure}\big(\tau + e\big) = \mathsf{mesure}(E),$$

pour tout vecteur de translation $\tau \in \mathbb{R}^d$ et tout sous-ensemble élémentaire $E \subset \mathbb{R}^d$.

Soit maintenant un sous-ensemble *borné quelconque :*

$$A \subset \mathbb{R}^d.$$

Par restriction théorique, on ne considèrera pas ici les sous-ensembles non bornés.

Définition 7.1. [Mesures de Jordan intérieure et extérieure] La *mesure de Jordan intérieure* de A est le nombre réel positif :

$$m_*^J(A) := \sup_{\substack{E \subset A \\ E \text{ élémentaire}}} \mathsf{mesure}(E),$$

tandis que la mesure de Jordan extérieure de A est le nombre réel positif :

$$m_J^*(A) := \inf_{\substack{E \supset A \\ E \text{ élémentaire}}} \mathsf{mesure}(E).$$

On se convainc (exercice) que l'on a toujours :

$$m_*^J(A) \leqslant m_J^*(A).$$

Voici enfin la définition conceptuelle principale de ce chapitre.

Définition 7.2. [Mesures de Jordan] Un sous-ensemble borné $A \subset \mathbb{R}^d$ est dit *mesurable au sens de Jordan* lorsque ses mesures de Jordan intérieure et extérieure coïncident, à savoir lorsque :

$$m_J^*(A) = m_*^J(A),$$

et dans ce cas, on appelle *mesure de Jordan* de A ce nombre commun :

$$m_J(A) := m_J^*(A) = m_*^J(A),$$

qui est toujours positif :

$$m_J(A) \in [0, \infty[\,.$$

En particulier :

Lemme 7.3. *Les ensembles élémentaires $E \subset \mathbb{R}^d$ sont Jordan-mesurables de mesure de Jordan égale à :*

$$m_J(E) = \mathsf{mesure}(E). \qquad \square$$

D'une certaine façon, les ensembles mesurables au sens de Jordan sont ceux qui sont « *presque élémentaires* », si l'on s'imagine qu'ils sont bien approximés à l'intérieur et à l'extérieur par des ensembles élémentaires. Plus précisément, on a la caractérisation suivante.

Proposition 7.4. [Exercice : caractérisation de la Jordan-mesurabilité] *Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ un sous-ensemble borné. Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *A est Jordan-mesurable ;*

(ii) *pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux ensembles élémentaires :*

$$E' \subset A \subset E''$$

tels que :

$$\mathsf{mesure}\big(E''\backslash E'\big) \leqslant \varepsilon;$$

(iii) *pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble élémentaire E tel que :*

$$m_J^*\big(E \,\Delta\, A\big) \leqslant \varepsilon. \qquad \square$$

Proposition 7.5. [Exercice : propriétés élémentaires de la Jordan-mesurabilité] *Si $A \subset \mathbb{R}^d$ et $B \subset \mathbb{R}^d$ sont deux sous-ensembles Jordan-mesurables (en particulier bornés), alors les cinq propriétés suivantes sont satisfaites.*

(i) Stabilité booléenne : *Les quatre ensembles :*

$$\begin{aligned} &A \cup B, \\ &A \cap B, \\ &A \backslash B, \\ &A \,\Delta\, B, \end{aligned}$$

sont eux aussi Jordan-mesurables ;

(ii) Additivité finie : *Lorsque $A \cap B = \emptyset$ sont disjoints :*

$$m_J(A \cup B) = m_J(A) + m_J(B);$$

(iii) Monotonie : *Lorsque $A \subset B$, on a :*

$$m_J(A) \leqslant m_J(B);$$

(iv) Subadditivité finie : *On a toujours :*

$$m_J(A \cup B) \leqslant m_J(A) + m_J(B);$$

(v) Invariance par translation : *Pour tout $\tau \in \mathbb{R}^d$, on a :*

$$m_J(\tau + A) = m_J(A).$$

De nombreuses autres propriétés fondamentales apparaissent dans la liste des exercices placés à la fin de ce chapitre.

8. Vers la mesure de Borel et de Lebesgue

Même si on se restreint à la considération de sous-ensembles bornés $A \subset \mathbb{R}^d$, la plupart d'entre eux ne sont *pas* Jordan-mesurables. En effet, la théorie de Jordan échoue sur un écueil capital, en tant qu'elle est *incapable d'embrasser les réunions dénombrables, ainsi que les intersections dénombrables*, d'ensembles déjà connus comme étant mesurables (Exercice 18). Autrement dit, la théorie de Jordan se limite consubstantiellement au fini.

En effet, une explicitation complète de la notion de mesure extérieure $m_J^*(A)$ au sens de Jordan d'un sous-ensemble borné $A \subset \mathbb{R}^d$ s'exprime comme :

$$m_J^*(A) := \inf_{\substack{R_1 \cup \cdots \cup R_N \supset A \\ R_1, \dots, R_N \\ \text{rectangles}}} |R_1| + \cdots + |R_N|,$$

ces recouvrements de A étant effectivement limités à être *toujours de cardinal fini*.

Pour des raisons qui tenaient à des nécessités mathématiques internes et profondes, Borel et Lebesgue ont été amenés à *étendre* un telle définition en admettant des réunion *infinies dénombrables* de rectangles couvrants. Nous en dirons plus dans un chapitre systématique qui suivra, mais esquissons ici ces idées qui furent nouvelles à leur époque.

Définition 8.1. La *mesure extérieure* au sens de Borel et de Lebesgue d'un sous-ensemble quelconque $A \subset \mathbb{R}^d$ — pas forcément borné — est le nombre réel positif appartenant à $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$:

$$m_L^*(A) := \inf_{\substack{\cup_{k=1}^{\infty} R_k \supset A \\ R_1, \dots, R_k, \dots \\ \text{rectangles}}} \sum_{k=1}^{\infty} |R_k|,$$

à savoir l'infimum de la somme *infinie* des volumes d'un nombre *infini dénombrable* de rectangles dont la réunion *dénombrable* recouvre A.

Bien entendu, on a toujours (exercice mental) :

$$m_L^*(A) \leqslant m_J^*(A),$$

puisque (solution de l'exercice) toute réunion finie de rectangles peut être considérée comme une réunion infinie à laquelle on ajoute trivialement des rectangles égaux à $\emptyset$.

Mais $m_L^*(A)$ peut s'avérer être nettement inférieur à $m_J^*(A)$, et c'est tout ce qui fera la supériorité de la théorie de la mesure de Borel et de Lebesgue sur celle de Jordan.

Par exemple, rappelons-nous qu'à la fin du chapitre sur l'intégrale de Riemann, nous avons défini les ensembles de mesure 0 contenus dans $\mathbb{R}$, exactement en employant des recouvrements infinis dénombrables. À cette occasion, nous avons établi que *tout sous-ensemble de cardinal dénombrable :*

$$\big\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\big\} \subset \mathbb{R}$$

est de mesure (de Lebesgue) 0, et en fait aussi, de mesure extérieure de Lebesgue 0, même s'il n'est pas borné. Au contraire, la mesure extérieure de Jordan attribue par exemple la mesure maximale 1 au sous-ensemble dénombrable :

$$\mathbb{Q} \cap [0,1] \subset \mathbb{R},$$

affirmation que nous offrons comme exercice impératif à notre fidèle étudiant-lecteur.

Comme on le constatera plus tard, la mesure de Lebesgue prolonge celle de Jordan, au sens où tout ensemble Jordan-mesurable sera automatiquement Lebesgue-mesurable aussi, ses deux mesures étant égales.

Fondamentalement, la mesure de Lebesgue satisfera toutes les propriétés intuitivement claires qu'une mesure doit satisfaire, lorsqu'on étend les considérations aux opérations dénombrables, et non pas seulement finies. En fait, presque tous les ensembles que l'on rencontre en Analyse font intervenir l'infini dénombrable et ils sont mesurables. Il existe seulement quelques sous-ensembles pathologiques non mesurables qu'on exhibe comme des bêtes de foires dans les cours de L3, mais qu'on se garde bien d'étudier réellement.

Ensuite, une fois que la mesure de Lebesgue aura été acquise, nous pourrons développer une puissante théorie de l'intégration qui est un joyau de la pensée mathématique théorique.

« J'obvie un joyau jovial ».

L'allemand Riemann, le mathématicien doué du génie le plus imaginatif et le plus puissant du dix-neuvième siècle (sous la réserve des titres de Poincaré), recréa l'instrument par une innovation hardie, opérant une révolution des idées. Mais avec les années, la fécondité de l'intégrale riemannienne se trouvait exploitée jusqu'à l'épuisement, et les limites de son pouvoir atteintes partout. Sur les terres neuves de l'Analyse mathématique, les expéditions conquérantes marquaient le pas. Lebesgue fut le thaumaturge [= magicien] dénouant les liens où tant de compagnons d'avant-garde étaient comme par enchantement retenus. Arnaud DENJOY

9. Exercices

Exercice 8. [Unicité de la mesure de Jordan, 1] En dimension arbitraire $d \geqslant 1$, soit une application :

$$m' \colon \quad \mathscr{E}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}_+,$$

définie sur la collection $\mathscr{E}(\mathbb{R}^d)$ des sous-ensembles élémentaires de $\mathbb{R}^d$ qui satisfait la propriété d'additivité finie disjointe ainsi que l'invariance par translation. Montrer qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}_+$ telle que :

$$m'(E) = c\,\mathsf{mesure}(E),$$

pour tout sous-ensemble élémentaire $E \subset \mathbb{R}^d$, où $\mathsf{mesure}(\cdot)$ désigne la mesure de Jordan. Indication: Introduire $c := m'\big([0,1]^d\big)$ et calculer $m'\big(\big[0,\frac{1}{n}\big]^d\big)$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

Exercice 9. [Interprétation géométrique de l'intégrale de Riemann] Soit un intervalle compact $[a,b] \Subset \mathbb{R}$, et soit $f \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle bornée.

(a) Montrer que f est Riemann-intégrable si et seulement si les deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}\Gamma^+(f) &:= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \colon\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\big\},\\ \Gamma^-(f) &:= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \colon\ f(x) \leqslant y \leqslant 0\big\},\end{aligned}$$

sont Jordan-mesurables dans $\mathbb{R}^2$.

(b) Dans ce cas, montrer alors que :

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; m_{J,\mathbb{R}^2}\big(\Gamma^+(f)\big) - m_{J,\mathbb{R}^2}\big(\Gamma^-(f)\big).$$

Exercice 10. [Jordan-mesurabilité des hypographes] Soit $R \subset \mathbb{R}^d$ un rectangle fermé et soit une fonction continue $f \colon R \longrightarrow \mathbb{R}$.

(a) Montrer que le graphe de f :

$$\big\{\big(x, f(x)\big) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \colon\ x \in R\big\}$$

est Jordan-mesurable dans $\mathbb{R}^{d+1}$, de mesure de Jordan égale à 0. Indication: Utiliser le fait que f est uniformément continue.

(b) Montrer que l'hypographe positif de f :

$$\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}\colon\ x\in R,\ 0\leqslant y\leqslant f(x)\big\}$$

est aussi Jordan-mesurable dans $\mathbb{R}^{d+1}$.

Exercice 11. Soient trois points A, B, C appartenant à $\mathbb{R}^2$.
(a) Montrer que le triangle fermé plein de sommets A, B, C est Jordan-mesurable.
(b) Montrer que la mesure de Jordan d'un tel triangle quelconque vaut $\frac{1}{2}\big|(B-A)\wedge(C-A)\big|$.

Exercice 12. [Comptages discrets] Montrer que la formule :

$$\mathsf{mesure}(A)\ =\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\,\mathsf{Card}\,\big(A\cap\tfrac{1}{n}\,\mathbb{Z}^d\big),$$

est valable pour tout sous-ensemble borné $A\subset\mathbb{R}^d$ Jordan-mesurable.

Exercice 13. Si $A\subset\mathbb{R}^d$ est un ensemble borné Jordan-mesurable, et si $m_J(A)=0$, montrer que tout sous-ensemble $A'\subset A$ est aussi Jordan-mesurable avec de même $m_J(A')=0$.

Exercice 14. [Grilles dyadiques] Un rectangle fermé est appelé un *cube dyadique* s'il est de la forme :

$$\big[\tfrac{k_1}{2^n},\ \tfrac{k_1+1}{2^n}\big]\times\cdots\times\big[\tfrac{k_d}{2^n},\ \tfrac{k_d+1}{2^n}\big],$$

où $n\in\mathbb{N}$ et $k_1,\dots,k_d\in\mathbb{Z}$ sont des entiers.

Étant donné un sous-ensemble borné quelconque $A\subset\mathbb{R}^d$, pour chaque entier $n\in\mathbb{N}$ fixé, on note $\mathscr{E}_*\big(A,\frac{1}{2^n}\big)$ le nombre de tels cubes dyadiques de côté $\frac{1}{2^n}$ qui sont entièrement contenus dans A.

On note aussi $\mathscr{E}^*\big(A,\frac{1}{2^n}\big)$ le nombre de tels cubes dyadiques de côté $\frac{1}{2^n}$ qui intersectent A.

Montrer alors que A est Jordan-mesurable si et seulement si :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{dn}}\,\mathscr{E}_*\big(A,\tfrac{1}{2^n}\big)\ =\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{dn}}\,\mathscr{E}^*\big(A,\tfrac{1}{2^n}\big),$$

et si tel est le cas, montrer que la mesure de Jordan de A coïncide avec ces deux quantités égales :

$$m_J(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{dn}}\,\mathscr{E}_*\big(A,\tfrac{1}{2^n}\big)\ =\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{dn}}\,\mathscr{E}^*\big(A,\tfrac{1}{2^n}\big).$$

Exercice 15. [Unicité de la mesure de Jordan, 2] En dimension arbitraire $d\geqslant 1$, soit une application :

$$m'\colon\quad \mathscr{J}(\mathbb{R}^d)\longrightarrow\mathbb{R}_+,$$

définie sur la collection $\mathscr{J}(\mathbb{R}^d)$ des sous-ensembles bornés de $\mathbb{R}^d$ Jordan-mesurables, qui satisfait la propriété d'additivité finie disjointe ainsi que l'invariance par translation. Montrer qu'il existe une constante $c\in\mathbb{R}_+$ telle que :

$$m'(A)=c\,m_J(A),$$

pour tout sous-ensemble borné Jordan-mesurable $A\subset\mathbb{R}^d$, où $\mathsf{mesure}(\cdot)$ désigne la mesure de Jordan. En particulier, si on impose $m'\big([0,1]^d\big)=1$, alors $m'=m_J$.

Exercice 16. Soient deux entiers quelconques $d_1\geqslant 1$ et $d_2\geqslant 1$.
(a) Si $E_1\subset\mathbb{R}^{d_1}$ et $E_2\subset\mathbb{R}^{d_2}$ sont deux sous-ensembles élémentaires, montrer que leur produit $E_1\times E_2\subset\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}$ est encore élémentaire, et montrer que :

$$\mathsf{mesure}_{\mathbb{R}^{d_1+d_2}}\big(E_1\times E_2\big)\ =\ \mathsf{mesure}_{\mathbb{R}^{d_1}}\big(E_1\big)\cdot\mathsf{mesure}_{\mathbb{R}^{d_2}}\big(E_2\big).$$

(b) Si $A_1\subset\mathbb{R}^{d_1}$ et $A_2\subset\mathbb{R}^{d_2}$ sont deux sous-ensembles bornés Jordan-mesurables, montrer que leur produit $A_1\times A_2\subset\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}$ est encore Jordan-mesurable, avec :

$$m_{J,\mathbb{R}^{d_1+d_2}}\big(A_1\times A_2\big)\ =\ m_{J,\mathbb{R}^{d_1}}\big(A_1\big)\cdot m_{J,\mathbb{R}^{d_2}}\big(A_2\big).$$

Exercice 17. [Caractérisation de type Carathéodory] Soit $A\subset\mathbb{R}^d$ un sous-ensemble borné Jordan-mesurable. Montrer que pour tout ensemble élémentaire $E\subset\mathbb{R}^d$, on a :

$$m_J^*(A)\ =\ m_J^*\big(A\cap E\big)+m_J^*\big(A\backslash E\big).$$

Exercice 18. Montrer par des exemples que la réunion dénombrable $\bigcup_{n=1}^\infty A_n$, et l'intersection dénombrable $\bigcap_{n=1}^\infty A_n$, de sous-ensembles bornés $A_n\subset\mathbb{R}$ Jordan-mesurables, ne sont en général *pas* Jordan-mesurables, même quand elles restent bornées.

Exercice 19. ∗∗

Insuffisances de l'intégrale de Cauchy, Riemann, Darboux, Jordan Nécessité métaphysique de la Théorie de Lebesgue

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Sud, France

Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont pas de dérivée. Charles HERMITE.

1. Changement conceptuel révolutionnaire dans l'Analyse

Au début des années 1870, un changement conceptuel révolutionnaire commença à percer dans l'Analyse mathématique, changement qui conduisit ultérieurement à une évolution spectaculaire de notre compréhension de notions aussi élémentaires que celle de *fonction*, de *continuité*, de *différentiabilité*, d'*intégrabilité*.

Précédemment, les fonctions utiles en Analyse étaient essentiellement données par des formules ou des expressions développables en série entière, éventuellement en un nombre fini de morceaux, et donc ces fonctions étaient par nature continues, ou presque, avec de plus une infinité de dérivées sauf peut-être en un nombre fini de points. Aussi ces fonctions étaient-elles manifestement intégrables par toute méthode d'intégration connue.

Mais à partir de la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, ces idées ont commencé à éprouver leurs limites au contact d'exemples impromptus variés et de problèmes nouveaux qui apparaissaient en Analyse, questions qui ne pouvaient plus être ignorées, et qui requéraient l'élaboration de nouveaux concepts pour être abordées, voire résolues.

En parallèle à ces nouvelles découvertes, des besoins théoriques de type géométrique sont apparus, notamment l'exigence de comprendre plus en profondeur la nature des courbes, leur rectifiabilité, leur extension. Mais surtout, les débuts de la théorie abstraite des ensembles ont été initiés par l'étude des sous-ensembles de la droite réelle ou du plan, et par la question de savoir quelle '*mesure*' assigner à de tels sous-ensembles.

Ceci ne veut pas dire que ne s'exprimait pas une résistance parfois considérable à l'émergence de tels nouveaux points de vue exigés par le sujet. Paradoxalement, quelques uns des mathématiciens les plus éminents de l'époque, ceux dont on aurait pu attendre une haute appréciation de ces directions nouvelles de recherche, se sont avérés être les plus réticents et les plus sceptiques.

Alors le fait que ces idées précurseurs ont finalement résisté aux controverses tient principalement à ce qu'elles s'arrimaient à des questions profondes ouvrant sur la création d'« *extra-êtres mathématiques* » absolument dignes d'étude.

Seule l'insistance d'un questionnement mathématique récurrent a le pouvoir de déceler l'existence d'objet nouveaux qui pourront se fondre ultérieurement dans une harmonie théorique supérieure.

2. Séries de Fourier : complétion

Toutes les fois qu'une fonction bornée :

$$f\colon\quad [-\pi,\,\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$$

est Riemann-intégrable, on peut lui associer sa *série de Fourier :*

$$f \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\, e^{i\,n\,\theta},$$

dont les coefficients sont donnés par l'intégrale *de Riemann :*

$$\widehat{f}(n) := \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-i\,n\,t}\,\frac{dt}{2\pi},$$

le signe $\sim$ étant là pour signifier que la fonction f n'est en fait pas toujours égale à sa série de Fourier. Au passage, donc, il y a une question très difficile que nous ne regarderons pas pour l'instant : *quelles fonctions sont égales à leur série de Fourier ?*

En utilisant exclusivement l'intégrale élémentaire de Riemann, on peut alors assez aisément démontrer la célèbre *identité de Parseval* que nous admettrons ici :

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \big|\widehat{f}(n)\big|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,\frac{dt}{2\pi}\\ &< \infty,\end{aligned}$$

cette dernière intégrale étant *finie*, puisque $|f|^2 = f\overline{f}$ est aussi bornée Riemann-intégrable. Nous affirmons alors que *cette relation entre les fonctions et leurs coefficients de Fourier n'est pas complètement réciproque lorsqu'on se limite aux fonctions Riemann-intégrables*. Et donc, la théorie de l'intégration de Riemann est insuffisante.

En effet, dans cette égalité entre une somme et une intégrale, observons que la suite (doublement infinie) des coefficients de Fourier de f :

$$\big(\widehat{f}(n)\big)_{-\infty\leqslant n\leqslant\infty}$$

appartient à un espace noté classiquement :

$$\ell^2(\mathbb{Z}) = \bigg\{ z = (z_n)_{-\infty\leqslant n\leqslant\infty}\colon\ z_n\in\mathbb{C},\ \sum_{-\infty\leqslant n\leqslant\infty} |z_n|^2 < \infty \bigg\}.$$

Or on démontre que cet espace $\ell^2(\mathbb{Z})$ est un espace $\mathbb{C}$-vectoriel qui est *complet* pour la norme naturelle :

$$||z|| := \bigg(\sum_{-\infty\leqslant n\leqslant\infty} |z_n|^2\bigg)^{1/2}.$$

Alors il se trouve que si on prend un élément quelconque $z = (z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de cet espace, on peut lui associer formellement la 'fonction' :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n\, e^{i\,n\,\theta},$$

qui n'est peut-être pas bien définie, mais en tout cas, *la question se pose de déterminer quel type de fonction on obtiendrait ainsi*.

En fait, il est assez facile de construire des éléments $z = (z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de cet espace vectoriel normé complet $\ell^2(\mathbb{Z})$ tels que la fonction associée $\sum z_n\, e^{in\theta}$ existe bel et bien *mais n'est pas Riemann-intégrable !*

On peut même établir que l'espace des fonctions Riemann-intégrables n'*est pas complet !*

En résumé, on est conduit à (au moins) deux questions :

Question. *Quelles pourraient être les 'fonctions' éventuelles f qui apparaîtraient lorsqu'on complète l'espace des fonctions Riemann-intégrables ?*

Autrement dit, étant donné une suite doublement infinie arbitraire $z = (z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, quelles seraient les fonctions du type $\sum_{n\in\mathbb{Z}} z_n\, e^{in\theta}$? La réponse sera donnée par la théorie de Lebesgue, ce seront exactement les fonctions appartenant à un certain espace noté :

$$L^2\big([-\pi,\,\pi]\big) := \bigg\{ f\colon [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{C}\colon \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}}_{\substack{\text{même symbole}\\ \text{pour une intégrale différente}}} |f(t)|^2\,\frac{dt}{2\pi} \,<\, \infty \bigg\},$$

des fonctions dites *de carré intégrable*, *l'intégration s'effectuant au sens de Lebesgue*, plus général que celui de Riemann.

Question. *Comment intègre-t-on de telles fonctions, de manière à vérifier l'identité de Parseval en toute généralité ?*

Réponse : en utilisant l'intégrale de Lebesgue !

3. Limites de fonctions continues

Soit une suite de fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$:

$$f_n\colon \quad [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad {\scriptstyle (n\geqslant 1)}.$$

Supposons que pour tout $x \in [0,1]$, la limite ponctuelle :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x),$$

existe, et interrogeons-nous sur la nature de la fonction-limite f.

Lorsque la convergence est uniforme, les conclusions sont faciles, puisque f est alors partout continue. Mais dès qu'on supprime l'hypothèse de convergence uniforme, les choses changent radicalement, et les phénomènes qui apparaissent peuvent devenir très subtils.

Un exemple d'un tel phénomène, que nous détaillerons au chapitre suivant, est donné par une suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ qui converge simplement vers une fonction f en satisfaisant les conditions suivantes :

(i) $0 \leqslant f_n(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in [0,1]$;

(ii) en tout point x fixé, la suite réelle $\big(f_n(x)\big)_{n\geqslant 1}$ est monotone décroissante lorsque $n \to \infty$;

(iii) la fonction-limite est extrêmement discontinue, et en particulier, elle n'est *pas* Riemann-intégrable.

Mais alors, en vertu des deux conditions **(i)** et **(ii)**, la suite réelle :

$$\left(\int_0^1 f_n(x)\,dx\right)_{n\geqslant 1}$$

est positive monotone décroissante, *donc elle admet une limite* $\in \mathbb{R}_+$. Alors il est tout à fait naturel de se poser la :

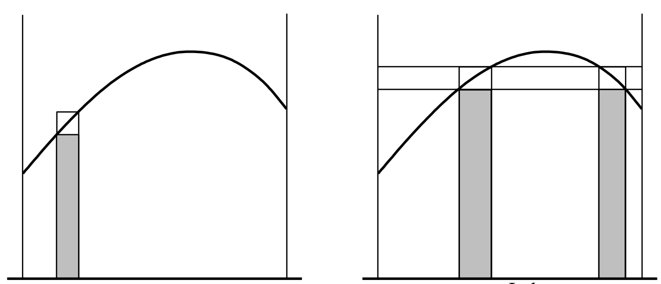
Question. *Quelle méthode d'intégration pourrait être développée afin qu'avec une nouvelle théorie — en admettant le même symbole $\int$ qui aurait une signification plus étendue que dans la théorie de Riemann — on puisse intégrer f et obtenir :*

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx\,?$$

Encore une fois, la réponse est : avec la théorie de l'intégrale de Lebesgue !

4. Trancher selon l'axe des ordonnées

Supposons qu'on veuille, connaissant chaque jour à 1 cm près l'étiage d'un cours d'eau dont le flux varie assez lentement, déterminer son niveau moyen dans une année non bissextile. Un premier procédé consistera à ajouter les étiages de tous les jours de l'année et à diviser la somme obtenue par 365. Un second procédé sera de compter pour chaque étiage évalué en centimètres le nombre de jours où le fleuve a atteint cette hauteur, puis de faire le produit de ce nombre par l'étiage correspondant, d'ajouter enfin tous les résultats obtenus pour les divers échelons centimétriques. Le résultat divisé par 365 donne la moyenne cherchée.

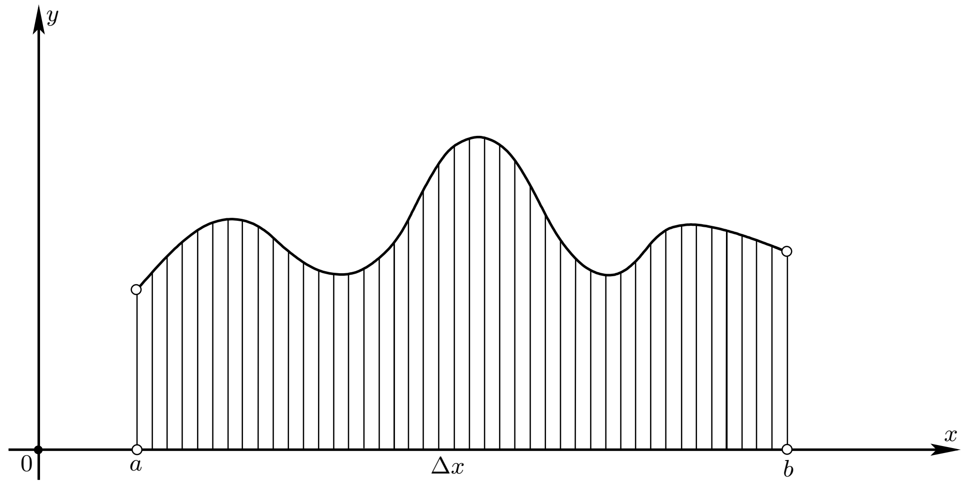


La première méthode rappelle l'opération de Riemann, la deuxième celle de Lebesgue.
Arnaud DENJOY.

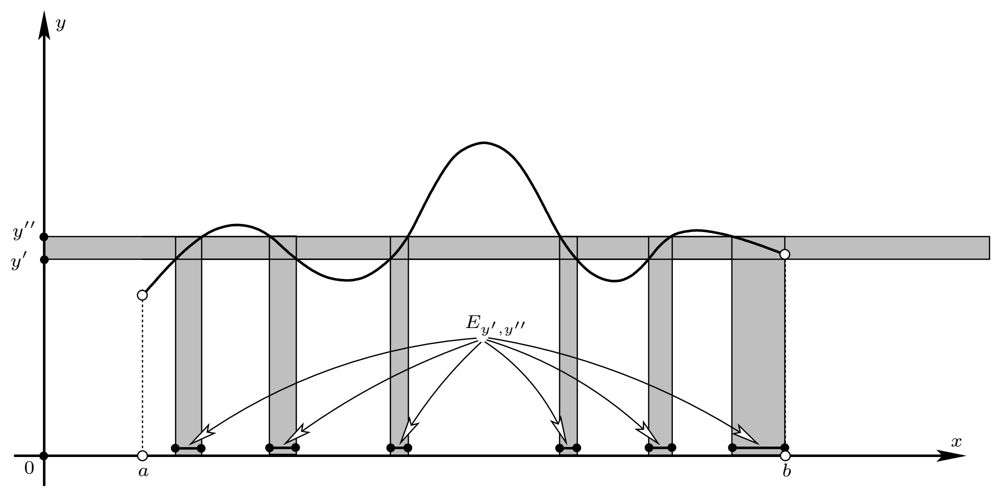
Géométriquement, l'idée fondamentale de la théorie de l'intégrale de Lebesgue est très simple : elle consiste en un *renversement de la perspective de découpage*.

Étant donné par exemple pour simplifier une fonction continue positive $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie sur un intervalle fermé borné $[a,b] \Subset \mathbb{R}$, rappelons que son intégrale est l'aire de son hypographe :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathsf{Aire}\Big(\big\{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \colon\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\big\}\Big).$$



Cauchy, Riemann, Darboux, Jordan emploient la méthode la plus directement intuitive, qui consiste à découper cette aire en *tranches fines verticales*.



À l'inverse, Lebesgue découpe le graphe $\{y = f(x)\}$ en *tranches fines horizontales*.

Par exemple, étant donné deux réels y' et y'' assez proches l'un de l'autre et satisfaisant :

$$\inf_{[a,b]} f \leqslant y' < y'' \leqslant \sup_{[a,b]} f,$$

la bande horizontale fine :

$$\big\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \colon \; y' \leqslant y \leqslant y''\big\}$$

découpe le graphe $\{y = f(x)\}$ de f comme illustré sur le diagramme. Ensuite, en relation avec l'hypographe $\{0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$, un tel découpage fait naturellement apparaître le sous-ensemble suivant de l'axe des x :

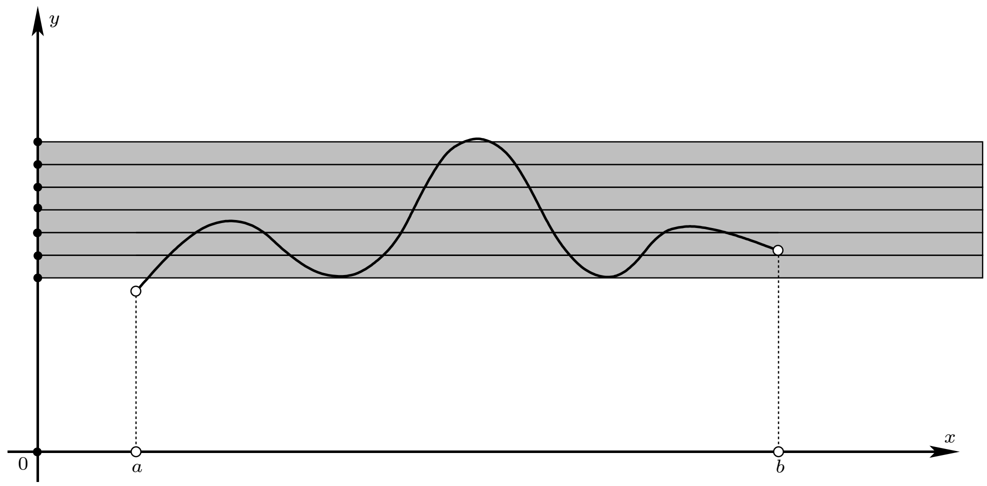
$$E_{y',y''} := \big\{x \in [a,b] \colon \; y' \leqslant f(x) \leqslant y''\big\},$$

qui consiste en six segments sur la figure. Alors dans la situation favorable où f est continue, lorsqu'on calcule l'aire de l'hypographe $\{0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$, à toute tranche fine horizontale $\mathbb{R} \times [y', y'']$ est associée une aire approximativement égale à :

$$\underbrace{\tfrac{y'+y''}{2}}_{\substack{\text{hauteur}\\\text{commune}\\\text{approximative}}} \cdot \underbrace{\mathsf{mesure}\big(E_{y',y''}\big)}_{\substack{\text{longueur}\\\text{totale}\\\text{de la base}}},$$

pourvu que l'on puisse « *mesurer* » la longueur de tels sous-ensembles $E_{y',y''} \subset [a,b]$.

Effectuer comme Lebesgue des découpages fins horizontaux fait naturellement naître un nouveau problème, le Problème de la mesure, détaillé dans la section suivante.



En résumé, Cauchy, Riemann, Darboux, Jordan conceptualisent l'intégration comme un passage à la limite dans les formules d'approximation :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_k f(x_k) \underbrace{\big(x_k - x_{k-1}\big)}_{\substack{\text{subdivision}\\\text{de l'axe}\\\text{horizontal}}}.$$

Lebesgue, quant à lui, passe à la limite dans les formules d'approximation :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_l \underbrace{y_l}_{\substack{\text{subdivision}\\\text{de l'axe}\\\text{vertical}}} \cdot \mathsf{mesure}\big\{x \in [a,b]\colon\ y_{l-1} \leqslant f(x) \leqslant y_l\big\},$$

mais il doit auparavant développer une vaste et nouvelle *Théorie de la Mesure*.

5. **Le problème de la mesure**

Afin d'essayer de résoudre toutes ces questions, le problème fondamental sur lequel Lebesgue lui-même a débouché est donc celui d'assigner une mesure aux ensembles de points. Pour le formuler de manière imprécise en dimension $d = 2$, étant donné un sous-ensemble quelconque $E \subset \mathbb{R}^2$, ce problème demande comment définir son aire 2-dimensionnelle $m_2(E)$, et ce, en généralisant la notion standard de surface pour les figures géométriques élémentaires.

Essayons plutôt d'abord de considérer ce problème en dimension $d = 1$, à savoir tentons de formuler la question de construire une mesure 1-dimensionnelle $m = m_1$ qui généralisait considérablement la notion de longueur d'un segment dans $\mathbb{R}$.

Disons alors que nous recherchons une fonction positive m définie sur la famille des sous-ensembles $E \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ — fonction que nous autorisons donc à prendre la valeur ∞ au cas où les longueurs soient infinies —, et qui satisfasse les conditions naturelles suivantes :

(i) $m(E) = b - a$ lorsque $E = [a, b]$ est un intervalle compact, $-\infty < a < b < \infty$, de longueur euclidienne $b - a$;

(ii) $m(E) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$, toutes les fois que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ où les ensembles E_n sont disjoints deux à deux.

Cette deuxième condition **(ii)** s'appelle *addititivé dénombrable* de la mesure m. Elle implique en particulier l'additivité finie :

(i') $m\big(E_1 \cup \cdots \cup E_N\big) = m(E_1) + \cdots + m(E_N)$ lorsque $E_{j_1} \cap E_{j_2} = \emptyset$ pour $j_1 \neq j_2$.

Toutefois — et c'est là un point crucial —, la condition d'additivité par réunion *infinie* dénombrable disjointe sera un point-force majeur de la théorie de la mesure développée par Borel et Lebesgue. En fait, la condition restreinte **(i')** d'additivité disjointe *finie* est celle qui a été choisie par une théorie de la mesure plus ancienne attribuée à Jordan, mais il s'avère comme nous allons le voir que cette dernière est définitivement limitée et inadéquate.

Aux axiomes **(i)** et **(ii)**, on ajoute la demande parfaitement naturelle que la mesure soit aussi invariante par translation :

(iii) $m(E + h) = m(E)$ pour tout $h \in \mathbb{R}$.

Un résultat fondamental de la théorie montre alors qu'il existe une unique telle mesure m, appelée *mesure de Lebesgue* sur $\mathbb{R}$, et lorsqu'on se limite à la classe des sous-ensembles $E \subset \mathbb{R}$ qui sont mesurables de cette manière-là, on obtient une classe déjà extrêmement étendue — bien qu'elle ne contienne pas *tous* les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ —, classe qui contient tous les ouverts, tous les fermés, qui est stable par réunions dénombrables, par intersections dénombrables, par passage au complémentaire, ces opérations pouvant de plus être répétées une infinité (dénombrable) de fois.

Ce sera donc par la construction mathématique complète de cette *mesure de Lebesgue* que nous débuterons notre étude de la théorie. Ensuite, grâce à de telles fondations fermes et solides, nous pourrons développer la théorie de l'intégration, laquelle, par toute sa splendeur abstraite éclatante — comme un soleil resplendissant réservé aux prisonniers qui seront parvenus à s'extirper de la caverne de Platon —, résoudra d'un seul trait tous les problèmes que nous venons de mentionner.

6. **Une chronologie succincte**

Concluons ce chapitre de transition motivationnelle en listant quelques événements marquants qui ont marqué les premiers moments historiques du développement de l'Analyse infinie.

1872 – Weierstrass construit une fonction continue qui n'est dérivable en aucun point.

1881 – Jordan introduit les fonctions dites *à variation bornée*, et plus tard en 1887, il montre qu'elles sont naturellement reliées à la rectifiabilité des courbes.

1883 – Cantor introduit l'ensemble ternaire qui porte son nom, source de nombreux contre-exemples pathologiques mais intéressants (*cf.* le chapitre qui suit).

1890 – Peano construit une courbe continue qui parcourt tous les points d'un carré.

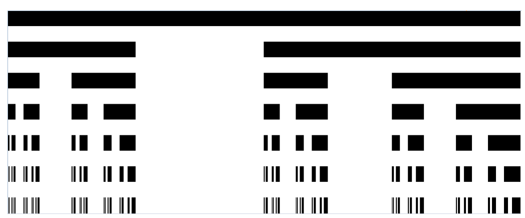
1898 – Borel introduit les ensembles mesurables.

1902 – Lebesgue développe la théorie de la mesure et la théorie de l'intégration.

1905 – Vitali construit un ensemble non-mesurable en utilisant l'Axiome du choix.

1906 – Fatou applique la théorie de Lebesgue à l'Analyse Complexe.

Ensemble(s) de Cantor
Alias
Poussière(s) de Cantor



François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Sud, France

1. Construction triadique

> Le brassage incessant de particules d'origines très diverses aboutit à une dispersion et à un mélange tels que *une poussière est un véritable complexe de toutes sortes de corps.* Les poussières constituées d'une seule catégorie d'éléments ne se rencontrent que dans des circonstances spéciales. Le plus souvent, les poussières sont composées, en proportions très variables, de particules inertes, et de particules vivantes.
> A. ASSAILLY.

L'*ensemble triadique de Cantor* joue un rôle prééminent à la fois dans la théorie abstraite des ensembles et dans l'Analyse en général, parce qu'il constitue une source presque inépuisable de contre-exemples troublants au premier abord, mais en fait très éclairants.

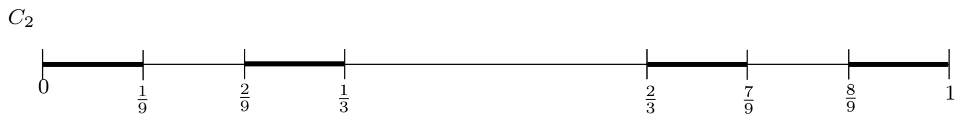
Comment est-il construit ?

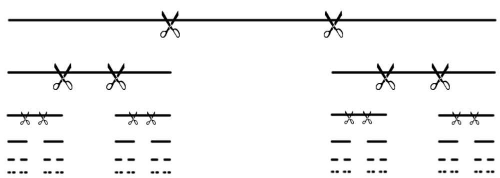
Partons de l'intervalle unité dans $\mathbb{R}$:

$$C_0 := [0, 1].$$

Découpons-le en trois segments d'égale longueur $\frac{1}{3}$, supprimons le morceau central, et conservons seulement les deux morceaux gauche et droite, ce qui nous donne 2^1 intervalles de longueur $\frac{1}{3}$:

$$C_1 := \left[\frac{0}{3}, \frac{1}{3}\right] \bigcup \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{3}\right].$$





Coupons ensuite à nouveau chacun de ces deux segments $[0, 1/3]$, $[2/3, 1]$ en trois segments égaux et supprimons le morceau central, ce qui nous donne 2^2 intervalles de longueur $\frac{1}{3^2}$:

$$C_2 := \left[\frac{0}{9}, \frac{1}{9}\right] \bigcup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \bigcup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \bigcup \left[\frac{8}{9}, \frac{9}{9}\right].$$

Coupons ensuite à nouveau chacun de ces quatre segments $[0, 1/9]$, $[2/9, 1/3]$, $[2/3, 7/9]$, $[8/9, 1]$ en trois segments égaux et supprimons le morceau central, ce qui nous donne 2^3 intervalles de longueur $\frac{1}{3^3}$:

$$C_3 := \left[\frac{0}{27}, \frac{1}{27}\right] \bigcup \left[\frac{2}{27}, \frac{3}{27}\right] \bigcup \left[\frac{6}{27}, \frac{7}{27}\right] \bigcup \left[\frac{8}{27}, \frac{9}{27}\right] \bigcup \left[\frac{18}{27}, \frac{19}{27}\right] \bigcup \left[\frac{20}{27}, \frac{21}{27}\right] \bigcup \left[\frac{24}{27}, \frac{25}{27}\right] \bigcup \left[\frac{26}{27}, \frac{27}{27}\right].$$

Itérons ces découpages, et obtenons pour tout entier $n \geqslant 0$ un certain sous-ensemble $C_n \subset [0, 1]$ constitué de 2^n intervalles fermés tous de même longueur $\frac{1}{3^n}$:

$$C_n := \left[\frac{0}{3^n}, \frac{1}{3^n}\right] \bigcup \left[\frac{2}{3^n}, \frac{3}{3^n}\right] \bigcup \cdots\cdots \bigcup \left[\frac{3^n - 3}{3^n}, \frac{3^n - 2}{3^n}\right] \bigcup \left[\frac{3^n - 1}{3^n}, \frac{3^n}{3^n}\right].$$

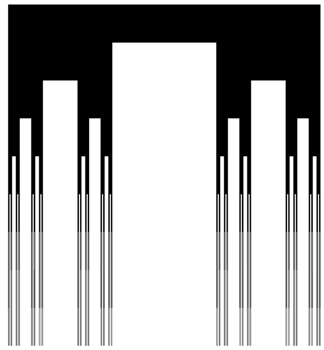
Nous allons montrer dans un instant comment écrire les intervalles qui composent C_n. En tout cas, on a par construction :

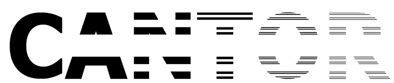
$$C_{n+1} \subset C_n \qquad\qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}).$$

Définition 1.1. L'*ensemble triadique de Cantor* est l'intersection infinie de tous ces C_n :

$$C := \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n.$$

Dans un langage imagé, on appelle parfois C la *poussière de Cantor*.





Lemme 1.2. *Ce sous-ensemble $C \subset [0, 1]$ est non vide, fermé, borné, donc compact.*

Démonstration. Visiblement, les deux extrémités 0 et 1 de C_0 appartiennent à tous les C_n, donc $0 \in C$ et $1 \in C$, ce qui donne $C \neq \emptyset$.

Mais plus généralement en fait, on se convainc en y réfléchissant que les $2 \cdot 2^n$ extrémités des 2^n intervalles qui composent C_n restent constamment dans $C_{n+1}, C_{n+2}, C_{n+3}, \dots$, et donc C contient ces $2 \cdot 2^n$ extrémités de C_n, et ce pour tout $n = 0, 1, 2, \dots$, ce qui montre encore mieux que C est (vraiment) non vide.

Enfin, chaque C_n étant fermé, puisqu'une intersection quelconque de fermés est encore fermée, on a bien que $C = \cap_n C_n$ est fermé, et C est d'ailleurs aussi trivialement borné, car contenu dans $[0, 1]$. $\square$

Proposition 1.3. *Pour tout $n \geqslant 1$, l'ensemble C_n est la réunion des 2^n intervalles fermés de la forme :*

$$\left[\frac{Q_{a_1,\dots,a_n}}{3^n},\ \frac{Q_{a_1,\dots,a_n}+1}{3^n}\right],$$

où les $Q_{a_1,\dots,a_n} \in \mathbb{N}$ sont tous les 2^n entiers que l'on peut écrire en base 3 sous la forme :

$$Q_{a_1,\dots,a_n} = a_1 \cdot 3^{n-1} + a_2 \cdot 3^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\, 3 + a_n \cdot 3^0,$$

avec des entrées égales à 0 ou à 2, mais jamais égales à 1 :

$$a_1 = \begin{cases} 0, \\ 2, \end{cases} \qquad a_2 = \begin{cases} 0, \\ 2, \end{cases} \qquad \cdots\cdots \qquad a_{n-1} = \begin{cases} 0, \\ 2, \end{cases} \qquad a_n = \begin{cases} 0, \\ 2. \end{cases}$$

Comme pour l'écriture décimale des nombres entiers, on peut si on le souhaite abréger l'écriture de ces $Q_{a_1,\dots,a_n}$ en base 3 simplement comme :

$$a_1\, a_2\, \cdots\, a_{n-1}\, a_n,$$

mais nous ne servirons pas de cela pour l'instant.

Démonstration. Tout d'abord concernant C_1, les quatre extrémités de ses deux intervalles sont bien de la forme annoncée :

$$C_1 = \left[\frac{0}{3}, \frac{0+1}{3}\right] \bigcup \left[\frac{2}{3}, \frac{2+1}{3}\right].$$

Supposons maintenant le lemme vrai à un certain niveau $n \geqslant 1$, et démontrons-le au cran $n+1$. Par construction, on doit enlever le tiers central de chaque segment quelconque :

$$\left[\frac{Q_{a_1,\dots,a_n}}{3^n}, \frac{Q_{a_1,\dots,a_n}+1}{3^n}\right],$$

qui compose C_n, et pour ce faire, il est avisé de ré-écrire un tel segment général sous la forme :

$$\left[\frac{3\,Q_{a_1,\dots,a_n}}{3^{n+1}}, \frac{3\,Q_{a_1,\dots,a_n}+3}{3^{n+1}}\right],$$

puisqu'alors la suppression du tiers central se fait voir aisément,

$$\left[\frac{3\,Q_{a_1,\dots,a_n}}{3^{n+1}}, \frac{3\,Q_{a_1,\dots,a_n}+1}{3^{n+1}}\right] \bigcup \underbrace{\left[\frac{3\,Q_{a_1,\dots,a_n}+1}{3^{n+1}}, \frac{3\,Q_{a_1,\dots,a_n}+2}{3^{n+1}}\right]}_{\text{supprimer}} \bigcup \left[\frac{3\,Q_{a_1,\dots,a_n}+2}{3^{n+1}}, \frac{3\,Q_{a_1,\dots,a_n}+3}{3^{n+1}}\right].$$

Mais alors les entiers $Q_{a_1,\dots,a_n,a_{n+1}}$ des deux extrémités *gauches* des deux intervalles restants :

$$3\,Q_{a_1,\dots,a_n} = a_1 \cdot 3^n + a_2 \cdot 3^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \cdot 3^3 + a_n \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0,$$
$$3\,Q_{a_1,\dots,a_n} + 2 = a_1 \cdot 3^n + a_2 \cdot 3^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \cdot 3^3 + a_n \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0,$$

sont bien, pour le niveau $n+1$, de la forme générale annoncée, avec effectivement a_{n+1} égal à 0 ou à 2. □

Lemme 1.4. *La somme des longueurs des 2^n segments de longueur $\frac{1}{3^n}$ qui constituent le sous-ensemble $C_n \subset C$ de l'ensemble de Cantor C tend vers 0 :*

$$\frac{2^n}{3^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et l'ensemble-limite $C = \cap_n C_n$ est de mesure nulle, au sens de la définition donnée à la fin du chapitre sur l'intégrale de Riemann.

De plus, l'intérieur de $C = \cap_n C_n$ est vide :

$$\mathsf{Int}\, C = \emptyset.$$

Démonstration. L'assertion sur la mesure est laissée en exercice de compréhension conceptuelle.

Par contradiction, si $\mathsf{Int}\, C$ était non vide, il contiendrait un certain intervalle ouvert $]c, d[\subset [0,1]$ avec $0 \leqslant c < d \leqslant 1$:

$$]c,\, d[\ \subset\ \mathsf{Int}\, C,$$

lequel serait donc de longueur *strictement positive :*

$$d - c > 0.$$

Sachant que :

$$\mathsf{Int}\, C\ \subset\ C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n,$$

un tel intervalle $]c, d[$ devrait alors être contenu dans tous les C_n :

$$]c,\, d[\, \subset\; C_n \qquad\qquad {\scriptstyle (\forall\, n \in \mathbb{N})}.$$

Mais comme C_n est réunion d'intervalles fermés disjoints d'égale longueur $\frac{1}{3^n} \longrightarrow 0$ qui tend vers zéro, cela est absurde ! □

Rappelons maintenant plus en détail que tout entier $n \in \mathbb{N}$ admet une représentation-écriture dans une base $\beta \geqslant 2$ quelconque, par exemple la base décimale $\beta = 10$, ce qui dans le cas de la base $\beta = 3$ s'exprime par l'énoncé suivant.

Lemme 1.5. *Pour tout entier $Q \in \mathbb{N}$, il existe un unique $n \in \mathbb{N}$ et il existe des éléments uniques :*

$$a_1, \dots, a_n \,\in\, \big\{0,\, 1,\, 2\big\},$$

qui représentent :

$$Q = a_1 \cdot 3^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 3^1 + a_1 \cdot 3^0. \qquad \square$$

Plutôt que de démontrer cet énoncé élémentaire, illustrons-le :

$$\begin{array}{llll}
0 = 0 \cdot 3^0, & 3 = 1 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0, & 6 = 2 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0, & 9 = 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0, \\
1 = 1 \cdot 3^0, & 4 = 1 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0, & 7 = 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0, & 10 = 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0, \\
2 = 2 \cdot 3^0, & 5 = 1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0, & 8 = 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0, & 11 = 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0.
\end{array}$$

De même, rappelons que tout nombre réel $c \in [0, 1]$ compris entre 0 et 1 admet un développement décimal éventuellement infini :

$$c = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{10^i},$$

qu'on abrège habituellement en :

$$c = 0, c_1 c_2 \cdots c_n \cdots\,,$$

avec $c_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. De tels développements ne sont en général *pas* uniques, puisqu'il faut accepter toutes les *égalités-ambiguïtés* du type « retenues en cascade infinie du nombre 1 » :

$$0,\, c_1 c_2 \cdots \overset{1}{c_n}\overset{1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1}{9999999999} \cdots \;=\; 0, c_1 c_2 \cdots (c_n + 1)0000000000 \cdots\,,$$

lorsque $0 \leqslant c_n \leqslant 8$.

Théorème 1.6. *Tout élément $x \in C$ de l'ensemble triadique de Cantor C s'écrit de manière* unique *sous la forme d'un « développement infini en base 3 ne contenant jamais 1 », à savoir sous la forme dite* triadique *:*

$$x \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}, \qquad\qquad a_i \in \big\{0,\, 2\big\},$$

avec des entiers a_i contraints à n'être égaux qu'à 0 ou à 2, mais jamais à 1.

Réciproquement, tout tel nombre réel x appartient à C.

Il importe de faire observer ici que le développement triadique d'un nombre *quelconque* $c \in [0, 1]$:

$$c \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{3^i}, \qquad\qquad c_i \in \big\{0,\, 1,\, 2\big\},$$

incorpore en général des 1 !

De plus, comme le rôle que joue le nombre 9 en base 10 est joué par le nombre 2 en base 3, il se trouve pour un élément quelconque de l'ensemble de Cantor :

$$x = 0, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots \in C,$$

qu'il ne peut y avoir aucune égalité-ambiguïté du type :

$$0,\, a_1 a_2 \cdots \overset{1}{a_n}\overset{1111111111}{2222222222}\cdots = 0, a_1 a_2 \cdots (a_n + 1)0000000000 \cdots ,$$

où $a_n \neq 2$, puisqu'alors $a_n = 0$, d'où $a_n + 1 = 1$, et une telle deuxième écriture *est exclue de :*

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}, \qquad \text{avec } a_i \in \big\{0,\, 2\big\}.$$

Démonstration. Montrons pour commencer l'*unicité* de l'écriture. Par contradiction, supposons donc que $x \in C$ admette deux écritures différentes :

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \qquad \text{et} \qquad x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{3^i} \qquad \text{avec } a_i,\, b_i \in \big\{0,\, 2\big\}.$$

Si on note n le plus petit entier i tel que $a_i \neq b_i$, on peut supposer (exercice mental) que $a_n = 0$ et $b_n = 2$. Mais alors on peut soumettre à une *majoration* la première écriture de x en termes des a_i :

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{3^i} + \frac{0}{3^n} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{3^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{2}{3^i} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{3^i} + \frac{2}{3^{n+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{3^i} + \frac{1}{3^n}, \end{aligned}$$

tandis que la deuxième écriture de x en termes des b_i peut être soumise à une *minoration :*

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{b_i}{3^i} + \frac{2}{3^n} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{b_i}{3^i} \\ {\scriptstyle [a_1 = b_1, \dots, a_{n-1} = b_{n-1}]} \qquad &\geqslant \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{3^i} + \frac{2}{3^n}, \end{aligned}$$

et ces deux inégalités mises ensemble sont absurdes (vérification visuelle).

Montrons ensuite que tous les nombres de la forme :

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$$

appartiennent bel et bien à C. En effet, si, pour tout entier $n \geqslant 1$ fixé, on découpe :

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{3^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \\ &= \frac{1}{3^n} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i\,3^n}{3^i}}_{=:\,Q_{a_1,\dots,a_n}} + \underbrace{\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}}_{\text{reste}}, \end{aligned}$$

et si on introduit le nombre entier :

$$Q_{a_1,\dots,a_n} := a_1 \cdot 3^{n-1} + \cdots + a_n \cdot 3^0,$$

alors puisque le terme-reste est majoré par :

$$\begin{aligned} \text{reste} &\leqslant \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{2}{3^i} \\ &= \frac{1}{3^n}, \end{aligned}$$

il est manifestement clair que l'on a bien :

$$\begin{aligned} x &= \frac{Q_{a_1,\dots,a_n}}{3^n} + \text{reste} \\ &\in \bigg[\frac{Q_{a_1,\dots,a_n}}{3^n},\ \frac{Q_{a_1,\dots,a_n}+1}{3^n}\bigg]. \end{aligned}$$

Montrons pour terminer qu'un élément quelconque $x \in C$ s'écrit effectivement sous la forme annoncée. Par hypothèse, donc :

$$x \in C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n,$$

ce qui veut dire en particulier que, pour $n \in \mathbb{N}$ arbitraire fixé, on a :

$$x \in C_{n+1} \subset C_n.$$

Par conséquent, x appartient à l'un des deux intervalles de C_{n+1} qui est contenu dans un des intervalles de C_n, à savoir il existe :

$$Q_{b_1,\dots,b_n,b_{n+1}} = b_1 \cdot 3^n + \cdots + b_n \cdot 3^1 + b_{n+1} \cdot 3^0, \qquad\qquad b_1,\dots,b_n,b_{n+1} \in \big\{0,\,2\big\},$$

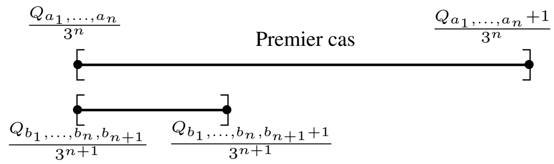
et il existe :

$$Q_{a_1,\dots,a_n} = a_1 \cdot 3^{n-1} + \cdots + a_n \cdot 3^0, \qquad\qquad a_1,\dots,a_n \in \big\{0,\,2\big\},$$

tels que :

$$x \in \bigg[\frac{Q_{b_1,\dots,b_n,b_{n+1}}}{3^{n+1}},\ \frac{Q_{b_1,\dots,b_n,b_{n+1}}+1}{3^{n+1}+1}\bigg] \subset \bigg[\frac{Q_{a_1,\dots,a_n}}{3^n},\ \frac{Q_{a_1,\dots,a_n}+1}{3^n}\bigg].$$

Mais par construction, le b-intervalle est l'un des deux tiers gauche et droite de l'a-intervalle, et donc deux cas peuvent se produire.



Premier cas : l'extrémité gauche du b-intervalle coïncide avec l'extrémité gauche de l'a-intervalle :

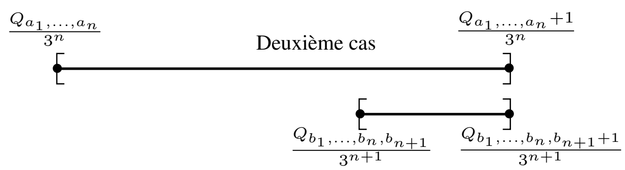
$$\frac{Q_{b_1,\ldots,b_n,b_{n+1}}}{3^{n+1}} = \frac{Q_{a_1,\ldots,a_n}}{3^n},$$

c'est-à-dire :

$$\frac{b_1 \cdot 3^n + \cdots + b_n \cdot 3^1 + b_{n+1} \cdot 3^0}{3^{n+1}} = \frac{a_1 \cdot 3^{n-1} + \cdots + a_n \cdot 3^0}{3^n},$$

ce qui implique (exercice mental) :

$$b_1 = a_1, \ \ldots, \ b_n = a_n, \ b_{n+1} = 0.$$



Deuxième cas : l'extrémité gauche du b-intervalle coïncide avec le point situé au $2/3$ de l'a-intervalle :

$$\frac{Q_{b_1,\ldots,b_n,b_{n+1}}}{3^{n+1}} = \frac{Q_{a_1,\ldots,a_n}}{3^n} + \frac{2}{3}\,\frac{1}{3^n},$$

c'est-à-dire :

$$\frac{b_1 \cdot 3^n + \cdots + b_n \cdot 3^1 + b_{n+1} \cdot 3^0}{3^{n+1}} = \frac{a_1 \cdot 3^{n-1} + \cdots + a_n \cdot 3^0}{3^n} + \frac{2}{3^{n+1}},$$

ce qui implique (exercice mental) :

$$b_1 = a_1, \ \ldots, \ b_n = a_n, \ b_{n+1} = 2.$$

Dans les deux cas, les n premières b-entrées demeurent égales aux a-entrées, et la $n+1$-ème b_{n+1} est égale soit à 0, soit à 2. Ceci montre qu'à $x \in C$ est associée une unique série infinie :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}, \qquad \text{avec } \ a_i \in \big\{0, \, 2\big\},$$

et comme une telle série est convergente (exercice), c'est que x est égal à elle. □

Dans l'Exercice 3, on démontre que l'ensemble de Cantor, ainsi que ses généralisations, est totalement discontinu. L'énoncé suivant confirme que C est bel est bien non vide, et même très « gros », du point de vue de la théorie des ensembles.

Proposition 1.7. *L'ensemble triadique de Cantor* $C \subset [0,1]$ *est non-dénombrable, de cardinal égal à celui de* $[0,1]$.

Démonstration. La théorie élémentaire des cardinaux étant supposée connue, l'application qui à un élément quelconque de C :

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$$

associe le nombre de $[0,1]$ dont l'écriture dyadique (en base deux) est :

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\widetilde{a}_i}{2^i} \qquad \text{avec } \widetilde{a}_i := \begin{cases} 0 & \text{lorsque } a_i = 0, \\ 1 & \text{lorsque } a_i = 2, \end{cases}$$

est *surjective*. Donc C se surjecte sur $[0,1]$, et comme $[0,1]$ est équipotent à $\mathbb{R}$ (exercice de révision), *i.e.* de même cardinal, ceci démontre bien que C est non dénombrable. □

En résumé, donc, tout le paradoxe dans la nature de l'ensemble de Cantor $C \subset [0,1]$, c'est qu'il est :

□ à la fois « *négligeable* » comme de la poussière éparse, au sens où il ne contient aucun intervalle, il est totalement discontinu, il est de mesure nulle ;

□ à la fois « *substantiel* » du point de vue de la théorie des ensembles, car il contient « autant de points » que l'intervalle $[0,1]$.

C'est grâce à ces deux propriétés contrastées qu'on peut se servir de C ou de ses avatars pour élaborer des (contre-)exemples mathématiques déterminants qui jouent le rôle de carrefours dialectiques cruciaux pour toute l'orientation *en profondeur* de la théorie de la mesure due à Borel et à Lebesgue, théorie que nous allons bientôt (re)développer ensemble dans le chapitre qui suit.

2. Insuffisance de la théorie de l'intégrale de Riemann : Preuve par un exemple

Modifions maintenant la construction de l'ensemble triadique de Cantor $C \subset [0,1]$ afin que la somme des longueurs des 2^n intervalles résiduels de longueur $\frac{1}{3^n}$ qui constituent C_n, à savoir la quantité $\frac{2^n}{3^n} \longrightarrow 0$, ne tende *plus* vers zéro, fait qui impliquait en particulier que C était de mesure nulle, au sens de la définition utilisée à la fin du chapitre sur l'intégrale de Riemann.

Autrement dit, cherchons à construire un certain nouveau sous-ensemble de type « poussière » :

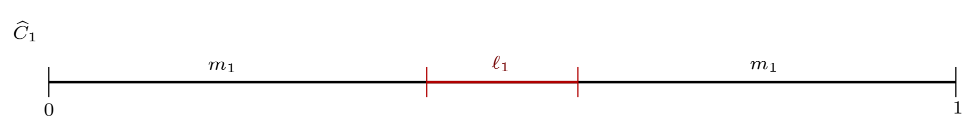
$$\widehat{C} \subset [0,1],$$

mais qui ne sera plus de mesure nulle. Utilisons ensuite un tel sous-ensemble pathologique $\widehat{C} \subset [0,1]$ pour construire une fonction bornée :

$$\widehat{f}\colon \quad [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

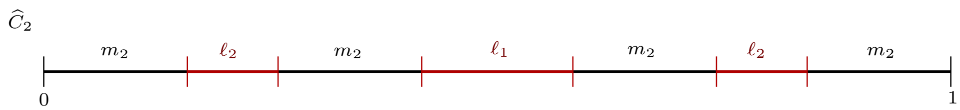
dont les points de discontinuité sont exactement les points de $\widehat{C}$, ce qui offrira un exemple de fonction qui n'est pas Riemann-intégrable, puisque nous savons qu'une fonction est Riemann-intégrable si et seulement si l'ensemble de ses points de discontinuité est de mesure nulle.

L'idée de la nouvelle recette est simple : perforer pas à pas les intervalles, en ajustant la taille des trous pour que la somme totale des longueurs des intervalles supprimés ne tende *pas* vers 1.



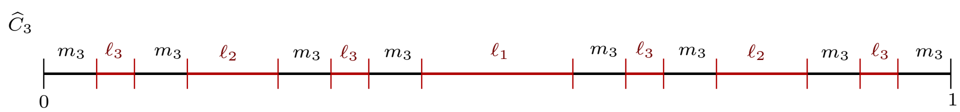
Autrement dit, et plus précisément, partons de l'intervalle $[0, 1]$, perforons un sous-intervalle ouvert situé centralement de longueur $0 < \ell_1 < 1$, et notons m_1 l'égale longueur des deux intervalles fermés restants :

$$1 = 2^0\,\ell_1 + 2^1\,m_1.$$



Ensuite, perforons chacun de ces deux intervalles restants en deux intervalles ouverts de longueur $0 < \ell_2 < \frac{1}{2}\,m_1$ situés centralement avec :

$$\begin{aligned} m_1 &= \ell_2 + 2\,m_2, \\ 1 &= \ell_1 + 2\,\ell_2 + 2^2\,m_2. \end{aligned}$$



Itérons ce processus, et pour chaque entier $n \geqslant 1$ en supposant $\widehat{C}_n$ construit, supprimons 2^n intervalles ouverts de longueur $0 < \ell_{n+1} < \frac{1}{2}\,m_n$ situés centralement dans chacun des 2^n intervalles fermés restants d'égale longueur m_n :

$$\begin{aligned} m_n &= \ell_{n+1} + 2\,m_{n+1}, \\ 1 &= \ell_1 + 2^1\,\ell_2 + \cdots + 2^n\,\ell_{n+1} + 2^{n+1}\,m_{n+1}, \end{aligned}$$

ce qui donne un certain sous-ensemble :

$$\widehat{C}_{n+1} \subset \widehat{C}_n \subset [0, 1].$$

Définissons enfin l'ensemble de Cantor généralisé :

$$\widehat{C} := \bigcap_{n=1}^{\infty} \widehat{C}_n,$$

qui est non vide, fermé, borné, donc compact.

Afin d'obtenir ainsi un ensemble $\widehat{C}$ qui soit de mesure positive, ajustons le choix des 2^{n-1} longueurs enlevées $\ell_n > 0$ à chaque étape de telle sorte que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\,\ell_n < 1.$$

Sous cette hypothèse, on démontre effectivement dans l'Exercice 4 que $\widehat{C} \subset [0, 1]$ n'est *pas* un sous-ensemble de mesure 0.

Théorème 2.1. *Il existe une suite de fonctions continues :*

$$f_n\colon \quad [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad {\scriptstyle (n \geqslant 1)}$$

avec :

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant 1 \qquad\qquad {\scriptstyle (\forall\, x \in [0, 1])},$$

telle qu'en tout point fixé $x \in [0,1]$, la suite réelle $\big(f_n(x)\big)_{n=1}^{\infty}$ est monotone décroissante, de telle sorte que la fonction-limite simple :

$$\widehat{f}(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

existe et est bien définie, mais est extrêmement discontinue, et plus précisément, est non-continue en tout *point $x \in \widehat{C}$.*

En particulier, donc, cette fonction-limite $\widehat{f}$ n'est pas Riemann-intégrable, puisque l'ensemble de ses points de discontinuité, qui contient $\widehat{C}$, n'est *pas* de mesure 0.

Toutefois, par simple intégration des inégalités fonctionnelles :

$$0 \leqslant f_{n+1} \leqslant f_n,$$

on déduit les inégalités numériques :

$$0 \leqslant \int_0^1 f_{n+1}(x)\,dx \leqslant \int_0^1 f_n(x)\,dx,$$

qui montrent que la suite de nombre réels positifs :

$$\bigg(\int_0^1 f_n(x)\,dx\bigg)_{n=1}^{\infty}$$

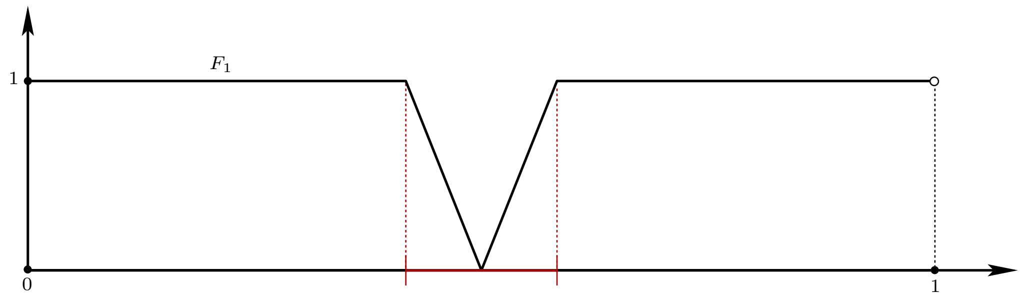
admet forcément une limite, puisqu'elle est décroissante. Alors toute l'insatisfaction théorique que l'on doit ressentir vis-à-vis de la théorie de l'intégration au sens de Riemann provient du fait que l'on est incapable d'intervertir $\lim \int f_n = \int \lim f_n$ limite et intégrale :

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx}_{\text{nombre qui existe tout à fait}} \overset{??}{=} \overbrace{\int_0^1}^{\text{concept d'intégrale insuffisant}} \underbrace{\widehat{f}(x)}_{\text{fonction qui existe tout à fait}}\,dx,$$

simplement parce que le concept d'intégrale riemannienne est trop faible pour intégrer les fonctions telles que cette fonction-limite un peu pathologique $\widehat{f}$. Or dans la belle théorie de Lebesgue, les fonctions telles que $\widehat{f}$ apparaîtront naturellement comme mesurables puis intégrables, et l'interversion $\lim \int f_n = \int \lim f_n$ qu'on adore reviendra vers nous auréolée de toute sa splendeur commutative.

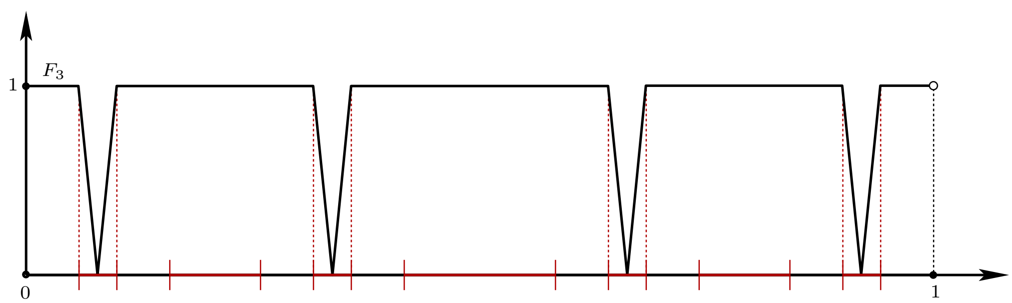
Démonstration. Les arguments seront partiellement laissés en exercice au lecteur. Soit donc $\widehat{C}$ l'ensemble de Cantor généralisé construit il y a quelques instants, lequel est donc de mesure positive :

$$m(\widehat{C}) > 0.$$



Soit $F_1\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ la fonction continue affine par morceaux telle que $F_1 = 1$ dans le complémentaire du premier intervalle supprimé, et telle que $F_1 = 0$ au centre de cet intervalle.

De manière similaire, soit $F_2\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ la fonction continue affine par morceaux telle que $F_2 = 1$ dans le complémentaire des deux intervalles supprimés à la deuxième étape, et telle que $F_2 = 0$ aux deux points qui sont centres des ces deux intervalles.



Pour tout entier $n \geqslant 3$, définissons par récurrence une fonction F_n continue affine par morceaux qui généralise F_1 et F_2.

Introduisons alors la suite de fonctions $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ définie comme produit des n premières fonctions F_k :

$$f_n \,:=\, F_1 \cdot F_2 \cdots F_n \qquad\qquad (n \geqslant 1).$$

On se convains alors (exercice) de la véracité des faits suivants :

(a) Pour tout $x \in [0,1]$ fixé, la suite $\big(f_n(x)\big)_{n=1}^{\infty}$ converge vers une certaine limite qu'on notera $\widehat{f}(x) \in [0,1]$.

(a) Cette fonction-limite $\widehat{f}$ est discontinue en tout point $x \in \widehat{C}$. Indication: Observer que $\widehat{f}(x) = 1$ lorsque $x \in \widehat{C}$ et trouver une suite de points $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ qui tend vers $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, mais qui satisfait $\widehat{f}(x_n) = 0$. $\square$

3. Exercices

Exercice 1. Vérifier rigoureusement que l'ensemble triadique standard de Cantor $C \subset [0,1]$ est de mesure 0 au sens de la définition donnée à la fin du chapitre sur l'intégrale de Riemann.

Exercice 2. Montrer que l'ensemble triadique standard de Cantor est *parfait*, à savoir qu'aucun de ses points n'est isolé.

Exercice 3. [Ensembles de Cantor de dissection constante] Soit l'intervalle unité $[0,1] \subset \mathbb{R}$, et soit un nombre réel fixé ξ avec $0 < \xi < 1$. Le cas $\xi = \frac{1}{3}$ va correspondre à l'ensemble triadique standard de Cantor.

À l'étape 1 de la construction, on supprime de $[0,1]$ l'intervalle ouvert de longueur ξ situé centralement à distance égale de 0 et de 1. À l'étape 2, on supprime de même de chacun des deux intervalles restants l'intervalle ouvert situé centralement de longueur relative ξ, à savoir de longueur $\xi\,\frac{1-\xi}{2}$. On itère la construction pour tout entier $n \geqslant 1$. On note C_ξ l'intersection infinie des ensembles ainsi construits.

(a) Montrer que le complémentaire de C_ξ dans $[0,1]$ est réunion d'une infinité dénombrable d'intervalles ouverts dont la somme totale des longueurs vaut 1.

(b) Montrer que C_ξ est *totalement discontinu*, à savoir que la composante connexe de chacun de ses points $x \in C_\xi$ est réduite au singleton $\{x\}$.

Exercice 4. Soit $\widehat{C} \subset [0,1]$ le sous-ensemble de type Cantor qui est construit en supprimant, à la n-ème étape, 2^{n-1} intervalles ouverts situés centralement tous de longueur ℓ_n avec toujours :

$$\ell_1 + 2\,\ell_2 + \cdots + 2^{n-1}\,\ell_n \;<\; 1.$$

(a) Si ces longueurs ℓ_n sont choisies de telle sorte qu'à l'infini, on ait toujours :

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\,\ell_n \;<\; 1,$$

montrer que $\widehat{C}$ n'est *pas* de mesure nulle. *Nota Bene :* avec les outils de la *Théorie de la mesure* qui seront développés au chapitre suivant, on peut établir que $\widehat{C}$ est mesurable, de mesure positive égale à :

$$\begin{aligned} m\big(\widehat{C}\big) &= 1 - \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1}\,\ell_k \\ &> 0. \end{aligned}$$

(b) Montrer que pour tout $x \in \widehat{C}$, il existe une suite de points $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ qui tend vers x telle que :

$$x_n \notin \widehat{C}_n,$$

et avec de plus $x_n \in I_n$, où I_n est un sous-intervalle du complémentaire $[0,1]\backslash\widehat{C}$ dont la longueur $|I_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ tend vers zéro.

(c) Montrer que cet ensemble $\widehat{C}$ est parfait, et qu'il ne contient aucun intervalle ouvert.

(d) Montrer que $\widehat{C}$ est non-dénombrable.

Exercice 5. Établir rigoureusement les assertions sur lesquelles repose la démonstration du Théorème 2.1.

Exercice 6. [Fonction de Cantor-Lebesgue] Sur l'ensemble triadique standard de Cantor $C \subset [0,1]$ dont les éléments s'écrivent sous forme triadique :

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}, \qquad\qquad \text{avec } \; a_i \in \big\{0,\,2\big\},$$

soit la fonction définie par :

$$F(x) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{2^i}, \qquad\qquad \text{où } \; b_i := \frac{a_i}{2}.$$

(a) Montrer que F est bien définie, satisfait $F(0) = 0$ et $F(1) = 1$, et qu'elle est continue $C \longrightarrow [0,1]$, lorsque C est muni de la topologie induite par son plongement $C \hookrightarrow \mathbb{R}$.

(b) Montrer rigoureusement que $F\colon C \longrightarrow [0,1]$ est surjective, à savoir que pour tout $y \in [0,1]$, il existe $x \in C$ tel que $F(x) = y$.

(c) Montrer qu'un intervalle ouvert $]a,b[$ qui est une composante connexe du complémentaire $[0,1]\backslash C$ est une composante connexe du complémentaire $[0,1]\backslash C_n$ d'un certain C_n. Montrer ensuite que $a, b \in C$ et que $F(a) = F(b)$.

(d) On note encore F le prolongement de F à tout l'intervalle $[0,1]$ qui est constant sur tous les intervalles $]a,b[$ de cette nature, défini par $F(x) := F(a) = F(b)$ pour tout $x \in]a,b[$. Montrer que ce prolongement constitue une fonction continue $[0,1] \longrightarrow [0,1]$.

(e) Montrer que F est dérivable en tout point $x \in [0,1]\backslash C$.

(f) Montrer que F n'est dérivable en aucun point de C.

Exercice 7. $**$

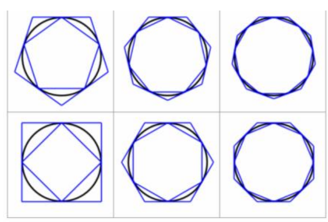
Théorie de la mesure de Borel et Lebesgue dans $\mathbb{R}^d$

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Sud, France

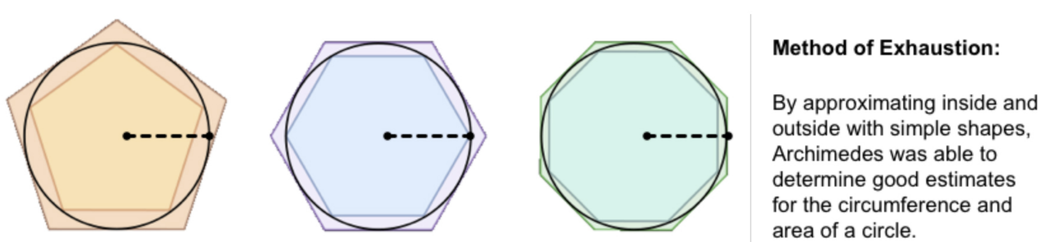
> Nous appellerons *mesurables* les ensembles dont nous pouvons définir la mesure de la manière qui a été indiquée en développant les idées qui précèdent. Mais nous affirmons cela sans prétendre qu'il soit possible d'assigner une mesure à *tous* les ensembles absolument quelconques. Émile BOREL, 1898.

1. Mesure des grandeurs : Paradoxes de l'atomisme ensembliste

Un des concepts les plus fondamentaux de la géométrie euclidienne, est celui de la *mesure des grandeurs*, et notamment, celui de longueur, d'aire, ou de volume d'un corps solide $E \subset \mathbb{R}^{1,2,3}$.



Dans l'approche antique qui remonte au moins à Archimède et à Eudoxe, on partitionne le corps à mesurer en un nombre fini de composantes que l'on réassemble afin de former un corps plus simple ayant une mesure calculable. La célèbre *méthode d'exhaustion* approxime le corps étudié par deux familles de corps inscrits et exinscrits, afin de trouver une borne inférieure et une borne supérieure de son contenu métrique, les deux familles dépendant aussi d'un paramètre qui tend vers l'infini à mesure qu'elles enserrent géométriquement de plus en plus le corps étudié.



Avec l'apparition de la *Géométrie analytique* et de la *Théorie des ensembles*, le problème de savoir comment déterminer le volume des corps quelconques et pas seulement ceux qu'affectionnaient les géomètres de l'Antiquité, en dimension arbitraire dans $\mathbb{R}^d$ avec

$d \geqslant 1$, se pose naturellement, et inévitablement. Par ailleurs, nous avons vu dans un chapitre qui précède que l'idée de trancher horizontalement (Lebesgue) les hypographes $\big\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \colon 0 \leqslant y \leqslant f(x)\big\}$ des fonctions $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, au lieu de les trancher verticalement (Cauchy, Riemann, Darboux, Jordan) conduit à se demander quelle est la *largeur totale*, ou *mesure*, de certains sous-ensembles a priori quelconques $E_{y',y''} \subset \mathbb{R}_x$ de l'axe des abscisses.

Or l'intuition physique de l'atomisme antique qui consiste à prétendre que :

$$\mathsf{Mesurer} \overset{??}{\equiv} \mathsf{Compter},$$

cette intuition simpliste échoue en Analyse, à cause de la *Théorie des ensembles*, car mesurer l'extension d'un corps en comptant simplement le nombre d'atomes qui le constituent conduit à des paradoxes et à des inconsistances.

En effet, si l'on s'en référait à l'atomisme mathématique, un corps solide typique serait formé d'un nombre infini non dénombrable de points, qu'on pourrait voir comme ses atomes, chacun d'entre eux étant de mesure nulle. Mais puisque le produit $\infty \cdot 0$ est en général indéterminé, il se peut fort bien que plusieurs manières de compter les atomes dans un même corps conduisent à des résultats étrangement différents.

Par exemple, les deux intervalles $[0,1]$ et $[0,2]$ dans $\mathbb{R}$ sont en correspondance bijective par l'application $x \longmapsto 2\,x$, alors qu'il est immédiatement clair que la longueur du second est double de celle du premier. Autrement dit, la bijection $x \longmapsto 2\,x$ désassemble les atomes de $[0,1]$ et les réassemble en l'intervalle de longueur double $[0,2]$.

Bien sûr, on pourrait objecter ici que l'on désassemble et réassemble un nombre infini d'atomes en les *dilatant* d'un facteur 2, ce qui ne respecte en rien leur longueur. Mais il existe un phénomène réellement troublant de la *Théorie des ensembles* dans lequel le désassemblage d'atomes et leur réassemblage n'utilise *que* des applications euclidiennes de l'espace ordinaire $\mathbb{R}^3$ qui laissent invariant le volume des corps et des atomes.

Rappelons à cet effet que le groupe des déplacements euclidiens de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathsf{Eucl}\big(\mathbb{R}^3\big) := \mathbb{R}^3 \ltimes \mathsf{SO}_3(\mathbb{R}),$$

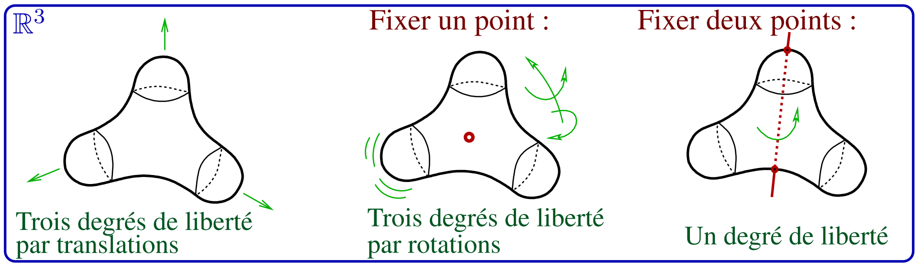
est le produit, dit *semi-direct*, du groupe évident des translations de $\mathbb{R}^3$:

$$(x,y,z) \longmapsto \big(x+a,\, y+b,\, z+b\big),$$

qui est naturellement commutatif et isomorphe à $\mathbb{R}^3$, avec le groupe, dit *spécial orthogonal*, des matrices symétriques définies positives de taille 3×3 qui conservent le produit scalaire et de déterminant 1 :

$$\mathsf{SO}_3(\mathbb{R}) := \big\{g \in \mathsf{GL}_3(\mathbb{R}) \colon\; g\,{}^t g = \mathsf{Id},\; \det(g) = 1\big\}\,.$$

Ce groupe $\mathsf{Eucl}(\mathbb{R}^3)$ est tout simplement celui des mouvements des corps solides ordinaires dans notre espace physique favori, par exemple notre brosse à dents (la pauvre, elle est secouée !), ou notre stylo (lui au moins, il reste au sec !). Ce qui compte dans ce groupe des mouvements, c'est que *le volume des corps, et les distances entre chaque paire de points, restent invariants lors des mouvements*.



Géométriquement, une fois que les trois degrés de libertés offerts par les translations sont épuisés, au moins un point d'un corps solide de référence devient fixe, et il reste encore *trois* degrés de libertés pour des mouvements qui laissent fixe ledit point :

□ *deux* degrés de liberté pour rotationner les autres points du corps sur des sphères de dimension 2 centrées en le point fixé ;

□ un dernier, et *un seul*, degré de liberté une fois qu'un deuxième point a été fixé, ce degré de liberté correspondant à des rotations cylindriques autour de l'unique axe passant par ces deux points.

La dimension totale du groupe des déplacements euclidiens est donc égale à :

$$\dim \mathsf{Eucl}\big(\mathbb{R}^3\big) = 3 + 2 + 1 = 6,$$

il est donc plus riche que le groupe $\mathsf{Eucl}(\mathbb{R}^2)$ des déplacements euclidiens dans le plan :

$$\mathsf{Eucl}\big(\mathbb{R}^2\big) = \underbrace{\mathbb{R}^2}_{\text{translations}} \times \underbrace{\mathsf{SO}_2(\mathbb{R})}_{\substack{\text{rotation}\\ \text{planaires}}},$$

lequel n'est que de dimension $2+1=3$. De plus, en dimension 2, ce groupe $\mathsf{Eucl}(\mathbb{R}^2)$ est *commutatif*, alors qu'en dimension 3, le groupe $\mathsf{Eucl}(\mathbb{R}^3)$ ne l'est pas.

C'est la non-commutativité de $\mathsf{SO}_3(\mathbb{R})$ qui rend possible le théorème très troublant qui va suivre, théorème non valable en dimension 2.

Le *paradoxe de Banach-Tarski* affirme qu'il est possible de découper une boule fermée de l'espace usuel $\mathbb{R}^3$ en un nombre fini de morceaux, et de réassembler ensuite ces morceaux pour former deux boules fermées identiques à la première — phénomène extrêmement troublant ! Et nous allons voir que ce phénomène troublant force à accepter qu'il soit impossible d'attribuer un volume à *tous* les sous-ensembles de $\mathbb{R}^d$.

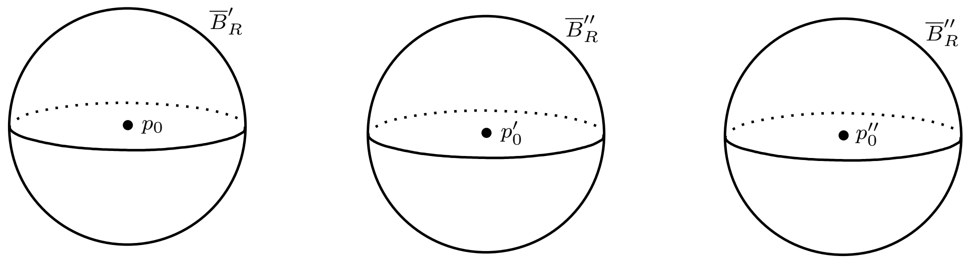
Plus précisément, dans $\mathbb{R}^3$ muni de coordonnées (x,y,z), soient les trois points :

$$p_0 := (0,0,0), \qquad p_0' := (3\,R, 0, 0), \qquad p_0'' := (6\,R, 0, 0),$$

et soient les trois boules fermées disjointes de même rayon $R>0$:

$$\overline{B}_R := \overline{B}(p_0, R), \qquad \overline{B}_R' := \overline{B}(p_0', R), \qquad \overline{B}_R' := \overline{B}(p_0', R),$$

situées l'une après l'autre à distance R.



Par une formule qui remonte aux mathématiques antiques, leur volume commun vaut :

$$\mathsf{Volume}\big(\overline{B}_R\big) \;=\; \mathsf{Volume}\big(\overline{B}'_R\big) \;=\; \mathsf{Volume}\big(\overline{B}''_R\big) \;=\; \frac{4}{3}\,\pi\,R^3.$$

Théorème 1.1. [Paradoxe de Banach-Tarski] *Il existe une décomposition finie de la première boule fermée :*

$$\overline{B}_R \;=\; \bigcup_{k=1}^{n} F_k \;\cup\; \bigcup_{l=1}^{m} G_l,$$

en sous-ensembles $F_k \subset \overline{B}_R$ et $G_l \subset \overline{B}_R$ tous disjoints deux à deux :

$$\begin{aligned} F_k \cap G_l &= \emptyset && (1 \leqslant k \leqslant n;\; 1 \leqslant l \leqslant m), \\ F_{k_1} \cap F_{k_2} &= \emptyset && (1 \leqslant k_1 < k_2 \leqslant n), \\ G_{l_1} \cap G_{l_2} &= \emptyset && (1 \leqslant l_1 < l_2 \leqslant m), \end{aligned}$$

et il existe des déplacements euclidiens :

$$\begin{aligned} T_k \;&\in\; \mathsf{Eucl}\big(\mathbb{R}^3\big) && (1 \leqslant k \leqslant n), \\ S_l \;&\in\; \mathsf{Eucl}\big(\mathbb{R}^3\big) && (1 \leqslant l \leqslant m), \end{aligned}$$

au moyen desquels la première famille reconstitue par transport une première autre boule fermée $\overline{B}'_R$ de même rayon $R > 0$, et simultanément aussi, la seconde famille reconstitue par transport une seconde autre boule fermée $\overline{B}''_R$ de même rayon $R > 0$:

$$\begin{aligned} \overline{B}'_R \;&=\; \bigcup_{k=1}^{n} T_k\big(F_k\big), \\ \overline{B}''_R \;&=\; \bigcup_{l=1}^{m} S_l\big(G_l\big), \end{aligned}$$

ces morceaux de puzzle transportés restant totalement disjoints deux à deux à l'arrivée :

$$\begin{aligned} T_{k_1}\big(F_{k_1}\big) \,\cap\, T_{k_2}\big(F_{k_1}\big) \;&=\; \emptyset && (1 \leqslant k_1 < k_2 \leqslant n), \\ S_{l_1}\big(G_{l_1}\big) \,\cap\, S_{l_2}\big(G_{l_2}\big) \;&=\; \emptyset && (1 \leqslant l_1 < l_2 \leqslant m). \end{aligned}$$

□

Ce n'est pas le sujet du tableau ni la technique du peintre qui fait la difficulté du puzzle, mais la subtilité de la découpe. Georges PEREC

La démonstration utilise le célèbre :

Axiome du choix. *Soit E un ensemble quelconque, et soit $E_\alpha \subset E$ une famille de sous-ensembles indexée par des indices $\alpha \in A$ appartenant à un ensemble A quelconque, pas forcément dénombrable. Alors (Axiome), il existe une* fonction de choix :

$$\alpha \longmapsto x_\alpha$$

qui spécifie un élément $x_\alpha \in E_\alpha$ *de chacun de ces sous-ensembles.*

Zappons allègrement toute description de la démonstration, puisque nous n'y connaissons rien !

Ici, le paradoxe spectaculaire, c'est qu'avec seulement un puzzle fini, on peut *doubler* la mise tout en respectant le principe de conservation de la matière. En effet, il est tout à fait naturel d'admettre que le volume est préservé par des déplacements euclidiens tels que les T_k et les S_l. Mais ici, *les sous-ensembles* F_k *et* G_l *sont taillés dans la boule d'une manière suffisamment vicieuse pour que le puzzle s'auto-clone*.

> L'art du puzzle commence avec les puzzles de bois découpés à la main lorsque celui qui les fabrique entreprend de se poser toutes les questions que le joueur devra résoudre lorsque, au lieu de laisser le hasard brouiller les pistes, il entend lui substituer la ruse, le piège, l'illusion. Georges PEREC

Ce qui compte pour nous ici, c'est que ce théorème nous force à admettre qu'on ne peut pas inventer une théorie de la mesure qui permette de mesurer *tous* les sous-ensembles $E \subset \mathbb{R}^3$, à savoir qui nous permette de leur attribuer un *volume*.

Supposons en effet par contradiction qu'on puisse trouver une manière d'attribuer à tout $E \subset \mathbb{R}^3$ une mesure :

$$\mathsf{Volume}(E) \in \mathbb{R}_+.$$

Évidemment, il faudrait que notre théorie fantasmée retrouve le bon vieux résultat d'Archimède :

$$\mathsf{Volume}\big(\overline{B}_R\big) = \frac{4}{3}\,\pi\,R^3.$$

Évidemment, il faudrait aussi que notre théorie-mirage respecte deux axiomes absolument naturels.

Axiome 1 : *Toutes les fois que deux sous-ensembles* $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^3$ *sont disjoints* $E_1 \cap E_2 = \emptyset$*, on doit avoir :*

$$\mathsf{Volume}\big(E_1 \cup E_2\big) = \mathsf{Volume}\big(E_1\big) + \mathsf{Volume}\big(E_2\big).$$

Axiome 2 : *Tout déplacement euclidien* $T \in \mathsf{Eucl}(\mathbb{R}^3)$ *laisse invariants les volumes :*

$$\mathsf{Volume}\big(T(E)\big) = \mathsf{Volume}(E).$$

Si nous revenons alors au Théorème de Banach-Tarski, et que nous appliquons ces axiomes, nous dérivons l'égalité :

$$\begin{aligned}
\mathsf{Volume}\big(\overline{B}_R\big) &= \mathsf{Volume}\bigg(\bigcup_{k=1}^n F_k \,\cup\, \bigcup_{l=1}^m G_l\bigg) \\
\text{[Axiome 1]} \qquad &= \sum_{k=1}^n \mathsf{Volume}\big(F_k\big) + \sum_{l=1}^m \mathsf{Volume}\big(G_l\big) \\
\text{[Axiome 2]} \qquad &= \sum_{k=1}^n \mathsf{Volume}\big(T_k(F_k)\big) + \sum_{l=1}^m \mathsf{Volume}\big(S_l(G_l)\big) \\
\text{[Axiome 1]} \qquad &= \mathsf{Volume}\bigg(\bigcup_{k=1}^n T_k\big(F_k\big)\bigg) + \mathsf{Volume}\bigg(\bigcup_{l=1}^m S_l\big(G_l\big)\bigg) \\
&= \mathsf{Volume}\big(\overline{B}_R'\big) + \mathsf{Volume}\big(\overline{B}_R''\big),
\end{aligned}$$

ce qui revient à dire que :

$$\frac{4}{3}\,\pi\,R^3 \;=\; \frac{4}{3}\,\pi\,R^3 + \frac{4}{3}\,\pi\,R^3,$$

absurdité qui choque au plus haut point, l'équation $1 = 1 + 1$ étant la pire qu'on puisse obtenir en mathématiques !

Conséquence dialectique incontournable. *Il faut accepter qu'aucune théorie puisse mesurer le volume de* tous *les sous-ensembles de* $\mathbb{R}^d$.

Il faut donc *abandonner* l'objectif illusoire de mesurer tous les sous-ensembles $E \subset \mathbb{R}^d$. À la place, il va falloir accepter de résoudre le problème d'attribuer une mesure ou un volume *seulement* à une certaine classe de sous-ensembles de $\mathbb{R}^d$, qu'on appellera les sous-ensembles *mesurables*.

Le *Problème de la mesure* se divisera alors en plusieurs sous-problèmes :

• Que signifie, pour un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$, d'être *mesurable* ?

• Si un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ est mesurable, comment définir le nombre réel positif $\mathsf{mesure}(E) \in \mathbb{R}_+$?

• Quelles propriétés belles et naturelles ou axiomes beaux et naturels la théorie doit-elle satisfaire ?

Bien entendu, ces questions sont formulées d'une manière essentiellement *ouverte*, et donc, il n'existe pas une manière unique d'y répondre. En particulier, on peut étendre la classe des ensembles mesurables au prix de perdre une ou plusieurs belles propriétés naturelles, par exemple l'additivité finie ou infinie dénombrable, ou encore l'invariance par translation, propriétés dont néanmoins nous disposerons entièrement dans la belle théorie de Lebesgue.

Dans l'état actuel de l'art des cours de L3 en France et dans le monde, nous pouvons proposer deux réponses standard à ces questions.

La première réponse, c'est le concept de *mesure de Jordan* d'un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$. Nous savons déjà que ce concept est intimement relié à l'intégrabilité au sens de Riemann, car l'hypographe (orienté) d'une fonction bornée est Jordan-mesurable si et et seulement si ladite fonction est Riemann-intégrable. Cette théorie de Riemann-Jordan est suffisamment élémentaire pour être enseignée dans les cours de L2 à l'université ou en mathernelle supérieure, et elle est suffisante lorsqu'il s'agit de mesurer la plupart des ensembles ordinaires de la géométrie classique.

Cependant, quand on se tourne vers les ensembles du type de ceux qui apparaissent réellement dans l'Analyse moderne, et en particulier, quand on se tourne vers les ensembles qui apparaissent comme *limites* d'autres ensembles (en des sens divers et variés), on constate que le concept de Jordan-mesurabilité devient inadéquat et trop faible, et donc, qu'il doit être étendu et renforcé théoriquement.

C'est ainsi que nous parvenons naturellement à la *deuxième* réponse générale connue aux questions ouvertes qui précèdent : la *Théorie de la Mesure de Borel et de Lebesgue*, laquelle peut être vue comme une *complétion de la théorie de Cauchy-Riemann-Darboux-Jordan*. En effet, dans la théorie de Lebesgue, on conserve toutes les propriétés naturelles dont jouit la mesure de Jordan, mais on admet crucialement la propriété additionnelle que la théorie reste stable par passages infinis à la limite. Notamment, nous allons découvrir ensemble certains théorèmes de convergence, tels que le *Théorème de convergence monotone*, ou le très célèbre *Théorème de la convergence dominée*, qui n'étaient pas vrais dans la théorie plus faible, mais qui s'avèreront illuminants de simplicité biblique.

2. Brève description du contenu de ce chapitre

En dimension quelconque $d \geqslant 1$, ce chapitre est consacré à la construction de la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^d$, et à l'étude de la classe des ensembles mesurables qui en résulte. Après quelques préliminaires élémentaires, nous donnons la première définition importante, celle de *mesure extérieure* d'un sous-ensemble quelconque $E \subset \mathbb{R}^d$. Grâce à cette notion, nous pouvons alors définir les ensembles qui sont *mesurables* (au sens de Lebesgue), et nous nous restreignons alors à ne considérer que les ensembles mesurables, car ceux qui ne sont pas mesurables sont assez rares, plutôt pathologiques d'ailleurs, et en fait peu étudiés en Analyse.

Ensuite, nous établissons un résultat absolument fondamental : la collection des sous-ensembles mesurables de $\mathbb{R}^d$ est stable par passage au complémentaire, et par réunions dénombrables. De plus, la mesure est additive par réunions disjointes dénombrables.

Au-delà, le concept de *fonction mesurable* est un avatar naturel de l'idée d'ensemble mesurable, de manière similaire au fait que le concept de fonction continue est en relation naturelle avec les ensembles ouverts, ou fermés. Mais le concept de fonction mesurable est plus étendu, car la classe des fonctions mesurables est stable par passage aux suites qui convergent simplement, pas nécessairement uniformément.

Enfin, nous proposons deux théorèmes simples qui mettent en lumière l'importance des cubes et des rectangles pour la géométrie des ensembles ouverts quelconques : dans $\mathbb{R}$, tout ouvert est réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints, tandis qu'en dimension supérieure dans $\mathbb{R}^d$ avec $d \geqslant 2$, tout ouvert est « *presque* » réunion disjointe de cubes fermés, au sens où seulement leurs bords peuvent s'intersecter. Ces deux théorèmes motiveront la définition du concept crucial de *mesure extérieure*, qui sera étudié en détail.

3. Exhaustion des ouverts de $\mathbb{R}^d$

Commençons par décrire la structure des ensembles ouverts en termes d'intervalles, de carrés, de cubes. Le cas de la dimension 1 présente une simplicité particulière.

Théorème 3.1. *Tout sous-ensemble ouvert :*

$$\mathscr{O} \subset \mathbb{R}^1$$

s'écrit de manière unique *comme réunion* dénombrable *d'intervalles ouverts* disjoints.

Démonstration. Pour tout point $x \in \mathscr{O}$, introduisons le plus grand intervalle ouvert $x \in I_x \subset \mathscr{O}$ contenant x et contenu dans l'ouvert. Plus précisément, puisque $\mathscr{O}$ est ouvert, on est sûr que x est contenu dans un certain petit intervalle ouvert assez petit pour être contenu dans $\mathscr{O}$, et donc, si on introduit les deux nombres réels :

$$a_x := \inf \big\{ a < x \colon \ ]a, x[\ \subset \mathscr{O} \big\} \qquad \text{et} \qquad b_x := \sup \big\{ b > x \colon \ ]x, b[\ \subset \mathscr{O} \big\},$$

on est sûr que $a_x < x < b_x$, sachant qu'il est éventuellement possible que $a_x = -\infty$, ou que $b_x = \infty$.

Si donc nous abrégeons :

$$I_x := \,]a_x, b_x[,$$

alors par construction $\{x\} \subset I_x \subset \mathscr{O}_x$, et par conséquent :

$$\mathscr{O} = \bigcup_{x \in \mathscr{O}} \{x\} = \bigcup_{x \in \mathscr{O}} I_x.$$

Maintenant, que se passe-t-il lorsque deux tels intervalles I_{x_1} et I_{x_2} s'intersectent ? Clairement, leur réunion $I_{x_1} \cup I_{x_2}$, qui est alors aussi un intervalle ouvert, est contenue dans $\mathscr{O}$, et elle contient à la fois le point x_1 et le point x_2. Mais puisque par définition I_{x_1} et I_{x_2} sont maximaux, on doit avoir simultanément :

$$\big(I_{x_1} \cup I_{x_2}\big) \subset I_{x_1} \qquad \text{et} \qquad \big(I_{x_1} \cup I_{x_2}\big) \subset I_{x_2},$$

et ceci ne peut avoir lieu qu'avec $I_{x_1} = I_{x_2}$. En définitive, dans la collection de tous ces intervalles canoniques :

$$\big\{I_x \colon x \in \mathscr{O}\big\},$$

deux quelconques d'entre eux doivent toujours être disjoints.

Il reste seulement à faire comprendre pourquoi il apparaît un nombre fini ou infini dénombrable de tels intervalles canoniques I_x. Or chaque intervalle I_x contient au moins un (en fait plusieurs) nombre(s) rationnel(s). Comme deux intervalles différents sont disjoints, les nombres rationnels qu'ils contiennent sont distincts. Or $\mathbb{Q}$ est dénombrable, donc la collection des I_x est elle aussi dénombrable. □

Naturellement, si un ouvert $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}$ est représenté comme réunion dénombrable disjointe d'intervalles ouverts I_j :

$$\mathscr{O} = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j,$$

la mesure de $\mathscr{O}$ devra très vraisemblablement être égale à :

$$m(\mathscr{O}) := \sum_{j=1}^{\infty} |I_j|.$$

Comme cette représentation est unique, nous pourrions parfaitement prendre ceci comme définition de la mesure. Nous observerions alors que toutes les fois que deux ouverts $\mathscr{O}_1 \subset \mathbb{R}$ et $\mathscr{O}_2 \subset \mathbb{R}$ sont disjoints, la mesure de leur réunion serait la somme de leurs mesures.

Toutefois, bien que cette toute première approche suffise pour parler de la mesure des ouverts, il n'est pas immédiatement clair qu'elle permette d'embrasser des ensembles « plus complexes » que les ouverts.

Qui plus est, quand on passe aux dimensions supérieures $d \geqslant 2$, on rencontre des complications même lorsqu'il s'agit de définir la mesure des ensembles ouverts $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}^d$, car d'après l'Exercice 15, l'analogue direct du Théorème qui précède n'est *pas* valable en dimension $d \geqslant 2$!

Heureusement, en acceptant l'infini dénombrable, nous disposons d'un résultat-substitut qui sera suffisamment bon pour l'érection de la théorie.

Théorème 3.2. *Tout sous-ensemble ouvert :*

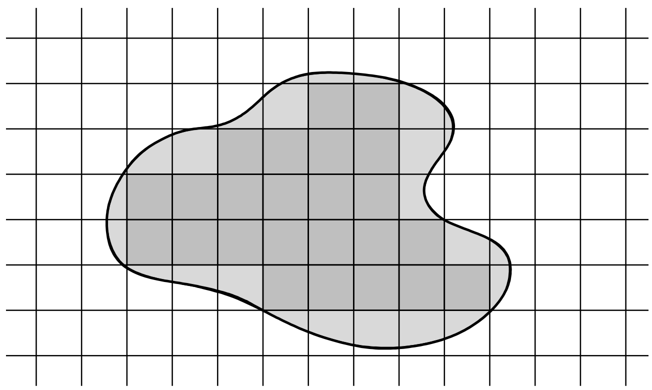
$$\mathscr{O} \subset \mathbb{R}^d \qquad {\scriptstyle (d \geqslant 1)}$$

peut être représenté — d'une manière qui n'est en général pas unique en dimension $d \geqslant 2$ — comme réunion dénombrable de cubes fermés presque disjoints.

Démonstration. Ainsi, nous devons construire une collection dénombrable $\mathscr{Q}$ de cubes fermés $Q \subset \mathscr{O}$ dont les intérieurs $\mathsf{Int}\, Q$ sont deux à deux presque disjoints et qui remplissent :

$$\mathscr{O} = \bigcup_{Q \in \mathscr{Q}} Q.$$

À la première étape, nous formons la grille de $\mathbb{R}^d$ constituée de tous les cubes fermés de côtés constants égaux à 1 et dont les sommets se trouvent aux points entiers du réseau $\mathbb{Z}^d \subset \mathbb{R}^d$.



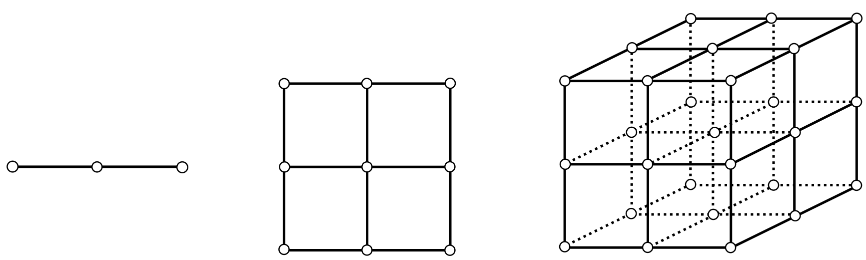
Nous acceptons, ou nous plaçons en attente, ou nous rejetons, les cubes fermés Q de cette grille initiale en appliquant la règle suivante :

• lorsque Q est entièrement contenu dans $\mathscr{O}$, nous l'acceptons ;

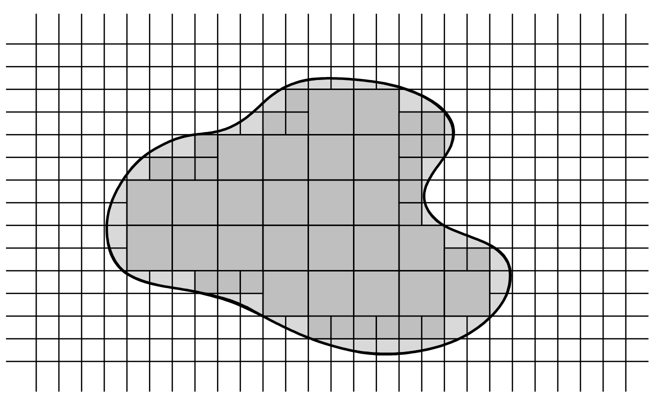
• lorsque Q intersecte à la fois l'ouvert $\mathscr{O}$ et son complémentaire $\mathbb{R}^d \backslash \mathscr{O}$, nous le plaçons en attente ;

• lorsque Q est entièrement contenu dans le complémentaire $\mathbb{R}^d \backslash \mathscr{O}$, nous le rejetons.

À la seconde étape, nous bissectons le réseau en remplaçant $\mathbb{Z}^d$ par $\left(\frac{1}{2}\mathbb{Z}\right)^d$.



Cette opération fragmente chaque cube initial en 2^d cubes fermés presque disjoints.



Ensuite, nous répétons la même règle d'acceptation, de mise en attente, ou de rejet des nouveaux cubes de longueur moitié qui ne sont pas contenus dans ceux qui ont déjà été acceptés.

Pour tout entier $k \geqslant 1$, nous considérons le réseau $\left(\frac{1}{2^k}\mathbb{Z}\right)^d$ obtenu par divisions dyadiques successives, et nous itérons la procédure.

Au final, nous obtenons une collection infinie dénombrable de cubes fermés qui sont mutuellement presque disjoints.

Nous afirmons alors que la réunion de tous ces cubes remplit $\mathscr{O}$.

En effet, étant donné un point quelconque $x \in \mathscr{O}$, puisqu'une boule ouverte assez petite centrée en x reste contenue dans l'ouvert $\mathscr{O}$, on peut trouver un cube fermé de côté $\frac{1}{2^k}$ qui est entièrement contenu dans une telle boule, donc dans $\mathscr{O}$. Par construction, ou bien un tel cube doit être accepté à la k-ème étape, ou (mieux encore), il est contenu dans un cube de côté $\frac{1}{2^j} > \frac{1}{2^k}$ qui a été accepté à une j-ème étape antérieure. □

À nouveau, lorsqu'on peut exhauster $\mathscr{O} = \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j$ avec des cubes ou des rectangles R_j qui sont presque disjoints, il est tout à fait raisonable d'assigner à $\mathscr{O}$ la mesure :

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left|R_j\right|.$$

Oui, cela est naturel, car le volume des bords des rectangles est manifestement nul, et l'intersection entre les rectangles ne consiste qu'en certaines parties de tels bords.

Toutefois, nous devons observer qu'une difficulté logique demeure : les décompositions en rectangles n'ont en général rien d'unique, et donc il n'est pas immédiatement clair que la somme $\sum_{j=1}^{\infty} |R_j|$ est indépendante des décompositions !

Aussi dans $\mathbb{R}^d$ en dimension $d \geqslant 2$, la notion d'aire, de volume, d'hypervolume, est-elle plus subtile qu'il n'y paraît, même seulement pour ce qui concerne les sous-ensembles ouverts.

En fait, la théorie générale que nous allons développer dans ce chapitre va effectivement nous offrir un concept du volume qui est cohérent avec les décompositions d'ouverts en réunions dénombrables de rectangles, heureusement !

4. Concept de mesure extérieure

La notion de mesure extérieure est le premier concept important dont on a besoin pour développer une *Théorie de la mesure*. Nous commençons par une définition, suivie d'une liste de propriétés fondamentales. Pour donner l'idée en mots, la *mesure extérieure* $m^*(\cdot)$ assigne à *tout* sous-ensemble quelconque $E \subset \mathbb{R}^d$ une première notion de taille supérieure minimale, laquelle sera notée :

$$m^*(E).$$

De nombreux exemples nous convaincrons que cette notion coïncide avec ce que balbutiait notre intuition jusqu'à présent.

Mais attention ! *Mesure extérieure* n'est pas *Mesure !* Car la mesure extérieure va échouer à satisfaire la propriété très désirable d'additivité lorsqu'on prend des réunions finies d'ensembles disjoints. Ce ne sera que dans la section suivante que nous pourrons remédier à ce problème central, lorsque nous discuterons en détail d'un autre concept-clé de la théorie, celui d'*ensemble mesurable*.

Comme son nom l'indique, la *mesure extérieure* tente de décrire le volume d'un ensemble E en l'approximant depuis l'extérieur. Plus précisément, E est recouvert par des cubes de plus en plus fins, avec de moins en moins d'intersections entre eux, et on imagine que le « *volume extérieur* » de E devrait devenir de plus en plus proche de la somme des volumes des cubes couvrants.

Définition 4.1. [Borel, Lebesgue] Si $E \subset \mathbb{R}^d$ est un sous-ensemble quelconque, la *mesure extérieure* de E est le nombre réel :

$$m^*(E) \,=\, \mathsf{inf} \sum_{j=1}^{\infty} \big|Q_j\big|,$$

où l'infimum est pris sur tous les recouvrements *infinis dénombrables* :

$$E \,\subset\, \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j,$$

par des cubes fermés Q_j, pas forcément disjoints. En fait, ce nombre positif $m^*(E)$ n'est pas toujours fini, il peut être infini, et c'est pourquoi on admet en général qu'il appartienne à $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$:

$$0 \,\leqslant\, m^*(E) \,\leqslant\, \infty.$$

Tout d'abord, contrairement au concept de *mesure extérieure de Jordan* m_J^* qui se limitait à des recouvrement *finis* $E \subset \bigcup_{j=1}^{J} Q_j$, il importe au plus haut point de faire observer ici que la définition admet des recouvrements *infinis dénombrables*. La différence entre les deux théories a déjà été signalée dans un chapitre qui précède, mais il ne sera pas inutile de revoir les contrastes flagrants dans l'Exercice 17.

Par ailleurs, on peut modifier la définition en remplaçant les cubes couvrants par des rectangles couvrants, voire même par des boules couvrantes. Le cas des rectangles s'avère donner une théorie en tout point équivalente (Exercice 18). Le cas des boules aussi, mais l'équivalence est plus subtile.

C'est donc avec cette première définition que la théorie amorce son décollage.

Lemme 4.2. [Monotonie] *Si* $E_1 \subset E_2$, *alors* $m^*\big(E_1\big) \leqslant m^*\big(E_2\big)$.

Démonstration. Tout recouvrement de E_2 est un recouvrement de E_1, donc quand on prend l'infimum sur les recouvrements de E_1, comme il y a *a priori* plus de recouvrements que ceux qui proviennent de E_2, l'infimum est en général inférieur. □

Nous commençons l'étude en fournissant de nombreux exemples d'ensembles dont la mesure extérieure peut être aisément calculée, et nous vérifions que les résultats obtenus correspondent à notre intuition de la longueur, de l'aire, du volume.

Lemme 4.3. *La mesure extérieure d'un point vaut* 0.

Démonstration. En effet, un point est un cube fermé de côté 0, qui se recouvre lui-même, et qui est de volume 0. □

Bien entendu aussi, la mesure extérieure de l'ensemble vide $\emptyset$ vaut aussi 0.

Lemme 4.4. *La mesure extérieure* $m^*(Q)$ *d'un cube* fermé $Q \subset \mathbb{R}^d$ *est égale à son volume* $|Q|$.

Démonstration. En effet, puisque Q se recouvre lui-même, on doit avoir :

$$m^*(Q) \leqslant |Q|.$$

Pour ce qui est de l'inégalité inverse, considérons un recouvrement dénombrable arbitraire :

$$Q \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$$

par des cubes fermés Q_j. Il suffit de montrer que :

$$|Q| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j|,$$

puisqu'alors en prenant l'infimum comme le stipule la Définition 4.1, on obtiendra bien l'inégalité inverse :

$$|Q| \leqslant m^*(Q).$$

Fixons $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, et choisissons, pour tout $j \geqslant 1$, un cube ouvert :

$$S_j \supset Q_j,$$

suffisamment resserré autour de Q_j pour que :

$$\big|S_j\big| \leqslant (1+\varepsilon)\,\big|Q_j\big|,$$

ce qui est possible (exercice). Mais alors Q est recouvert par la réunion infinie dénombrable des *ouverts* S_j, réunion dont on peut extraire une famille couvrante finie, grâce au Lemme de Heine-Borel-Lebesgue, ce qui, après une renumérotation éventuelle des indices, nous donne :

$$Q \subset \bigcup_{j=1}^{J} S_j.$$

Alors un lemme élémentaire du chapitre sur la mesure de Jordan assure que :

$$|Q| \leqslant \sum_{j=1}^{J} |S_j|,$$

inégalité que nous pouvons instantanément enchaîner :

$$\begin{aligned}\big|Q\big| &\leqslant (1+\varepsilon) \sum_{j=1}^{N} \big|Q_j\big| \\ &\leqslant (1+\varepsilon) \sum_{j=1}^{\infty} \big|Q_j\big|.\end{aligned}$$

Mais puisque $\varepsilon > 0$ était arbitrairement petit, nous atteignons l'inégalité désirée. □

Lemme 4.5. *La mesure extérieure $m^*(Q)$ d'un cube* ouvert $Q \subset \mathbb{R}^d$ *est aussi égale à son volume $|Q|$.*

Démonstration. Puisque $Q \subset \overline{Q}$ est couvert par son adhérence, et puisque :

$$\big|\overline{Q}\big| = |Q|,$$

on voit immédiatement que :

$$m^*(Q) \leqslant |Q|.$$

Pour ce qui est de l'inégalité inverse, si $Q_0 \subset Q$ est un cube fermé contenu dans Q, le lemme qui précède a déjà fait voir que :

$$\big|Q_0\big| = m^*(Q_0),$$

tandis que le Lemme 4.2 de monotonie donne :

$$m^*(Q_0) \leqslant m^*(Q),$$

c'est-à-dire :

$$\big|Q_0\big| \leqslant m^*(Q).$$

Mais comme on peut choisir Q_0 remplissant de plus en plus Q avec un volume qui tend vers celui de Q, on obtient bien l'inégalité inverse :

$$|Q| \leqslant m^*(Q).$$

voulue. □

Lemme 4.6. *La mesure extérieure $m^*(R)$ d'un rectangle $R \subset \mathbb{R}^d$, ouvert ou fermé, est tout aussi égale à son volume $|R|$.*

Démonstration. Traitons seulement le cas d'un rectangle fermé. En augmentant très légèrement la taille d'une famille dénombrable de cubes fermés qui recouvrent R pour en faire des cubes ouverts, et en extrayant un recouvrement fini comme dans le Lemme 4.4, on démontre tout d'abord (exercice de vérification) que :

$$|R| \leqslant m^*(R).$$

Ensuite, pour ce qui est de l'inégalité inverse, avec $k \geqslant 1$ entier, formons la grille $\big(\frac{1}{k}\,\mathbb{Z}\big)^d \subset \mathbb{R}^d$ constituée de cubes fermés presque disjoints de côtés tous égaux à $\frac{1}{k}$. Si donc nous introduisons alors les deux ensembles :

$$\begin{aligned}\mathscr{Q} &:= \Big\{\text{cubes fermés de côté } \tfrac{1}{k} \text{ entièrement contenus dans } R\Big\},\\ \mathscr{Q}' &:= \Big\{\text{cubes fermés de côté } \tfrac{1}{k} \text{ rencontrant } R \text{ et } \mathbb{R}^d\backslash R\Big\},\end{aligned}$$

il est logiquement clair que :

$$R \subset \bigcup_{Q \in (\mathscr{Q} \cup \mathscr{Q}')} Q.$$

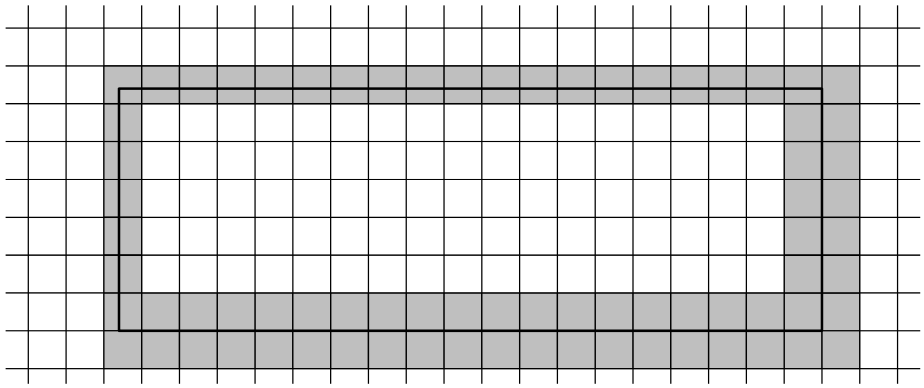
Mais comme :

$$\bigcup_{Q \in \mathscr{Q}} Q \subset R,$$

un argument simple (exercice) montre que :

$$\sum_{Q \in \mathscr{Q}} |Q| \leqslant |R|.$$

Assertion 4.7. *Il existe une constante $C_{R,d} > 0$ qui dépend du rectangle et de la dimension $d \geqslant 1$ telle que le nombre de cubes fermés de côté $\frac{1}{k}$ rencontrant R et $\mathbb{R}^d \backslash R$ est borné par $C_{d,R} \cdot k^{d-1}$.*



Autrement dit, le nombre de cubes rencontrant le rectangle et son complémentaire croît à la même puissance $(\cdot)^{d-1}$ que le *périmètre* du rectangle.

Démonstration. En effet, on vérifie (exercice) que ces cubes sont tous contenus dans l'ensemble de type anneau :

$$\Big\{x \in \mathbb{R}^d \colon \; \mathsf{dist}(x, Q) \leqslant \tfrac{1}{k}\Big\} \Big\backslash \Big\{x \in Q \colon \; \mathsf{dist}(x, \mathbb{R}^d \backslash Q) \geqslant \tfrac{1}{k}\Big\},$$

et que cet ensemble, qui n'est autre qu'un épaississement du bord du rectangle de dimension $d-1$, est effectivement recouvert par un nombre de cubes $\leqslant C_{d,R} \cdot k^{d-1}$. □

Comme chaque cube de côté $\frac{1}{k}$ est de volume $\frac{1}{k^d}$, on déduit que :

$$\begin{aligned} \sum_{Q \in \mathscr{Q}'} |Q| \; &= \; \frac{1}{k^d} \, \mathrm{O}\big(k^{d-1}\big) \\ &= \; \mathrm{O}\big(\tfrac{1}{k}\big) \end{aligned}$$

Donc au total :

$$\sum_{Q \in (\mathscr{Q} \cup \mathscr{Q}')} |Q| \; \leqslant \; |R| + \mathrm{O}\big(\tfrac{1}{k}\big),$$

et en laissant $k \to \infty$, on obtient bien l'inégalité inverse $m^*(R) \leqslant |R|$. □

Lemme 4.8. *La mesure extérieure de $\mathbb{R}^d$ est infinie :*

$$m^*(\mathbb{R}^d) = \infty.$$

Démonstration. En effet, tout recouvrement de $\mathbb{R}^d$ doit constituer aussi un recouvrement des cubes $[-R, \, R]^d$ pour $R > 0$ arbitrairement grand, et alors par monotonie de $m^*(\cdot)$:

$$\begin{aligned} m^*(\mathbb{R}^d) \; &\geqslant \; m^*\big([-R, \, R]\big) \\ &= \; \big(2\, R\big)^d \underset{R \to \infty}{\longrightarrow} \infty, \end{aligned}$$

ce qui conclut. □

Lemme 4.9. *L'ensemble triadique standard de Cantor $C \subset [0, 1]$ a pour mesure extérieure 0.*

Démonstration. En effet, par construction $C = \bigcap_{k=1}^\infty C_k$ où chaque C_k est réunion de 2^k intervalles fermés d'égale longueur $\frac{1}{3^k}$ que l'on peut prendre comme recouvrement, d'où :

$$m^*(C) \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui conclut. □

5. Propriétés de la mesure extérieure

Les exemples qui précèdent ont quelque peu étayé l'intuition primitive que l'on peut a pu se former intérieurement concernant la mesure extérieure. Ici, nous engageons une étude des propriétés générales de la mesure extérieure dont nous aurons besoin dans ce qui suit.

Tout d'abord, reformulons précisément ce que dit la Définition 4.1 : *pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement dénombrable :*

$$E \subset \bigcup_{j=1}^\infty Q_j$$

par des cubes fermés Q_j dont la somme des volumes est à peine supérieure à $m^*(E)$:

$$m^*(E) \leqslant \sum_{j=1}^\infty \underbrace{m^*(Q_j)}_{=|Q_j|} \leqslant m^*(E) + \varepsilon.$$

Proposition 5.1. [Sous-additivité dénombrable] *Si un ensemble $E = \bigcup_{j=1}^\infty E_j$ est réunion dénombrable quelconque d'ensembles $E_j \subset \mathbb{R}^d$, alors :*

$$m^*(E) \leqslant \sum_{j=1}^\infty m^*\big(E_j\big).$$

Plus spécialement, lorsque la réunion $E = \bigcup_{j=1}^J E_j$ est finie, on a de même :

$$m^*(E) \leqslant \sum_{j=1}^J m^*\big(E_j\big).$$

Démonstration. Bien entendu, on peut supposer que pour tout $j \geqslant 1$:

$$m^*\big(E_j\big) < \infty,$$

sinon l'inégalité à démontrer est trivialement satisfaite. Par définition, pour tout $j \geqslant 1$ et tout $\varepsilon_j > 0$ de la forme :

$$\varepsilon_j := \frac{\varepsilon}{2^j},$$

il existe un recouvrement de E_j :

$$E_j \subset \bigcup_{k=1}^\infty Q_{j,k},$$

par des cubes fermés $Q_{j,1}, Q_{j,2}, \dots$ dont la somme totale des volumes satisfait :

$$\sum_{k=1}^\infty \big|Q_{j,k}\big| \leqslant m^*\big(E_j\big) + \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Alors E est contenu dans la réunion double :

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_{j,k},$$

et l'on peut alors majorer :

$$\begin{aligned} m^*(E) &\leqslant m^*\bigg(\bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_{j,k}\bigg) \\ \text{[Ces cubes se recouvrent eux-mêmes !]} \qquad &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \big|Q_{j,k}\big| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \bigg(m^*(E_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}\bigg) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} m^*\big(E_j\big) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Comme le choix de $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit est libre, cette inégalité conclut. Le cas d'une réunion finie, plus simple, s'ensuit. ☐

Proposition 5.2. *Si $E \subset \mathbb{R}^d$ est un sous-ensemble quelconque, alors :*

$$m^*(E) = \inf_{\substack{\mathscr{O} \supset E \\ \mathscr{O} \text{ ouvert}}} m^*(\mathscr{O}),$$

où l'infimum est pris sur tous les ensembles ouverts $\mathscr{O}$ qui contiennent E.

Démonstration. La propriété de monotonie de la mesure extérieure appliquée à toutes les inclusions $E \subset \mathscr{O}$ donne :

$$m^*(E) \leqslant \inf_{\substack{\mathscr{O} \supset E \\ \mathscr{O} \text{ ouvert}}} m^*(\mathscr{O}).$$

Pour ce qui est de l'inclusion inverse, avec $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, choisissons des cubes fermés Q_j tels que :

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j,$$

et tels que :

$$\sum_{j=1}^{\infty} \big|Q_j\big| \leqslant m^*(E) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour tout $j \geqslant 1$, soit aussi $Q_j^0 \supset Q_j$ un cube ouvert contenant Q_j tel que :

$$\big|Q_j^0\big| \leqslant \big|Q_j\big| + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}.$$

Alors la réunion infinie :

$$\mathscr{O} := \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j^0$$

constitue un ouvert qui contient E, et grâce à la Proposition 5.1 de sous-additivité dénombrable qui précède, on peut estimer sa mesure extérieure :

$$\begin{aligned} m^*(\mathscr{O}) &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} m^*\big(Q_j^0\big) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \big|Q_j^0\big| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \bigg(\big|Q_j\big| + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}\bigg) \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \big|Q_j\big| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leqslant m^*(E) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Comme le choix de $\varepsilon > 0$ est libre, on obtient bien l'inégalité inverse $\inf\, m^*(\mathscr{O}) \leqslant m^*(E)$. □

Dans ses hypothèses, l'énoncé suivant impose une restriction qui n'est pas anodine.

Proposition 5.3. *Étant donné deux sous-ensembles $E_1 \subset \mathbb{R}^d$ et $E_2 \subset \mathbb{R}^d$ situés à distance positive l'un de l'autre :*

$$\mathsf{dist}\big(E_1, E_2\big) \,>\, 0,$$

la mesure extérieure de leur réunion $E := E_1 \cup E_2$ est la somme de leurs mesures extérieures :

$$m^*(E) \,=\, m^*\big(E_1\big) + m^*\big(E_2\big).$$

En effet, on peut trouver des exemples d'ensembles disjoints E_1 et E_2 n'étant pas à distance strictement positive l'un de l'autre mais qui violent cette égalité naturelle. Heureusement, nous verrons dans peu de temps que cette égalité naturelle sera satisfaite, sans l'hypothèse $\mathsf{dist}\big(E_1, E_2\big) > 0$, par les sous-ensembles disjoints $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^d$ qui seront catégorisés comme *mesurables*.

Démonstration. En tout cas, comme la Proposition 5.1 de sous-additivité finie donne d'abord sans effort :

$$m^*(E) \,\leqslant\, m^*\big(E_1\big) + m^*\big(E_2\big),$$

il s'agit essentiellement de raisonner pour établir l'inégalité inverse.

À cette fin, prenons d'abord $\delta > 0$ tel que :

$$\mathsf{dist}\big(E_1, E_2\big) \geqslant \delta > 0.$$

Ensuite, choisissons un recouvrement de E :

$$E \,\subset\, \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$$

par des cubes fermés qui satisfait :

$$\sum_{j=1}^{\infty} \big|Q_j\big| \,\leqslant\, m^*(E) + \varepsilon.$$

Quitte à subdiviser un certain nombre de fois chacun des cubes Q_j, on peut supposer que leurs diamètres sont tous inférieurs à $\delta/2$. Une fois cette opération effectuée, on est certain que *chaque Q_j ne peut intersecter qu'un seul des deux sous-ensembles E_1 et E_2 à la fois*.

Si donc nous décidons d'attribuer les noms J_1 et J_2 aux indices $j \geqslant 1$ pour lesquels Q_j intersecte E_1 et E_2, respectivement et exclusivement, alors $J_1 \cap J_2 = \emptyset$ est vide, ce qui montre que nous avons séparé les recouvrements :

$$\begin{aligned} E_1 &\subset \bigcup_{j \in J_1} Q_j, \\ E_2 &\subset \bigcup_{j \in J_2} Q_j. \end{aligned}$$

Par conséquent, la monotonie de $m^*(\cdot)$ donne :

$$\begin{aligned} m^*\big(E_1\big) + m^*\big(E_2\big) &\leqslant \sum_{j \in J_1} \big|Q_j\big| + \sum_{j \in J_2} \big|Q_j\big| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \big|Q_j\big| \\ &\leqslant m^*(E) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Comme $\varepsilon > 0$ peut être rendu négligeable, c'est bien l'inégalité inverse voulue que nous atteignons ainsi. □

Proposition 5.4. *Si un ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ est réunion dénombrable de cubes fermés Q_j presque disjoints :*

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j,$$

alors sa mesure extérieure est égale à la somme exacte de leurs volumes :

$$m^*(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \big|Q_j\big|,$$

Démonstration. Pour tout $j \geqslant 1$, soit $Q_j' \subset Q_j$ un cube fermé strictement contenu dans l'intérieur de Q_j et qui remplit presque Q_j au sens où :

$$\big|Q_j\big| \leqslant \big|Q_j'\big| + \frac{\varepsilon}{2^j},$$

où comme à l'accoutumée, $\varepsilon > 0$ est petit, fixé pour l'instant, mais destiné à redevenir libre à la fin des arguments. Alors pour tout entier quelconque $J \geqslant 1$ fixé lui aussi, les J cubes fermés :

$$Q_1', \; Q_2', \; \ldots, \; Q_J',$$

sont manifestement disjoints deux à deux, donc à distance finie l'un de l'autre, ce qui permet d'appliquer plusieurs fois la proposition qui précède pour obtenir :

$$\begin{aligned} m^*\bigg(\bigcup_{j=1}^{J} Q_j'\bigg) &= \sum_{j=1}^{J} \big|Q_j'\big| \\ &\geqslant \sum_{j=1}^{J} \bigg(\big|Q_j\big| - \frac{\varepsilon}{2^j}\bigg). \end{aligned}$$

Mais comme on a par construction :

$$E \supset \bigcup_{j=1}^{J} Q_j',$$

nous déduisons par monotonie de $m^*(\cdot)$ que pour tout entier $J \geqslant 1$ fixé :

$$\begin{aligned} m^*(E) &\geqslant \sum_{j=1}^{J} \bigg(\big|Q_j\big| - \frac{\varepsilon}{2^j} \bigg). \\ &\geqslant \sum_{j=1}^{J} \big|Q_j\big| - \varepsilon. \end{aligned}$$

Maintenant, restituons à l'entier J sa liberté, et faisons-le tendre vers l'infini pour obtenir, après inversion de l'inégalité :

$$\sum_{j=1}^{\infty} \big|Q_j\big| \leqslant m^*(E) + \varepsilon.$$

Mais comme $\varepsilon > 0$ s'apprêtait à s'évader (s'évanouir) lui aussi, nous obtenons au final :

$$\sum_{j=1}^{\infty} \big|Q_j\big| \leqslant m^*(E).$$

Enfin, qu'en est-il de l'inégalité inverse ? Par sous-additivité dénombrable de $m^*(\cdot)$, elle découle trivialement de l'inclusion $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$, ce qui conclut élégamment ce joyeux périple de croisiériste dans la contrée magique des mathématiques libres ! □

Cette dernière propriété générale dit donc que lorsqu'un ensemble peut être décomposé comme réunion dénombrable presque disjointe de cubes fermés, sa mesure extérieure vaut tout simplement la somme (infinie) des volumes des cubes en question. En particulier, si nous nous souvenons que le Théorème 3.2 représentait tout ouvert comme réunion presque disjointe de cubes fermés, nous voyons que la mesure extérieure d'un ouvert correspond bien à ce que nous avions deviné intuitivement. Qui plus est, la proposition que nous venons de démontrer assure (exercice mental) que pour toute représentation d'un ouvert $\mathscr{O} = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ comme réunion dénombrable de cubes fermés presque disjoints, la somme infinie $\sum_{j=1}^{\infty} |Q_j|$ de leurs volumes est un nombre fixe, parfaitement indépendant de la décomposition de l'ouvert — puisque, solution de l'exercice, cette quantité est égale à $m^*(\mathscr{O})$!

Au stade intermédiaire que nous venons d'atteindre, il est donc naturel d'attendre et d'espérer que la Théorie de la mesure va déclarer que tout ouvert $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}^d$ est mesurable, de mesure égale à sa mesure extérieure $m^*(\mathscr{O})$.

On peut faire voir que le volume des sous-ensembles géométriques classiques de $\mathbb{R}^d$ que l'on calcule par des méthodes d'intégration élémentaire, parfois « à la physicienne » en dimensions $d = 1, 2, 3$, coïncide avec leur mesure extérieure, au sens de la théorie présente qui est en cours de développement. Par exemple, on peut vérifier que la mesure extérieure d'une boule (de pétanque !) ouverte ou fermée est égale à son volume — heureusement ! ! ! Toutefois, pour se convaincre réellement de la cohérence entre ces notions, il vaut mieux attendre d'avoir complètement développé tous les outils de la *Théorie de l'intégration*, ce dont le chapitre suivant se chargera.

Attention ! Redisons que malgré les deux propositions qui précèdent, lorsqu'un ensemble $E = E_1 \cup E_2$ avec $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ est réunion disjointe de deux sous-ensembles $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^d$, on ne peut en général *pas* conclure que la mesure extérieure soit additive :

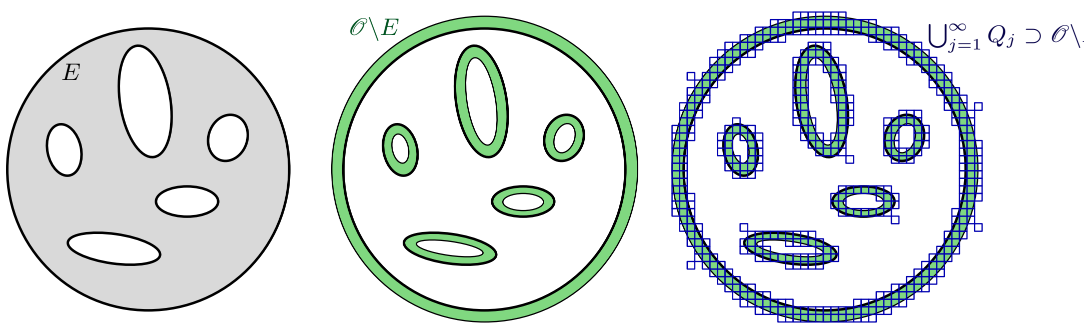
$$m^*\big(E_1 \cup E_2\big) \overset{\mathbf{??}}{=} m^*\big(E_1\big) + m^*\big(E_2\big).$$

Cette propriété extrêmement désirable est en effet mise en défaut par certains ensembles hautement irréguliers ou pathologiques, mais elle sera satisfaite par les sous-ensembles qui sont mesurables au sens que nous allons maintenant expliciter.

6. Ensembles mesurables et mesure de Lebesgue

La notion de mesurabilité isole une certaine collection de sous-ensembles de $\mathbb{R}^d$ pour lesquels la mesure extérieure satisfait toutes les propriétés désirables, notamment l'additivité finie ou infinie dénombrable pour les réunions disjointes d'ensembles mesurables.

Il existe plusieurs manières théoriquement équivalentes de définir la notion de mesurabilité au sens de Borel, de Lebesgue, ou de Carathéodory. Vraisemblablement, celle qui est la plus intuitive, et donc la meilleure du point de vue de l'exigence de compréhension mathématique, est la suivante. Nous réalisons volontairement une figure un peu complexe : l'ensemble E est un disque percé de trous ressemblant quelque peu à des galaxies ; l'ouvert plus gros $\mathscr{O} \supset E$ déborde donc du disque et rentre légèrement dans les galaxies ; au milieu, seul $\mathscr{O}\backslash E$ est dessiné, pas $\mathscr{O}$. Enfin, la troisième figure montre $\mathscr{O}\backslash E$ recouvert par des cubes.



Définition 6.1. Un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ est dit *mesurable au sens de Lebesgue*, ou tout simplement *mesurable*, lorsque, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert :

$$\mathscr{O} \supset E$$

qui le contient en étant suffisamment resserré autour de lui pour que la mesure extérieure de l'anneau d'erreur $\mathscr{O}\backslash E$ satisfasse :

$$m^*\big(\mathscr{O}\backslash E\big) \leqslant \varepsilon.$$

Immédiatement après cette définition, nous obtenons (exercice mental) ce que nous avons anticipé :

Proposition 6.2. *Tout sous-ensemble ouvert $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}^d$ est mesurable.*

Démonstration. En effet, $\mathscr{O} \supset \mathscr{O}$ et $m^*(\mathscr{O}\backslash\mathscr{O}) = m^*(\emptyset) = 0$! □

Mais ceci ne suffit pas encore pour réellement comprendre en quoi cette définition est adéquate. À cet effet, si nous écrivons :

$$\mathscr{O} = E \cup \big(\mathscr{O} \backslash E\big),$$

les deux inclusions évidentes :

$$E \subset \mathscr{O} \subset E \cup \big(\mathscr{O} \backslash E\big)$$

associées au Lemme 4.2 de monotonie et à la sous-additivité de $m^*(\cdot)$ donnent :

$$m^*(E) \leqslant m^*(\mathscr{O}) \leqslant m^*(E) + \underbrace{m^*\big(\mathscr{O} \backslash E\big)}_{\substack{\text{ce dont on parle} \\ \text{dans la définition}}}.$$

Alors dans ce jeu d'inégalités, l'écart exprimé par la *première* inégalité :

$$m^*(E) \underbrace{\leqslant}_{\substack{\longleftarrow \\ =}} m^*(\mathscr{O}) \leqslant m^*(E) + m^*\big(\mathscr{O} \backslash E\big).$$

tend en fait vers une égalité, grâce à la Proposition 5.2 stipulant que pour *tout* sous-ensemble quelconque $E \subset \mathbb{R}^d$:

$$m^*(E) = \inf_{\substack{\mathscr{O} \supset E \\ \mathscr{O} \text{ ouvert}}} m^*(\mathscr{O}).$$

Toutefois, l'écart exprimé par la *deuxième* inégalité peut fort bien être uniformément strictement positif. *Donc en profondeur, la définition de mesurabilité d'un ensemble demande qu'on puisse l'approximer par des ouverts concrets qui soient suffisamment proches de lui pour que l'écart rémanent devienne arbitrairement petit en termes de la mesure extérieure :*

$$m^*(E) \approx m^*(\mathscr{O}) \leqslant m^*(E) + \underbrace{m^*\big(\mathscr{O} \backslash E\big)}_{\substack{\text{peut aussi} \\ \text{être rendu} \\ \text{arbitrairement petit}}}.$$

Définition 6.3. Si un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ est mesurable, sa *mesure de Lebesgue*, ou simplement sa *mesure*, est le nombre réel positif éventuellement infini :

$$m(E) := m^*(E).$$

Notre objectif présent maintenant est de rassembler diverses propriétés générales des ensembles mesurables. En particulier, nous allons montrer que la collection des ensembles mesurables se comporte d'une manière parfaitement agréable et sympathique vis-à-vis de toutes les opérations standard de la *Théorie des ensembles :* les réunions finies ou dénombrables, les intersections finies ou dénombrables, les passages au complémentaires, les prises de différence symétrique.

Par exemple, si deux ensembles mesurables sont inclus l'un dans l'autre :

$$E_1 \subset E_2,$$

alors leurs mesures respectives safisfont l'inégalité naturelle :

$$m\big(E_1\big) \leqslant m\big(E_2\big)$$

simplement parce que $m = m^*$ sur les ensembles mesurables, et parce que m^* satisfait bien :

$$m^*\big(E_1\big) \leqslant m^*\big(E_2\big)!$$

Proposition 6.4. *Tout ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ de mesure extérieure nulle $m^*(E) = 0$ est mesurable. En particulier, tout sous-ensemble $F \subset E$ d'un ensemble de mesure nulle est mesurable.*

Démonstration. Par définition, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert $\mathscr{O} \supset E$ tel que $m^*(\mathscr{O}) \leqslant \varepsilon$. Mais puisque :

$$\mathscr{O} \backslash E \subset \mathscr{O},$$

la monotonie de $m^*(\cdot)$ assure que l'on a aussi $m^*(\mathscr{O}\backslash E) \leqslant \varepsilon$, ce qui conclut. □

Comme conséquence de cette propriété, l'ensemble triadique standard de Cantor est mesurable de mesure nulle, puisque nous savons déjà que sa mesure extérieure vaut 0.

Théorème 6.5. *Toute réunion finie ou infinie dénombrable :*

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$$

d'ensembles mesurable $E_j \subset \mathbb{R}^d$ est encore mesurable, et l'on a :

$$m(E) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} m\big(E_j\big).$$

Observons que le cas des réunions finies est un cas particulier des réunions infinies dénombrables, en prenant les E_j constants égaux à E_1 à partir d'un certain rang.

Démonstration. Par hypothèse, pour tout entier $j \geqslant 0$, et tout $\varepsilon_j > 0$ de la forme $\varepsilon_j := \frac{\varepsilon}{2^j}$ avec $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, on peut trouver un ouvert $\mathscr{O}_j \supset E_j$ tel que :

$$m^*\big(\mathscr{O}_j \backslash E_j\big) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Alors la réunion complète de tous ces ouverts :

$$\mathscr{O} := \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathscr{O}_j$$

est un ouvert contenant $E \subset \mathscr{O}$ qui satisfait de plus :

$$\mathscr{O} \backslash E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \big(\mathscr{O}_j \backslash E_j\big),$$

puis grâce à la monotonie et à la sous-additivité de $m^*(\cdot)$, nous déduisons :

$$\begin{aligned} m^*\big(\mathscr{O} \backslash E\big) &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} m^*\big(\mathscr{O}_j \backslash E_j\big) \\ &\leqslant \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui conclut. L'inégalité sur les mesures provient simplement des définitions :

$$m(E) := m^*(E), \qquad\qquad m\big(E_j\big) := m^*\big(E_j\big) \qquad {\scriptstyle (j \geqslant 1)}$$

et de la sous-additivité dénombrable de la mesure extérieure (Proposition 5.1). □

Théorème 6.6. *Tout sous-ensemble fermé $F \subset \mathbb{R}^d$ est mesurable.*

Démonstration. Tout d'abord, nous affirmons qu'il suffit d'établir cela pour des fermés $F \subset \mathbb{R}^d$ qui sont de plus *bornés*, donc compacts. En effet, si $\overline{B}_k$ désigne la boule fermée centrée à l'origine de rayon un entier $k \geqslant 1$ quelconque, la réunion de ces $\overline{B}_k$ remplit l'espace $\mathbb{R}^d$, d'où :

$$F = \bigcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{F \cap \overline{B}_k}_{\text{fermé borné}}.$$

Par conséquent, si l'on sait que les compacts $F \cap \overline{B}_k$ sont mesurables, le théorème qui précède donnera instantanément que F est aussi mesurable.

Supposons donc le fermé $F \subset \mathbb{R}^d$ compact. Puisqu'il est contenu dans une boule fermée de rayon assez grand, on a $m^*(F) < \infty$. Soit $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. Par définition de la mesure extérieure, on peut sélectionner un ouvert $\mathscr{O} \supset F$ tel que :

$$m^*(\mathscr{O}) \leqslant m^*(F) + \varepsilon.$$

Mais puisque F est fermé, la différence :

$$\mathscr{O} \backslash F = \mathscr{O} \cap \big(\mathbb{R}^d \backslash F\big)$$

est un ouvert, et le Théorème 3.2 nous permet de le représenter comme une réunion dénombrable de cubes fermés presque disjoints :

$$\mathscr{O} \backslash F = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j.$$

Maintenant, pour un entier $J \geqslant 1$ fixé, la réunion finie :

$$K := \bigcup_{j=1}^{J} Q_j$$

est un compact. Comme ce compact est contenu dans $\mathscr{O} \backslash F$, il est d'intersection vide avec F :

$$K \cap F = \emptyset.$$

Alors c'est un fait général que la distance entre le compact K et le fermé F est nécessairement strictement positive :

$$\mathsf{dist}(K,\, F) > 0,$$

et nous isolons ce fait sous forme d'une proposition qui apparaît après cette démonstration présente.

Ensuite, puisque $\mathscr{O} \supset K \cup F$, la monotonie de $m^*(\cdot)$, la sous-additivité de $m^*(\cdot)$, et la Proposition 5.4 permettent d'obtenir la minoration :

$$\begin{aligned} m^*(\mathscr{O}) &\geqslant m^*(F) + m^*(K) \\ &= m^*(F) + m^*\bigg(\bigcup_{j=1}^{J} Q_j\bigg) \\ &= m^*(F) + \sum_{j=1}^{J} m^*\big(Q_j\big), \end{aligned}$$

que nous renversons de manière équivalente en la majoration :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{J} m^*(Q_j) &\leqslant m^*(\mathscr{O}) - m^*(F) \\ &\leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

Maintenant, puisque le choix de J était implicitement laissé à notre entière discrétion, nous pouvons pousser gaillardement J vers l'infini, ce qui nous donne :

$$\sum_{j=1}^{\infty} m^*(Q_j) \leqslant \varepsilon.$$

Enfin, la sous-additivité dénombrable de $m^*(\cdot)$ appliquée à l'inclusion — qui était en fait une égalité par remplissage — :

$$\mathscr{O}\backslash F \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$$

donne :

$$\begin{aligned}m^*\big(\mathscr{O}\backslash F\big) &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} m^*\big(Q_j\big) \\ &\leqslant \varepsilon,\end{aligned}$$

ce qui achève cette démonstration rédigée dans une rhétorique explicite. □

Il reste toutefois encore à élucider l'affirmation concernant la distance entre un compact et un fermé.

Proposition 6.7. *Si un sous-ensemble fermé $F \subset \mathbb{R}^d$ et un sous-ensemble compact $K \subset \mathbb{R}^d$ sont disjoints :*

$$F \cap K = \emptyset,$$

alors ils sont à distance strictement positive l'un de l'autre :

$$\sup_{x \in F,\ y \in K} |x - y| =: \mathsf{dist}(F, K) > 0.$$

Démonstration. Nous affirmons qu'en tout point $y \in K$ il existe un réel $\delta_y > 0$ tel que :

$$\mathsf{dist}(F, y) \geqslant 3\,\delta_y.$$

Sinon, il existerait une suite de points $x_n \in F$ telle que $\mathsf{dist}(x_n, y) \longrightarrow 0$ lorsque $n \to \infty$, cette suite serait alors bornée, on pourrait en extraire une sous-suite convergente vers un certain point $x_\infty \in \mathbb{R}^d$ *lequel appartiendrait encore à F puisque F est fermé*, et à la limite on aurait $\mathsf{dist}(x_\infty, y) = 0$, ce qui voudrait dire :

$$F \ni x_\infty = y \in K,$$

contredisant avec insolence l'hypothèse $F \cap K = \emptyset$.

Ensuite, grâce au Théorème de Heine-Borel-Lebesgue, en partant de la réunion couvrante par des boules ouvertes du compact K :

$$\begin{aligned}\bigcup_{y \in K} B_{2\delta_y}(y) &\supset \bigcup_{y \in K} \{y\} \\ &\supset K,\end{aligned}$$

on peut extraire un sous-recouvrement fini, que nous noterons :

$$\bigcup_{j=1}^{J} B_{2\delta_{y_j}}(y_j) \supset K,$$

en termes de certains points $y_1, \dots, y_J \in K$ auxquels sont associés par construction des rayons strictement positifs :

$$\delta_{y_1} > 0, \dots\dots, \delta_{y_J} > 0.$$

Mais alors le plus petit d'entre eux demeure strictement positif :

$$\begin{aligned}\delta &:= \mathsf{min}\big(\delta_{y_1}, \dots, \delta_{y_J}\big)\\ &> 0,\end{aligned}$$

et nous affirmons que tout ceci conduit à la conclusion voulue :

$$\mathsf{dist}(F, K) \geqslant \delta > 0.$$

En effet, étant donné deux points quelconques $x \in F$ et $y \in K$, puisque l'on a un recouvrement de K, il existe un entier $j \in \{1, \dots, J\}$ tel que :

$$\big|y - y_j\big| < 2\,\delta_{y_j},$$

et puisque l'on a grâce au raisonnement du début :

$$\big|x - y_j\big| \geqslant \mathsf{dist}(F, y_j) \geqslant 3\,\delta_{y_j},$$

de simples inégalités triangulaires dignes de l'horlogerie suisse :

$$\begin{aligned}|x - y| &\geqslant \big|x - y_j\big| - \big|y_j - y\big|\\ &\geqslant 3\,\delta_{y_j} - 2\,\delta_{y_j}\\ &\geqslant \delta,\end{aligned}$$

achèvent d'établir la stricte positivité de la distance. □

Théorème 6.8. *Le complémentaire $\mathbb{R}^d \backslash E$ d'un ensemble mesurable quelconque $E \subset \mathbb{R}^d$ est encore mesurable.*

Démonstration. L'ensemble E étant mesurable, pour tout entier $n \geqslant 1$, on peut trouver un ouvert $\mathscr{O}_n \supset E$ tel que :

$$m^*\big(\mathscr{O}_n \backslash E\big) \leqslant \frac{1}{n}.$$

Le complémentaire $\mathscr{O}_n^c = \mathbb{R}^d \backslash \mathscr{O}_n$ est alors un fermé, donc mesurable grâce au théorème qui précède, et la persistance de la mesurabilité par réunions dénombrables assure que :

$$S := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{O}_n^c$$

est encore mesurable.

Ensuite, comme pour tout entier n fixé on a :

$$\mathscr{O}_n^c \subset S \Longleftrightarrow S^c \subset \mathscr{O}_n,$$

on déduit :

$$S^c \backslash E \subset \mathscr{O}_n \backslash E \qquad\qquad {\scriptstyle (n \geqslant 1)}.$$

Mais par définition du complémentaire :

$$\begin{aligned} S^c \backslash E &= \big(\mathbb{R}^d \backslash S\big) \backslash E \\ &= \mathbb{R}^d \backslash \big(S \cup E\big) \\ &= (\mathbb{R}^d \backslash E) \backslash S \\ &= E^c \backslash S, \end{aligned}$$

on obtient en fait :

$$E^c \backslash S \subset \mathscr{O}_n \backslash E \qquad\qquad {\scriptstyle (n \geqslant 1)}.$$

En prenant la mesure extérieure :

$$\begin{aligned} m^*\big(E^c \backslash S\big) &\leqslant m^*\big(\mathscr{O}_n \backslash E\big) \\ &\leqslant \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

et ce, pour tout entier $n \geqslant 1$. Laissant donc $n \to \infty$, il vient :

$$m^*\big(E^c \backslash S\big) = 0,$$

ce qui démontre que $E^c \backslash S$ est mesurable en vertu de la Proposition 6.4.

Maintenant, puisque la réversion de chaque inclusion $E \subset \mathscr{O}_n$ s'écrit $\mathscr{O}_n^c \subset E^c$, on voit que :

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{O}_n^c = S \subset E^c.$$

Enfin, puisque d'après le Théorème 6.5, la mesurabilité est préservée par réunions finies, on conclut que notre complémentaire favori, lequel s'écrit :

$$E^c = S \cup \big(E^c \backslash S\big)$$

est lui aussi mesurable. □

Corollaire 6.9. *Si E et F sont deux sous-ensembles mesurables de $\mathbb{R}^d$, alors $E \backslash F$ est aussi mesurable.*

Démonstration. En effet, $E \backslash F = E \cap (\mathbb{R}^d \backslash F)$. □

Théorème 6.10. *Toute intersection finie ou infinie dénombrable :*

$$E = \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j$$

d'ensembles mesurables $E_j \subset \mathbb{R}^d$ est encore mesurable.

À nouveau, le cas fini est un cas particulier du cas infini.

Démonstration. C'est une application des deux Théorèmes 6.5 et 6.8 grâce à l'égalité ensembliste générale (exercice de révision) :

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \big(E_j\big)^c\right)^c,$$

argument fort astucieux n'est-il pas ? □

Pour commenter ces propriétés générales des ensembles mesurables, faisons observer que nous avons donc déjà abondamment montré que la mesurabilité est stable par passage aux réunions et aux intersections, non seulement finies, mais aussi, et là est le point crucial, *infinies dénombrables*. Le passage à l'infini sera en effet déterminant pour toutes les applications en Analyse. Toutefois, les opérations de réunions ou d'intersections *non* dénombrables resteront formellement interdites lorsqu'on travaille avec des ensembles mesurables !

Nous pouvons conclure ce cycle en énonçant et en démontrant une propriété fantastique qui avait été promise antérieurement.

Théorème 6.11. *La mesure d'une réunion finie ou infinie dénombrable :*

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$$

d'ensembles $E_j \subset \mathbb{R}^d$ disjoints deux à deux :

$$E_{j_1} \cap E_{j_2} = \emptyset \qquad\qquad {\scriptstyle (1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant \infty)},$$

est la somme exacte *des mesures de ses composantes :*

$$m(E) = \sum_{j=1}^{\infty} m\big(E_j\big).$$

Démonstration. Supposons d'abord temporairement pour simplifier que chaque E_j est borné, car nous discuterons du cas général ensuite.

Pour tout entier $j \geqslant 1$, en appliquant la définition de la mesurabilité au complémentaire E_j^c, on trouve (exercice mental) un sous-ensemble fermé $F_j \subset E_j$ satisfaisant :

$$m^*\big(E_j \big\backslash F_j\big) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Fixons alors un entier quelconque $J \geqslant 1$. Comme les ensembles $F_1, \dots, F_J$ sont fermés, bornés, donc compacts et comme ils sont mutuellement disjoints, grâce à la Proposition 6.7, ils sont nécesssairement à distance strictement positive l'un de l'autre :

$$\mathsf{dist}\,\big(F_{j_1},\, F_{j_2}\big) > 0 \qquad\qquad {\scriptstyle (1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant J)}.$$

Puisque $F_1, \dots, F_J$ sont mesurables (car fermés), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des ouverts :

$$\mathscr{O}_1 \supset F_1, \dots\dots, \mathscr{O}_J \supset F_J,$$

tels que :

$$m^*\big(\mathscr{O}_1 \big\backslash F_1\big) \leqslant \frac{\varepsilon}{J}, \quad \dots\dots\dots, \quad m^*\big(\mathscr{O}_J \big\backslash F_J\big) \leqslant \frac{\varepsilon}{J}.$$

Quitte à rétrécir si nécessaire ces ouverts $\mathscr{O}_1, \dots, \mathscr{O}_J$, on peut supposer qu'ils sont disjoints deux à deux et même (exercice) à distance strictement positive l'un de l'autre. Alors l'ouvert réunion disjointe :

$$\mathscr{O} := \mathscr{O}_1 \cup \cdots \cup \mathscr{O}_J$$

contient le fermé :

$$F := F_1 \cup \cdots \cup F_J,$$

et l'on peut alors appliquer avantageusement la Proposition 5.3 :

$$\begin{aligned} m^*\big(\mathscr{O}\backslash F\big) &= m^*\Big(\big(\mathscr{O}_1\backslash F_1\big)\cup\cdots\cup\big(\mathscr{O}_J\backslash F_J\big)\Big) \\ &= m^*\big(\mathscr{O}_1\backslash F_1\big)+\cdots+m^*\big(\mathscr{O}_J\backslash F_J\big) \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{J}+\cdots+\frac{\varepsilon}{J} \\ &\leqslant \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui non seulement (re)démontre que $F_1\cup\cdots\cup F_J$ est mesurable, mais encore montre (exercice mental) que :

$$m\big(F_1\cup\cdots\cup F_J\big) = m\big(F_1\big)+\cdots+m\big(F_J\big).$$

Ensuite, puisque l'on a l'inclusion entre ensembles mesurables :

$$E \supset \bigcup_{j=1}^{J} F_j,$$

il vient :

$$\begin{aligned} m(E) &\geqslant m\big(F_1\big)+\cdots+m\big(F_J\big) \\ &\geqslant m\big(E_1\big)-\frac{\varepsilon}{2^1}+\cdots+m\big(E_J\big)-\frac{\varepsilon}{2^J} \\ &\geqslant m\big(E_1\big)+\cdots+m\big(E_J\big)-\varepsilon. \end{aligned}$$

Laissant ici $J\longrightarrow\infty$, comme $\varepsilon>0$ était arbitraire, nous trouvons :

$$m(E) \geqslant \sum_{j=1}^{\infty} m\big(E_j\big).$$

Or l'inégalité inverse :

$$m(E) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} m\big(E_j\big)$$

est toujours vraie, même lorsque les E_j ne sont pas mutuellement disjoints puisque $m = m^*$ sur les ensembles mesurables et puisque m^* est dénombrablement sous-additive. Ceci conclut la démonstration dans le cas où chaque E_j est borné.

Il reste donc à traiter le cas général, et nous allons maintenant voir comment le ramener à ce qui vient d'être dit. À cet effet, prenons une famille de cubes fermés $\{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$ emboîtés les uns dans les autres $Q_k\subset Q_{k+1}$ qui remplissent :

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k,$$

par exemple les cubes $[-k,\ k]^d$. Considérons Q_1, puis les complémentaires successifs :

$$Q_k\backslash Q_{k-1} \qquad\qquad {\scriptstyle (k\geqslant 2)},$$

et introduisons les ensembles mesurables *bornés :*

$$E_{j,k} := E_j\cap\big(Q_k\backslash Q_{k-1}\big).$$

Alors leur réunion complète redonne l'ensemble E :

$$\begin{aligned}
\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty} E_{j,k} &= \bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty} E_j \cap \big(Q_k \backslash Q_{k-1}\big) \\
&= \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \cap \bigg(\underbrace{\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \backslash Q_{k-1}}_{=\mathbb{R}^d}\bigg) \\
&= \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \\
&= E.
\end{aligned}$$

et ces $E_{j,k}$ sont disjoints deux à deux :

$$E_{j_1,k_1} \cap E_{j_2,k_2} = \emptyset \qquad\qquad ((j_1,k_1) \neq (j_2,k_2)).$$

Ensuite, comme pour tout $j \geqslant 1$ fixé, la sous-famille $\big\{E_{j,k}\big\}_{k=1}^{\infty}$ est constituée d'ensembles mutuellement disjoints *et bornés* de réunion :

$$E_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{j,k},$$

on peut appliquer *deux* fois ce que nous venons d'obtenir dans la première partie de la démonstration, une première fois pour obtenir :

$$m\big(E_j\big) = \sum_{k=1}^{\infty} m\big(E_{j,k}\big),$$

et une seconde fois à la réunion disjointe bornée :

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty} E_{j,k}$$

pour obtenir aussi :

$$\begin{aligned}
m(E) &= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} m\big(E_{j,k}\big) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} m\big(E_j\big),
\end{aligned}$$

ce qui conclut agréablement cette démonstration détaillée. □

Ains, nous avons établi l'additivité dénombrable de la mesure de Lebesgue pour les ensembles mesurables disjoints. Ce résultat extrêmement important fournit les connexions nécessaires entre :

• notre notion primitive de volume donnée par la mesure extérieure ;

• l'idée plus avancée d'ensemble mesurable ;

• les opérations infinies dénombrables permises sur ces ensembles.

Énonçons maintenant deux corollaires naturels, auxquels nous attribuons le statut de vrais théorèmes.

Théorème 6.12. *Si $E_1, E_2, \dots \subset \mathbb{R}^d$ sont une infinité dénombrable d'ensembles mesurables emboîtés de manière croissante les uns dans les autres :*

$$E_k \subset E_{k+1} \qquad\qquad {\scriptstyle (k \geqslant 1)},$$

alors :

$$m\bigg(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\bigg) = \lim_{K\to\infty} m\big(E_K\big).$$

Démonstration. Considérons E_1 puis les complémentaires successifs :

$$E_k \big\backslash E_{k-1} \qquad\qquad {\scriptstyle (k \geqslant 2)},$$

ce qui nous donne une famille d'ensembles *disjoints deux à deux* remplissant de manière alternative :

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = E_1 \cup \bigcup_{k=2}^{\infty} \big(E_k \big\backslash E_{k-1}\big).$$

Le Théorème 6.11 fondamental d'additivité dénombrable disjointe qui précède s'applique alors pour dire que la mesure du membre de droite est la somme infinie des mesures de ces nouvelles composantes disjointes :

$$\begin{aligned}
m\bigg(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\bigg) &= m\big(E_1\big) + \sum_{k=2}^{\infty} m\big(E_k \big\backslash E_{k-1}\big) \\
&= m\big(E_1\big) + \lim_{K\to\infty} \sum_{k=2}^{K} m\big(E_k \big\backslash E_{k-1}\big) \\
&= \lim_{K\to\infty} m\bigg(E_1 \cup \bigcup_{k=2}^{K} E_k \big\backslash E_{k-1}\bigg) \\
&= \lim_{K\to\infty} m\big(E_K\big),
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Théorème 6.13. *Si $E_1, E_2, \dots \subset \mathbb{R}^d$ sont une infinité dénombrable d'ensembles mesurables emboîtés de manière décroissante les uns dans les autres :*

$$E_k \supset E_{k+1} \qquad\qquad {\scriptstyle (k \geqslant 1)},$$

et si :

$$m\big(E_{k_0}\big) < \infty,$$

pour un certain k_0, alors :

$$m\bigg(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\bigg) = \lim_{K\to\infty} m\big(E_K\big).$$

Sans l'hypothèse que $m\big(E_k\big) < \infty$ à partir d'un certain rang $k \geqslant k_0$, l'énoncé est faux : prendre par exemple $E_k := [k, \infty[\subset \mathbb{R}$.

Démonstration. Quitte à renuméroter la suite, on peut supposer que $k_0 = 1$ après élimination des ensembles $E_1, \dots, E_{k_0-1}$ qui ne comptent pas dans l'intersection infinie.

Considérons de manière similaire les différences :

$$E_k \big\backslash E_{k+1} \qquad\qquad {\scriptstyle (k \geqslant 1)},$$

de telle sorte qu'on peut représenter sous forme de réunion disjointe :

$$E_1 \,=\, E \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \big(E_k \big\backslash E_{k+1}\big).$$

Grâce au Théorème 6.11 *pénultième* (= avant dernier ci-dessus) d'additivité dénombrable disjointe, on peut alors calculer :

$$\begin{aligned} m\big(E_1\big) \,&=\, m(E) + \lim_{K\to\infty} \sum_{k=1}^{K-1} \Big[m\big(E_k\big) - m\big(E_{k+1}\big)\Big] \\ &=\, m(E) + m\big(E_1\big) - \lim_{K\to\infty} m\big(E_K\big). \end{aligned}$$

Puisque $m\big(E_1\big) < \infty$, à gauche et à droite, on a d'honnêtes nombre réels positifs finis, donc après simplification :

$$m(E) \,=\, \lim_{K\to\infty} m\big(E_K\big),$$

ce qui complète ces arguments assez simples. □

Pour terminer ce périple distrayant dans le noble pays de la *Théorie de la mesure*, nous énonçons un dernier résultat qui réalise une intuition fondamentale concernant la relation qu'entretiennent les ensembles mesurables avec les ensembles mesurables *modèles* que sont les ouverts et les fermés. L'idée en effet, c'est qu'un ensemble mesurable *absolument quelconque et arbitraire* peut être approximé à volonté par des ensembles ouverts qui le contiennent, et par des ensembles fermés contenus en lui.

Autrement dit, les ensembles mesurables sont toujours ε-proches des ouverts et des fermés, qui sont modèles simples et universels.

Théorème 6.14. *Soit $E \subset \mathbb{R}^d$ un sous-ensemble mesurable quelconque. Alors les quatre propriétés suivantes sont satisfaites.*

(i) *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert $\mathscr{O} \supset E$ tel que :*

$$m\big(\mathscr{O}\backslash E\big) \,\leqslant\, \varepsilon.$$

(ii) *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un fermé $F \subset E$ tel que :*

$$m\big(E\backslash F\big) \,\leqslant\, \varepsilon.$$

(iii) *Lorsque la mesure $m(E) < \infty$ est de plus finie, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble compact $K \subset E$ tel que :*

$$m\big(E\backslash K\big) \,\leqslant\, \varepsilon.$$

(iv) *Lorsque à nouveau $m(E) < \infty$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une réunion finie :*

$$F := \bigcup_{j=1}^{J} Q_j$$

de cubes fermés presque disjoints $Q_j \subset \mathbb{R}^d$ telle que :

$$m\big(E \,\Delta\, F\big) \leqslant \varepsilon.$$

Rappelons que la *différence symétrique* entre deux sous-ensembles $E \subset \mathbb{R}^d$ et $F \subset \mathbb{R}^d$, notée $E\Delta F$, est l'ensemble des points qui n'appartiennent qu'à l'un d'entre eux :

$$E\Delta F := (E\backslash F) \cup (F\backslash E).$$

Démonstration. La propriété **(i)** n'est autre que la définition de la mesurabilité !

Quant à la propriété **(ii)**, nous savons que le complémentaire $E^c = \mathbb{R}^d\backslash E$ est mesurable. Donc par définition, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert :

$$\mathscr{O} \supset E^c,$$

tel que :

$$m\big(\mathscr{O}\backslash E^c\big) \leqslant \varepsilon.$$

Or le complémentaire de cet ouvert :

$$F := \mathscr{O}^c = \mathbb{R}^d\backslash\mathscr{O},$$

est un fermé contenu dans E en vertu de la réversion des inclusions par passage au complémentaire :

$$E^c \subset \mathscr{O} \iff \mathscr{O}^c \subset (E^c)^c = E,$$

et enfin aussi :

$$\begin{aligned} E\backslash F &= E\backslash\mathscr{O}^c \\ &= E\big\backslash\big(\mathbb{R}^d\backslash\mathscr{O}\big) \\ &= \mathscr{O}\big\backslash\big(\mathbb{R}^d\backslash E\big) \\ &= \mathscr{O}\backslash E^c, \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} m\big(E\backslash F\big) &= m\big(\mathscr{O}\backslash E^c\big) \\ &\leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

Ensuite concernant **(iii)**, prenons grâce à ce que nous venons de démontrer un fermé $F \subset E$ tel que :

$$m\big(E\backslash F\big) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, soit $\overline{B}_n$ la boule fermée de centre n centrée à l'origine. On introduit la suite d'ensembles compacts :

$$K_n := F \cap \overline{B}_n,$$

qui est croissante et qui remplit F :

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = F.$$

La suite d'ensembles mesurables $E\backslash K_n$ est alors décroissante :

$$K_n \subset K_{n+1} \implies E\big\backslash K_n \supset E\big\backslash K_{n+1} \qquad {\scriptstyle (n \geqslant 1)},$$

d'intersection complète :

$$\begin{aligned}\bigcap_{n=1}^{\infty}\big(E\backslash K_n\big) &= E\bigg\backslash\bigcup_{n=1}^{\infty}K_n\\ &= E\backslash F.\end{aligned}$$

Ensuite :

$$m(E\backslash F)\leqslant m(E)<\infty,$$

le Théorème 6.13 qui précède sur les suites décroissantes d'ensembles s'applique alors pour donner :

$$m(E\backslash F) = \lim_{n\to\infty} m\big(E\backslash K_n\big),$$

et donc il existe $N\gg 1$ assez grand pour que $n\geqslant N$ implique :

$$\begin{aligned}m\big(E\backslash K_n\big) &\leqslant m(E\backslash F)+\frac{\varepsilon}{2}\\ &\leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

Enfin, venons-en à la dernière propriété **(iv)**. Comme E est mesurable, pour tout $\varepsilon>0$ il existe un ouvert $\mathscr{O}\supset E$ tel que :

$$m\big(\mathscr{O}\backslash E\big)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

Le Théorème 3.2 représente alors cet ouvert comme réunion dénombrable d'une famille $\big\{Q_j\big\}_{j=1}^{\infty}$ de cubes fermés presque disjoints satisfaisant donc :

$$E\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}Q_j = \mathscr{O},$$

ainsi que :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty}\big|Q_j\big| &= m(\mathscr{O})\\ &= m(E)+m\big(\mathscr{O}\backslash E\big)\\ &\leqslant m(E)+\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Or comme par hypothèse $m(E)<\infty$, la série infinie positive à gauche doit converger, ce qui assure l'existence d'un entier $J=J_\varepsilon\gg 1$ assez grand pour que :

$$\sum_{j=J+1}^{\infty}\big|Q_j\big|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

Si maintenant nous introduisons le fermé :

$$F := \bigcup_{j=1}^{J}Q_j,$$

nous pouvons majorer :

$$\begin{aligned} m\big(E\,\Delta\,F\big) &= m\big(E\backslash F\big)+m\big(F\backslash E\big) \\ &\leqslant m\big(\mathscr{O}\backslash F\big)+m\big(F\backslash E\big) \\ &= m\bigg(\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \Big\backslash \bigcup_{j=1}^{J} Q_j\bigg)+m\bigg(\bigcup_{j=1}^{J} Q_j \Big\backslash E\bigg) \\ &\leqslant m\bigg(\bigcup_{j=J+1}^{\infty} Q_j\bigg)+m\bigg(\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \Big\backslash E\bigg) \\ &\leqslant \sum_{j=J+1}^{\infty} \big|Q_j\big| + \sum_{j=1}^{\infty} \big|Q_j\big| - m(E) \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

ce qui achève cette quatrième démonstration. □

En résumé, les ensembles mesurables $E \subset \mathbb{R}^d$ sont par définition ceux que l'on peut approximer de l'extérieur par des ouverts $\mathscr{O} \supset E$ de telle sorte que la mesure extérieure de la couronne d'erreur soit arbitrairement petite (Définition 6.1) :

$$m^*\big(\mathscr{O}\backslash E\big) \leqslant \varepsilon,$$

et pour cette raison, la théorie révèle que les ensembles mesurables quelconques sont arbitrairement proches des ensembles ouverts.

7. **Propriétés d'invariance de la mesure de Lebesgue**

Une propriété cruciale de la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^d$ est son invariance par translations quelconques.

Théorème 7.1. *Si $E \subset \mathbb{R}^d$ est un sous-ensemble mesurable, et si $h \in \mathbb{R}^d$ est un vecteur de translation, alors l'ensemble translaté :*

$$E+h := \big\{x+h\colon\ x \in E\big\}$$

est lui aussi mesurable, de même mesure :

$$m\big(E+h\big)=m(E).$$

Démonstration. En partant de l'observation que cette invariance de la mesure par translation est trivialement satisfaite pour tout cube ouvert ou fermé $Q \subset \mathbb{R}^d$, on applique le principe intuitif général que nous venons d'énoncer à la fin de la section précèdente, à savoir plus rigoureusement, on se convainc mentalement que lorsqu'on passe à la mesure extérieure $m^*(\cdot)$, l'invariance par translation est conservée :

$$m^*(E+h)=m^*(E),$$

et ensuite, on vérifie scrupuleusement comme suit que $E+h$ est effectivement mesurable. Partant de $\mathscr{O} \supset E$ ouvert tel que :

$$m^*\big(\mathscr{O}\backslash E\big) \leqslant \varepsilon,$$

le translaté $\mathscr{O} + h$ est encore un ouvert contenant $E + h$ (exercice mental), et l'on a :

$$\begin{aligned} m^*\big((\mathscr{O} + h)\backslash(E + h)\big) \;&=\; m^*\big(\mathscr{O}\backslash E\big) \\ &\leqslant\; \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui montre la mesurabilité de $E + h$, et comme $m = m^*$ sur les ensembles mesurables, on a bien $m(E + h) = m(E)$. □

De la même manière, on peut établir l'invariance par dilatation de la mesure de Lebesgue (voir certains exercices à la fin de ce chapitre).

Théorème 7.2. *Si $E \subset \mathbb{R}^d$ est un ensemble mesurable quelconque, alors pour $\delta > 0$ quelconque, l'ensemble δ-dilaté :*

$$\delta\, E := \big\{\big(\delta\, x_1, \dots, \delta\, x_d\big) \in \mathbb{R}^d \colon\; (x_1, \dots, x_d) \;\in\; E\big\}$$

est mesurable, de mesure égale à :

$$m\big(\delta\, E\big) \;=\; \delta^d\, m(E).$$ □

De plus, la mesure de Lebesgue est invariante par réflexions, à savoir si :

$$-\,E := \big\{-\; x \in \mathbb{R}^d \colon\; x \in E\big\},$$

alors :

$$m\big(-\; E\big) = m(E).$$

8. σ-algèbres et ensembles boréliens

Définition 8.1. Une *σ-algèbre dans* $\mathbb{R}^d$ est une collection de sous-ensembles de $\mathbb{R}^d$ qui est stable par réunions dénombrables, par intersections dénombrables, et par passages au complémentaire.

Évidemment, la σ-algèbre qui consiste en *tous* les sous-ensembles de $\mathbb{R}^d$ a peu d'intérêt. Mais ce qui vient d'être démontré dans les sections précédentes a fait voir la :

Proposition 8.2. *La collection de tous les sous-ensembles mesurables $E \subset \mathbb{R}^d$ forme une σ-algèbre.* □

Une autre σ-algèbre joue un rôle vital en Analyse, et particulièrement, en *Théorie des Probabilités*.

Définition 8.3. La σ-algèbre des *ensembles boréliens* dans $\mathbb{R}^d$, noté :

$$\mathscr{B}_{\mathbb{R}^d},$$

est la plus petite σ-algèbre qui contient tous les ensembles ouverts. Les éléments de cette σ-algèbre sont appelés les *boréliens*.

Démonstration. Le bien-fondé de cette définition ne sera établi que lorsqu'on aura donné un sens à l'expression « *la plus petite σ-algèbre contenant les ouverts* », et fait voir aussi qu'un tel objet est unique.

En effet, « *la plus petite* » signifie que si $\mathscr{S}$ est une σ-algèbre quelconque qui contient tous les ouverts de $\mathbb{R}^d$, alors nécessairement :

$$\mathscr{S} \supset \mathscr{B}_{\mathbb{R}^d}.$$

Mais puisqu'on se convainc aisément (exercice) qu'une intersection *quelconque* — pas nécessairement dénombrable — de σ-algèbres reste encore une σ-algèbre, on peut simplement définir $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^d}$ comme l'intersection de *toutes* les σ-algèbres qui contiennent les ouverts. Ceci montre l'existence, et aussi l'unicité, de la σ-algèbre des boréliens. □

Ensuite, puisque les ouverts sont mesurables, on voit que la σ-algèbre des boréliens est contenue dans la σ-algèbre des ensembles mesurables :

$$\boxed{\text{ensembles boréliens} \;\subset\; \text{ensembles mesurables.}}$$

Question : *Cette inclusion est-elle une égalité ?*

Réponse : *Non !* Comme le montre l'Exercice 23, il existe en effet des ensembles Lebesgue-mesurables qui ne sont pas boréliens.

En fait, du point de vue de Borel, les ensembles mesurables au sens de Lebesgue apparaissent comme *complétion* de la σ-algèbre des boréliens, à savoir, en adjoignant tous les sous-ensembles des ensembles boréliens qui sont de mesure 0, comme nous allons le voir dans un instant.

En partant des ensembles ouverts ou fermés, qui sont les ensembles boréliens les plus simples, on pourrait essayer de lister tous les ensembles boréliens en ordre de complexité croissante. Juste après les ouverts et les fermés, viendraient les deux familles d'ensembles suivants.

Définition 8.4. Les intersections dénombrables d'ensembles ouverts de $\mathbb{R}^d$ sont appelés des *G_δ-ensembles.*

Cette dénomination « G_δ » provient des termes allemands « GEBIETE » (domaine), et « DURSCHNITT » (intersection). Aux complémentaires des G_δ-ensembles, on donne habituellement un nom tout aussi ésotérique.

Définition 8.5. Les réunions dénombrables d'ensembles fermés de $\mathbb{R}^d$ sont appelés des *F_σ-ensembles.*

Ici, la dénomination « F_σ » provient du français « fermé », et la lettre σ en réfère au symbole grec Σ de sommation mathématique.

Évidemment, nous savons que les G_δ-ensembles et les F_σ-ensembles sont tous mesurables. Le fait est qu'à des ensembles de mesure nulle près, ce sont là tous les ensembles mesurables possibles, puisqu'on a le :

Théorème 8.6. *Si $E \subset \mathbb{R}^d$ est un sous-ensemble quelconque, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *E est mesurable ;*

(ii) *E est la différence :*

$$E = G \backslash N$$

entre un G_δ-ensemble $G \subset \mathbb{R}^d$ et un sous-ensemble $N \subset G_\delta$ de mesure nulle ;

(iii) *E est la réunion disjointe :*

$$E = F \cup N$$

d'un F_σ-ensemble $F \subset \mathbb{R}^d$ et d'un sous-ensemble $N \subset \mathbb{R}^d$ de mesure nulle.

Démonstration. Clairement, un ensemble qui satisfait **(ii)** ou **(iii)** est mesurable avec :

$$m(E) = m(G) + 0 \qquad \text{et} \qquad m(E) = m(F) + 0.$$

Réciproquement, établissons **(i)** $\Longrightarrow$ **(ii)**. Si E est mesurable, pour tout entier $n \geqslant 1$, on peut trouver un ouvert $\mathscr{O}_n \supset E$ tel que :

$$m\big(\mathscr{O}_n \backslash E\big) \leqslant \frac{1}{n}.$$

Alors l'intersection complète :

$$G := \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{O}_n$$

est un G_δ-ensemble qui contient E. De plus, on a pour tout $n \geqslant 1$:

$$G \backslash E \subset \mathscr{O}_n \backslash E,$$

d'où :

$$\begin{aligned} m^*\big(G \backslash E\big) &\leqslant m^*\big(\mathscr{O}_n \backslash E\big) \\ &= m\big(\mathscr{O}_n \backslash E\big) \\ &\leqslant \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

et en faisant tendre $n \longrightarrow \infty$, on voit que l'ensemble :

$$N := G \backslash E$$

est de mesure extérieure nulle, donc mesurable par définition, de mesure nulle d'ailleurs !

Pour la dernière implication **(i)** $\Longrightarrow$ **(iii)**, il suffit d'appliquer le Théorème 6.14 **(ii)** avec $\varepsilon := \frac{1}{n}$, et de prendre la réunion des ensembles fermés associés. □

9. Construction d'un ensemble *non* mesurable

Comme nous l'avons déjà amplement signalé au début de ce chapitre, aucune théorie de la mesure ne peut espérer que tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}^d$ soient mesurables. Dans cette section, nous donnons un exemple très classique et très élémentaire de sous-ensemble de $\mathbb{R}$ (avec $d = 1$) qui n'est *pas* mesurable. Sa construction, due à Vitali en 1905, repose sur l'Axiome du choix, déjà énoncé p. 137. Sans difficulté, on peut en déduire un exemple d'ensemble non mesurable dans $\mathbb{R}^d$ avec $d \geqslant 1$ quelconque.

Sur l'intervalle unité $[0, 1]$, soit la relation binaire :

$$x \sim y \quad \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} \quad x - y \in \mathbb{Q}.$$

On vérifie aisément (exercice) que cette relation binaire satisfait bien les trois propriétés requises :

- $x \sim x$ pour tout $x \in [0, 1]$;
- $x \sim y$ si et seulement si $y \sim x$;
- si $x \sim y$ et si $y \sim z$ alors $x \sim z$;

pour être une relation d'équivalence. Ainsi, y est équivalent à x s'il en diffère d'un nombre rationnel. D'après la théorie générale, deux classes d'équivalences ou bien coïncident, ou bien sont disjointes, et de plus, $[0,1]$ est la réunion disjointe de toutes les classes d'équivalences $\mathscr{C}_\alpha$, ce que nous écrirons :

$$[0,1] \,=\, \bigcup_{\alpha\in A} \mathscr{C}_\alpha,$$

les indices α parcourant un certain ensemble A.

Grâce à l'Axiome du choix, que nous admettons ici, on peut alors sélectionner pour tout $\alpha \in A$ un unique élément :

$$x_\alpha \,\in\, \mathscr{C}_\alpha.$$

Théorème 9.1. [Vitali 1905] *Le sous-ensemble de* $[0,1]$ *:*

$$\mathscr{N} := \bigcup_{\alpha\in A} \{x_\alpha\}$$

n'est alors pas *Lebesgue-mesurable.*

Démonstration. Raisonnons par contradiction et supposons au contraire que $\mathscr{N}$ soit mesurable. Comme l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est dénombrable, il existe une énumération :

$$\big\{r_k\big\}_{k=1}^{\infty}$$

de son sous-ensemble :

$$\mathbb{Q}\cap[-1,\,1].$$

Introduisons alors tous les translatés :

$$\mathscr{N}_k := \mathscr{N} + r_k \qquad\qquad {\scriptstyle (k\,\geqslant\,1)},$$

qui sont tous contenus dans $[-1,2] = [0,1] + [-1,1]$.

Assertion 9.2. *Ces ensembles* $\mathscr{N}_k$ *sont disjoints deux à deux :*

$$\mathscr{N}_{k_1} \cap \mathscr{N}_{k_2} = \emptyset \qquad\qquad {\scriptstyle (1\,\leqslant\,k_1\,<\,k_2\,\leqslant\,\infty)},$$

et leur réunion complète satisfait :

$$[0,1] \,\subset\, \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathscr{N}_k \,\subset\, [-1,\,2].$$

Démonstration. Pour voir que ces ensembles sont disjoints, montrons donc que deux d'entre eux avec $k_1 < k_2$ sont toujours d'intersection vide :

$$\mathscr{N}_{k_1} \cap \mathscr{N}_{k_2} = \emptyset.$$

En effet, si au contraire il existait un nombre réel appartenant à cette intersection, ceci voudrait dire qu'il existe deux nombres rationnels r_{k_1} et r_{k_2} dans $[-1,1]$ ainsi que deux nombres x_{α_1} et x_{α_2} dans $\mathscr{N}$ tels que :

$$x_{\alpha_1} + r_{k_1} = x_{\alpha_2} + r_{k_2},$$

ce qui, après soustraction immédiate, équivaudrait à :

$$x_{\alpha_1} - x_{\alpha_2} = r_{k_2} - r_{k_1}.$$

Or le membre de droite serait alors un nombre rationnel *non nul*, puisque $k_1 < k_2$ et puisque l'énumération $k \longmapsto r_k$ est injective, et donc on en déduirait que :

$$x_{\alpha_1} - x_{\alpha_2} \,\in\, \mathbb{Q}\backslash\{0\},$$

ce qui voudrait dire qu'on a trouvé deux éléments *distincts* dans $\mathscr{N}$ et néanmoins équivalents :

$$x_{\alpha_1} \sim x_{\alpha_2},$$

ce qui contredirait de manière flagrante le fait que $\mathscr{N}$ contient exactement *un* représentant de chaque classe d'équivalence.

Ensuite concernant la première inclusion, si $x \in [0,1]$ est quelconque, puisque les classes d'équivalence $\bigcup_{\alpha \in A} \mathscr{C}_\alpha = [0,1]$ remplissent l'intervalle, on a $x \in \mathscr{C}_\alpha$ pour un certain $\alpha \in A$, à savoir $x \sim x_\alpha$, et donc :

$$\underbrace{x - x_\alpha}_{\substack{\in [-1,1] \\ = [0,1]-[0,1]}} = r_k,$$

pour un unique rationnel $r_k \in [-1,1]$, ce qui veut précisément dire que $x \in \mathscr{N}_k$. □

Nous pouvons maintenant achever la démonstration du théorème de Vitali. Si $\mathscr{N}$ était Lebesgue-mesurable, la mesure de Lebesgue étant invariante par translations (Théorème 7.1), chaque translaté :

$$\mathscr{N}_k = \mathscr{N} + r_k$$

serait aussi Lebesgue-mesurable, de même mesure :

$$m\big(\mathscr{N}_k\big) = m\big(\mathscr{N}\big).$$

Grâce au Théorème 6.5 de préservation de la mesurabilité par réunions dénombrables, l'ensemble :

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathscr{N}_k$$

serait alors lui aussi mesurable. Mais nous venons de démontrer qu'il est encadré par :

$$[0,1] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathscr{N}_k \subset [-1,\, 2],$$

et donc, par monotonie de la mesure, et aussi par le Théorème 6.11 d'additivité disjointe dénombrable :

$$1 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m\big(\mathscr{N}_k\big) \leqslant 3,$$

à savoir puisque tous les translatés $\mathscr{N}_k$ posséderaient la même mesure :

$$1 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m\big(\mathscr{N}\big) \leqslant 3.$$

My sexy Daisy, is there any absurd here ? Oh yes, poor Donald Duck ! This is the desired contradiction, since neither $m(\mathscr{N}) = 0$ *nor* $m(\mathscr{N}) > 0$ *is possible.* □

10. **Fonctions étagées et fonctions mesurables**

Grâce à la notion d'ensemble mesurable, nous pouvons maintenant étudier les objets qui sont au cœur de la théorie de l'intégration, à savoir les *fonctions mesurables*. Le point de départ est le suivant.

Définition 10.1. La *fonction indicatrice* d'un sous-ensemble (quelconque) $E \subset \mathbb{R}^d$ est la fonction $\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\mathbf{1}_E(x) := \begin{cases} 1 & \text{lorsque } x \in E, \\ 0 & \text{lorsque } x \in \mathbb{R}^d \backslash E. \end{cases}$$

Ensuite, on passe aux fonctions qui sont les briques élémentaires de la théorie de l'intégration de Riemann. Rappelons qu'un *rectangle général* $R \subset \mathbb{R}^d$ est un produit de d intervalles de $\mathbb{R}$ qui sont de l'une des quatre formes possibles :

$$[a_j, b_j], \qquad [a_j, b_j[, \qquad]a_j, b_j], \qquad]a_j, b_j[,$$

avec $-\infty < a_j \leqslant b_j \leqslant \infty$ pour $j = 1, \dots, d$.

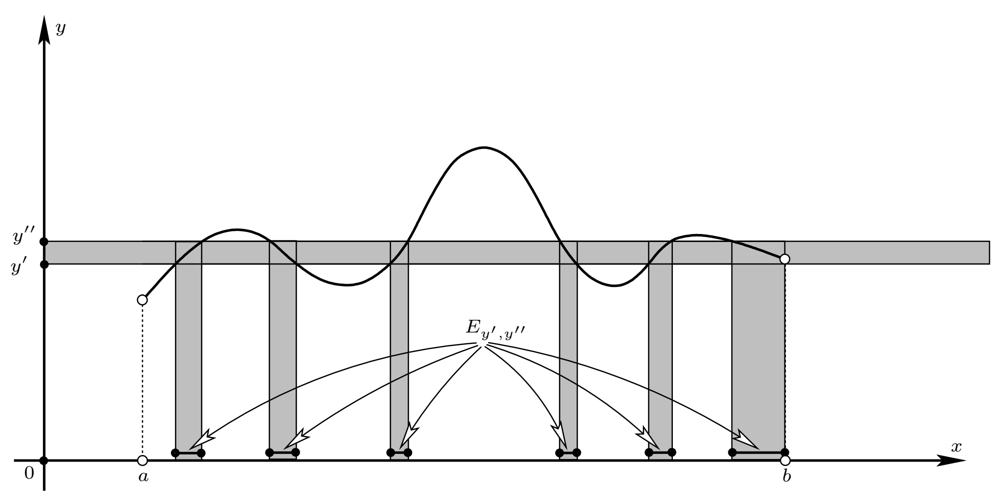
Définition 10.2. Une *fonction en escalier* est une combinaison linéaire finie :

$$f = \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot \mathbf{1}_{R_k},$$

à coefficients réels $a_k \in \mathbb{R}$, de fonctions indicatrices $\mathbf{1}_{R_k}$ de rectangles généraux (ouverts ou fermés) $R_k \subset \mathbb{R}^d$.

(La plupart du temps, en fait, on considère des rectangles fermés.)

Cependant, comme nous l'avons soigneusement fait observer par anticipation dans un des chapitres qui précèdent, la Théorie de l'intégration au sens de Lebesgue nécessite des ensembles qui sont plus généraux que les rectangles, ensembles qui apparaissent lorqu'on découpe en tranches fines horizontales l'hypographe d'une fonction $f \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ à intégrer.



Or c'est justement toute la belle et riche théorie de la mesure que nous venons d'achever qui offre le concept tant espéré pour parler des ensembles du type que nous avions noté $E_{y',y''}$.

Ainsi le concept adéquat, nettement plus général que celui de fonction en escalier, est-il le suivant.

Définition 10.3. Une *fonction étagée* est une combinaison linéaire finie :

$$f = \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot \mathbf{1}_{E_k},$$

à coefficients réels $a_k \in \mathbb{R}$, de fonctions indicatrices $\mathbf{1}_{E_k}$ d'ensembles Lebesgue-mesurables quelconques $E_k \subset \mathbb{R}^d$ de mesures :

$$m\big(E_k\big) \,<\, \infty$$

finies.

Ici, donc, l'*ascension en généralité* tient au fait que contrairement à de trop simples rectangles R_k, de tels ensembles mesurables E_k peuvent fort bien posséder une structure particulièrement complexe. Ces fonctions étagées vont alors jouer le rôle de fonctions-modèles dans l'univers général des fonctions mesurables que nous allons maintenant présenter et étudier.

Commençons en effet par étudier les fonctions :

$$f\colon \quad \mathbb{R}^d \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

que nous autorisons à prendre les deux valeurs $-\infty$ et $+\infty$. Autrement dit, en tout point $x \in \mathbb{R}^d$, la fonction f prend ses valeurs dans l'ensemble *étendu* des nombres réels :

$$-\infty \,\leqslant\, f(x) \,\leqslant\, +\infty.$$

Lorsque f est une fonction réelle au sens classique, nous la noterons comme d'habitude :

$$f\colon \quad \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}.$$

En fait, dans la théorie qui va suivre, et dans ses nombreuses applications, nous aurons affaire à des fonctions qui ne prennent la valeur $-\infty$ et la valeur $+\infty$ que sur des ensembles de mesure nulle, et de tels ensembles seront systématiquement considérés comme négligeables.

Plus généralement, nous allons étudier des fonctions définies sur un sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ a priori quelconque :

$$\begin{aligned} f\colon &\quad E \longrightarrow \mathbb{R}, \\ f\colon &\quad E \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}. \end{aligned}$$

Voici alors maintenant un concept très important, plus général encore que celui de fonction étagée.

Définition 10.4. Une fonction f définie sur un ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}$ est dite *mesurable* si, pour tout $a \in \mathbb{R}$, son ensemble de sous-niveau :

$$f^{-1}\big([-\infty,\, a[\big) \;=\; \big\{x \in E\colon\; f(x) < a\big\},$$

est un sous-ensemble *mesurable* de $\mathbb{R}^d$.

Pour abréger, nous noterons souvent ces ensembles :

$$\big\{f < a\big\},$$

tout du moins lorsqu'aucune confusion possible ne sera à craindre. Observons alors que l'ensemble :

$$\big\{f = -\infty\big\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f < -n\}$$

est mesurable, comme intersection dénombrable d'ensembles mesurables.

En fait, plusieurs options équivalentes existent pour définir ce concept de fonction mesurable, en changeant par exemple l'inégalité stricte en une inégalité faible.

Lemme 10.5. *Une fonction $f\colon E \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ est mesurable au sens de la définition qui précède si et seulement si, pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble :*

$$\big\{x \in E\colon\ f(x) \leqslant a\big\} = \big\{f \leqslant a\big\}$$

est mesurable.

Démonstration. Dans une direction, nous écrivons :

$$\big\{f \leqslant a\big\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \big\{f < a + \tfrac{1}{n}\big\},$$

et nous nous souvenons qu'une intersection dénombrable d'ensembles mesurables reste mesurable.

Dans l'autre direction, nous écrivons :

$$\big\{f < a\big\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \big\{f \leqslant a - \tfrac{1}{n}\big\},$$

et nous nous souvenons qu'une réunion dénombrable d'ensembles mesurables reste mesurable. □

Sans vergogne, on peut aussi changer le sens des inégalités.

Lemme 10.6. *Une fonction $f\colon E \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ est mesurable si et seulement si, pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble de sur-niveau :*

$$\big\{x \in E\colon\ f(x) \geqslant a\big\} = \big\{f \geqslant a\big\}$$

est mesurable, si et seulement si (aussi !), pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble :

$$\big\{x \in E\colon\ f(x) > a\big\} = \big\{f > a\big\}$$

est mesurable.

En particulier, on en déduit que :

$$f^{-1}(+\infty) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \big\{f > n\big\}$$

est mesurable.

Démonstration. Pour la première affirmation, notons que :

$$\{f \geqslant a\} = \Big(\{f < a\}\Big)^c,$$

et souvenons-nous que la mesurabilité est préservée lors de tout passage au complémentaire. Pour la seconde affirmation, sachant que nous venons de démontrer la mesurabilité des ensembles de sous-niveau $\{f \leqslant a\}$, leurs complémentaires $\{f > a\}$ sont eux aussi mesurables. □

Corollaire 10.7. *Si $f \colon E \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ est une fonction mesurable, $\{f = a\}$ est mesurable pour tout $a \in \mathbb{R}$.* □

Corollaire 10.8. *Une fonction f est mesurable si et seulement si son opposée $-f$ est mesurable.* □

En appliquant le même type de raisonnements, le lecteur se convaincra aisément de la véracité de l'énoncé suivant.

Lemme 10.9. *Une fonction $f \colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ à valeurs finies est mesurable si et seulement si, pour tout couple de nombres réels finis :*

$$-\infty < a < b < +\infty,$$

les ensembles-tranches :

$$\big\{a < f < b\big\}$$

sont mesurables. Plus généralement, il en va de même en remplaçant $\{a < f < b\}$ par l'un des trois ensembles :

$$\big\{a \leqslant f < b\big\}, \qquad \big\{a < f \leqslant b\big\}, \qquad \big\{a \leqslant f \leqslant b\big\}.$$ □

En fait, il est davantage utile de connaître l'énoncé qui caractérise le plus généralement possible la mesurabilité.

Proposition 10.10. *Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$.*

(i) *Lorsque $f \colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ est à valeurs finies, f est mesurable si et seulement si, pour tout ouvert $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}$, l'image réciproque $f^{-1}(\mathscr{O})$ est mesurable.*

(ii) *Lorsque $f \colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ est à valeurs finies, f est mesurable si et seulement si, pour tout fermé $F \subset \mathbb{R}$, l'image réciproque $f^{-1}(F)$ est mesurable.*

(iii) *Lorsque $f \colon E \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est à valeurs dans l'ensemble étendu des nombres réels, f est mesurable si et seulement si l'une des deux conditions* **(ii)** *ou* **(iii)** *est satisfaite, et si, de plus :*

$$f^{-1}(-\infty) \qquad \textit{et} \qquad f^{-1}(+\infty)$$

sont deux ensembles mesurables.

Démonstration. Utiliser (exercice) le fait qu'un sous-ensemble ouvert quelconque $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}$ peut être écrit comme réunion dénombrable de segments ouverts. □

Lemme 10.11. *Si $f \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors elle est mesurable.*

Démonstration. En effet, l'image inverse de tout ouvert par une fonction continue est par définition même de la continuité un ouvert, donc la proposition qui précède s'applique. □

Un commentaire intuitif s'impose ici : les deux notions de continuité et de mesurabilité concernent donc les images réciproques d'ouverts et d'ensembles mesurables.

Lemme 10.12. *Si $f \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction mesurable, et si $\Phi \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors la composée $\Phi \circ f$ est mesurable.*

Démonstration. En effet, Φ étant continue, pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'image inverse :

$$\Phi^{-1}\big(]-\infty,\, a[\big)$$

est un ouvert $\mathscr{O}_a$, et donc ensuite :

$$\big(\Phi \circ f\big)^{-1}\big(]-\infty,\, a[\big) \;=\; f^{-1}\big(\mathscr{O}_a\big)$$

est bien mesurable. □

Attention ! Il est faux en général que la composée dans l'autre sens $f \circ \Phi$ d'une fonction mesurable f avec une fonction continue Φ reste mesurable, l'Exercice 22 propose une recette cantor-éique épicée pour étudiant-cuisinier désireux de produire un contre-exemple.

La propriété la plus remarquable dont jouissent les fonctions mesurables, c'est que leur mesurabilité reste satisfaite après toutes les espèces possibles de passage à la limite. Voici une première illustration de ce principe.

Théorème 10.13. *Si $\big(f_n\big)_{n=1}^{\infty}$ est une suite quelconque de fonctions mesurables définies sur un ensemble mesurable fixe $E \subset \mathbb{R}^d$, alors les quatre fonctions :*

$$\begin{aligned}
x &\longmapsto \sup_{n \geqslant 1} f_n(x),\\
x &\longmapsto \inf_{n \geqslant 1} f_n(x),\\
x &\longmapsto \limsup_{n \to \infty} f_n(x),\\
x &\longmapsto \liminf_{n \to \infty} f_n(x),
\end{aligned}$$

sont elles aussi mesurables.

Démonstration. Faire voir que la fonction $\sup_n f_n$ est mesurable revient à constater (exercice mental) que ses ensembles de sous-niveau pour $a \in \mathbb{R}$ quelconque peuvent s'écrire :

$$\Big\{\sup_{n \geqslant 1} f_n \,<\, a\Big\} \;=\; \bigcap_{n=1}^{\infty} \big\{f_n < a\big\},$$

sous la forme d'une intersection dénombrable d'ensembles mesurables.

Pour la fonction $\inf_n f_n$, on écrit de manière similaire :

$$\Big\{\inf_{n \geqslant 1} f_n \,<\, a\Big\} \;=\; \bigcup_{n=1}^{\infty} \big\{f_n < a\big\}.$$

Ensuite, de ces deux premiers résultats on déduit les deux affirmations suivantes concernant la limite supérieure et la limite inférieure, car d'après l'Exercice 8, on a :

$$\begin{aligned}
\limsup_{n \to \infty} f_n(x) \;&=\; \inf_{k \geqslant 1}\Big(\sup_{n \geqslant k} f_n(x)\Big),\\
\liminf_{n \to \infty} f_n(x) \;&=\; \sup_{k \geqslant 1}\Big(\inf_{n \geqslant k} f_n(x)\Big),
\end{aligned}$$

ce qui conclut. □

Chose encore plus spectaculaire, le théorème qui suit montre que la mesurabilité est préservée par limites ponctuelles simples ! Nous verrons que ce fait magique va considérablement simplifier les interversions entre limite et intégration :

$$\int \lim_{n\to\infty} \,=\, \lim_{n\to\infty} \int,$$

et que nous n'aurons plus à nous soucier de convergence uniforme comme cela était nécessaire en Théorie de l'intégration riemannienne.

Théorème 10.14. *Si $\big(f_n\big)_{n=1}^{\infty}$ est une suite quelconque de fonctions mesurables définies sur un ensemble mesurable fixe $E \subset \mathbb{R}^d$ telle qu'en tout point $x \in E$, la limite :*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \,=:\, f(x)$$

existe, alors la fonction-limite simple f ainsi définie est elle aussi mesurable.

Démonstration. En effet, lorsque la limite existe, elle est égale à la fois à la limite inférieure et à la limite supérieure :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \,=\, \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \,=\, \limsup_{n\to\infty} f_n(x),$$

et nous venons de voir que ces deux dernières fonctions sont mesurables. □

Proposition 10.15. *Si f et g sont deux fonctions mesurables définies sur un ensemble mesurable fixe $E \subset \mathbb{R}^d$, alors :*

(i) *pour tout entier $k \geqslant 1$, la fonction f^k est mesurable ;*

(ii) *$f+g$ et $f\,g$ sont mesurables lorsque f et g sont à valeurs finies.*

Démonstration. Utilisons la définition de la mesurabilité en termes d'ensembles de surniveau, ce qui est justifié par le Lemme 10.6.

Concernant **(i)**, il suffit de noter que pour k impair :

$$\big\{f > a\big\} = \big\{f > a^{1/k}\big\},$$

tandis que pour k pair et pour $a \geqslant 0$:

$$\big\{f^k > a\big\} \,=\, \big\{f > a^{1/k}\big\} \cup \big\{f < -\,a^{1/k}\big\}.$$

Concernant **(ii)**, la mesurabilité de $f+g$ provient de l'écriture adaptée (exercice mental) :

$$\big\{f+g > a\big\} \,=\, \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \big\{f > a-r\big\} \cap \big\{g > r\big\},$$

tandis que la mesurabilité de $f\,g$ provient, en tenant compte de ce qui a déjà été acquis, de l'identité babylonienne :

$$f\,g \,=\, \frac{1}{4}\,\big[(f+g)^2 - (f-g)^2\big],$$

ce qui conclut. □

Définition 10.16. Deux fonctions réelles f et g définies sur un ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ sont dites *égales presque partout*, ce qu'on exprime aussi comme :

$$f(x) = g(x), \qquad\qquad \text{« pour presque tout } x \text{ »},$$

si l'ensemble :

$$\big\{x \in E\colon\; f(x) \neq g(x)\big\}$$

est de mesure nulle.

On dira aussi couramment :

$$f = g \qquad\qquad \textit{presque partout},$$

ce qu'on abrégera par :

$$f = g \qquad\qquad \textit{p.p.}$$

Plus généralement, une propriété, ou un énoncé, seront dits être satisfaits presque partout (*p.p.*) lorsqu'ils le sont hors d'un ensemble de mesure nulle.

Lemme 10.17. *Si une première fonction f est mesurable, et si une deuxième fonction g lui est égale presque partout, alors g est aussi mesurable.*

Démonstration. En effet, les deux ensembles de sous-niveau :

$$\big\{f < a\big\} \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \big\{g < a\big\}$$

diffèrent seulement d'un ensemble de mesure nulle, donc l'un est mesurable si et seulement si l'autre l'est. □

En fait, toutes les propriétés vues jusqu'à présent peuvent être transformées en propriétés qui sont satisfaites presque partout. Par exemple, si $\big(f_n\big)_{n=1}^{\infty}$ est une collection de fonctions mesurables qui ne converge simplement *que* pour presque tout x :

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \qquad\qquad \textit{p.p.},$$

alors la fonction-limite f est mesurable, même si ses valeurs font défaut sur un certain ensemble de mesure nulle.

Ensuite, si deux fonctions f et g sont définies presque partout sur un ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$, alors $f+g$ et $f\,g$ n'ont de valeurs définies que sur l'intersection des deux domaines de f et de g. Mais puisque la réunion de deux ensembles de mesure nulle est encore de mesure nulle, c'est que $f+g$ et $f\,g$ sont à nouveau définies presque partout.

Résumons cette discussion comme suit.

Proposition 10.18. *Si une fonction f définie presque partout est mesurable, et si une autre fonction g définie presque partout est égale à f presque partout, alors g est mesurable.* □

11. Approximation des fonctions mesurables par des fonctions étagées

Les théorèmes que nous allons démontrer dans cette section sont tous d'une même nature, et ils vont renforcer nos premières intuitions concernant la structure des fonctions mesurables. Commençons par approximer des fonctions mesurables positives par des fonctions étagées.

Théorème 11.1. *Soit $f\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable à valeurs finies positives. Alors il existe une suite :*

$$\big(\varphi_k\big)_{k=1}^{\infty}$$

de fonctions étagées positives qui est croissante :

$$0 \leqslant \varphi_k(x) \leqslant \varphi_{k+1}(x),$$

et qui converge ponctuellement vers f :

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x) \qquad\qquad (\forall\, x \in \mathbb{R}^d).$$

Démonstration. La première chose à faire est de tronquer f pour la rendre bornée. Pour $N \geqslant 1$ (grand) entier, soit donc le cube fermé :

$$Q_N := [-N,\, N]^d.$$

Définissons alors la fonction doublement tronquée :

$$F_N(x) := \begin{cases} f(x) & \text{lorsque } x \in Q_N \text{ et } f(x) \leqslant N, \\ N & \text{lorsque } x \in Q_N \text{ et } f(x) > N, \\ 0 & \text{lorsque } x \in \mathbb{R}^d \backslash Q_N. \end{cases}$$

En effet, on écrase f sur 0 hors du grand cube, et simultanément, on décapite ses valeurs trop élevées.

Il est alors clair (exercice mental) que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$:

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} F_N(x).$$

Ensuite, partitionnons l'intervalle d'arrivée $[0, N]$ de F_N comme suit. Pour $N \geqslant 1$ fixé, pour un autre grand entier $M \geqslant 1$ fixé, et pour tout entier :

$$1 \leqslant \ell \leqslant NM,$$

introduisons l'ensemble de type tranche fine :

$$E_{\ell,M} := \left\{ x \in Q_N \colon\ \frac{\ell-1}{M} < F_N(x) \leqslant \frac{\ell}{M} \right\},$$

ainsi que l'ensemble de type base inférieure :

$$\begin{aligned} E_{0,N}^* &:= \big\{ x \in Q_N \colon\ F_N(x) = 0 \big\} \\ &= \big\{ x \in Q_N \colon\ f(x) = 0 \big\}. \end{aligned}$$

Puisque l'on a la réunion disjointe suivante d'intervalles dans l'espace d'arrivée $\mathbb{R}_+$:

$$\{0\} \cup \left]0, \tfrac{1}{M}\right] \cup \left]\tfrac{1}{M}, \tfrac{2}{M}\right] \cup \cdots \cup \left]\tfrac{NM-1}{M}, \tfrac{NM}{M}\right] = \big[0,\, N\big],$$

faisons observer en passant (exercice de lecture) que l'on a la réunion *disjointe :*

$$E_{0,N}^* \cup \bigcup_{\ell=1}^{NM} E_{\ell,M} = Q_N.$$

Alors nous pouvons former la famille de fonctions étagées auxiliaires :

$$F_{N,M}(x) := \underline{0 \cdot \mathbf{1}_{E_{0,N}^*}(x)} + \sum_{\ell=1}^{NM} \frac{\ell-1}{M} \cdot \mathbf{1}_{E_{\ell,M}}(x).$$

Ces fonctions $F_{N,M}$ sont bien des fonctions étagées !

Assertion 11.2. *En tout point $x \in \mathbb{R}^d$, on a :*

$$0 \leqslant F_N(x) - F_{N,M}(x) \leqslant \frac{1}{M}.$$

Démonstration. Lorsque $x \in \mathbb{R}^d \backslash Q_N$, les deux fonctions $F_N(x) = 0$ et $F_{N,M}(x) = 0$ s'annulent.

Lorsque $x \in Q_N$, ce point x appartient à un et un seul des ensembles $E_{0,N}^*$ et $E_{\ell,M}$. Lorsque $x \in E_{\ell_x,M}$ pour un certain entier $1 \leqslant \ell_x \leqslant NM$, on a par définition :

$$\frac{\ell_x - 1}{M} < F_N(x) \leqslant \frac{\ell_x}{M},$$

tandis que :

$$F_{N,M}(x) = \frac{\ell_x - 1}{M} \cdot 1,$$

puisque x n'appartient à aucun autre $E_{\ell',M}$. Dans ce cas, on a bien l'inégalité assertée :

$$0 \leqslant F_N(x) - F_{N,M}(x) \leqslant \frac{\ell_x}{M} - \frac{\ell_x - 1}{M} = \frac{1}{M}.$$

Enfin, lorsque $x \in E_{0,N}^*$, il est clair que $F_N(x) = 0 = F_{N,M}(x)$, et l'inégalité assertée est trivialement satisfaite. □

Choisissons maintenant :

$$N := 2^k \qquad \text{et} \qquad M := 2^k,$$

où $k \geqslant 1$ est un entier qui tendra vers l'infini, et introduisons la suite de fonctions qui remplira le rôle attendu :

$$\varphi_k := F_{2^k,2^k}.$$

Assertion 11.3. *Cette suite de fonctions est croissante :*

$$0 \leqslant \varphi_k(x) \leqslant \varphi_{k+1}(x).$$

Démonstration. Par définition, les fonctions :

$$\varphi_k(x) = \underline{0 \cdot \mathbf{1}_{E_{0,2^k}^*}(x)} + \sum_{\ell=1}^{2^{2k}} \frac{\ell - 1}{2^k} \cdot \mathbf{1}_{E_{\ell,2^k}}(x),$$

$$\varphi_{k+1}(x) = \underline{0 \cdot \mathbf{1}_{E_{0,2^{k+1}}^*}(x)} + \sum_{\ell'=1}^{2^{2k+2}} \frac{\ell' - 1}{2^{k+1}} \cdot \mathbf{1}_{E_{\ell',2^{k+1}}}(x),$$

sont manifestement positives.

Tout d'abord, lorsque $x \in \mathbb{R}^d \backslash Q_{2^{k+1}}$, on a bien :

$$\varphi_k = 0 \leqslant 0 = \varphi_{k+1}.$$

Mais aussi, lorsque $x \in Q_{2^{k+1}} \backslash Q_{2^k}$:

$$\varphi_k = 0 \leqslant \varphi_{k+1}.$$

Ensuite, lorsque $x \in Q_{2^k}$, techniquement, les choses se gâtent, mais nous somme courageux et volontaires. Trois cas s'invitent à notre table :

$$f(x) = 0, \qquad 0 < f(x) < 2^k, \qquad 2^k \leqslant f(x).$$

Premier cas : $f(x) = 0$, d'où $x \in E_{0,2^k}^*$, puis $x \in E_{0,2^{k+1}}^* \cap Q_{2^k}$, et par conséquent :

$$0 = F_{2^k}(x) = F_{2^k,2^k}(x) = \varphi_k(x) \leqslant \varphi_{k+1}(x) = F_{2^{k+1},2^{k+1}}(x) = F_{2^{k+1}}(x) = 0.$$

Deuxième cas : $0 < f(x) < 2^k$, d'où $x \in E_{\ell_x, 2^k}$ et $x \in E_{\ell'_x, 2^{k+1}}$ pour deux certains entiers :

$$1 \leqslant \ell_x < 2^{2k} \qquad \text{et} \qquad 1 \leqslant \ell'_x < 2^{2k+2},$$

avec par définition :

$$\frac{\ell_x - 1}{2^k} < F_{2^k}(x) = f(x) \leqslant \frac{\ell_x}{2^k} \qquad \text{et} \qquad \frac{\ell'_x - 1}{2^{k+1}} < F_{2^{k+1}}(x) = f(x) \leqslant \frac{\ell'_x}{2^{k+1}}.$$

Mais la famille des intervalles de longueur $\frac{1}{2^{k+1}}$ dans le réseau $\frac{1}{2^{k+1}}\mathbb{N}$ est emboîtée de longueur moitié dans le réseau $\frac{1}{2^k}\,\mathbb{N}$. Donc si la valeur $f(x)$ est comprise dans ces deux intervalles, exactement deux cas exclusifs l'un de l'autre peuvent se produire :

$$\frac{\ell'_x - 1}{2^{k+1}} = \frac{\ell_x - 1}{2^k} \qquad \text{ou bien} \qquad \frac{\ell'_x - 1}{2^{k+1}} = \frac{\ell_x - 1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}.$$

À ce moment-là, la croissance devient claire :

$$\varphi_k(x) = \frac{\ell_x - 1}{2^k} \leqslant \frac{\ell_x - 1}{2^k} + \left\{ \begin{array}{l} \text{ou bien } \ 0 \\ \text{ou bien } \ \dfrac{1}{2^{k+1}} \end{array} \right\} = \frac{\ell'_x - 1}{2^{k+1}} = \varphi_{k+1}(x).$$

Troisième cas : $f(x) \geqslant 2^k$, d'où $F_{2^k}(x) = 2^k$, puis $x \in E_{2^k, 2^k}$ et enfin :

$$\varphi_k(x) = F_{2^k, 2^k}(x) = \frac{2^{2k} - 1}{2^k} = 2^k - \frac{1}{2^k}.$$

Mais grâce à l'Assertion 11.2, on a l'inégalité utile :

$$0 \leqslant F_{2^{k+1}}(x) - F_{2^{k+1}, 2^{k+1}}(x) \leqslant \frac{1}{2^{k+1}},$$

et comme $F_{2^{k+1}}(x)$ vaut ou bien $f(x) \geqslant 2^k$ ou bien 2^{k+1} (lorsque $f(x) \geqslant 2^{k+1}$), on a toujours :

$$F_{2^{k+1}}(x) \geqslant 2^k,$$

et l'inégalité utile :

$$F_{2^{k+1}}(x) - \frac{1}{2^{k+1}} \leqslant F_{2^{k+1}, 2^{k+1}}(x)$$

devient :

$$\varphi_k(x) = 2^k - \frac{1}{2^k} \leqslant 2^k - \frac{1}{2^{k+1}} \leqslant F_{2^{k+1}}(x) - \frac{1}{2^{k+1}} \leqslant F_{2^{k+1}, 2^{k+1}}(x) = \varphi_{k+1}(x),$$

ce qu'il fallait faire voir. □

Pour terminer, puisque l'on a par construction :

$$0 \leqslant F_{2^k}(x) - \varphi_k(x) \leqslant \frac{1}{2^k},$$

et puisque $F_{2^k} \longrightarrow f(x)$, on a bien aussi $\varphi_k(x) \longrightarrow f(x)$ quand $k \to \infty$. □

On se convainc par la réflexion que le résultat précédent reste valable pour les fonctions :

$$f\colon \quad \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$

à valeurs dans l'ensemble étendu des nombres réels positifs. Pour aller encore plus loin, formulons un résultat général dans lequel nous éliminons l'hypothèse que f est positive, et dans lequel nous autorisons f à prendre aussi la valeur $-\infty$.

Théorème 11.4. *Soit une fonction mesurable à valeurs dans l'ensemble étendu des nombres réels :*

$$f\colon\quad \mathbb{R}^d \longrightarrow \{-\infty\}\cup\mathbb{R}\cup\{+\infty\}.$$

Alors il existe une suite $\big(\varphi_k\big)_{k=1}^{\infty}$ *de fonctions finies :*

$$\varphi_k\colon\quad \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$$

croissantes satisfaisant :

$$\big|\varphi_k(x)\big| \leqslant \big|\varphi_{k+1}(x)\big| \leqslant \big|f(x)\big| \qquad {\scriptstyle (k\geqslant 1;\ x\in\mathbb{R}^d)}$$

qui converge ponctuellement vers f en tout point :

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x) = f(x) \qquad {\scriptstyle (\forall\, x\in\mathbb{R}^d)}.$$

Démonstration. Utilisons les deux fonctions auxiliaires classiques :

$$\begin{aligned} f^+(x) &:= \max\big(0,\ f(x)\big),\\ f^-(x) &:= -\min\big(f(x),\ 0\big), \end{aligned}$$

en termes desquelles :

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x).$$

Puisque f^+ et f^- sont toutes deux à valeurs positives, le théorème qui précède fournit deux suites de fonctions finies croissantes :

$$\big(\varphi_k^+\big)_{k=1}^{\infty} \qquad \text{et} \qquad \big(\varphi_k^-\big)_{k=1}^{\infty}$$

qui convergent ponctuellement en tout point vers f^+ et vers f^-, respectivement. Alors si on introduit la suite de fonctions :

$$\varphi_k(x) := \varphi_k^+(x) - \varphi_k^-(x),$$

on voit que cette suite $\varphi_k(x)$ converge vers f en tout point.

Enfin, on se convainc aisément en utilisant les propriétés de φ_k^+ et de φ_k^- (exercice) que la suite :

$$\big(|\varphi_k|\big)_{k=1}^{\infty} = \big(\varphi_k^+ + \varphi_k^-\big)_{k=1}^{\infty}$$

est effectivement croissante. □

Ensuite, on peut aller encore au-delà des fonctions étagées :

$$\sum_{l=1}^{L} a_k\cdot \mathbf{1}_{E_l},$$

et approximer les fonctions mesurables par les fonctions encore plus simples que sont les fonctions en escalier. Toutefois, la convergence n'aura pas lieu en tout point.

Proposition 11.5. *Étant donné un sous-ensemble mesurable quelconque $E\subset\mathbb{R}^d$, la fonction étagée atomique et unitaire :*

$$\mathbf{1}_E$$

est approximable par des fonctions en escalier au sens suivant. Pour tout $\varepsilon>0$, il existe un sous-ensemble mesurable $F_\varepsilon\subset\mathbb{R}^d$ de mesure :

$$m\big(F_\varepsilon\big) \leqslant \varepsilon,$$

et il existe une fonction en escalier ψ_ε définie sur $\mathbb{R}^d$ telle que :

$$\psi_\varepsilon(x) \,=\, \mathbf{1}_E(x),$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^d \backslash F_\varepsilon$.

Démonstration. Grâce au Théorème 6.14 **(iv)**, il existe une réunion finie :

$$\bigcup_{j=1}^J Q_j$$

de cubes fermés presque disjoints $Q_j \subset \mathbb{R}^d$ telle que :

$$m\bigg(E\,\Delta\,\bigcup_{j=1}^J Q_j\bigg) \,\leqslant\, \frac{\varepsilon}{2}.$$

Choisissons ensuite, pour tous $j = 1, \dots, J$, des sous-cubes fermés :

$$Q_j' \,\subset\, \mathsf{Int}\, Q_j,$$

suffisamment gonflés pour que l'on ait encore :

$$m\bigg(\underbrace{E\,\Delta\,\bigcup_{j=1}^J Q_j'}_{=:\,F_\varepsilon}\bigg) \,\leqslant\, \varepsilon.$$

Nous affirmons alors que le fermé F_ε ainsi défini fait l'affaire en complicité avec la fonction en escalier :

$$\psi_\varepsilon(x) \,:=\, \sum_{j=1}^J \mathbf{1}_{Q_j'}(x).$$

En effet, pour vérifier qu'on a bien $\psi_\varepsilon(x) = \mathbf{1}_E(x)$ en tout point $x \in \mathbb{R}^d \backslash F_\varepsilon$, observons qu'étant donné deux sous-ensembles quelconques $A, B \subset \mathbb{R}^d$, on a toujours la réunion disjointe générale en quatre sous-ensembles :

$$\mathbb{R}^d \,=\, \Big[\mathbb{R}^d \backslash \big(A \cup B\big)\Big] \cup \Big[\big(A \backslash B\big)\Big] \cup \Big[\big(B \backslash A\big)\Big] \cup \Big[A \cap B\Big],$$

qui s'applique ici pour donner :

$$\mathbb{R}^d \,=\, \bigg(\mathbb{R}^d \Big\backslash\, E \cup \bigcup_{j=1}^J Q_j'\bigg) \cup \underbrace{\bigg(E \Big\backslash \bigcup_{j=1}^J Q_j'\bigg) \cup \bigg(\bigcup_{j=1}^J Q_j' \Big\backslash\, E\bigg)}_{\text{Ensemble } F_\varepsilon \text{ où } \psi_\varepsilon \text{ n'est pas non-contrôlée}} \cup \bigg(E \cap \bigcup_{j=1}^J Q_j'\bigg),$$

ce qui nous conduit à inspecter seulement les deux cas non soulignés.

Premier cas : $x \in \mathbb{R}^d \backslash \big(E \cup Q_1' \cup \cdots \cup Q_J'\big)$, d'où la coïncidence triviale :

$$\mathbf{1}_E(x) = 0 = \psi_\varepsilon(x).$$

Deuxième cas : $x \in E \cap \big(Q_1' \cup \cdots \cup Q_J'\big)$ d'où, puisque x ne peut appartenir qu'à un seul des Q_j', la coïncidence tout aussi triviale :

$$\mathbf{1}_E(x) = 1 = \psi_\varepsilon(x).$$

La démonstration est donc achevée. □

Théorème 11.6. *Sur $\mathbb{R}^d$, étant donné une fonction étagée φ quelconque :*

$$\varphi = \sum_{l=1}^{L} a_l \cdot \mathbf{1}_{E_l},$$

où les $E_l \subset \mathbb{R}^d$ sont des sous-ensembles mesurables, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble mesurable $F_\varepsilon \subset \mathbb{R}^d$ de mesure :

$$m\big(F_\varepsilon\big) \leqslant \varepsilon,$$

et il existe une fonction en escalier :

$$\psi_\varepsilon = \sum_{k=1}^{N} b_k \cdot \mathbf{1}_{R_k},$$

où les $R_k \subset \mathbb{R}^d$ sont des cubes fermés, tels que :

$$\psi_\varepsilon(x) = \varphi(x) \qquad \text{(pour } x \in \mathbb{R}^d \backslash F_\varepsilon\text{)}.$$

Démonstration. En effet, φ est une combinaison linéaire de fonctions étagées atomiques $\mathbf{1}_{E_l}$ auxquelles s'applique la proposition qui précède, et puisque la combinaison linéaire est *finie*, le résultat découle aisément (exercice) de manipulations standard de quantités-ε. □

Des deux Théorèmes 11.4 et 11.6 découle enfin le résultat majeur suivant, lequel exprime que les fonctions mesurables sont bien représentées par des fonctions en escalier — dont la complexité, il est vrai, peut éventuellement être très élevée.

Théorème 11.7. *Étant donné une fonction mesurable quelconque :*

$$f\colon \quad \mathbb{R}^d \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

il existe toujours une suite de fonctions en escalier (finies) :

$$\psi_k\colon \quad \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R},$$

qui convergent presque partout *vers f :*

$$\lim_{k\to\infty} \psi_k(x) = f(x) \qquad \text{(pour presque tout } x \in \mathbb{R}^d\text{)}.$$

Démonstration. Le Théorème 11.4 pénultième a déjà fournit une suite de fonctions étagées croissantes :

$$\varphi_k\colon \quad \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$$

qui convergent vers f en *tout* point de $\mathbb{R}^d$:

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x) \qquad (\forall\, x \in \mathbb{R}^d).$$

Ensuite, grâce au Théorème 11.6 qui précède, appliqué indéfiniment à $\varepsilon := \frac{1}{2^k}$ pour tous les entiers $k \geqslant 1$, il existe une suite de fonctions en escalier $\psi_k\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\psi_k(x) = \varphi_k(x),$$

en tout point :

$$x \in \mathbb{R}^d \backslash F_k,$$

situé en-dehors d'un certain sous-ensemble mesurable $F_k \subset \mathbb{R}^d$ de mesure :

$$m\big(F_k\big) \leqslant \frac{1}{2^k}.$$

Introduisons alors l'ensemble :

$$F := \bigcap_{\ell=1}^{\infty} \bigg(\underbrace{\bigcup_{k \geqslant \ell} F_k}_{=:\, G_\ell} \bigg).$$

Assertion 11.8. *Cet ensemble $F = \cap_{\ell=1}^{\infty} G_\ell$ est de mesure nulle !*

Vérification. En effet la mesure de ces G_ℓ :

$$\begin{aligned} m(G_\ell) &= m\bigg(\bigcup_{k \geqslant \ell} F_k\bigg) \\ &\leqslant \sum_{k=\ell}^{\infty} m(F_k) \\ &\leqslant \sum_{k=\ell} \frac{1}{2^k} \\ &= \frac{1}{2^{\ell-1}} \underset{\ell \to \infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

tend vers 0 lorsque $\ell \to \infty$, et le Théorème 6.13 sur les suites décroissantes d'ensembles mesurables donne alors bien :

$$\begin{aligned} m(F) &= m\bigg(\bigcap_{\ell=1}^{\infty} G_\ell\bigg) \\ &= \lim_{\ell \to \infty} m(G_\ell) \\ &= 0. \end{aligned}$$

$\square$

Soit maintenant un point hors de cet ensemble de mesure nulle :

$$x \notin F = \bigcap_{\ell=1}^{\infty} G_\ell.$$

Ceci veut dire qu'il existe un entier $\ell_x \geqslant 1$ tel que :

$$x \notin G_{\ell_x} = \bigcup_{k \geqslant \ell_x} F_k.$$

Ainsi pour tout $k \geqslant \ell_x$, le point x est-il hors de F_k, ce qui assure par construction que les fonctions en escalier ont les mêmes valeurs que les fonctions étagées :

$$\psi_k(x) = \varphi_k(x) \qquad\qquad {\scriptstyle (k \geqslant \ell_x;\ x \notin F)}.$$

Pour terminer, une simple inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \big|f(x) - \psi_k(x)\big| &\leqslant \big|f(x) - \varphi_k(x)\big| + \underbrace{\big|\varphi_k(x) - \psi_k(x)\big|}_{\circ} \\ &= \big|f(x) - \varphi_k(x)\big| \\ &\underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

montre que l'on a bien la convergence :

$$\lim_{k \to \infty} \psi_k(x) = f(x) \qquad\qquad {\scriptstyle (\forall\, x \in \mathbb{R}^d \setminus F)},$$

en-dehors de cet ensemble de mesure nulle intuitivement négligeable. □

12. Les trois principes de Littlewood

Bien que les concepts d'ensemble mesurable et de fonction mesurable représentent de puissants outils, ils entretiennent des relations de proximité fondamentale avec les concepts plus anciens qu'il remplacent. Littlewood a résumé avec justesse ces connexions sous la forme de *trois principes spéculatifs* qui offrent un guide intuitif précieux à toutes les personnes en apprentissage de la théorie (et aussi aux professeurs qui aiment que la *pensée* s'exprime dans les cours de L3 !).

(i) Tout ensemble est *presque* une réunion finie d'intervalles.

(ii) Toute fonction est *presque* continue.

(iii) Toute suite convergente est *presque* uniformément convergente.

Les ensembles et les fonctions dont il s'agit ici sont bien entendu supposés mesurables. Le sens du mot « *presque* » doit être précisé dans chaque contexte, il n'y a pas de définition axiomatique formelle.

En fait, une version mathématique satisfaisante du premier principe **(i)** a déjà été démontrée comme étant la dernière partie du Théorème 6.14.

Ensuite, une formulation exacte du deuxième principe **(ii)** constitue un résultat particulièrement frappant lorsqu'on ne connaît que la théorie de l'intégration de Riemann.

Théorème 12.1. [Egorov] *Sur un sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ de mesure finie :*

$$m(E) < \infty,$$

on suppose donnée une suite quelconque de fonctions mesurables :

$$f_k \colon \quad E \longrightarrow \mathbb{R},$$

qui converge presque partout simplement *vers une certaine fonction-limite :*

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) \qquad\qquad \text{(pour presque tout } x \in \mathbb{R}^d\text{)}.$$

Alors en fait, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un certain sous-ensemble fermé :

$$E_\varepsilon \subset E,$$

de mesure presque égale à celle de E :

$$m\big(E_\varepsilon\big) \geqslant m(E) - \varepsilon,$$

sur lequel la convergence est uniforme :

$$f_k(x)\big|_{E_\varepsilon} \underset{\text{uniformément}}{\longrightarrow} f(x)\big|_{E_\varepsilon}.$$

À un ensemble $E \backslash E_\varepsilon$ de mesure arbitrairement petite près, donc, toute convergence simple est en fait uniforme — *magical, is'nt it ?*

Démonstration. Après élagage éventuel d'un sous-ensemble de mesure nulle contenu dans E, on peut supposer que la convergence simple :

$$f_k(x) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$$

a lieu en *tout* point $x \in E$.

Soient alors deux entier $n \geqslant 1$ et $\ell \geqslant 1$ quelconques. Introduisons la famille doublement indicée de sous-ensembles de E :

$$E_\ell^n := \big\{x \in E\colon \big|f_k(x) - f(x)\big| \leqslant \tfrac{1}{n},\ \forall\, k \geqslant \ell\big\}.$$

Fixons temporairement n, et observons la croissance :

$$E_\ell^n \subset E_{\ell+1}^n.$$

Assertion 12.2. *On a aussi la réunion complète :*

$$\bigcup_{\ell=1}^{\infty} E_\ell^n = E,$$

Vérification. En effet, en tout point $x \in E$, il existe par hypothèse un entier $K_{x,n}$ assez grand pour que :

$$k \geqslant K_{x,n} \Longrightarrow \big|f_k(x) - f(x)\big| \leqslant \tfrac{1}{n},$$

ce qui veut précisément dire que :

$$x \in E_{K_{x,n}}^n.$$

□

Ensuite, le Théorème 6.12 s'applique à cette réunion complète pour donner :

$$\lim_{\ell \to \infty} m\big(E_\ell^n\big) = m(E),$$

et donc par conséquent, il existe un entier $\ell_n \geqslant 1$ assez grand pour que :

$$\ell \geqslant \ell_n \quad\Longrightarrow\quad m\big(E_\ell^n\big) \geqslant m(E) - \frac{1}{2^n}.$$

Avec ce qui vient d'être dit, on obtient de plus que :

$$\begin{aligned} \big|f_k(x) - f(x)\big| \leqslant \frac{1}{n}, \qquad\qquad & \forall\, k \geqslant \ell_n, \\ & \forall\, x \in E_{\ell_n}^n. \end{aligned}$$

Maintenant, choisissons $N \gg 1$ assez grand pour que :

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2^n} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Introduisons enfin l'ensemble :

$$E_\varepsilon' := \bigcap_{n \geqslant N} E_{\ell_n}^n.$$

Alors la mesure de son complémentaire est toute petite :

$$\begin{aligned} m\big(E \backslash E_\varepsilon'\big) &= m\bigg(E \Big\backslash \bigcap_{n \geqslant N} E_{\ell_n}^n\bigg) \\ &= m\bigg(\bigcup_{n \geqslant N} \big(E \backslash E_{\ell_n}^n\big)\bigg) \\ &\leqslant \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Maintenant, pour traiter de la convergence uniforme, soit $\delta > 0$ arbitrairement petit, et choisissons un entier $n \geqslant N$ avec :

$$\frac{1}{n} \leqslant \delta.$$

Par définition :

$$x \in E'_\varepsilon \implies x \in E^n_{\ell_n} \qquad\qquad (\forall\, n \geqslant N).$$

Alors ce qui précède montre qu'on a bien une inégalité :

$$\big|f_k(x) - f(x)\big| \leqslant \delta, \qquad\qquad \begin{array}{l}\forall\, k \geqslant \ell_n, \\ \forall\, x \in E'_\varepsilon,\end{array}$$

exprimant la convergence uniforme sur E'_ε.

En général E'_ε n'est pas forcément fermé, mais grâce au Théorème 6.14 **(ii)**, on peut remplacer E'_ε par un fermé $E_\varepsilon \subset E'_\varepsilon$ qui ne perd que très peu en mesure :

$$m\big(E'_\varepsilon \backslash E_\varepsilon\big) \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

ce qui maintient :

$$m\big(E_\varepsilon\big) \geqslant m(E) - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2},$$

et achève la démonstration courageuse de ce magnifique Théorème d'Egorov ! □

Le théorème suivant atteste la validité du second principe de Littlewood.

Théorème 12.3. [Lusin] *Sur un sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ de mesure finie :*

$$m(E) < \infty,$$

soit une fonction mesurable finie :

$$f\colon \quad E \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un certain sous-ensemble fermé :

$$E_\varepsilon \subset E,$$

de mesure presque égale à celle de E :

$$m\big(E_\varepsilon\big) \geqslant m(E) - \varepsilon,$$

en restriction auquel la fonction f :

$$f\big|_{E_\varepsilon} \in \mathscr{C}^0$$

est en fait continue !

Attention ici ! Le théorème dit seulement que f est continue *en restriction au sous-ensemble* E_ε, il ne dit en aucun cas que f, comme fonction de E dans $\mathbb{R}$, soit continue aux points de E_ε.

Démonstration. Grâce au Théorème 11.7, il existe une suite de fonctions en escalier :

$$f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$$

qui converge presque partout vers la fonction f. Or une fonction en escalier est combinaison linéaire finie de fonctions indicatrices de rectangles, et puisque de telles fonctions n'ont de discontinuités qu'aux bords de ces rectangles, on se convainc aisément qu'il existe pour tout $n \geqslant 1$ un sous-ensemble $F_n \subset \mathbb{R}^d$ de mesure :

$$m\big(F_n\big) \leqslant \frac{1}{2^n},$$

en dehors duquel cette fonction en escalier :

$$f_n\big|_{\mathbb{R}^d \backslash F_n} \in \mathscr{C}^0$$

est *continue*.

Ensuite, grâce au Théorème d'Egorov vu à l'instant, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble fermé :

$$E_{\frac{\varepsilon}{3}} \subset E,$$

dont le complémentaire est tout petit en mesure :

$$m\big(E \big\backslash E_{\frac{\varepsilon}{3}}\big) \leqslant \frac{\varepsilon}{3},$$

en restriction auquel la convergence est *uniforme :*

$$f_n\big|_{E_{\frac{\varepsilon}{3}}} \underset{\text{uniformément}}{\longrightarrow} f\big|_{F_{\frac{\varepsilon}{3}}}.$$

Ensuite, choisissons $N \gg 1$ assez grand pour que :

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2^n} \leqslant \frac{\varepsilon}{3},$$

et introduisons l'ensemble :

$$F_\varepsilon' := E_{\frac{\varepsilon}{3}} \Big\backslash \bigcup_{n \geqslant N} F_n,$$

qui reste de mesure très proche de celle de E (exercice mental) :

$$m\big(F_\varepsilon'\big) \geqslant m(E) - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon}{3}.$$

Alors en restriction à cet ensemble, pour tout $n \geqslant N$, les fonctions :

$$f_n\big|_{F_\varepsilon'} \in \mathscr{C}^0$$

sont par construction continues. Mais nous savons pertinemment par le cours de L2 que la fonction $f|_{F_\varepsilon'}$, qui est limite *uniforme* de ces fonctions continues $f_n|_{F_\varepsilon'}$, reste *continue* !

Pour terminer, si d'aventure nous n'avions pas la chance que F_ε' soit fermé, qu'à cela ne tienne ! le Théorème 6.14 **(ii)** nous permet à nouveau d'approximer F_ε' par un certain fermé $F_\varepsilon \subset F_\varepsilon'$ tout en contrôlant la mesure de la différence :

$$m\big(F_\varepsilon \big\backslash F_\varepsilon'\big) \leqslant \frac{\varepsilon}{3},$$

ce qui conclut. □

13. **Exercices**

Exercice 8. [Limites inférieure et supérieure d'une suite numérique] Étant donné une suite quelconque $(b_n)_{n \geqslant 1}$ de nombres réels, on considère la suite associée :

$$b_n^- := \inf \big\{ b_m \colon \ m \geqslant n \big\}.$$

(a) Montrer que cette suite $(b_n^-)_{n \geqslant 1}$ est croissante.

(b) On définit alors (justifier) :

$$\liminf_{n \to \infty} b_n := \lim_{n \to \infty} b_n^-,$$

un nombre appartenant à $[-\infty, +\infty]$. Vérifier, pour tout entier $N \geqslant 1$ fixé, que l'on a :

$$\liminf_{n \to \infty} \big(b_n\big)_{n \geqslant 1} = \liminf_{n \to \infty} \big(b_n\big)_{n \geqslant N}.$$

(c) Étant donné à nouveau une suite quelconque $(b_n)_{n \geqslant 1}$ de nombres réels, montrer que l'autre suite associée :

$$b_n^+ := \sup \big\{ b_m \colon \ m \geqslant n \big\}$$

est décroissante.

(d) Symétriquement, on définit :

$$\limsup_{n \to \infty} b_n := \lim_{n \to \infty} b_n^+,$$

un nombre appartenant aussi à $[-\infty, +\infty]$. Montrer que la suite $(b_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers une certaine limite $b \in [-\infty, +\infty]$ si et seulement si :

$$\liminf_{n \to \infty} b_n = \limsup_{n \to \infty} b_n.$$

(e) Dans le cas général où aucune hypothèse n'est faite sur la convergence de la suite $(b_n)_{n \geqslant 1}$, réinterpréter ce qui précède en démontrant qu'il existe toujours une première sous-suite $\big(n_k\big)_{k \geqslant 1}$ telle que $\big(b_{n_k}\big)_{k \geqslant 1}$ converge vers :

$$\liminf_{n \to \infty} b_n \ = \ \lim_{k \to \infty} b_{n_k},$$

et, de manière symétrique, qu'il existe aussi une deuxième sous-suite $\big(n_l\big)_{l \geqslant 1}$ telle que $\big(b_{n_l}\big)_{l \geqslant 1}$ converge vers :

$$\limsup_{n \to \infty} b_n \ = \ \lim_{l \to \infty} b_{n_l}.$$

Exercice 9. Soit un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ avec $d \geqslant 1$ et, pour $n \geqslant 1$ entier, soit l'ouvert :

$$\mathscr{O}_n := \big\{ x \in \mathbb{R}^d \colon \ \mathsf{dist}(x, E) \ < \ 1/n \big\}.$$

(a) Lorsque E est compact et mesurable, montrer que :

$$m(E) = \lim_{n \to \infty} m\big(\mathscr{O}_n\big).$$

(b) Lorsque E est fermé et non borné, montrer que cette conclusion peut devenir fausse.

(c) Lorsque E est ouvert et borné, montrer que cette conclusion peut aussi être mise en défaut.

Exercice 10. Soit B une boule ouverte dans $\mathbb{R}^d$ de rayon $R > 0$. En utilisant des translations et des dilatations, montrer que :

$$m(B) = c_d \, R^d,$$

pour la constante strictement positive qui est le volume de la boule unité :

$$c_d = m\big(\{x \in \mathbb{R}^d \colon \ |x| < 1\}\big).$$

Exercice 11. Si $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_d)$ est un d-uplet de nombres positifs $\delta_i > 0$, et si $E \subset \mathbb{R}^d$ est un sous-ensemble, on définit $\delta \, E$ par :

$$\delta \, E \ := \ \big\{ (\delta_1 x_1, \dots, \delta_d x_d) \colon \ (x_1, \dots, x_d) \in E \big\}.$$

Montrer que $\delta \, E$ est mesurable toutes les fois que E et mesurable, et dans ce cas, montrer que :

$$m(\delta \, E) = \delta_1 \cdots \delta_d \, m(E).$$

Exercice 12. Soit $L\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ un endomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire. Montrer que si $E \subset \mathbb{R}^d$ est un sous-ensemble mesurable, $L(E)$ est aussi mesurable, en procédant comme suit.

(a) Montrer que si E est compact, $L(E)$ l'est aussi.

(b) Montrer que si E est un F_σ-ensemble, $L(E)$ l'est aussi.

(c) Montrer que la restriction $L|_E$ est 1-lipschitzienne, à savoir qu'il existe une constante $K > 0$ telle que :

$$\big|L(x'') - L(x')\big| \leqslant K \cdot |x'' - x'| \qquad (\forall\, x' \ \forall\, x'' \in E).$$

(d) Montrer que L envoie un cube quelconque fermé de longueur $\ell > 0$ dans un cube fermé de longueur $2\sqrt{d}\, K\, \ell$.

(e) Lorsque $m(E) = 0$, montrer que $m\big(L(E)\big) = 0$.

(f) Appliquer le Théorème 8.6 pour conclure.

Exercice 13. Trouver un exemple d'ouvert $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}^d$ tel que le bord de son adhérence :

$$m\big(\partial\overline{\mathscr{O}}\big) > 0$$

est de mesure de Lebesgue strictement positive. Indication: Dans $[0,1] \subset \mathbb{R}$, considérer l'ensemble qui est la réunion, pour $k = 1, 3, 5, 7, \dots$ impair des 2^{k-1} intervalles que l'on supprime pour construire l'ensemble C_k qui conduit à l'ensemble triadique de Cantor $C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$.

Exercice 14. Soit $A \subset [0,1]$ le sous-ensemble des nombres dont le développement décimal infini ne contient pas le chiffre 4. Calculer la mesure $m(A)$.

Exercice 15. Le Théorème 3.2 énonce que tout sous-ensemble ouvert $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}^1$ est réunion disjointe d'intervalles ouverts. Mais l'analogue en dimension $d \geqslant 2$ est en général faux.

(a) Montrer qu'un disque ouvert non vide dans $\mathbb{R}^2$ n'est *pas* réunion disjointe de rectangles ouverts. Indication: Examiner ce qu'il advient du bord de ces rectangles.

(b) Montrer qu'un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ avec $d \geqslant 2$ est réunion disjointe de rectangles ouverts si et seulement si Ω lui-même est un rectangle ouvert.

Exercice 16. **(a)** Montrer qu'un sous-ensemble fermé $F \subset \mathbb{R}^d$ est un G_δ-ensemble. Indication: Pour $n \geqslant 1$ entier, introduire $\mathscr{O}_n := \{x \in \mathbb{R}^d \colon \operatorname{dist}(x, F) < 1/n\}$.

(b) Montrer qu'un sous-ensemble ouvert $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}^d$ est un F_σ-ensemble.

(c) Trouver un exemple de F_σ-ensemble qui n'est pas un G_δ-ensemble. Indication: Utiliser un ensemble dénombrable dense approprié.

(d) Trouver un exemple d'ensemble borélien qui n'est ni un G_δ-ensemble, ni un F_σ-ensemble.

Exercice 17. Le but de cet exercice est de montrer que recouvrir les sous-ensembles $E \subset \mathbb{R}^d$ par un nombre *fini* de cubes ne suffit pas à produire un concept réellement satisfaisant de mesure extérieure $m^*(E)$. On se restreint ici à la dimension $d = 1$.

En effet, la *mesure extérieure de Jordan* $m_J^*(E)$ peut être définie par :

$$m_J^*(E) = \inf \sum_{j=1}^{J} \big|I_j\big|,$$

où l'infimum est pris sur les recouvrements *finis :*

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{J} I_j,$$

par des intervalles fermés I_j.

(a) Montrer que $m_J^*(E) = m_J^*\big(\overline{E}\big)$ pour tout sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$.

(b) Trouver un sous-ensemble dénombrable $E \subset [0,1]$ tel que $m_J^*(E) = 1$, tandis que $m^*(E) = 0$.

Exercice 18. Au début de la *Théorie de la mesure*, on pourrait définir le concept de *mesure extérieure* en utilisant des recouvrements par des rectangles, au lieu d'employer des cubes. Plus précisément, étant donné un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$, on introduit :

$$m_{\mathscr{R}}^*(E) \;:=\; \inf \sum_{j=1}^{\infty} \big|R_j\big|,$$

où l'infimum est maintenant pris sur toutes les recouvrements dénombrables :

$$E \;\subset\; \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j$$

par des rectangles R_j. Montrer que cette approche donne effectivement lieu à la même *Théorie de la mesure* que celle développée dans le texte, et notamment, établir que :

$$m^*(E) = m_{\mathscr{R}}^*(E).$$

Exercice 19. Soit l'intervalle unité $[0,1] \subset \mathbb{R}$, et soit un nombre réel fixé ξ avec $0 < \xi < 1$. À l'étape 1, on supprime de $[0,1]$ l'intervalle ouvert de longueur ξ situé centralement. À l'étape 2, on supprime de chacun des deux intervalles restants l'intervalle ouvert situé centralement de longueur $\xi\,\frac{1-\xi}{2}$. On itère la construction pour tout entier $n \geqslant 1$. Si on note C_ξ l'intersection infinie de tous ces ensembles, montrer que $m^*(C_\xi) = 0$.

Exercice 20. Soit $\widehat{C} \subset [0,1]$ le sous-ensemble de type Cantor qui est construit en supprimant, à la n-ème étape, 2^{n-1} intervalles ouverts situés centralement tous de longueur ℓ_n avec toujours :

$$\ell_1 + 2\,\ell_2 + \cdots + 2^{n-1}\,\ell_n \;<\; 1.$$

Si ces longueurs ℓ_n sont choisies de telle sorte qu'à l'infini, on ait toujours :

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\,\ell_n \;<\; 1,$$

montrer que $\widehat{C}$ est mesurable, de mesure :

$$m\big(\widehat{C}\big) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\,\ell_n.$$

Exercice 21. Soient $\widehat{C} = \widehat{C}_{\ell_1,\ell_2,\dots}$ et $C = C_\xi$ deux ensembles de type Cantor contenus dans $[0,1]$ tels que construits dans les deux exercices précédents avec $m\big(\widehat{C}\big) > 0$ et $m(C) = 0$. En imitant la construction de la fonction de Cantor-Lebesgue, montrer qu'il existe une fonction $\Phi\colon\, [0,1] \longrightarrow [0,1]$ jouissant des propriétés suivantes :

(a) Φ est continue et bijective ;

(b) Φ est monotone croissante ;

(c) Φ envoie $\widehat{C}$ surjectivement sur C.

Exercice 22. Trouver un exemple de fonction mesurable f et de fonction continue Φ tels que $f \circ \Phi$ ne soit pas mesurable.
Indication: Soit $\Phi\colon\, \widehat{C} \longrightarrow C$ comme dans l'exercice précédent, et soit $N \subset \widehat{C}$ un sous-ensemble *non* mesurable. Prendre $f = \mathbf{1}_{\Phi(N)}$.

Exercice 23. Utiliser la construction de l'exercice précédent pour trouver un ensemble Lebesgue-mesurable qui n'est pas un borélien dans $\mathbb{R}$.

Exercice 24. Cet exercice produit un exemple de fonction mesurable $f\colon\, [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que toute fonction g qui ne diffère de f que sur un ensemble de mesure nulle est discontinue en *tout* point.

(a) Construire un ensemble mesurable $E \subset [0,1]$ tel que, pour tout intervalle ouvert $I \subset [0,1]$, les deux ensembles :

$$E \cap I \qquad \text{et} \qquad E^c \cap I$$

sont de mesure positive. Indication: Considérer un ensemble de type Cantor de mesure strictement positive tel que $\widehat{C}$ dans l'Exercice 20, et ajouter dans chacun des intervalles qui sont supprimés un autre ensemble de Cantor.

(b) Montrer que la fonction indicatrice $f = \mathbf{1}_E$ possède la propriété que toute autre fonction g telle que $g(x) = f(x)$ pour presque tout $x \in [0,1]$ doit être discontinue en *tout* point de $[0,1]$.

Exercice 25. Montrer que la mesure de Lebesgue 2-dimensionnelle du graphe :

$$\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ y = f(x)\big\}$$

d'une fonction continue $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vaut 0.

Exercice 26. [Lemme de Borel-Cantelli] Soit une famille dénombrable $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ de sous-ensembles mesurables $E_k \subset \mathbb{R}^d$ satisfaisant :

$$\sum_{k=1}^{\infty} m\big(E_k\big) \,<\, \infty.$$

On considère :

$$\begin{aligned} E \,&=\, \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon\ x \in E_k \text{ pour une infinité d'entiers } k\big\} \\ &=: \limsup_{k\to\infty} \big(E_k\big). \end{aligned}$$

(a) Montrer que E est mesurable. Indication: Écrire :

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k\geqslant n} E_k.$$

(a) Montrer que $m(E) = 0$.

Exercice 27. Soit $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions mesurables sur $[0,1]$ avec $|f_n(x)| < \infty$ pour presque tout x. Montrer qu'il existe une suite $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ de nombres réels $c_n > 0$ telle que :

$$0 \,=\, \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x)}{c_n} \qquad\qquad \text{(pour presque tout } x \in [0,1]\text{)}.$$

Indication: Prendre c_n tel que :

$$m\big(\big\{x \in [0,1] \colon\ \big|f_n(x)/c_n\big| \geqslant 1/n\big\}\big) \,\leqslant\, \frac{1}{2^n},$$

et appliquer le Lemme de Borel-Cantelli obtenu dans l'exercice précédent.

Exercice 28. Montrer que tout fonction mesurable est la limite, presque partout, d'une certaine suite de fonctions continues.

Exercice 29. Établir les trois affirmations suivantes concernant l'addition $A+B = \{a+b \in \mathbb{R}^d \colon a \in A,\, b \in B\}$ entre sous-ensembles $A, B \subset \mathbb{R}^d$.

(a) Lorsque A et B sont ouverts, $A+B$ est aussi ouvert.

(b) Lorsque A et B sont fermés, $A+B$ est mesurable. Indication: Faire voir que $A+B$ est un F_σ-ensemble.

(c) Montrer par un exemple que $A+B$ n'est pas toujours fermé lorsque A et B le sont.

Exercice 30. En dimensions $d=1$ et $d=2$, montrer comme suit qu'il existe des ensembles A et B dans $\mathbb{R}^d$ avec $m(A) = 0 = m(B)$, tandis que $m(A+B) > 0$.

(a) Indication: Dans $\mathbb{R}$, choisir $A := C$ l'ensemble triadique standard de Cantor ainsi que $B := C/2$, et montrer que $A+B \supset [0,1]$.

(b) Indication: Dans $\mathbb{R}^2$, choisir $A := [0,1] \times \{0\}$ ainsi que $B := \{0\} \times [0,1]$, et montrer que $A+B = [0,1] \times [0,1]$.

Exercice 31. Montrer qu'il existe une fonction continue qui envoie un ensemble Lebesgue-mesurable dans un ensemble non mesurable. Indication: Considérer un sous-ensemble non mesurable de $[0,1]$, et introduire son image inverse dans l'ensemble de Cantor C par la fonction de Cantor Lebesgue F.

Exercice 32. Soit $f(x,y)$ une fonction sur $\mathbb{R}^2$ qui est séparément continue par rapport à chaque variable. Montrer que f est mesurable. Indication: Approximer f dans la variable x par des fonctions affines par morceaux f_n qui convergent ponctuellement vers f.

Exercice 33. Existe-t-il une énumération $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ de l'ensemble $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ des nombres rationnels telle que le complémentaire dans $\mathbb{R}$ de l'union dénombrable :

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left] r_n - \frac{1}{n},\ r_n + \frac{1}{n} \right[$$

soit non vide ? Indication: Trouver une énumération pour laquelle les seuls nombres rationnels hors d'un intervalle borné fixé prennent la forme r_n avec n de la forme $n = m^2$.

Exercice 34. Une définition alternative de la mesurabilité pourrait être la suivante : un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ est mesurable si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble *fermé* $F \subset E$ tel que :

$$m^*(E \backslash F) \leqslant \varepsilon.$$

Établir qu'une telle définition serait en fait entièrement équivalente à celle qui a été donnée dans le texte du cours.

Exercice 35. Montrer que si un ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ est encadré :

$$A \subset E \subset B,$$

par deux ensembles $A, B \subset \mathbb{R}^d$ de même mesure $m(A) = m(B)$, alors E est lui aussi mesurable.

Exercice 36. Soient E_1 et E_2 deux sous-ensembles compacts de $\mathbb{R}^d$ emboîtés :

$$E_1 \subset E_2 \subset \mathbb{R}^d.$$

On pose $a := m(E_1)$ et $b := m(E_2)$ et on suppose $a < b$. Montrer que pour tout nombre réel $a < c < b$, il existe un sous-ensemble compact E avec :

$$E_1 \subset E \subset E_2,$$

tel que $m(E) = c$. Indication: Par exemple en dimension $d = 1$ avec $E \subset [0,1]$ mesurable, étudier la fonction $t \longmapsto m\big(E \cap [0,t]\big)$.

Exercice 37. Soit $E \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble de mesure extérieure $m^*(E) > 0$ strictement positive. Montrer que pour tout $0 < \alpha < 1$, il existe un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ tel que :

$$m^*\big(E \cap I\big) \geqslant \alpha\, m^*(I).$$

Intuitivement, E contient presque tout un intervalle. Indication: Choisir un ouvert $\mathscr{O} \subset E$ tel que :

$$m^*(E) \geqslant \alpha\, m^*(\mathscr{O}),$$

puis écrire $\mathscr{O}$ comme réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints afin de vérifier que l'un de ces intervalles doit satisfaire la propriété désirée.

Exercice 38. Soit $E \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble mesurable de mesure $m(E) > 0$ strictement positive. Montrer que l'*ensemble-différence* de E, défini par :

$$\big\{z \in \mathbb{R} \colon\ z = x - y \text{ pour deux points } x,\, y \in E\big\}$$

contient un intervalle ouvert centré à l'origine.

Indication: Grâce à l'exercice précédent, il existe un intervalle I tel que $m(E \cap I) \geqslant \frac{9}{10}\, m(I)$. Noter $E_0 := E \cap I$ et supposer que l'ensemble-différence de E_0 ne contient pas d'intervalle ouvert centré à l'origine. Vérifier que pour a arbitrairement petit, E_0 et $E_0 + a$ sont disjoints. Afin d'atteindre une contradiction, utiliser :

$$\big(E_0 \cup (E_0 + a)\big) \subset \big(I \cup (I + a)\big),$$

en observant que le membre de gauche a pour mesure $2\, m(E_0)$, tandis que le membre de droite n'est de mesure que très légèrement supérieure à $m(I)$.

Exercice 39. Montrer que si E et F sont deux sous-ensembles mesurables de $\mathbb{R}$ de mesures strictement positives $m(E) > 0$ et $m(F) > 0$, alors :

$$E + F = \big\{x + y \colon\ x \in E,\, y \in F\big\}$$

contient un intervalle.

Exercice 40. **(a)** Étant donné un nombre irrationnel $\theta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, montrer qu'il existe une infinité de fractions rationnelles irréductibles $\frac{p}{q}$ telles que :

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}.$$

(b) Pour $\varepsilon > 0$, montrer que l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels qu'il existe une infinité de fractions rationnelles irréductibles $\frac{p}{q}$ satisfaisant :

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^{2+\varepsilon}},$$

est de mesure 0. Indication: Penser au lemme de Borel-Cantelli.

Exercice 41. Montrer que tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ peut être écrit comme réunion dénombrable :

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j,$$

de cubes fermés $Q_j \subset \mathbb{R}^d$ presque disjoints dont la taille rétrécit régulièrement à l'approche du bord :

$$c\,\mathsf{diam}(Q_j) \leqslant \mathsf{dist}\big(Q_j,\, \Omega^c\big) \leqslant C\,\mathsf{diam}(Q_j),$$

pour deux constantes $0 < c < C$.

Exercice 42. $**$

Théorie de l'intégration de Lebesgue

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Sud, France

> Une découverte, celle de l'intégrale de Lebesgue, n'est d'abord entendue en son vrai sens que de rares adeptes, prompts à éclairer de ce flambeau saisi quelques coins obscurs de la science. Même la réaction générale est hostile et vive contre l'irruption d'une idée balayant sans égards les jugements révérés. Lentement, mais irrésistiblement, la lumière pénètre un monde d'esprits de plus en plus étendu. Une heure vient où, dans cet ordre de pensées, la dernière acquise des grandes vérités apparaît à tous comme le jour, claire, évidente, et pour finir banale. Arnaud DENJOY

1. Intégrale de Lebesgue : propriétés et théorèmes de convergence

Nous allons définir la notion générale d'*intégrale de Lebesgue sur* $\mathbb{R}^d$ en procédant par généralisations successives à des familles de plus en plus étendues de fonctions. À chaque étape, nous vérifierons que l'intégrale satisfait toutes les propriétés élémentaires qu'on est en droit d'attendre d'elle, la linéarité, la monotonie, l'inégalité du triangle, et nous démontrerons des théorèmes de convergence qui expriment essentiellement que l'on peut intervertir limite et intégration. À la fin de ce processus définitionnel par élargissements successifs, nous aurons atteint une théorie si forte et si générale qu'elle sera d'une utilité décisive dans tous les développements ultérieurs de l'Analyse.

Nous procéderons en quatre étapes majeures, en intégrant progressivement :

1. les fonctions étagées ;

2. les fonctions bornées supportées sur un ensemble de mesure finie ;

3. les fonctions positives ;

4. les fonctions *intégrables*, au sens théorique le plus général.

Soulignons dès à présent que *toutes les fonctions seront d'emblée supposées mesurables*. Le plus souvent aussi, nous travaillerons avec des fonctions qui sont à valeurs dans $\mathbb{R}$, et plus tard, nous considérerons aussi des fonctions qui sont à valeurs dans $\mathbb{C}$ en regardant leurs partie réelle et leur partie imaginaire.

2. Étape 1 : Fonctions étagées

Rappelons qu'une *fonction étagée*, telle que définie dans le chapitre précédent, est une fonction :

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot \mathbf{1}_{E_k}(x),$$

qui est combinaison linéaire finie à coefficients $a_k \in \mathbb{R}$ de fonctions indicatrices $\mathbf{1}_{E_k}$ de sous-ensmbles mesurables $E_k \subset \mathbb{R}^d$ de mesures $m(E_k) < \infty$ *finies*.

Toutefois, une complication s'insinue dans cette définition, en tant qu'une fonction étagée peut en fait être écrite d'une infinité de manières différentes comme combinaisons linéaires de cette espèce ; par exemple, et quelque peu artificiellement, on a :

$$0 = \mathbf{1}_E - \mathbf{1}_E,$$

pour tout ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$. Fort heureusement, il existe une manière inambiguë de choisir un représentant *unique* parmi toutes les représentations possibles, représentant qui sera à la fois naturel et utile dans les démonstrations.

Proposition-Définition 2.1. *La forme canonique d'une fonction étagée φ est l'unique représentation :*

$$\varphi = \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot \mathbf{1}_{E_k},$$

dans laquelle les a_k sont distincts deux à deux, et les E_k sont disjoints deux à deux.

Démonstration. Trouver la forme canonique d'une fonction étagée n'est pas bien difficile. Puisque φ ne prend qu'un nombre fini de valeurs, l'ensemble de ses valeurs :

$$\begin{aligned}\big\{a_1, \dots, a_N\big\} &= \big\{a_{k_1}, \dots, a_{k_M}\big\} \\ &=: \big\{c_1, \dots, c_M\big\}\end{aligned}$$

se réduit à un certain nombre $M \leqslant N$ de nombres réels *distincts deux à deux :*

$$c_{\ell_1} \neq c_{\ell_2} \qquad\qquad (1 \leqslant \ell_1 < \ell_2 \leqslant M).$$

Si donc nous introduisons les ensembles de niveau :

$$F_\ell := \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon\ \varphi(x) = c_\ell\big\},$$

il vient que ces ensembles sont disjoints deux à deux (exercice mental). Par conséquent :

$$\sum_{\ell=1}^{M} c_\ell \cdot \mathbf{1}_{F_\ell} \,=\, \varphi,$$

est la forme canonique désirée de φ. □

Définition 2.2. Si φ est une fonction étagée sous forme canonique :

$$\varphi = \sum_{\ell=1}^{M} c_\ell\, \mathbf{1}_{F_\ell},$$

on définit l'*intégrale de Lebesgue* de φ comme étant le nombre réel :

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\, dx \,:=\, \sum_{\ell=1}^{M} c_\ell \cdot m\big(F_\ell\big).}$$

Si $E \subset \mathbb{R}^d$ est un sous-ensemble mesurable de mesure $m(E) < \infty$ finie, alors (exercice) :

$$\varphi(x) \cdot \mathbf{1}_E(x)$$

est encore une fonction étagée.

Définition 2.3. L'intégrale sur $E \subset \mathbb{R}^d$ mesurable de φ étagée sur $\mathbb{R}^d$ est définie par :

$$\int_E \varphi(x)\, dx \,:=\, \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\, \mathbf{1}_E(x)\, dx.$$

Afin de bien signaler le choix de la mesure de Lebesgue m dans la définition de l'intégrale, on écrit parfois :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\, dm(x),$$

pour l'intégrale de Lebesgue de φ.

Mais en fait, nous abrégerons souvent l'intégrale par :

$$\int \varphi(x)\, dx,$$

voire même par :

$$\int \varphi.$$

Proposition 2.4. *L'intégrale ainsi définie des fonctions étagées φ, ψ sur $\mathbb{R}^d$ jouit des cinq propriétés suivantes.*

(i) Indépendance vis-à-vis de la représentation : *Pour toute représentation — pas forcément canonique :*

$$\varphi = \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot \mathbf{1}_{E_k},$$

on a :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi \,=\, \sum_{k=1}^{N} a_k\, m\big(E_k\big).$$

(ii) Linéarité : *Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \big(a\,\varphi + b\,\psi\big) \,=\, a \int_{\mathbb{R}^d} \varphi + b \int_{\mathbb{R}^d} \psi.$$

(iii) Additivité domaniale : *Si F et G sont deux sous-ensembles disjoints de $\mathbb{R}^d$ de mesure finie, alors :*

$$\int_{F \cup G} \varphi \,=\, \int_F \varphi + \int_G \varphi.$$

(iv) Monotonie : *Si $\varphi \leqslant \psi$ en tout point, alors :*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \psi.$$

(v) Inégalité du triangle : *La fonction valeur absolue $|\varphi|$ est aussi une fonction étagée et l'on a :*

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} \varphi \right| \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi|.$$

Démonstration. La seule affirmation qui est quelque peu délicate est la première. Il faut donc être astucieux lorsqu'on ramène une fonction étagée à sa représentation canonique, et nous allons effectuer cela en deux moments.

Supposons d'abord que dans la représentation :

$$\varphi = \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot \mathbf{1}_{E_k},$$

les ensembles E_k sont *disjoints deux à deux*, sans toutefois demander que les a_k soient mutuellement distincts. Plus bas, nous verrons comment nous ramener à cette situation. Il s'agit maintenant d'établir **(i)**, et pour cela, nous devons ramener φ à sa forme canonique.

Si c_ℓ est l'une des valeurs distinctes $c_1, \dots, c_M$, avec $M \leqslant N$, que prennent $a_1, \dots, a_N$, introduisons l'ensemble :

$$E'_\ell := \bigcup_{\{k \colon a_k = c_\ell\}} E_k.$$

Les ensembles $\{k \colon a_k = c_\ell\}$ forment alors partition de $\{1, 2, \dots, N\}$, et comme les E_k sont disjoints, $E'_1, \dots, E'_M$ sont disjoints deux à deux. De plus, on a visiblement :

$$m(E'_\ell) = \sum_{\{k \colon a_k = c_\ell\}} m(E_k).$$

Enfin, puisque :

$$\varphi = \sum_{\ell=1}^{M} c_\ell \cdot \mathbf{1}_{E'_\ell},$$

est la représentation canonique de φ, une application de la Définition 2.2 suivie d'une réorganisation donne le résultat :

$$\begin{aligned} \int \varphi &\overset{\text{déf}}{=} \sum_{\ell=1}^{M} c_\ell \, m(E'_\ell) \\ &= \sum_{\ell=1}^{M} c_\ell \sum_{\{k \colon a_k = c_\ell\}} m(E_k) \\ &= \sum_{k=1}^{N} a_k \, m(E_k). \end{aligned}$$

Ensuite, traitons le cas général pour lequel les ensembles $E_1, \dots, E_N$ ne sont pas forcément disjoints, et les valeurs $a_1, \dots, a_N$ ne sont pas forcément distinctes. Pour ramener φ à sa forme canonique, il s'agit surtout de morceler les E_k jusqu'à en faire des pièces de puzzle qui ne se recouvrent plus.

Lemme 2.5. *Étant donné $N \geqslant 1$ sous-ensembles quelconques d'un ensemble abstrait D :*

$$E_1,\, E_2,\, \dots,\, E_N \,\subset\, D,$$

il existe $2^N - 1$ autres sous-ensembles :

$$E_1^*,\, E_2^*,\, \dots\dots\dots,\, E_{2^N-1}^* \,\subset\, D,$$

qui sont mutuellement disjoints :

$$\emptyset \,=\, E_{\ell_1}^* \cap E_{\ell_2}^* \qquad\qquad {\scriptstyle (1 \leqslant \ell_1 < \ell_2 \leqslant 2^N - 1)},$$

dont la réunion est la même que celle des E_k :

$$\bigcup_{k=1}^{N} E_k \,=\, \bigcup_{\ell=1}^{2^N-1} E_\ell^*,$$

et qui satisfont de plus pour tout $k = 1, \dots, N$:

$$E_k \,=\, \bigcup_{\{\ell :\, E_\ell^* \subset E_k\}} E_\ell^*.$$

Démonstration. Ces ensembles sont toutes les 2^N intersections possibles entre les E_k et leurs complémentaires $E_k^c = D \backslash E_k$:

$$\big(E_1 \text{ ou } E_1^c\big) \bigcap \cdots\cdots \bigcap \big(E_N \text{ ou } E_N^c\big),$$

à l'exclusion bien sûr du complémentaire commun :

$$E_1^c \bigcap \cdots \bigcap E_N^c,$$

puisque l'on souhaite demeurer dans la réunion des E_k. Codons alors toutes ces intersections possibles de manière binaire :

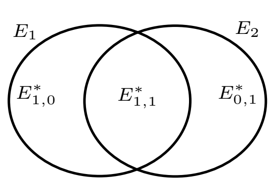
$$E_{i_1,\dots,i_N}^*, \qquad\quad \text{avec } \; i_1, \dots, i_N \,\in\, \{0, 1\},$$

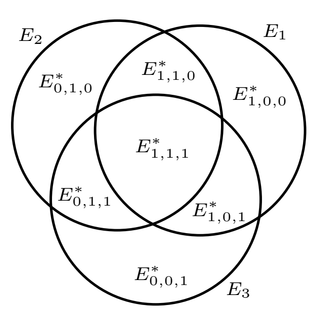
en écartant donc $E_{0,\dots,0}^*$ ce qui nous fait bien $2^N - 1$ ensembles.

Pour $N = 1$, on a $2^1 - 1 = 1$ et on prend $E_1^* := E_1$.

Pour $N = 2$, on a effectivement $2^2 - 1 = 3$ ensembles qui décomposent disjointement la réunion $E_1 \cup E_2$:

$$E_{1,1}^* = E_1 \cap E_2, \qquad\quad E_{1,0} = E_1 \cap E_2^c, \qquad\quad E_{0,1} = E_1^c \cap E_2.$$





Pour $N = 3$, on a effectivement $2^3 - 1 = 7$ ensembles décomposants. Le diagramme s'avère un auxiliaire utile pour qui souhaite (exercice) rédiger les détails combinatoires en langage symbolique. □

De la représentation de chaque E_k en réunion disjointe de certains E_ℓ^* découle :

$$\mathbf{1}_{E_k} = \sum_{\{\ell\colon E_\ell^* \subset E_k\}} \mathbf{1}_{E_\ell^*},$$

puis :

$$m\big(E_k\big) \, = \sum_{\{\ell\colon E_\ell^* \subset E_k\}} m\big(E_\ell^*\big).$$

Grâce à cette décomposition plus fine, on peut transformer naturellement :

$$\begin{aligned}
\varphi \, &= \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot \mathbf{1}_{E_k} \\
&= \sum_{k=1}^{N} a_k \sum_{\{\ell\colon E_\ell^* \subset E_k\}} \mathbf{1}_{E_\ell^*} \\
&= \sum_{\ell=1}^{2^N-1} \underbrace{\bigg(\sum_{\{k\colon E_k \supset E_\ell^*\}} a_k \bigg)}_{=:\, a_\ell^*} \cdot \mathbf{1}_{E_\ell^*}.
\end{aligned}$$

Or maintenant, puisque cette nouvelle représentation de φ est telle que les ensembles mesurables E_ℓ^* sont disjoints deux à deux, nous pouvons lui appliquer le résultat obtenu dans la première partie de la démonstration, ce qui donne ici la conclusion **(i)** :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \varphi \, &= \sum_{\ell=1}^{2^N-1} a_\ell^* \, m\big(E_\ell^*\big) \\
&= \sum_{\ell=1}^{2^N-1} \sum_{\{k\colon E_k \supset E_\ell^*\}} a_k \, m\big(E_\ell^*\big) \\
\text{[Reconnaître } m(E_k)\text{]} \qquad &= \sum_{k=1}^{N} a_k \underbrace{\sum_{\{\ell\colon E_\ell^* \subset E_k\}} m\big(E_\ell^*\big)}_{=\, m(E_k)} \\
&= \sum_{k=1}^{N} a_k \, m\big(E_k\big).
\end{aligned}$$

Ensuite, en partant de n'importe quelle représentation étagée pour φ et pour ψ, une fois la propriété **(i)** acquise, la propriété **(ii)** découle de la linéarité évidente des sommations.

Pour ce qui concerne la propriété **(iii)** d'addititivé de l'intégration sur les ensembles disjoints, on transforme :

$$
\begin{aligned}
\int_{F\cup G}\varphi &= \int \varphi\cdot\mathbf{1}_{F\cup G} \\
&= \int \bigg(\sum_{k=1}^N a_k\,\mathbf{1}_{E_k}\bigg)\cdot\big(\mathbf{1}_F+\mathbf{1}_G\big) \\
&= \int \bigg\{\sum_{k=1}^N a_k\,\mathbf{1}_{E_k\cap F}+\sum_{k=1}^N a_k\,\mathbf{1}_{E_k\cap G}\bigg\} \\
\text{[Linéarité (ii)]}\qquad &= \int \bigg(\sum_{k=1}^N a_k\cdot\mathbf{1}_{E_k}\bigg)\cdot\mathbf{1}_F+\int \bigg(\sum_{k=1}^N a_k\cdot\mathbf{1}_{E_k}\bigg)\cdot\mathbf{1}_G \\
&= \int_F\varphi+\int_G\varphi.
\end{aligned}
$$

Pour **(iv)**, si $\eta \geqslant 0$ est une fonction étagée positive, il est clair (exercice mental) que sa forme canonique est aussi partout positive, et donc par la Définition 2.1, on a bien $\int \eta \geqslant 0$. Si $\varphi \leqslant \psi$, en posant $\eta := \psi - \varphi$, on a bien $\int \varphi \leqslant \int \psi$.

Enfin pour l'inégalité du triangle **(v)**, il suffit d'écrire φ sous sa forme canonique :

$$
\varphi = \sum_{k=1}^N a_k\cdot\mathbf{1}_{E_k},
$$

et d'observer, puisque les E_k sont disjoints, que :

$$
|\varphi| = \sum_{k=1}^N \big|a_k\big|\cdot\mathbf{1}_{E_k}.
$$

Par conséquent, grâce à l'inégalité du triangle appliquée à la Définition 2.1 de l'intégrale, on obtient :

$$
\begin{aligned}
\bigg|\int_{\mathbb{R}^d}\varphi\bigg| &= \bigg|\sum_{k=1}^N a_k\,m\big(E_k\big)\bigg| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^N \big|a_k\big|\,m\big(E_k\big) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}|\varphi|,
\end{aligned}
$$

ce qui termine la démonstration détaillée de ces cinq propriétés (très) élémentaires. □

En fait incidemment, nous avons presque démontré l'énoncé suivant, qui correspond pleinement à la manière de penser propre à la théorie de la mesure : tout énoncé est valide à des ensembles de mesure nulle près.

Proposition 2.6. *Si deux fonctions étagées φ et ψ sur $\mathbb{R}^d$ satisfont presque partout :*

$$
\varphi \leqslant \psi,
$$

alors :

$$\int \varphi \leqslant \int \psi.$$

Démonstration. En considérant à la place la fonction étagée positive presque partout :

$$\begin{aligned} \eta &:= \psi - \varphi \\ &\geqslant 0, \end{aligned}$$

on se ramène à devoir montrer que $\int \eta \geqslant 0$. Or si η est mise sous forme canonique :

$$\eta = \sum_{\ell=1}^{M} b_\ell \, \mathbf{1}_{E_\ell},$$

puisque l'intégrale de η vaut par définition :

$$\int \eta = \sum_{\ell=1}^{M} b_\ell \, m\big(E_\ell\big),$$

on peut supposer que tous les E_ℓ sont de mesure strictement positive (mettre de côtés ceux qui sont de mesure nulle). Mais comme les E_ℓ sont disjoints deux à deux, la positivité presque partout de η nécessite (exercice mental) que tous les $b_\ell \geqslant 0$ soient positifs. Donc $\int \eta \geqslant 0$! □

3. Étape 2 : Fonctions mesurables bornées à support dans un ensemble de mesure finie

Définition 3.1. Le *support* d'une fonction mesurable $f \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ est l'ensemble des points où elle ne s'annule pas :

$$\mathsf{supp}(f) := \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon\ f(x) \neq 0\big\}.$$

On dit aussi que f est *à support* dans un ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ lorsque $f(x) = 0$ pour tout $x \notin E$.

En fait, la mesurabilité de f assure immédiatement que son support est un ensemble mesurable. Dans cette section, nous allons nous intéresser principalement aux fonctions dont le support est de mesure finie :

$$m\big(\mathsf{supp}(f)\big) < \infty.$$

Un résultat important du chapitre précédent énonce que si une fonction mesurable $f \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée en valeur absolue par une constante $M > 0$ est à support dans un ensemble E de mesure finie, alors il existe une suite de fonctions étagées $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ telle que :

$$\varphi_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x),$$

en *tout* point $x \in E$. Le lemme-clé qui suit nous permet alors de définir l'intégrale de Lebesgue des fonctions bornées à support dans un ensemble de mesure finie.

Lemme 3.2. *Soit $f \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée à support dans un ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ de mesure $m(E) < \infty$ finie. Si $\big(\varphi_n\big)_{n=1}^{\infty}$ est une suite quelconque de fonctions étagées telles que :*

- *il existe une constante $M > 0$ avec $\big|\varphi_n\big| \leqslant M$ pour tout $n \geqslant 1$,*

• $\mathsf{supp}(\varphi_n) \subset E$ *pour tout* $n \geqslant 1$,
• $\varphi_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ *pour presque tout* $x \in E$,
alors la limite :

$$\lim_{n\to\infty} \int \varphi_n$$

existe, et de plus, lorsqu'on a $f = 0$ *presque partout, cette limite vaut (naturellement !)* 0.

Démonstration. Ces conclusions seraient presque évidentes si l'on supposait que φ_n converge *uniformément* vers f. Or souvenons-nous de l'un des trois principes de Littlewood, qui prétendait que la convergence d'une suite de fonctions mesurables est toujours *presque* uniforme. Nous savons d'ailleurs aussi que ce principe informel s'est réalisé rigoureusement sous la forme du Théorème (tellement magique !) d'Egorov, que nous allons maintenant sortir de notre chapeau de prestidigitateur-mathématicien.

Ainsi, comme $m(E) < \infty$, le Théorème d'Egorov s'applique, et pour tout $\varepsilon > 0$, il garantit l'existence d'un sous-ensemble mesurable fermé $E_\varepsilon \subset E$ de mesure presque égale à celle de E :

$$m(E_\varepsilon) \geqslant m(E) - \varepsilon,$$

sur lequel la convergence est *uniforme :*

$$\varphi_n(x)\big|_{E_\varepsilon} \underset{\text{uniformément}}{\longrightarrow} f(x)\big|_{E_\varepsilon}.$$

En utilisant aussi crucialement le fait que la suite $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ est uniformément bornée par la constante $M > 0$, et en découpant :

$$E = E_\varepsilon \cup \big(E \backslash E_\varepsilon\big),$$

nous pouvons alors exécuter des majorations intuitivement naturelles :

$$\begin{aligned}
\left| \int \varphi_n - \int \varphi_m \right| &\leqslant \int_E \big|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)\big|\,dx \\
&= \int_{E_\varepsilon} \big|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)\big|\,dx + \int_{E\backslash E_\varepsilon} \big|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)\big|\,dx \\
&\leqslant \int_{E_\varepsilon} \big|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)\big|\,dx + 2\,M\,m\big(E\backslash E_\varepsilon\big) \\
&\leqslant \int_{E_\varepsilon} \big|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)\big|\,dx + 2\,M\,\varepsilon.
\end{aligned}$$

Mais par convergence égorovienne uniforme sur E_ε, il existe un entier $N = N_\varepsilon \gg 1$ tel que :

$$n,\, m \geqslant N_\varepsilon \implies \Big(\forall\, x \in E_\varepsilon \quad \big|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)\big| \leqslant \varepsilon\Big).$$

Au total :

$$\left| \int \varphi_n - \int \varphi_m \right| \leqslant \varepsilon\big(m(E) + 2\,M\big),$$

toujours pour $n, m \geqslant N_\varepsilon$, ce qui montre bien que la suite de nombres réels :

$$\left(\int \varphi_n\right)_{n=1}^{\infty}$$

est convergente, puisqu'elle est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ complet !

Enfin, lorsque $f = 0$, on peut répéter les mêmes arguments, et obtenir (exercice) :

$$\left| \int \varphi_n \right| \leqslant \varepsilon\big(m(E) + M\big),$$

ce qui, sans doute aucun, assure que la limite en question vaut effectivement 0. □

En utilisant ce lemme, nous pouvons maintenant définir l'intégration des fonctions mesurables bornées qui sont à support dans un ensemble de mesure fini.

Proposition-Définition 3.3. *Étant donné une fonction mesurable bornée $f \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ à support contenu $\mathsf{supp}(f) \subset E$ dans un ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ de mesure $m(E) < \infty$ finie, on définit l'*intégrale de Lebesgue *de f comme la limite :*

$$\int f(x)\,dx := \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n(x)\,dx,$$

où $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite auxiliaire quelconque de fonctions étagées satisfaisant :
- *il existe une constante $M > 0$ avec $\big|\varphi_n\big| \leqslant M$ pour tout $n \geqslant 1$,*
- *$\mathsf{supp}(\varphi_n) \subset E$ pour tout $n \geqslant 1$,*
- *$\varphi_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ pour presque tout $x \in E$.*

Démonstration. Effectivement, vérifions que cette limite ne dépend *pas* de la suite φ_n, en prenant une *autre* suite $(\psi_n)_{n=1}^{\infty}$ jouissant des mêmes propriétés que $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$. Alors grâce au lemme précédent qui anticipait notre besoin argumentatif présent, la suite des différences :

$$\big(\eta_n\big)_{n=1}^{\infty} := \big(\varphi_n - \psi_n\big)_{n=1}^{\infty}$$

reste bornée — maintenant par $2\,M$ au lieu de M —, elle reste à support dans E (oui !), et elle tend ponctuellement vers 0, donc la fin du lemme en question assure que :

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty} \int \eta_n \\ &= \lim_{n\to\infty} \int \big(\varphi_n - \psi_n\big) \end{aligned}$$

ce qui veut justement dire, grâce à la linéarite, déjà acquise, de l'intégrale sur les fonctions étagées, que :

$$\lim_{n\to\infty} \int \varphi_n = \lim_{n\to\infty} \int \psi_n,$$

et conclut en longueur cette vérification *très* détaillée. □

Définition 3.4. Si une fonction mesurable bornée $f \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ possède un support de mesure finie :

$$m\big(\mathsf{supp}(f)\big) < \infty,$$

et si $E \subset \mathbb{R}^d$ est un sous-ensemble mesurable, on définit l'*intégrale de Lebesgue de f sur E* par :

$$\int_E f := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \cdot \mathbf{1}_E(x)\,dx.$$

Clairement, lorsque f elle-même est une fonction étagée, cette définition coïncide avec la précédente.

Sur notre route initiatique en direction de la bellissime et généralisssime *intégrale de Lebesgue*, nous atteignons donc par l'Étape 2 un niveau considérablement plus élevé que celui des fonctions étagées, puisque nous atteignons leurs limites ponctuelles bornées, limites qui ne sont pas forcément uniformes.

Bien entendu, toute cette élucubration par passages téméraires à la limite s'effondrerait si nous ne conservions pas les propriétés élémentaires fondamentales qu'on est en droit d'attendre de toute intégrale.

Proposition 3.5. *Soient f et g deux fonctions mesurables bornées $\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ à support dans un ensemble (commun) de mesure finie. Alors les quatre propriétés suivantes sont satisfaites.*

(i) Linéarité : *Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \big(a\,f + b\,g\big) \,=\, a \int_{\mathbb{R}^d} f + b \int_{\mathbb{R}^d} g.$$

(ii) Additivité domaniale : *Si F et G sont deux sous-ensembles disjoints de $\mathbb{R}^d$ de mesure finie, alors :*

$$\int_{F \cup G} f \,=\, \int_F f + \int_G f.$$

(iii) Monotonie : *Si $f \leqslant g$ en presque tout point, alors :*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \,\leqslant\, \int_{\mathbb{R}^d} g.$$

(iv) Inégalité du triangle : *La fonction valeur absolue $|f|$ est aussi une fonction mesurable bornée et l'on a :*

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} f \right| \,\leqslant\, \int_{\mathbb{R}^d} |f|.$$

Démonstration. Toutes ces propriétés se vérifient (exercice) en utilisant l'approximation par des fonctions étagées, à partir des propriétés que ces fonctions satisfont déjà en vertu de la Proposition 2.4 □

Nous sommes maintenant en position de démontrer le premier théorème important de convergence.

Théorème 3.6. [Convergence bornée] *Soit $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions mesurables $f_n \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant :*

- *il existe une constante $M > 0$ avec $\big|f_n\big| \leqslant M$ pour tout $n \geqslant 1$,*
- *il existe $E \subset \mathbb{R}^d$ mesurable avec $m(E) < \infty$ et $\mathsf{supp}(f_n) \subset E$ pour tout $n \geqslant 1$,*
- *$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ pour presque tout $x \in E$.*

Alors la fonction-limite f est mesurable, satisfait :

$$\mathsf{supp}(f) \,\subset\, E,$$

et de plus, on a surtout :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \big|f_n - f\big| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

d'où :

$$\int f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int f.$$

Démonstration. D'après les hypothèses, on voit immédiatement que la fonction-limite f est bornée par la même constante :

$$|f| \leqslant M.$$

On voit aussi que f s'annule hors de E. Clairement, l'inégalité du triangle pour les intégrales assure qu'il suffit d'établir la première convergence.

En fait, la démonstration est une reprise d'un argument basé sur le Théorème d'Egorov, qui nous avait permis dans le Lemme 3.2 de vérifier que l'intégrale était indépendante de la suite approximante de fonctions étagées.

En effet, si $\varepsilon > 0$ est arbitrairement petit et fixé, le Théorème d'Egorov nous permet de trouver un sous-ensemble mesurable $E_\varepsilon \subset E$ avec :

$$m\big(E\backslash E_\varepsilon\big) \leqslant \varepsilon,$$

en restriction auquel on a convergence uniforme :

$$f_n(x)\big|_{E_\varepsilon} \underset{\text{uniformément}}{\longrightarrow} f(x)\big|_{E_\varepsilon}.$$

Alors sur E_ε, nous pouvons trouver un entier $N_\varepsilon \gg 1$ assez grand pour que :

$$n \geqslant N_\varepsilon \implies \Big(\forall\, x \in E_\varepsilon \quad \big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \varepsilon\Big).$$

Rassemblant tous ces faits, nous pouvons estimer, toujours pour $n \geqslant N_\varepsilon$:

$$\begin{aligned}
\int_E \big|f_n(x) - f(x)\big|\,dx &= \int_{E_\varepsilon} \big|f_n(x) - f(x)\big|\,dx + \int_{E\backslash E_\varepsilon} \big|f_n(x) - f(x)\big|\,dx \\
&\leqslant \varepsilon\, m\big(E_\varepsilon\big) + 2M\, m\big(E\backslash E_\varepsilon\big) \\
&\leqslant \varepsilon\,\big(m(E) + 2M\big).
\end{aligned}$$

Comme $\varepsilon > 0$ était arbitraire, cela conclut. □

Observons que ce théorème de convergence exprime la possibilité d'intervertir intégration et passage à la limite :

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int \lim_{n\to\infty} f_n.$$

Une autre observation utile que nous pouvons faire au point que nous venons d'atteindre est la suivante.

Proposition 3.7. *Si $f \geqslant 0$ est une fonction réelle bornée à support dans un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ de mesure finie, et si $\int f = 0$, alors $f = 0$ presque partout.*

Démonstration. En effet, pour tout entier $k \geqslant 1$, introduisons l'ensemble :

$$E_k := \big\{x \in E\colon\ f(x) \geqslant 1/k\big\}.$$

Alors E_k est mesurable (exercice mental), et le fait que :

$$0 \leqslant \frac{1}{k}\,\mathbf{1}_{E_k}(x) \leqslant f(x)$$

implique par monotonie de l'intégrale :

$$0 \leqslant \frac{1}{k}\, m\big(E_k\big) \leqslant \int f = 0.$$

Par conséquent :

$$m\big(E_k\big) = 0 \qquad\qquad {\scriptstyle (\forall\, k \geqslant 1)}.$$

Enfin, puisque :

$$\big\{x\colon\ f(x) > 0\big\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k,$$

on conclut (exercice mental) que $f = 0$ presque partout. □

4. **Retour aux fonctions Riemann-intégrables**

Rappelons que dans un chapitre qui précède, nous avons formulé une question que la théorie de Riemann semblait dans l'incapacité de résoudre, à savoir la :

Question. *Si une suite de fonctions continues sur l'intervalle* $[0,1]$ *:*

$$f_n\colon\quad [0,1] \longrightarrow [0,1] \qquad\qquad {\scriptstyle (n \geqslant 1)},$$

possède en tout point $x \in [0,1]$ *une limite ponctuelle :*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x),$$

quelle théorie d'intégration pourrait être développée afin qu'on ait :

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx\,?$$

En effet, à la fin du chapitre sur l'ensemble de Cantor, nous avons produit un exemple de fonction bornée $f\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ limite de fonctions continues $f_n\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ dont les points de discontinuité sont de mesure strictement positive, de telle sorte que f n'est *pas* Riemann-intégrable, bien que la limite des nombres réels $\int_0^1 f_n$ existe.

Mais au niveau que nous venons d'atteindre dans la théorie plus puissante de Lebesgue, le Théorème 3.6 de convergence bornée que nous venons d'établir répond déjà en un certain sens à cette question, et ce Théorème 3.6 montre surtout que *notre fonction f de la fin du chapitre sur l'ensemble de Cantor est Lebesgue-intégrable*.

Or puisque nous allons maintenant montrer que les fonctions Riemann-intégrables sont aussi Lebesgue-intégrables (la réciproque n'étant pas vraie !), nous pouvons d'ores et déjà conclure que c'est l'intégrale de Lebesgue qu'il fallait inventer pour répondre à la question dont nous venons de rappeler l'énoncé ci-dessus.

Théorème 4.1. *Sur un intervalle compact* $[a,b] \Subset \mathbb{R}$, *soit* $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction bornée Riemann-intégrable. Alors f est mesurable, et son intégrale au sens de Riemann coïncide avec son intégrale au sens de Lebesgue :*

$$\int_{[a,b]}^{\mathsf{R}} f(x)\,dx = \int_{[a,b]}^{\mathsf{L}} f(x)\,dx.$$

Démonstration. Puisque l'intégrale de Riemann ne concerne par définition que les fonctions bornées, il existe une constante $M > 0$ telle que :

$$\big|f(x)\big| \leqslant M \qquad\qquad {\scriptstyle (\forall\, x \in [a,b])}.$$

Comme f est Riemann-intégrable, ses sommes de Darboux inférieure et supérieure associées à des subdivisions de plus en plus fines de l'intervalle $[a,b]$ permettent de définir deux suites :

$$\big(\varphi_k^-(x)\big)_{k=1}^{\infty} \qquad \text{et} \qquad \big(\varphi_k^+(x)\big)_{k=1}^{\infty}$$

de fonctions en escalier bornées :

$$\big|\varphi_k^-\big| \leqslant M \qquad \text{et} \qquad \big|\varphi_k^+\big| \leqslant M,$$

qui encadrent f de manière monotone :

$$\varphi_1^-(x) \leqslant \varphi_2^-(x) \leqslant \cdots \leqslant f(x) \leqslant \cdots \leqslant \varphi_2^+(x) \leqslant \varphi_1^+(x),$$

et dont les intégrales convergent vers celle de f :

$$(*) \qquad \lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]}^{\mathsf{R}} \varphi_k^-(x)\,dx = \int_{[a,b]}^{\mathsf{R}} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]}^{\mathsf{R}} \varphi_k^+(x)\,dx.$$

Plusieurs observations se manifestent à nous simultanément. Premièrement, il découle immédiatement des définitions que les intégrales de Riemann et de Lebesgue coïncident sur les fonctions en escalier, d'où :

$$(**) \quad \int_{[a,b]}^{\mathsf{R}} \varphi_k^-(x)\,dx = \int_{[a,b]}^{\mathsf{L}} \varphi_k^-(x)\,dx \qquad \text{et} \qquad \int_{[a,b]}^{\mathsf{R}} \varphi_k^+(x)\,dx = \int_{[a,b]}^{\mathsf{L}} \varphi_k^+(x)\,dx,$$

pour tout $k \geqslant 1$. Ensuite, sachant que toutes les φ_k^- et toutes les φ_k^+ sont mesurables, leurs limites :

$$\varphi_\infty^-(x) := \lim_{k\to\infty} \varphi_k^-(x) \qquad \text{et} \qquad \varphi_\infty^+(x) := \lim_{k\to\infty} \varphi_k^+(x)$$

sont mesurables elles aussi — car la mesurabilité est préservée par passage à la limite —, et bien entendu, on a :

$$\varphi_\infty^- \leqslant f \leqslant \varphi_\infty^+.$$

Plus avant, le Théorème 3.6 de convergence bornée assure que :

$$\lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]}^{\mathsf{L}} \varphi_k^-(x)\,dx = \int_{[a,b]}^{\mathsf{L}} \varphi_\infty^-(x)\,dx,$$

et que :

$$\lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]}^{\mathsf{L}} \varphi_k^+(x)\,dx = \int_{[a,b]}^{\mathsf{L}} \varphi_\infty^+(x)\,dx.$$

Ceci combiné à $(*)$ et $(**)$ donne :

$$\int_{[a,b]}^{\mathsf{L}} \big(\varphi_\infty^+(x) - \varphi_\infty^-(x)\big)\,dx = 0,$$

et comme par ailleurs $\varphi_k^+ - \varphi_k^- \geqslant 0$ donne à la limite :

$$\varphi_\infty^+ - \varphi_\infty^- \geqslant 0,$$

nous déduisons grâce à la Proposition 3.7 que :

$$\varphi_\infty^+ - \varphi_\infty^- = 0,$$

presque partout, et enfin que :

$$\varphi_\infty^+ = \varphi_\infty^- = f,$$

presque partout, ce qui démontre merveilleusement que f est mesurable !

Pour terminer, puisque :

$$\varphi_k^- \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f \qquad \text{et} \qquad f \underset{\infty\leftarrow k}{\longleftarrow} \varphi_k^+$$

presque partout, on a, *par définition même* de l'intégrale des fonctions mesurables bornées donnée dans cette section :

$$\lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]}^{\mathsf{L}} \varphi_k^-(x)\,dx = \int_{[a,b]}^{\mathsf{L}} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]}^{\mathsf{L}} \varphi_k^+(x)\,dx,$$

et en tenant à nouveau compte de $(*)$ et de $(**)$, on conclut que :

$$\int_{[a,b]}^{\mathsf{L}} f(x)\,dx = \int_{[a,b]}^{\mathsf{R}} f(x)\,dx,$$

comme annoncé. □

5. Étape 3 : Fonctions mesurables positives quelconques

Nous procédons maintenant à l'intégrale des fonctions mesurables positives quelconques, pas nécessairement bornées. Il sera important d'autoriser ces fonctions à prendre leurs valeurs dans l'ensemble étendu des nombres réels positifs :

$$\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\},$$

la valeur $+\infty$ étant bien entendu prise sur un ensemble mesurable. Rappelons la convention standard que le supremum d'un ensemble de nombres réels positifs vaut $+\infty$ lorsque, et seulement lorsque, l'ensemble en question est non borné.

Définition 5.1. L'*intégrale de Lebesgue* $\int_{\mathbb{R}^d} f$ d'une fonction mesurable positive :

$$f\colon \quad \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\},$$

est le nombre :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx := \sup\bigg\{ \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\,dx :\ g\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+ \text{ mesurable bornée avec } 0 \leqslant g \leqslant f \\ \text{à support dans un ensemble de mesure finie} \bigg\},$$

nombre qui appartient à $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.

Avec cette définition, deux cas se présentent : ou bien le supremum en question est fini, ou bien il est infini.

Définition 5.2. Dans les mêmes circonstances, lorsque :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx < \infty,$$

on dit que f *est Lebesgue-intégrable*, ou, simplement, *intégrable*.

En restriction à un ensemble mesurable, on peut aussi introduire la :

Définition 5.3. Si $E \subset \mathbb{R}^d$ est un sous-ensemble mesurable, si $f \geqslant 0$ est une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, alors $f \cdot \mathbf{1}_E$ est aussi positive mesurable sur $\mathbb{R}^d$, et on définit :

$$\int_E f(x)\,dx := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \cdot \mathbf{1}_E(x)\,dx.$$

Pour un réel $a > 0$, considérons les deux fonctions bien connues sur $\mathbb{R}^d$:

$$f_a(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|^a} & \text{lorsque } |x| \leqslant 1, \\ 0 & \text{lorsque } |x| > 1, \end{cases}$$
$$F_a(x) = \frac{1}{1+|x|^a}.$$

Comme en théorie de l'intégrale généralisée de Riemann (exercice de révision), f_a est Lebesgue-intégrable précisément quand $a < d$, tandis que F_a l'est précisément quand $a > d$.

Proposition 5.4. *L'intégrale des fonctions mesurables positives quelconques :*

$$f,\ g\colon \quad \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$$

satisfait les six propriétés suivantes.

(i) Linéarité positive : *Pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+$, on a :*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \big(a\,f + b\,g\big) = a \int_{\mathbb{R}^d} f + b \int_{\mathbb{R}^d} g.$$

(ii) Additivité domaniale : *Si F et G sont deux sous-ensembles disjoints de $\mathbb{R}^d$, alors :*

$$\int_{F \cup G} f = \int_F f + \int_G f.$$

(iii) Monotonie : *Si $0 \leqslant f \leqslant g$ en presque tout point, alors :*

$$0 \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} f \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} g.$$

(iv) *Si g est intégrable et si $0 \leqslant f \leqslant g$, alors f est aussi intégrable.*

(v) *Si f est intégrable, alors $f(x) < \infty$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$.*

(vi) *Si $\int f = 0$, alors $f(x) = 0$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$.*

Démonstration. Seule la première assertion **(i)** n'est pas une conséquence rapide des définitions, et pour l'établir, nous procéderons comme suit.

Prenons $a = b = 1$, et notons que si $0 \leqslant \varphi \leqslant f$ et si $0 \leqslant \psi \leqslant g$, où φ et ψ sont bornées à support dans un ensemble de mesure finie, alors :

$$\varphi + \psi \leqslant f + g,$$

et la somme $\varphi + \psi$ est aussi bornée à support dans un ensemble de mesure finie. Par conséquent, en prenant le supremum sur φ et le supremum sur ψ, on obtient :

$$\int f + \int g \leqslant \int \big(f + g\big).$$

Pour ce qui concerne l'inégalité inverse, supposons qu'une fonction $\eta \geqslant 0$ est bornée à support dans un ensemble de mesure finie avec :

$$\eta \leqslant f + g,$$

et introduisons la fonction mesurable :

$$\eta_1(x) := \mathsf{min}\big(f(x),\, \eta(x)\big),$$

ainsi que :

$$\eta_2 := \eta - \eta_1 \geqslant 0.$$

Évidemment, on a :

$$0 \leqslant \eta_1 \leqslant f,$$

et puisque η_2 est en tout point, ou bien égale à $\eta - f \leqslant g$, ou bien égale à $\eta - \eta = 0$, on a aussi :

$$0 \leqslant \eta_2 \leqslant g.$$

Clairement, η_1 et η_2 sont toutes deux bornées à support dans un ensemble de mesure finie. Nous en déduisons :

$$\begin{aligned} \int \eta &= \int \big(\eta_1 + \eta_2\big) \\ &= \int \eta_1 + \int \eta_2 \\ &\leqslant \int f + \int g. \end{aligned}$$

Enfin, en prenant le supremum sur η, nous obtenons l'inégalité inverse :

$$\int \big(f+g\big) \leqslant \int f + \int g,$$

ce qui conclut **(i)**.

Pour montrer **(v)**, introduisons pour tous $k \geqslant 1$ entiers les ensembles :

$$E_k := \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon\ f(x) \geqslant k\big\},$$

ainsi que :

$$E_\infty := \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon\ f(x) = \infty\big\}.$$

Alors il est clair que :

$$\infty > \int f \geqslant \int f \cdot \mathbf{1}_{E_k} \geqslant k\, m\big(E_k\big),$$

inégalité qui montre instantanément que :

$$m\big(E_k\big) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Mais puisque $(E_k)_{k=1}^{\infty}$ est une suite décroissante emboitée d'ensembles mesurables qui tend vers E_∞, un énoncé du chapitre qui précède assure que :

$$\begin{aligned} m\big(E_\infty\big) &= \lim_{k\to\infty} m\big(E_k\big) \\ &= 0, \end{aligned}$$

ce qui montre bien que f ne peut être infinie que sur un ensemble de mesure nulle.

Pour terminer, la démonstration de **(vi)** est essentiellement la même que celle de la Proposition 3.7. $\square$

Développons maintenant des théorèmes de convergence importants valables pour la classe des fonctions mesurables positives. Afin de motiver ces résultats, posons la :

Question 5.5. *Si une suite $(f_n)_{n=1}^\infty$ de fonctions mesurables positives $f_n \geqslant 0$ converge ponctuellement vers une certaine fonction-limite f :*

$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x),$$

elle-même alors automatiquement mesurable, est-il toujours vrai qu'on peut intervertir limite et intégration :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)\,dx \ \underset{n\to\infty}{\overset{??}{\longrightarrow}} \ \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx?$$

Malheureusement, tel n'est pas toujours le cas, comme le montre un exemple extrêmement simple. Sur $\mathbb{R}$, soit la suite de fonctions :

$$f_n(x) := \begin{cases} n & \text{lorsque } 0 < x < 1/n, \\ 0 & \text{lorsque } x \leqslant 0 \text{ ou lorsque } x \geqslant 1/n. \end{cases}$$

Il est clair que $f_n(x) \longrightarrow 0$ en tout point x, mais on a :

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x) = 1,$$

constamment pour tout entier $n \geqslant 1$.

Bien qu'essentiellement stupide, cet exemple possède quand même une vertu inattendue ! En effet, il fait suspecter intuitivement que l'intégrale de la fonction-limite doive toujours être inférieure à la limite des intégrales, et tel est bien le cas en général !

Théorème 5.6. [Lemme de Fatou] *Si une suite de fonctions mesurables positives sur $\mathbb{R}^d$:*

$$\big(f_n\big)_{n=1}^\infty,$$

converge presque partout vers une certaine fonction f, automatiquement mesurable :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

alors :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)\,dx.$$

Il importe de faire observer que dans cet énoncé, on n'exclut ni le cas $\int \lim_{n\to\infty} f_n = \infty$, ni le cas $\liminf_{n\to\infty} \int f_n = \infty$.

Démonstration. Soit une fonction mesurable g bornée à support dans un ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ de mesure finie telle que :

$$0 \leqslant g \leqslant f.$$

Si nous introduisons :

$$g_n(x) := \min\big(g(x),\, f_n(x)\big),$$

alors la suite $(g_n)_{n=1}^\infty$ et aussi mesurable, aussi à support dans E, et l'on a presque partout :

$$g_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g(x),$$

donc le Théorème 3.6 de convergence bornée assure que :

$$\int g_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int g.$$

Mais par construction on a aussi $g_n \leqslant f_n$ pour tout $n \geqslant 1$, d'où :

$$\int g_n \leqslant \int f_n,$$

et en prenant la limite à gauche, même si le membre de droite n'a pas de limite, sa limite inférieure lui demeure nécessairement supérieure :

$$\int g \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int f_n.$$

Enfin, en prenant le supremum à gauche sur toutes les fonctions g, on trouve bien par application de la Définition 5.1 :

$$\int f \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int f_n,$$

ce qui est la conclusion. □

Du Lemme de Fatou, on peut déduire les résultats les plus importants de la Théorie de l'Intégration de Lebesgue.

Théorème 5.7. *Soit $f\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ une fonction mesurable positive, et soit une suite :*

$$\big(f_n\big)_{n=1}^{\infty}$$

de fonctions mesurables encadrées en presque tout point $x \in \mathbb{R}^d$:

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant f(x),$$

et qui convergent presque partout ponctuellement vers f :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Alors :

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f.$$

Démonstration. Puisque $f_n(x) \leqslant f(x)$ presque partout, on a instantanément :

$$\int f_n \leqslant \int f,$$

d'où découle (exercice mental) :

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n \leqslant \int f.$$

Par ailleurs, le Lemme de Fatou qui précède complète ceci :

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n \leqslant \int f \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int f_n,$$

et comme une limite supérieure ne peut se trouver en-dessous d'une limite inférieure que lorsque toutes deux coïncident, c'est bien que la limite existe et vaut $\int f$! □

Ensuite, nous récoltons aussi comme fruit mûr un résultat très important de convergence pour les suites monotones de fonctions positives.

Théorème 5.8. [Convergence monotone, Beppo-Levi] *Soit une suite de fonctions mesurables positives sur* $\mathbb{R}^d$

$$f_n\colon \quad \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\},$$

qui est ponctuellement croissante :

$$f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x) \qquad\qquad \text{(en presque tout point } x \in \mathbb{R}^d\text{)},$$

donc qui converge vers une certaine fonction-limite mesurable :

$$f := \lim_{n\to\infty} f_n.$$

Alors on a :

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f.$$

Bien entendu, un énoncé analogue vaut aussi pour les suites de fonctions presque partout *ponctuellement décroissantes* de fonctions à valeurs dans $\{-\infty\} \cup \mathbb{R}_-$.

Démonstration. Il s'agit juste d'un corollaire immédiat du théorème qui précède ! □

Ce magnifique théorème de convergence monotone possède de nombreuses conséquences utiles. Par exemple, voici un énoncé spectaculaire qui produit de la convergence.

Théorème 5.9. *Soit une série :*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x),$$

de fonctions mesurables positives sur $\mathbb{R}^d$ *:*

$$a_k(x) \geqslant 0 \qquad\qquad (\forall\, k \geqslant 1,\ \text{presque partout}).$$

Alors pourvu seulement qu'on ait la finitude :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int a_k(x)\, dx < \infty,$$

la série :

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$$

converge presque partout vers une certaine fonction-limite mesurable finie.

Démonstration. Introduisons en effet les sommes partielles d'ordre n :

$$f_n(x) := \sum_{k=1}^{n} a_k(x),$$

ainsi que la somme infinie complète :

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x).$$

Bien entendu, les fonctions f_n sont mesurables, leur suite est croissante :

$$f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x) \qquad\qquad (\forall\, k \geqslant 1,\ \text{presque partout}),$$

et l'on a en admettant toujours la valeur ∞ pour les fonctions :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \,=\, f(x) \qquad\qquad \text{(presque partout)}.$$

Mais alors puisque :

$$\int f_n \,=\, \sum_{k=1}^{n} \int a_k(x)\,dx,$$

le Théorème de convergence monotone assure que :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int a_k(x)\,dx \,=\, \int \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)\,dx.$$

Si donc on a comme cela a été supposé dans l'énoncé qu'il faut démontrer :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int a_k(x)\,dx \,<\, \infty,$$

cette dernière équation implique la finitude de l'intégrale :

$$\int \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)\,dx \,<\, \infty,$$

ce qui signifie précisément que la fonction-limite :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$$

est *Lebesgue-intégrable*, et nous avons déjà vu que toute fonction positive Lebesgue-intégrable prend presque partout des valeurs *finies*. □

Donnons encore deux belles illustrations de ce dernier énoncé.

Théorème 5.10. [Borel-Cantelli] *Si une collection infinie dénombrable :*

$$E_1,\, E_2,\, \dots,\, E_k,\, \dots,$$

de sous-ensembles $E_k \subset \mathbb{R}^d$ satisfait :

$$\sum_{k=1}^{\infty} m\big(E_k\big) \,<\, \infty,$$

alors l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^d$ qui appartiennent à une infinité de E_k est de mesure nulle.

Démonstration. Introduisons en effet les fonctions indicatrices de ces ensembles :

$$a_k(x) \,:=\, \mathbf{1}_{E_k}(x),$$

et observons alors qu'un point $x \in \mathbb{R}^d$ appartient à une infinité de E_k précisément lorsque :

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) \,=\, \infty.$$

Mais par contraste, notre hypothèse que la somme des mesures de E_k est *finie* se ré-exprime comme la finitude :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int a_k(x)\,dx \,<\, \infty,$$

et nous venons à l'instant de voir dans le théorème qui précède que cela forçait la série positive $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ à prendre des valeurs finies excepté sur un ensemble de mesure nulle, et ainsi, Borel-Cantelli tombe de l'arbre mathématique comme une pomme de Newton ! □

La seconde illustration servira ultérieurement dans de nombreux contextes.

Proposition 5.11. *La fonction :*

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{|x|^{d+1}} & \text{lorsque } x \neq 0, \\ 0 & \text{lorsque } x = 0, \end{cases}$$

est Lebesgue-intégrable hors de toute boule de rayon $\varepsilon > 0$, et son intégrale correspondante satisfait l'inégalité :

$$\int_{|x|\geqslant\varepsilon} f(x)\,dx \,\leqslant\, \frac{C}{\varepsilon},$$

pour une certaine constante $C > 0$.

Démonstration. En partant de l'anneau ouvert :

$$\mathscr{A} := \big\{x \in \mathbb{R}^d\colon\ 1 \leqslant |x| < 2\big\},$$

pour tout entier $k \geqslant 1$, introduisons ses dilatés d'un facteur $2^{k-1}\varepsilon$:

$$\mathscr{A}_k := \big\{x \in \mathbb{R}^d\colon\ 2^{k-1}\varepsilon \,\leqslant\, |x| \,<\, 2^k\varepsilon\big\},$$

dont la réunion infinie est *disjointe* et remplit :

$$\big\{\varepsilon \,\leqslant\, |x| \,\leqslant\, \infty\big\} \,=\, \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathscr{A}_k.$$

Introduisons aussi la série infinie :

$$g(x) := \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x),$$

constituée des fonctions :

$$g_k(x) \,:=\, \frac{1}{(2^{k-1}\varepsilon)^{d+1}}\,\mathbf{1}_{\mathscr{A}_k}(x).$$

Comme la fonction $|x| \longmapsto \frac{1}{|x|^{d+1}}$ est décroissante, on se convainc aisément qu'en restriction à $\mathscr{A}_k$, on a :

$$f(x) \,\leqslant\, g_k(x) \qquad\qquad {\scriptstyle (x\,\in\,\mathscr{A}_k)},$$

puis :

$$f(x) \,\leqslant\, g(x) \qquad\qquad {\scriptstyle (\varepsilon\,\leqslant\,|x|\,\leqslant\,\infty)},$$

d'où :

$$\int_{|x|\geqslant\varepsilon} f \,\leqslant\, \int_{|x|\geqslant\varepsilon} g.$$

D'un autre côté, grâce aux propriétés d'invariance par dilatation de la mesure de Lebesgue, on a :

$$m\big(\mathscr{A}_k\big) = \big(2^{k-1}\varepsilon\big)^d\, m\big(\mathscr{A}\big) \qquad\qquad {\scriptstyle (k \geqslant 1)},$$

et comme g est manifestement une fonction étagée :

$$\begin{aligned}\int_{|x|\geqslant\varepsilon} g &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m\big(\mathscr{A}_k\big)}{(2^{k-1}\varepsilon)^{d+1}} \\ &= m\big(\mathscr{A}\big) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2^{k-1}\varepsilon)^{d}}{(2^{k-1}\varepsilon)^{d+1}} \\ &= \frac{m(\mathscr{A})}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} \\ &= \frac{2\,m(\mathscr{A})}{\varepsilon},\end{aligned}$$

ce qui explicite une constante possible $C > 0$! □

Concluons la présentation de cette floppée de théorèmes de convergence par celui qui les chapeaute tous.

Théorème 5.12. [Inégalité généralissime de Fatou] *Étant donné une suite quelconque de fonctions mesurables positives sur* $\mathbb{R}^d$ *:*

$$\big(f_n\big)_{n=1}^{\infty},$$

la fonction limite inférieure (positive) :

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x),$$

est toujours automatiquement mesurable, et on a en toute généralité maximalissime :

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^d} \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)\,dx.}$$

La force extrême de cet énoncé, en effet, c'est qu'absolument aucune hypothèse de convergence n'est faite : il est vrai dans toutes les situations imaginables !

Démonstration. D'après les propriétés standard de la notion de limite inférieure (exercice : à réviser !) d'une suite de nombres réels, on a :

$$\liminf_{n\to\infty} \underbrace{\int f_n}_{\in [0,\infty]} = \lim_{k\to\infty} \Bigg(\underbrace{\inf_{n\geqslant k} \int f_n}_{\substack{\text{suite croissante} \\ \text{en fonction de } k}} \Bigg).$$

De manière similaire, la limite inférieure de la suite de fonctions :

$$\big(f_n(x)\big)_{n=1}^{\infty}$$

se détermine comme :

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{k\to\infty} \Big(\underbrace{\inf_{n\geqslant k} f_n(x)}_{=:\, g_k(x)} \Big).$$

Il est alors avisé d'introduire la suite auxiliaire de fonctions définie pour $k \geqslant 1$ entier par :

$$g_k(x) := \inf_{n \geqslant k} f_n(x),$$

qui satisfait donc :

$$\lim_{k \to \infty} g_k(x) = \liminf_{n \to \infty} f_n(x),$$

et qui est manifestement croissante :

$$g_k \leqslant g_{k+1} \qquad\qquad {\scriptstyle (k \geqslant 1)}.$$

Mais alors, tel le fantôme phosphorescent d'un Lucky-Luke solitaire perdu au milieu des elfes radioactifs du Plateau de Saclay, en dégainant infiniment plus vite que l'ombre insaisissable de notre intuition mathématique intime, qu'avons-nous de mieux à faire que d'appliquer à une vitesse supérieure à celle de la lumière le Théorème 5.8 de convergence monotone ?

Oui, *dégainons Beppo-Levi calibre 58 :*

$$\int \lim_{k \to \infty} g_k = \lim_{k \to \infty} \int g_k \,!$$

Ensuite, comme pour tout $n \geqslant k$, on a :

$$0 \leqslant g_k \leqslant f_n,$$

une intégration donne :

$$\int g_k \leqslant \int f_n \qquad\qquad {\scriptstyle (\forall\, n \geqslant k)},$$

puis :

$$\int g_k \leqslant \inf_{n \geqslant k} \int f_n,$$

ce qui, en prenant la limite quand k tend vers l'infini, donne justement parce que Beppo-Levi s'applique :

$$\int \lim_{k \to \infty} g_k \leqslant \lim_{k \to \infty} \left(\inf_{n \geqslant k} \int f_n \right),$$

ce qui est bien (exercice visuel) l'inégalité établie par le *Général en Chef*, Fatou, de notre Grande Armée de l'Intégration théorique (sans blaguer, Fatou était un mathématicien très profond, qui n'a peut-être pas bénéficié de toute la reconnaissance posthume qu'il mérite). □

6. Étape 4 : Fonctions Lebesgue-intégrables au sens le plus général possible

Définition 6.1. Une fonction mesurable réelle quelconque :

$$f\colon \quad \mathbb{R}^d \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

est dite *Lebesgue-intégrable* lorsque sa valeur absolue :

$$|f|\colon \quad \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$$

— une fonction elle aussi mesurable —, est Lebesgue-intégrable d'intégrale *finie :*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f| < \infty,$$

au sens de la Définition 5.1 qui précède.

En fait, on peut donner un sens précis et naturel à la valeur de l'intégrale de f en introduisant les deux fonctions auxiliaires positives :

$$f^+(x) := \mathsf{max}\big(0,\, f(x)\big) \qquad \text{et} \qquad f^-(x) := -\,\mathsf{min}\big(f(x), 0\big),$$

lesquelles sont mesurables ; en effet, on a déjà vu dans le chapitre sur l'intégrale de Riemann que l'on peut écrire simultanément :

$$\begin{aligned} f &= f^+ - f^-, \\ |f| &= f^+ + f^-, \end{aligned}$$

de telle sorte qu'en tenant compte aussi des deux majorations :

$$0 \leqslant f^- \leqslant |f| \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant f^+ \leqslant |f|,$$

montrant que f^- et f^+ sont Lebesgue-intégrables lorsque f *i.e.* $|f|$ l'est, la définition suivante apparaît comme étant parfaitement naturelle.

Définition 6.2. La *valeur* de l'intégrale de Lebesgue d'une fonction Lebesgue-intégrable est :

$$\int f := \int f^+ - \int f^-.$$

En vérité, on peut rencontrer dans la pratique de multiples décompositions :

$$f = f_1 - f_2,$$

où f_1 et f_2 sont deux fonctions mesurables positives, et alors il est légitime de se demander si l'on est toujours en droit d'écrire :

$$\int f = \int f_1 - \int f_2?$$

Oui, c'est bien le cas, parce que si f jouit d'une *autre* telle décomposition :

$$f = g_1 - g_2,$$

avec $g_1 \geqslant 0$ et $g_2 \geqslant 0$, il vient :

$$f_1 + g_2 = g_1 + f_2,$$

et comme les deux côtés de cette équation consistent en des fonctions mesurables positives, la linéarité déjà vue de l'intégrale sur les fonctions positives donne :

$$\int f_1 + \int g_2 = \int g_1 + \int f_2,$$

ce qui, puisque toutes ces intégrales sont des nombres réels finis, donne bien l'indépendance escomptée :

$$\int f_1 - \int f_2 = \int g_1 - \int g_2.$$

Intermède spéculatif crucial. Maintenant, lorsqu'on parcourt en arrière mentalement, synthétiquement et intelligemment toute la théorie qui a été développée jusqu'à présent, *il importe au plus haut point d'effectuer une mise au point capitale concernant la pensée interne relative au concept intuitif de « presque partout ».*

Tout d'abord, nous savons que l'intégrabilité d'une fonction f et la valeur de son intégrale $\int f$ restent inchangées lorsqu'on modifie à souhait f sur des ensembles de mesure nulle. Par conséquent, il est à la fois naturel et utile dans le contexte de la *Théorie de l'intégration* d'*adopter la convention fondamentale que les fonctions seront essentiellement non définies sur les ensembles de mesure nulle*.

Qui plus est, puisque nous savons aussi qu'une fonction Lebesgue-intégrable f prend des valeurs finies presque partout, on prolonge cette convention fondamentale en admettant, par exemple, que l'addition $f+g$ de deux fonctions intégrables f et g est toujours possible, puisque l'ambiguïté causée par la non-définition de f et de g sur certains ensembles de mesure nulle, et aussi le fait que f et g peuvent éventuellement prendre des valeurs infinies, ces deux difficultés ne concernent au total qu'un ensemble négligeable et $\int$*-invisible* parce que de mesure nulle.

Enfin, lorsqu'on parle d'une fonction f, il devient alors naturel d'*admettre par convention qu'on considère simultanément la collection de toutes les fonctions qui diffèrent de f seulement sur un ensemble de mesure nulle*.

De simples applications des définitions, accompagnées des résultats obtenus jusqu'à présent, montrent que les propriétés élémentaires de l'intégrale sont héritées par la Définition 6.1 la plus générale.

Proposition 6.3. *L'intégrale de Lebesgue des fonctions Lebesgue-intégrables est linéaire, additive, monotone, et elle satisfait l'inégalité du triangle.* □

Rassemblons maintenant deux résultats qui non seulement sont instructifs, éclairants et intéressants en eux-mêmes, mais s'avéreront aussi utiles pour la démonstration du célèbrissime *Théorème de la convergence dominée* de Lebesgue qui va suivre.

Théorème 6.4. *Si f est une fonction Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}^d$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble de mesure finie B — une boule assez grande par exemple — tel que :*

$$\int_{\mathbb{R}^d \backslash B} |f| \leqslant \varepsilon.$$

Démonstration. Après remplacement de f par $|f|$, on peut supposer que $f \geqslant 0$.

Si B_N désigne la boule fermée centrée à l'origine de rayon un entier $N \geqslant 1$, introduisons la suite de fonctions mesurables positives « tronquées » :

$$f_N(x) := f(x) \cdot \mathbf{1}_{B_N}(x),$$

qui est manifestement croissante :

$$0 \leqslant f_N(x) \leqslant f_{N+1}(x),$$

et qui converge ponctuellement vers f partout :

$$\lim_{N\to\infty} f_N(x) = f(x).$$

Or grâce au Théorème 5.8 de convergence monotone, on a :

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_N = \int_{\mathbb{R}^d} f.$$

Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe un entier $N = N_\varepsilon \gg 1$ assez grand pour que :

$$\big(0 \leqslant\big) \qquad \int_{\mathbb{R}^d} f - \int_{\mathbb{R}^d} f \cdot \mathbf{1}_{B_N} \leqslant \varepsilon,$$

et alors puisque :

$$\mathbf{1}_{\mathbb{R}^d \backslash B_N} \,=\, \mathbf{1}_{\mathbb{R}^d} - \mathbf{1}_{B_N},$$

il vient :

$$\int_{\mathbb{R}^d \backslash B_N} f \,\leqslant\, \varepsilon,$$

comme nous nous étions proposé de le faire voir. □

Intuitivement, les fonctions intégrables doivent en un certain sens s'annuler à l'infini, puisque leurs intégrables sont finies, mais attention ! une telle annulation n'est valable qu'au *sens intégral*, et elle est en général *fausse au sens ponctuel* — penser en effet à une fonction qui contient une infinité de pics s'enfuyant vers l'infini dont les contributions intégrales deviennent de plus en plus petites telle que par exemple (exercice) la fonction :

$$f\colon \quad \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

définie précisément par :

$$f(x) \,=\, \begin{cases} n & \text{lorsque } \; x \,\in\, \big[n,\, n + \frac{1}{n^3}\big] \; \text{ avec } \; n \geqslant 2 \; \text{ entier,} \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Théorème 6.5. *Si f est une fonction Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}^d$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ tel que pour tout sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ avec :*

$$m(E) \,\leqslant\, \delta,$$

on a :

$$\int_E |f| \,\leqslant\, \varepsilon.$$

Cette dernière condition est connue sous le nom d'*absolue continuité* de l'intégrale d'une fonction par rapport à la mesure de Lebesgue.

Démonstration. Après remplacement de f par $|f|$, on peut à nouveau supposer que $f \geqslant 0$.

Pour $N \geqslant 1$ entier, introduisons l'ensemble :

$$F_N \,:=\, \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon\; f(x) \leqslant N\big\},$$

et la suite de fonctions :

$$f_N(x) := f(x) \cdot \mathbf{1}_{F_N}(x) \qquad\qquad {\scriptstyle (N \geqslant 1)},$$

satisfaisant visiblement :

$$0 \,\leqslant\, f_N \,\leqslant\, N.$$

Comme dans la démonstration du théorème qui précède, cette suite de fonctions positives est croissante :

$$0 \,\leqslant\, f_N(x) \,\leqslant\, f_{N+1}(x),$$

avec de plus sur $\mathbb{R}^d \backslash \{f = \infty\}$ la convergence presque partout :

$$f(x) = \lim_{N \to \infty} f_N(x),$$

donc le Théorème 5.8 de convergence monotone assure, pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, l'existence d'un entier $N = N_\varepsilon > 0$ assez grand pour que :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \big(f - f_N\big) \,\leqslant\, \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si maintenant nous prenons $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ avec :

$$N\,\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

alors pour *tout* sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ de mesure petite :

$$m(E) \leqslant \delta,$$

on peut majorer :

$$\begin{aligned}(0 \leqslant) \qquad \int_E f &= \int_E (f - f_N) + \int_E f_N \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} (f - f_N) + \int_E f_N \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + N\,m(E) \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2},\end{aligned}$$

ce qui conclut ! □

Nous sommes enfin parvenus au terme de ce long périple théorique dévolu à l'intégrale de Lebesgue, et c'est pour fêter ensemble ce moment intellectuel important que nous offrons au lecteur comme bouquet final le théorème le plus frappant et le plus utile de toute la théorie.

Théorème 6.6. [Théorème dit de la *convergence dominée* dû à Lebesgue] *Si une suite* $(f_n)_{n=1}^\infty$ *de fonctions mesurables :*

$$f_n \colon \quad \mathbb{R}^d \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

converge ponctuellement vers une certaine fonction-limite :

$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x) \qquad\qquad {\scriptstyle (\text{pour presque tout } x \in \mathbb{R}^d)},$$

tout en restant constamment majorée *presque partout en valeur absolue par une fonction positive fixe* $g \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ *:*

$$\boxed{\big|f_n(x)\big| \leqslant g(x) \qquad\qquad {\scriptstyle (\forall\, n \geqslant 1)},}$$

qui est Lebesgue-intégrable :

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^d} g < \infty,}$$

alors on a :

$$\lim_{n\to\infty} \int \big|f_n - f\big| = 0,$$

d'où aussi :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int \lim_{n\to\infty} f_n.}$$

Bien entendu, l'énoncé est tout aussi valable lorsque les fonctions f_n et g sont définies sur un sous-ensemble mesurable fixé $E \subset \mathbb{R}^d$. L'*intérêt phénoménal* de ce théorème, par rapport à ceux de la théorie de Riemann qui exigeaient en général d'abondantes doses de *convergence uniforme*, c'est que la seule hypothèse de domination par une fonction d'intégrale finie suffit à justifier rigoureusement l'interversion entre limite et intégrale !

Rendez-vous compte ! L'exigence de convergence uniforme part en fumée !

Lebesgue, bien à tort, se montra confus des dieux qu'il avait destitués, des statues qu'il avait renversées de leur socle. Arnaud Denjoy

Démonstration. Pour tout entier $N \geqslant 1$, introduisons l'ensemble simultanément tronqué à l'horizontale et à la verticale :

$$G_N := \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon \, |x| \leqslant N \text{ et } g(x) \leqslant N\big\},$$

ainsi que la suite de fonctions croissantes :

$$g_N(x) \,:=\, g(x) \cdot \mathbf{1}_{G_N}.$$

Une convergence monotone de ces g_N vers g entièrement analogue à celle qui avait lieu dans la démonstration du Théorème 6.4 assure alors (exercice) que pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe un entier $N = N_\varepsilon \gg 1$ assez grand pour que :

$$\int_{\mathbb{R}^d \backslash G_N} g \,\leqslant\, \varepsilon.$$

Par ailleurs, pour un tel N fixé, la suite de fonctions :

$$f_n \cdot \mathbf{1}_{G_N} \qquad\qquad {\scriptstyle (n \geqslant 1)}$$

reste bornée par N en valeur absolue puisque $|f_n| \leqslant g \leqslant N$ sur G_N, et comme cette suite reste de plus à support contenu dans l'ensemble de mesure finie G_N, le Théorème 3.6 de convergence bornée s'applique et fournit un entier $n = n_\varepsilon \gg 1$ assez grand pour que :

$$n \,\geqslant\, n_\varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad \int_{G_N} \big|f_n - f\big| \,\leqslant\, \varepsilon.$$

Grâce à ces deux inégalités, nous pouvons alors aisément majorer :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \big|f_n - f\big| \,&=\, \int_{G_N} \big|f_n - f\big| + \int_{\mathbb{R}^d \backslash G_N} \big|f_n - f\big| \\ &\leqslant\, \int_{G_N} \big|f_n - f\big| + 2 \int_{\mathbb{R}^d \backslash G_N} g \\ &\leqslant\, \varepsilon + 2\,\varepsilon, \end{aligned}$$

toujours pour $n \geqslant n_\varepsilon$, ce qui achève la démonstration de ce grand théorème. □

7. Fonctions à valeurs complexes

Lorsque les fonctions f que l'on considère sont à valeurs complexes, elles se décomposent :

$$f(x) = u(x) + i\,v(x),$$

en partie réelle u et en partie imaginaire v. Bien entendu, la fonction f est mesurable si et seulement si u et v le sont.

Définition 7.1. On dit qu'une fonction à valeurs complexes $f = u + i\,v$ définie sur $\mathbb{R}^d$ est *Lebesgue-intégrable* lorsque son module :

$$\big|f(x)\big| \,=\, \sqrt{u(x)^2 + v(x)^2}$$

est Lebesgue-intégrable d'intégrale finie :

$$\int |f| < \infty.$$

Rappelons les inégalités élémentaires :

$$\big|u(x)\big| \leqslant \big|f(x)\big| \qquad \text{et} \qquad \big|v(x)\big| \leqslant \big|f(x)\big|,$$

ainsi que :

$$\big|f(x)\big| \leqslant \big|u(x)\big| + \big|v(x)\big|,$$

cette dernière découlant de l'inégalité $(a+b)^{1/2} \leqslant a^{1/2} + b^{1/2}$, valable pour $a, b \geqslant 0$ (exercice).

Ces inégalités extrêmement simples font d'ailleurs voir qu'une fonction à valeurs complexes est Lebesgue-intégrable *si et seulement si* ses parties réelle et imaginaire le sont, et dans ce cas :

$$\int f(x)\,dx = \int u(x)\,dx + i\int v(x)\,dx.$$

Définition 7.2. Étant donné un sous-ensemble mesurable quelconque $E \subset \mathbb{R}^d$, on dit qu'une fonction mesurable :

$$f\colon \quad E \longrightarrow \mathbb{C}$$

est *Lebesgue-intégrable* lorsque $f \cdot \mathbf{1}_E$ l'est sur $\mathbb{R}^d$ au sens de la définition qui précède, et dans ce cas, on note :

$$\int_E f = \int_{\mathbb{R}^d} f \cdot \mathbf{1}_E.$$

La collection de toutes les fonctions à valeurs complexes intégrables sur un ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ forme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, comme on s'en convainc aisément ; en effet, si f et g sont intégrables, alors $f+g$ l'est aussi puisque l'inégalité du triangle donne :

$$\big|(f+g)(x)\big| \leqslant \big|f(x)\big| + \big|g(x)\big|,$$

et puisque la monotonie de l'intégrale donne :

$$\int_E \big|f+g\big| \leqslant \int_E |f| + \int_E |g| < \infty.$$

Enfin, il est clair que pour $\lambda \in \mathbb{C}$, si f est intégrable, $\lambda\, f$ l'est aussi.

8. L'espace L^1 des fonctions intégrables : complétude ; densités

Le fait que les fonctions intégrables forment un $\mathbb{C}$-espace vectoriel constitue une propriété fondamentale qui est de type *algébrique*.

Une propriété de type *analytique* encore plus importante mais bien moins élémentaire — *et qui n'était absolument pas satisfaite en théorie de Riemann* —, est que ce $\mathbb{C}$-espace vectoriel est *complet* pour la quantité positive naturelle :

$$\int |f|,$$

laquelle va s'avérer être une vraie norme.

Définition 8.1. La *norme* d'une fonction Lebesgue-intégrable $f\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ est la quantité :

$$\|f\|_{L^1} = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} := \int_{\mathbb{R}^d} \big|f(x)\big|\,dx.$$

La collection de toutes les fonctions Lebesgue-intégrables munie de cette norme constitue un espace noté :

$$L^1(\mathbb{R}^d),$$

dont il s'agit maintenant de préciser rigoureusement la définition. En fait, on sait déjà par la Propositon 5.4 que :

$$\big\|f\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad f = 0 \ \text{ presque partout},$$

et cette propriété reflète la pratique intuitive que nous avons déjà implicitement adoptée de ne pas distinguer deux fonctions qui coïncident en presque tout point. Avec cela en tête, nous pouvons fournir le concept rigoureux attendu.

Définition 8.2. L'espace $L^1(\mathbb{R}^d)$ est l'espace des classes d'équivalence de fonction mesurables

$$f\colon \quad \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$$

Lebesgue-intégrables :

$$\big\|f\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} := \int_{\mathbb{R}^d} \big|f\big| < \infty,$$

où deux telles fonctions f_1 et f_2 sont équivalentes :

$$f_1 \sim f_2$$

si et seulement si elles sont égales en presque tout point $x \in \mathbb{R}^d$.

Toutefois, il est fréquemment admis de considérer qu'un élément $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ est une fonction intégrable spécifique, même si en toute rigueur, on devrait parler de la classe d'équivalence d'une telle f.

Bien entendu, la norme $\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$ ne dépend pas du choix d'un représentant dans une classe d'équivalence. De plus, $L^1(\mathbb{R}^d)$ hérite la propriété d'être un espace vectoriel. Les propriétés élémentaires de $L^1(\mathbb{R}^d)$ sont résumées dans l'énoncé suivant.

Proposition 8.3. *Si f et g sont deux fonctions appartenant à $L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$, alors :*

(i) $\|\lambda\, f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = |\lambda|\, \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$;

(ii) $\|f + g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$;

(iii) $\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = 0$ *si et seulement si* $f = 0$ *presque partout ;*

(iv) $d(f,g) := \|f - g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$ *définit une métrique sur* $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. Pour ce qui concerne **(iv)**, il s'agit de vérifier que $d(f,g)$ satisfait les trois axiomes d'une métrique, ce qui est manifestement aisé. □

Définition 8.4. Un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V muni d'une métrique $d(\cdot,\cdot)$ est dit *complet* lorsque toute suite de Cauchy $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de points $x_n \in V$ admet une limite $x_\infty \in V$ *qui appartient encore à* V, à savoir plus précisément toute cauchycité :

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,N(\varepsilon) \geqslant 1 \quad \Big(n,\, m \geqslant N(\varepsilon) \implies d\big(x_n, x_m\big) \leqslant \varepsilon\Big),$$

implique convergence interne à l'espace :

$$\exists\, x_\infty \in V \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = x_\infty.$$

Notre objectif principal est de montrer maintenant que la Théorie de l'intégration de Lebesgue *complète* celle de Riemann, en un sens qui est simultanément fort et signifiant mathématiquement.

Théorème 8.5. [Riesz-Fischer] *Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $L^1\big(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}\big)$ muni de la métrique dérivée de sa norme :*

$$d\big(f, g\big) := \int_{\mathbb{R}^d} \big|f - g\big|,$$

est complet.

Démonstration. Étant donné une suite de Cauchy quelconque $(f_n)_{n=1}^\infty$ dans $L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N(\varepsilon) \geqslant 1 \quad \Big(n,\, m \geqslant N(\varepsilon) \implies \big\|f_n - f_m\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon\Big),$$

il s'agit donc d'établir qu'il existe une fonction mesurable intégrable — *a posteriori* unique — :

$$f_\infty \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}),$$

laquelle est donc encore d'intégrale finie, telle que :

$$0 = \lim_{n\to\infty} \big\|f_n - f_\infty\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Le plan de la démonstration consiste à extraire une sous-suite appropriée $(f_{n_k})_{k=1}^\infty$ de $(f_n)_{n=1}^\infty$ qui convergera presque partout ponctuellement vers une certaine fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, et à faire voir ensuite que cette sous-suite converge aussi vers f en norme L^1 ce qui produira la fonction $f_\infty := f$ recherchée.

Or dans des circonstances idéales, on peut espérer que la suite complète $(f_n)_{n=1}^\infty$ elle-même converge presque partout vers une limite $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, mais malheureusement, une telle convergence n'a pas toujours lieu pour les suites de Cauchy quelconques dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, voir à ce sujet l'Exercice 54. Cependant, il va se trouver que si la convergence au sens de Cauchy est *assez rapide* en norme $L^1(\mathbb{R}^d)$, alors la convergence ponctuelle presque partout va devenir possible, et ce sera donc pour accélérer la convergence au sens de Cauchy que nous devrons extraire une sous-suite $(f_{n_k})_{k=1}^\infty$ de $(f_n)_{n=1}^\infty$.

Plus précisément, pour $k = 1, 2, 3, \dots$, choisissons successivement des $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$ de plus en plus petits auxquels sont associés des entiers :

$$N\big(\tfrac{1}{2}\big),\ N\big(\tfrac{1}{2^2}\big),\ N\big(\tfrac{1}{2^3}\big),\ \dots\dots,\ N\big(\tfrac{1}{2^k}\big),\ \dots\dots,$$

garantissant que :

$$n,\, m \geqslant N\big(\tfrac{1}{2^k}\big) \implies \big\|f_n - f_m\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \tfrac{1}{2^k},$$

et introduisons la sous-suite d'entiers :

$$n_k := \max\Big(N\big(\tfrac{1}{2^1}\big),\ \dots,\ N\big(\tfrac{1}{2^k}\big)\Big),$$

qui est manifestement croissante :

$$1 \leqslant n_k \leqslant n_{k+1}.$$

Grâce à ce choix, on produit donc une sous-suite $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ qui satisfait :

$$\big\| f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \tfrac{1}{2^k} \qquad\qquad (\forall\, k \geqslant 1).$$

Quitte à augmenter légèrement n_k en posant plutôt par exemple :

$$n_k := k + \max\Big(N\big(\tfrac{1}{2^1}\big), \ \dots, \ N\big(\tfrac{1}{2^k}\big)\Big),$$

on peut supposer la croissance stricte :

$$n_k < n_{k+1},$$

ce qui est certainement avisé pour avoir une vraie sous-suite.

Introduisons ensuite une série de fonctions dont la convergence sera établie ultérieurement :

$$(*) \qquad\qquad f(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \big(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) \big),$$

ainsi que la série majorante associée, *via* l'inégalité triangulaire infinie :

$$g(x) = \big| f_{n_1}(x) \big| + \sum_{k=1}^{\infty} \big| f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) \big|.$$

Introduisons aussi, pour tout entier $K \geqslant 1$, les *sommes partielles* d'ordre K :

$$\begin{aligned} S_K(f)(x) &= f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{K} \big(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) \big) \\ &= f_{n_{K+1}}(x), \end{aligned}$$

qui se contractent par téléscopie, et aussi les majorantes de ces sommes partielles :

$$S_K(g)(x) = \big| f_{n_1}(x) \big| + \sum_{k=1}^{K} \big| f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) \big|,$$

ces dernières sommes ne se simplifiant en général *pas*. En tout cas, l'inégalité triangulaire donne au moins :

$$\begin{aligned} \big\| S_K(g) \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \big\| f_{n_1} \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \sum_{k=1}^{K} \big\| f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant \big\| f_{n_1} \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{2^k} \\ &\leqslant \big\| f_{n_1} \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\ &= \big\| f_{n_1} \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + 1 \\ &< \infty, \end{aligned}$$

ce dernier majorant étant uniforme, *i.e.* indépendant de $K \geqslant 1$.

Considérons maintenant la suite de fonctions :

$$\big(S_K(g) \big)_{K=1}^{\infty},$$

qui est manifestement positive croissante :

$$0 \leqslant S_K(g) \leqslant S_{K+1}(g),$$

et qui tend par définition vers la fonction :

$$g(x) = \lim_{K \to \infty} S_K(g)(x),$$

à valeurs dans $[0, +\infty]$. On peut alors appliquer le Théorème 5.8 de convergence monotone qui nous donne :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} g &= \lim_{K\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} S_K(g) \\ &\leqslant \big\|f_{n_1}\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + 1 \\ &< \infty,\end{aligned}$$

ce qui fait voir que g est Lebesgue-intégrable — information fort agréable !

Immédiatement, de :

$$|f| \leqslant g,$$

on tire que :

$$f \in L^1(\mathbb{R}^d),$$

et ensuite, en se référant au Théorème 5.9, on déduit aussi que la série $(*)$ ci-dessus qui définit f converge ponctuellement presque partout vers une fonction mesurable presque partout finie, et donc f elle-même est bien définie, mesurable, presque partout finie.

Dit autrement, les sommes partielles de cette série $(*)$:

$$S_{k-1}(f)(x) = f_{n_k}(x)$$

convergent presque partout ponctuellement vers :

$$f = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}.$$

Nous affirmons alors que cette fonction f est la fonction $f_\infty \in L^1(\mathbb{R}^d)$ recherchée vers laquelle converge la suite de Cauchy $(f_n)_{n=1}^\infty$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ dont nous sommes partis.

En effet, pour établir d'abord la convergence dans L^1 de notre sous-suite :

$$f_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f \quad \text{dans } L^1(\mathbb{R}^d),$$

à savoir pour vérifier que :

$$0 = \lim_{k \to \infty} \big\|f - f_{n_k}\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)},$$

on remarque que l'inégalité valable par construction presque partout :

$$\begin{aligned}\big|f - f_{n_k}\big| &\leqslant |f| + \big|f_{n_k}\big| \\ &= |f| + \big|S_{k-1}(f)\big| \\ &\leqslant |f| + |g| \\ &\leqslant 2\,g,\end{aligned}$$

assure la domination uniforme :

$$\begin{aligned}\big\|f - f_{n_k}\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} &\leqslant 2\,\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \\ &< \infty,\end{aligned}$$

et alors grâce au Théorème 6.6 de convergence dominée, on conclut que la sous-suite $(f_{n_k})_{k\geqslant 1}$ de la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge en norme L^1 vers la fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$:

$$0 = \lim_{k\to\infty} \big\| f - f_{n_k} \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Mais il s'agit en fait d'établir la convergence vers f de la suite *entière* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, pas seulement d'une sous-suite !

Or comme $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ est par hypothèse de Cauchy :

$$n,\, m \geqslant N\big(\tfrac{\varepsilon}{2}\big) \qquad \Longrightarrow \qquad \big\| f_n - f_m \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \tfrac{\varepsilon}{2},$$

en choisissant un entier de la sous-suite $n_k \gg 1$ assez grand pour que grâce à ce que nous venons de voir :

$$\big\| f_{n_k} - f \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \tfrac{\varepsilon}{2},$$

un entier satisfaisant aussi quitte à l'augmenter $n_k \geqslant N(\frac{\varepsilon}{2})$, on peut intercaler ce f_{n_k} dans une inégalité triangulaire terminale :

$$\begin{aligned}\big\| f_n - f \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \big\| f_n - f_{n_k} \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \big\| f_{n_k} - f \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2},\end{aligned}$$

qui conclut la démonstration de ce grand théorème de complétude très souvent utilisée en Analyse. □

Puisque toute suite qui converge en norme L^1 est une suite de Cauchy dans cette norme, les arguments de la démonstration précédente ont fait voir l'énoncé suivant.

Corollaire 8.6. *Si $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite de fonctions appartenant à $L^1(\mathbb{R}^d)$ qui converge en norme L^1 vers une fonction $f_\infty \in L^1(\mathbb{R}^d)$:*

$$0 \;=\; \lim_{n\to\infty} \big\| f_n - f_\infty \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)},$$

alors il existe une sous-suite :

$$\big(f_{n_k}\big)_{k=1}^{\infty}$$

qui converge ponctuellement presque partout vers f_∞ :

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) \;=\; f_\infty(x) \qquad\qquad \text{(pour presque tout } x \in \mathbb{R}^d\text{)}.$$ □

Définition 8.7. On dit qu'une famille $\mathscr{G}$ de fonctions g appartenant à $L^1(\mathbb{R}^d)$ est *dense* dans $\big(L^1(\mathbb{R}^d),\, \|\cdot\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\big)$ lorsque :

$$\forall\, f \in L^1(\mathbb{R}^d) \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, g \in \mathscr{G} \quad \big\| f - g \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon.$$

Naturellement, nous sommes déjà familiers avec certaines familles de fonctions qui sont denses dans des espaces fonctionnels : par exemple, le théorème de Weierstrass montre que les polynômes sont denses dans l'espace des fonctions continues $\mathscr{C}^0\big([0,1],\, \|\cdot\|_{\mathscr{C}^0([0,1])}\big)$ munies de la norme de la convergence uniforme.

Le théorème qui suit décrit d'autres familles denses qui s'avéreront très utiles lorsqu'il s'agira d'établir des propriétés et des identités satisfaites par les fonctions intégrables quelconques. Dans un tel objectif, le principe général c'est que le résultat est souvent plus facile à démontrer pour une classe restreinte de fonctions, telles que par exemple les fonctions étagées, et ensuite, un argument de densité ou de passage à la limite permet d'obtenir le résultat général.

Théorème 8.8. *Dans l'espace $L^1(\mathbb{R}^d)$ des fonctions Lebesgue-intégrables sur $\mathbb{R}^d$, les trois familles suivantes de fonctions sont denses :*

(i) *les fonctions étagées ;*

(ii) *les fonctions en escalier ;*

(iii) *les fonctions continues à support compact.*

Démonstration. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$. On peut supposer que f est à valeurs réelles, en traitant séparément $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$. Si donc $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, en écrivant $f = f^+ - f^-$ avec $f^- \geqslant 0$ et $f^+ \geqslant 0$, on peut aussi supposer que $f \geqslant 0$.

Maintenant, pour ce qui concerne **(i)**, un théorème du chapitre qui précède garantit l'existence d'une suite $(\varphi_k)_{k=1}^{\infty}$ de fonctions étagées positives $\varphi_k \geqslant 0$ qui tendent ponctuellement vers f en tout point. Mais alors le Théorème 5.8 de convergence monotone donne :

$$0 = \lim_{k \to \infty} \big\| f - \varphi_k \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)},$$

ce qui montre bien qu'il existe des fonctions étagées arbitrairement proches de f en norme L^1 !

Quant à **(ii)**, grâce à **(i)** obtenue à l'instant, il suffit d'approximer les fonctions étagées par des fonctions en escalier. Or par définition, les fonctions étagées sont combinaisons linéaires finies de fonctions indicatrices d'ensembles mesurables de mesure finie. Donc il suffit de faire voir que la fonction indicatrice $\mathbf{1}_E$ d'un unique ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ est approximable par des escaliers.

Si $\varepsilon > 0$ est arbitrairement petit, il s'agit de trouver une fonction en escalier ψ telle que :

$$\big\| \mathbf{1}_E - \psi \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon.$$

Mais il se trouve que nous avons déjà effectué cette tâche sans nous en rendre compte. En effet, un théorème du chapitre qui précède a fait voir qu'il existe une famille finie de rectangles fermés presque disjoints $R_1, \dots, R_J$ tels que :

$$m\bigg(E \Delta \bigcup_{j=1}^{J} R_j \bigg) \leqslant \varepsilon.$$

Mais alors en passant aux intérieurs des rectangles (leurs bords étant de mesure nulle), les deux fonctions :

$$\mathbf{1}_E \qquad \text{et} \qquad \psi := \sum_{j=1}^{J} \mathbf{1}_{\operatorname{Int} R_j}$$

diffèrent seulement sur un ensemble de mesure $\leqslant \varepsilon$, sont égales à 0 ou à 1 en tout point, ce qui assure que :

$$\big\| \mathbf{1}_E - \psi \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon.$$

Enfin pour obtenir **(iii)**, grâce à **(ii)** obtenu à l'instant, on peut supposer que f est la fonction indicatrice d'un unique rectangle. Tout les apprentis-menuisiers du L3 MFA d'Orsay savent déjà comment raboter les arêtes d'un gratte-ciel en modifiant peu son volume. □

Théorie L^1 sur des ensembles mesurables. Ces résultats de densité dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ conduisent tout naturellement à une généralisation immédiate pour laquelle $\mathbb{R}^d$ est remplacé par un sous-ensemble mesurables $E \subset \mathbb{R}^d$. En fait, on peut introduire et définir $L^1(E)$ comme $L^1(\mathbb{R}^d)$, pour développer la théorie de manière entièrement similaire. À vrai dire, on peut aussi de manière alternative prolonger à 0 toute fonction f définie sur E en posant :

$$\widetilde{f} := \begin{cases} f & \text{sur } E, \\ 0 & \text{sur } \mathbb{R}^d \backslash E, \end{cases}$$

puis déclarer que :

$$\big\|f\big\|_{L^1(E)} := \big\|\widetilde{f}\big\|_{L^1(E)}.$$

Les versions sur E des propositions et théorèmes de cette section sont alors parfaitement réalisées.

9. **Propriétés d'invariance**

Définition 9.1. Étant donné une fonction $f \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$, pour un vecteur fixe $h \in \mathbb{R}^d$, la fonction :

$$\tau_h(f)(x) := f(x-h)$$

est appelée la *translation de f par h*.

Comme en théorie de Riemann, l'intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ tout entier est invariante par translation.

Lemme 9.2. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $\tau_h(f) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ est aussi intégrable et de plus :*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x-h)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx.$$

Démonstration. L'argument est une illustration du principe de réduction à des fonctions simples, complémenté par la densité. En effet, lorsque :

$$f = \mathbf{1}_E$$

est la fonction indicatrice d'un ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$, on a :

$$\tau_h(f) = \mathbf{1}_{E_h},$$

où naturellement :

$$E_h = \big\{x + h \colon\, x \in E\big\},$$

et comme on sait que la mesure de Lebesgue est invariante par translation :

$$m\big(E_h\big) = m(E),$$

le résultat est immédiat dans ce cas :

$$\int \tau_h(f) = m\big(E_h\big) = m(E) = \int f.$$

Ensuite par linéarité de l'intégrale, le résultat est encore valable pour toute fonction étagée.

Enfin, soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$ une fonction intégrable quelconque à valeurs réelles positives, puisque l'on peut toujours se ramener à ce cas (exercice mental). Nous savons pour l'avoir utilisé il y a très peu de temps qu'il existe une suite croissante $(\varphi_k)_{k=1}^{\infty}$ de fonctions étagées positives :

$$0 \leqslant \varphi_k \leqslant \varphi_{k+1} \leqslant f = \lim_{k\to\infty} \varphi_k,$$

qui convergent ponctuellement vers la fonction f tout en lui restant inférieures, et le Théorème 5.8 de convergence monotone assure donc que :

$$\int f = \lim_{k\to\infty} \int \varphi_k.$$

Mais alors la suite des fonctions translatées :

$$\tau_h(\varphi_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \tau_h(f)$$

converge (exercice mental) de manière monotone et bornée vers la translatée de f, et donc le Théorème de convergence monotone donne à nouveau

$$\begin{aligned}\int \tau_h(f) &= \lim_{k\to\infty} \int \tau_h(\varphi_k) \\ &= \lim_{k\to\infty} \int \varphi_k \\ &= \int f,\end{aligned}$$

ce qu'il fallait faire voir. □

En utilisant l'invariance par dilatation de la mesure de Lebesgue, on peut aussi établir l'énoncé élémentaire suivant, laissé en exercice.

Théorème 9.3. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors pour $\delta > 0$, la fonction :*

$$x \longmapsto f(\delta\, x)$$

appartient aussi à $L^1(\mathbb{R}^d)$ avec de plus :

$$\delta^d \int_{\mathbb{R}^d} f(\delta x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, dx.$$

Enfin :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(-x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, dx.$$ □

Conséquemment, pour tout $a > d$ et pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{dx}{|x|^a} = \varepsilon^{-a+d} \int_{|x|\geqslant 1} \frac{dx}{|x|^a},$$

tandis que pour tout $a < d$ et pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\int_{|x|\leqslant\varepsilon} \frac{dx}{|x|^a} = \varepsilon^{-a+d} \int_{|x|\leqslant 1} \frac{dx}{|x|^a}.$$

En fait, comme en théorie de Riemann — à laquelle se ramènent toutes ces considérations fort élémentaires ! —, lorsque $a > d$, on a la finitude :

$$\int_{|x|\geqslant 1} \frac{dx}{|x|^a} < \infty,$$

et lorsque $a < d$, la finitude :

$$\int_{|x|\leqslant 1} \frac{dx}{|x|^a}.$$

Plus important encore que tout ces enfantillages, nous allons maintenant examiner les propriétés de continuité des translatées $\tau_h(f)$ d'une fonction arbitraire $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ par des vecteurs $h \longrightarrow 0$ qui tendent vers zéro. Rappelons qu'en un point $x \in \mathbb{R}^d$, la convergence ponctuelle :

$$\tau_h(f)(x) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} f(x)$$

a lieu lorsque et seulement lorsque f est continue en x.

Mais hélas, comme nous l'avons fait savoir à plusieurs reprises, il est hors de question d'espèrer avoir une telle convergence ponctuelle pour les fonctions qui sont seulement intégrables au sens de Lebesgue, puisque ces fonctions présentent en général de très nombreux points de discontinuité. Pire encore, on peut montrer par un exemple (voir à ce sujet l'Exercice 62) que même après correction sur un ensemble de mesure nulle, une fonction intégrable peut avoir des points de discontinuité sur un ensemble de mesure strictement positive, et même parfois, en tout point !

Heureusement, il existe une propriété de continuité dont jouissent les fonctions $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, celle qui est en relation naturelle avec la norme L^1.

Théorème 9.4. *Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on a :*

$$0 = \lim_{h \to 0} \big\| \tau_h(f) - f \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Démonstration. Ce résultat est une conséquence relativement élémentaire de l'approximabilité des fonctions intégrables par des fonctions continues à support compact, déjà vue dans le Théorème 8.8.

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $g \in \mathscr{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ continue à support compact telle que :

$$\big\| f - g \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon.$$

Mais alors, puisque g est continue à support compact, il est aisé de se convaincre que elle, au moins parce qu'elle est bien élevée, satisfait sans mal la propriété attendue (exercice ! exploiter la continuité uniforme de g) :

$$\exists \, \delta_\varepsilon > 0 \quad |h| \leqslant \delta_\varepsilon \implies \big\| \tau_h(g) - g \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon.$$

Bien que cela puisse paraître quelque peu contre-intuitif, ce qui vaut pour g continue vaut alors pour f possiblement très discontinue, puisqu'une simple inégalité triangulaire précédée d'insertions astucieuses :

$$\begin{aligned}
\big\| \tau_h(f) - f \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} &= \big\| \tau_h(f) - \tau_h(g) + \tau_h(g) - g + g - f \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \\
&\leqslant \big\| \tau_h(f) - \tau_h(g) \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \big\| \tau_h(g) - g \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \big\| g - f \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \\
&= \big\| \tau_h(f - g) \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \big\| \tau_h(g) - g \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \big\| g - f \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \\
&= \big\| f - g \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \big\| \tau_h(g) - g \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \big\| g - f \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \\
&\leqslant \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon,
\end{aligned}$$

le tout agrémenté de l'invariance de l'intégrale par translations donne effectivement la petitesse de la norme L^1 de la différence entre $\tau_h(f)$ et f, pourvu seulement que $|h| \leqslant \delta_\varepsilon$. □

10. **Théorème de Fubini**

En Physique comme en Mathématiques, le calcul des intégrales multiples s'effectue très souvent en itérant des intégrales simples. Nous allons maintenant développer cette méthode dans le cadre de la Théorie de l'intégration de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

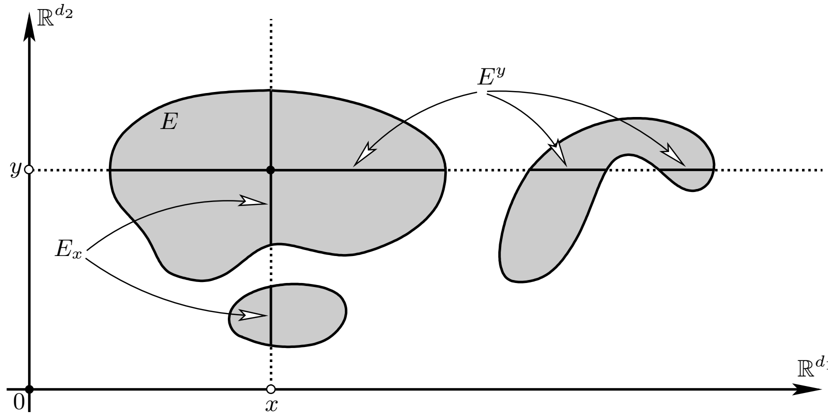
Pour tous entier $d_1 \geqslant 1$ et $d_2 \geqslant 1$ avec $d = d_1 + d_2$, on peut décomposer la dimension ambiante comme :

$$\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}.$$

Un point de $\mathbb{R}^d$ possède alors des coordonnées (x, y) avec :

$$x \in \mathbb{R}^{d_1} \qquad \text{et} \qquad y \in \mathbb{R}^{d_2}.$$

Eu égard au caractère profondément géométrique d'une telle décomposition qui généralise $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, il apparaît très naturel d'introduire des tranchages.



Définition 10.1. Étant donné un sous-ensemble quelconque $E \subset \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$, pas nécessairement mesurable, pour $y \in \mathbb{R}^{d_2}$ fixé, la y-*tranche* de E est le sous-ensemble de l'espace des x défini par :

$$E^y := \big\{x \in \mathbb{R}^{d_1} : \ (x, y) \in E\big\}.$$

De même, pour $x \in \mathbb{R}^{d_1}$, la x-*tranche* de E est le sous-ensemble de l'espace des y défini par :

$$E_x := \big\{y \in \mathbb{R}^{d_2} : \ (x, y) \in E\big\}.$$

Quand on passe aux fonctions, le tranchage s'incarne sous la forme de *restrictions*.

Définition 10.2. Étant donné une fonction :

$$f : \quad \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

la *tranche* de f correspondant à un $y \in \mathbb{R}^{d_2}$ *fixé* est la fonction f^y de la variable $x \in \mathbb{R}^{d_1}$ donnée par :

$$f^y(x) := f(x, y).$$

De manière similaire, la *tranche* de f correspondant à un $x \in \mathbb{R}^{d_1}$ *fixé* est la fonction f_x de la variable $y \in \mathbb{R}^{d_2}$ donnée par :

$$f_x(y) := f(x, y).$$

Le *Théorème de Fubini* que nous allons maintenant formuler et démontrer ne se présente pas spontanément à l'esprit comme en théorie de Riemann lorsqu'on se limite à la considération de fonctions continues, et ce, à cause d'une difficulté sous-jacente peu prévisible : les ensembles-tranches E_x et E_y d'un ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ ne s'avèrent pas toujours être mesurables.

Un contre-exemple très simple à cette croyance spontanée consiste à prendre un sous-ensemble *non* mesurable $\mathscr{N}$ dans l'espace des x, et à regarder l'ensemble :

$$E \,:=\, \{0\} \times \mathscr{N} \,\subset\, \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2},$$

dont la tranche verticale $E_0 = \mathscr{N}$ au-dessus de $0 \in \mathbb{R}^{d_1}$ n'est alors manifestement pas mesurable.

De plus, même sous l'hypothèse qu'une fonction $f\colon E \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est mesurable, il n'est pas toujours vrai, aussi, que ses tranches f_x et f^y soient mesurables pour tout x et pour tout y.

Le démon cruel des mathématiques dialectiques, heureusement, va nous laisser la vie sauve, car il va se trouver que la mesurabilité sera satisfaite *pour presque toute* tranche, phénomène qui est en accord avec la manière de penser que nous avons développée en Théorie de la mesure.

Théorème 10.3. [Fubini] *Soit une fonction mesurable :*

$$f\colon \quad \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

qui est intégrable au sens de Lebesgue, i.e. $\int |f| < \infty$. *Alors* pour presque tout $y \in \mathbb{R}^{d_2}$ *fixé :*

(i) *la fonction-tranche* $x \longmapsto f^y(x)$ *est mesurable et intégrable sur* $\mathbb{R}^{d_1}$ *;*

(ii) *ses différentes intégrales correspondantes définissent une fonction :*

$$y \longmapsto \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x)\, dx$$

qui est mesurable et intégrable sur $\mathbb{R}^{d_2}$;

(iii) *et de plus enfin, on a la formule de Fubini :*

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x,y)\, dx \right) dy \,=\, \int_{\mathbb{R}^d} f.}$$

Bien entendu, le théorème est symétrique lorsqu'on échange le rôle de x avec celui de y, donc on a aussi l'intégrabilité des fonctions-tranches $y \longmapsto f_x(y)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^{d_1}$, on a aussi l'intégrabilité de la fonction :

$$x \longmapsto \int_{\mathbb{R}^{d_2}} f_x(y)\, dy,$$

et on a aussi la formule :

$$\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_2}} f(x,y)\, dy \right) dx \,=\, \int_{\mathbb{R}^d} f.$$

En particulier, le théorème de Fubini énonce que l'intégrale sur $\mathbb{R}^d$ d'une fonction f peut être calculée en itérant des intégrales en dimension inférieure, et il montre aussi que cela peut être fait dans n'importe quel ordre :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_2}} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Dans le cas plus général où la fonction f serait à valeurs complexes, observons qu'on se ramènerait sans peine au cas où elle est à valeurs réelles, en traitant séparément $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$.

Toute démonstration du Théorème de Fubini est inévitablement longue, et celle que nous allons développer procédera en *six* étapes.

Notation. *Nous noterons :*

$$\mathscr{F}$$

l'ensemble des fonctions mesurable et intégrables sur $\mathbb{R}^d$ *qui satisfont les trois conclusions* **(i)**, **(ii)**, **(iii)** *du théorème.*

Notre but est de parvenir faire voir que :

$$\mathscr{F} \supset L^1(\mathbb{R}^d).$$

L'Étape 1 montrera que $\mathscr{F}$ est stable par des opérations élémentaires telles que la prise de combinaisons linéaires. L'Étape 2 montrera une stabilité similaire par passages à la limite.

Ensuite, nous commencerons à construire certaines familles de fonctions qui appartiendront à $\mathscr{F}$. Puisque toute fonction intégrable est 'limite' de fonctions étagées, et puisque les fonctions étagées sont combinaisons linéaires finies de fonctions indicatrices d'ensembles mesurables de mesure finie, *l'objectif va rapidement se concentrer sur une démonstration du fait que la fonction indicatrice* $\mathbf{1}_E$ *d'un sous-ensemble mesurable* $E \subset \mathbb{R}^d$ *de mesure finie appartient à* $\mathscr{F}$.

Afin de réaliser cet objectif, nous commencerons à travailler avec des rectangles, et à la fin de l'Étape 3, nous aurons atteint les G_δ-ensembles, tandis que l'Étape 4 sera consacrée à atteindre les ensembles de mesure nulle.

À la fin, un argument de passage à la limite montrera que toutes les fonctions intégrables appartiennent à $\mathscr{F}$, ce qui complétera cette démonstration qui aura exigé, nous nous en rendrons compte, beaucoup d'endurance mathématique !

Démonstration. Commençons donc par une propriété simple et naturelle, d'après laquelle les propriétés **(i)**, **(ii)**, **(iii)** sont linéairement stables.

Étape 1. *Toute combinaison linéaire finie de fonctions appartenant à* $\mathscr{F}$ *appartient encore à* $\mathscr{F}$.

Démonstration. En effet, soient $f_1, \dots, f_N \in \mathscr{F}$. Pour tout $k = 1, \dots, N$, il existe un sous-ensemble $A_k \subset \mathbb{R}^{d_2}$ de mesure nulle :

$$0 = m\big(A_k\big) \qquad\qquad {\scriptstyle (k = 1 \cdots N)},$$

tel que pour tout $y \notin A_k$, la fonction-tranche $x \longmapsto f_k^y(x)$ est mesurable et intégrable sur $\mathbb{R}^{d_1}$. Si on introduit la réunion :

$$A := \bigcup_{k=1}^{N} A_k,$$

toujours de mesure nulle, il est alors clair que pour toute combinaison linéaire :

$$g := \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_N f_N,$$

lorsque $y \notin A$, la fonction-tranche $x \longmapsto g^y(x)$ est mesurable et intégrable. La linéarité de l'intégrale montre que g satisfait aussi **(ii)** et **(iii)** (exercice mental). □

Étape 2. *Si $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ est une suite croissante de fonctions appartenant à $\mathscr{F}$:*

$$f_k \leqslant f_{k+1} \qquad\qquad {\scriptstyle (k \geqslant 1)},$$

qui converge ponctuellement presque partout vers une certaine fonction (automatiquement) mesurable :

$$f = \lim_{k\to\infty} f_k,$$

et si cette fonction-limite f est intégrable sur $\mathbb{R}^d$, alors $f \in \mathscr{F}$ aussi.

Bien entendu, la même conclusion vaut pour les suites décroissantes, les deux énoncés étant équivalents à travers un changement de signe global $f_k \longmapsto -f_k$.

Démonstration. Après remplacement de f_k par $f_k - f_1$, on peut supposer que $f_k \geqslant 0$ pour tout $k \geqslant 1$.

Maintenant, observons que le Théorème 5.8 de convergence monotone donne :

$$(*) \qquad \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_k(x,y)\,dxdy \;=\; \int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)\,dxdy.$$

Or par hypothèse, pour tout k, il existe un sous-ensemble $A_k \subset \mathbb{R}^{d_2}$ tel que $x \longmapsto f_k^y(x)$ est mesurable et intégrable sur $\mathbb{R}^{d_1}$ chaque fois que $y \notin A_k$. La réunion infinie de ces ensembles exceptionnels :

$$A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,$$

est encore de mesure nulle dans $\mathbb{R}^{d_2}$:

$$m(A) = 0,$$

et lorsque $y \notin A$, on est certain que *toutes* les fonctions-tranches $x \longmapsto f_k^y(x)$ sont mesurables et Lebesgue-intégrables. Puisque cette suite de fonctions est croissante, le Théorème 5.8 de convergence monotone assure que la suite de fonctions :

$$y \longmapsto g_k(y) \;:=\; \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_k^y(x)\,dx \qquad\qquad {\scriptstyle (k \geqslant 1)},$$

converge pour $k \to \infty$ en croissant vers la limite :

$$g(y) \;:=\; \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x)\,dx.$$

Une application renouvelée du Théorème 5.8 de convergence monotone montre alors qu'on a aussi :

$$(**) \qquad \int_{\mathbb{R}^{d_2}} g_k(y)\,dy \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^{d_2}} g(y)\,dy.$$

Mais comme par hypothèse $f_k \in \mathscr{F}$, il vient :

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} g_k(y)\,dy \;=\; \int_{\mathbb{R}^d} f_k(x,y)\,dxdy,$$

et en tenant compte de $(*)$ et de $(**)$, nous concluons que :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} g(y)\,dy &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)\,dxdy \\ &< \infty,\end{aligned}$$

puisque f a été supposée Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}^d$. Cette dernière équation montre donc que g est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}^{d_2}$. Par conséquent :

$$g(y) < \infty \qquad \text{(pour presque tout } y \in \mathbb{R}^{d_2}\text{)},$$

et en revenant à l'expression de $g(y)$, ceci montre premièrement que f^y est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}^{d_1}$ pour presque tout y, et deuxièmement que :

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x,y)\,dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)\,dxdy,$$

ce qui est la conclusion annoncée $f \in \mathscr{F}$. □

Étape 3. *Toute fonction indicatrice $\mathbf{1}_E$ d'un sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ qui est un G_δ-ensemble de mesure finie, appartient à $\mathscr{F}$.*

Démonstration. Nous procédons en *cinq* sous-étapes organisées par ordre croissant de généralité.

(a) Supposons pour commencer que $E \subset \mathbb{R}^d$ est un cube ouvert borné, de la forme :

$$E = Q_1 \times Q_2,$$

où $Q_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$ et $Q_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$ sont deux cubes ouverts bornés. Alors pour tout y, la fonction indicatrice $\mathbf{1}_E(x,y)$ est mesurable par rapport à x, est intégrable, et satisfait (exercice géométrico-mental) :

$$\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \mathbf{1}_E(x,y)\,dx = \begin{cases} |Q_1| & \text{lorsque } y \in Q_2, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Par conséquent, la fonction :

$$g := |Q_1| \cdot \mathbf{1}_{Q_2}$$

est elle aussi mesurable intégrable, et elle satisfait :

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} g(y)\,dy = |Q_1| \cdot |Q_2|.$$

Mais comme nous avions au départ :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_E(x,y)\,dxdy = |E| = |Q_1| \cdot |Q_2|,$$

nous déduisons bien que $\mathbf{1}_E \in \mathscr{F}$.

(b) Maintenant, supposons que E est un sous-ensemble du bord d'un cube fermé borné. Puisque le bord de tout cube est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^d$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_E(x,y)\,dxdy = 0.$$

Ensuite, nous laissons en exercice au lecteur le soin de se convaincre que pour *tout* y, l'ensemble-tranche E^y est de mesure 0 dans $\mathbb{R}^{d_1}$. Par conséquent, si on introduit :

$$g(y) \,:=\, \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \mathbf{1}_{E^y}(x)\,dx \,=\, \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \mathbf{1}_E(x,y)\,dx,$$

on déduit que $g(y) = 0$ pour presque tout y. Ensuite, il découle de cela que :

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} g(y)\,dy \,=\, 0,$$

et donc on a bien $\mathbf{1}_E \in \mathscr{F}$.

(c) Supposons maintenant que E est réunion finie de cubes fermés dont les intérieurs sont mutuellement disjoints :

$$E \,=\, \bigcup_{k=1}^{K} Q_k.$$

Alors, si Q_k^o désigne l'intérieur de Q_k, on peut écrire $\mathbf{1}_E$ comme combinaison linéaire des fonctions indicatrices $\mathbf{1}_{Q_k^o}$ de ces intérieurs, ainsi que de fonctions indicatrices $\mathbf{1}_{A_k}$ de sous-ensembles appropriés des bords des Q_k (exercice ; tracer des figures intuitives en dimensions 1, 2, 3).

Mais grâce aux analyses que nous avons déjà conduites, nous savons que les $\mathbf{1}_{Q_k^o}$ appartiennent à $\mathscr{F}$, ainsi que les $\mathbf{1}_{A_k}$, pour tout $k = 1, \dots, N$. Or l'Étape 1 garantissait à l'avance que l'ensemble $\mathscr{F}$ est fermé par combinaisons linéaires finies. Donc nous concluons que $\mathbf{1}_E \in \mathscr{F}$.

(d) Plus avant, montrons que si $E \subset \mathbb{R}^d$ est ouvert et de mesure finie, alors $\mathbf{1}_E \in \mathscr{F}$. En partant de ce qui précède, cette affirmation découle d'un passage à la limite.

En effet, nous avons vu au tout début des développements de la Théorie de la mesure que E ouvert peut toujours être représenté comme réunion dénombrable de cubes fermés presque disjoints :

$$E \,=\, \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j.$$

Par conséquent, si nous posons :

$$f_k \,:=\, \sum_{j=1}^{k} \mathbf{1}_{Q_j},$$

même si $f_k \to \infty$ en certains points, nous observons que ces fonctions f_k tendent en croissant vers $f = \mathbf{1}_E$, fonction qui est intégrable puisque $m(E) < \infty$. Nous concluons grâce à l'Étape 2 que $f \in \mathscr{F}$.

(e) Enfin, montrons que si E est un G_δ-ensemble de mesure *finie*, alors $\mathbf{1}_E \in \mathscr{F}$.

En effet, par définition, E est représentable comme intersection dénombrable :

$$E \,=\, \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathscr{O}_k,$$

d'ouverts $\mathscr{O}_k \subset \mathbb{R}^d$. Comme E est de mesure finie, à partir d'un certain rang, les $\mathscr{O}_k$ deviennent de mesure finie, et donc, on peut supposer que $\mathscr{O}_1$ *est* de mesure finie. Qui plus est, après remplacement :

$$\mathscr{O}_k \longmapsto \bigcap_{\ell=1}^{k} \mathscr{O}_\ell,$$

on peut même supposer que :

$$\mathscr{O}_1 \supset \mathscr{O}_2 \supset \cdots \supset \mathscr{O}_k \supset \cdots.$$

Alors la suite de fonctions $f_k := \mathbf{1}_{\mathscr{O}_k}$ décroît vers $f = \mathbf{1}_E$, en enfin, puisque **(d)** vient de faire voir que $\mathbf{1}_{\mathscr{O}_k} \in \mathscr{F}$, nous concluons grâce à l'Étape 2 que $\mathbf{1}_E \in \mathscr{F}$. □

Étape 4. *Si un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ est de mesure nulle, alors $\mathbf{1}_E \in \mathscr{F}$.*

Démonstration. En effet, puisque E est mesurable, nous pouvons trouver un G_δ-ensemble :

$$G \supset E,$$

de mesure $m(G) = 0$. Or, puisque l'Étape 3 vient de faire voir que $\mathbf{1}_G \in \mathscr{F}$, nous savons que :

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \mathbf{1}_G(x,y)\, dx \right) dy \;=\; \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_G \;=\; 0,$$

d'où :

$$\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \mathbf{1}_G(x,y)\, dx \;=\; 0 \qquad\qquad \text{(pour presque tout } y \in \mathbb{R}^{d_2}\text{)}.$$

Par conséquent, l'ensemble-tranche G^y est mesure 0 pour presque tout y. Mais comme :

$$E^y \subset G^y,$$

nécessairement pour ces y :

$$m\big(E^y\big) \;=\; 0 \;=\; \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \mathbf{1}_E(x,y)\, dx,$$

et pour terminer :

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \mathbf{1}_E(x,y)\, dx \right) dy \;=\; 0 \;=\; \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_E,$$

ce qui montre bien que $\mathbf{1}_E \in \mathscr{F}$. □

Étape 5. *Si un sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ est de mesure finie, alors $\mathbf{1}_E \in \mathscr{F}$.*

Démonstration. En effet, rappelons qu'il existe un G_δ-ensemble $G \supset E$ de mesure finie tel que :

$$0 \;=\; m(G \backslash E).$$

Or puisque :

$$\mathbf{1}_E \;=\; \mathbf{1}_G - \mathbf{1}_{G \backslash E},$$

et puisque $\mathscr{F}$ est stable par combinaisons linéaires, nous trouvons bien que $\mathbf{1}_E \in \mathscr{F}$. □

Étape 6. *Si une fonction $f \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est Lebesgue-intégrable, alors $f \in \mathscr{F}$.*

Démonstration. Bien entendu, nous pouvons supposer, comme nous l'avons déjà fait à plusieurs reprises, que f est à valeurs réelles $\geqslant 0$. Grâce à un théorème du chapitre qui précède, il existe une suite croissante $(\varphi_k)_{k=1}^{\infty}$ de fonctions étagées qui tend en tout point vers f. Mais puisque chaque φ_k est combinaison linéaire finie de fonctions caractéristiques d'ensembles de mesure finie, on sait que $\varphi_k \in \mathscr{F}$ pour tout $k \geqslant 1$, et l'Étape 2 réalisée à l'avance nous permet bien de conclure ici que $f \in \mathscr{F}$! □

Ces six étapes étant réalisées, la démonstration patiente du Théorème 10.3 s'achève enfin. □

Le génie est une longue patience. Buffon

[Parole de Buffon, rapportée par Hérault de Séchelles, *voyage à Montbard* (1785), qui met dans la bouche de Buffon une phrase légèrement différente : « Le génie n'est qu'une plus grande aptitude à la patience ».]

11. **Théorème de Tonelli**

Supposons donnée une fonction mesurable :

$$f\colon\quad \mathbb{R}^d \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

dont on ne sait pas *a priori* si elle est intégrable au sens de Lebesgue, mais posons-nous quand même la question de savoir si nous pouvons déterminer $\int_{\mathbb{R}^d} f$, et ce, grâce à l'utilisation d'intégrales itérées, lesquelles sont en général plus accessibles au calcul. Or d'après la Définition 6.1, notre fonction f est Lebesgue-intégrable si et seulement si sa valeur absolue $|f|$ satisfait :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f| \,<\, \infty.$$

Par conséquent, la question concerne en vérité une fonction à valeurs positives, $|f|$. Il faut donc un théorème qui nous permette, par le biais d'intégrales itérées, notamment en dimensions 2 et 3, de déterminer par le calcul si $|f|$ est d'intégrale *finie*, car rappelons en nous souvenant de la Définition 5.1, que la *Théorie de l'intégration de Lebesgue* attribue toujours une valeur :

$$\int_{\mathbb{R}^d} g \,\in\, \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\},$$

à *toute* fonction mesurable positive $g\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.

Théorème 11.1. [Tonelli] *Soit une fonction mesurable* positive :

$$g\colon\quad \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\},$$

pas forcément Lebesgue-intégrable, à savoir satisfaisant peut-être $\int_{\mathbb{R}^d} |g| = \infty$. *Alors* pour presque tout $y \in \mathbb{R}^{d_2}$ *fixé :*

(i) *la fonction-tranche* $x \longmapsto g^y(x)$ *est mesurable sur* $\mathbb{R}^{d_1}$ *;*

(ii) *ses différentes intégrales correspondantes définissent une fonction :*

$$y \,\longmapsto\, \int_{\mathbb{R}^{d_1}} g^y(x)\, dx$$

qui est mesurable sur $\mathbb{R}^{d_2}$;

(iii) *et de plus enfin, on a la formule de Fubini-Tonelli :*

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \bigg(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} g(x,y)\,dx \bigg)\,dy \;=\; \int_{\mathbb{R}^d} g,}$$

cette équation pouvant se réduire à :

$$\infty \;=\; \infty.$$

Dans la pratique réelle des exercices, des partiels, des examens, des concours, et des *tutti quanti* estudiantins, en partant d'une fonction mesurable $f\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R}\{+\infty\}$, en lui associant la fonction positive $g := |f|$, si le premier membre de cette équation :

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \bigg(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \big|f(x,y)\big|\,dx \bigg)\,dy}_{<\infty} \;=\; \int_{\mathbb{R}^d} |f|,$$

calculé concrètement par intégration itérée, s'avère être *fini*, alors on peut conclure que f est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}^d$!

Qui plus est, dans ce cas, les hypothèses du Théorème 10.3 de Fubini sont alors satisfaites, et l'on peut reprendre le calcul que l'on vient de conduire pour $|f|$ et recalculer alors pour f la valeur *finie* de son intégrale en travaillant à nouveau avec des intégrales itérées :

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \bigg(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x,y)\,dx \bigg)\,dy}_{\text{en général calculable}} \;=\; \int_{\mathbb{R}^d} f.$$

Démonstration. Introduisons les troncatures :

$$f_k(x,y) \;:=\; \begin{cases} f(x,y) & \text{lorsque } |(x,y)| \leqslant k \;\text{ et }\; f(x,y) \leqslant k, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Chaque fonction f_k est Lebesgue-intégrable, et grâce à **(i)** du Théorème 10.3 de Fubini, il existe un sous-ensemble $E_k \subset \mathbb{R}^{d_2}$ de mesure 0 tel que la fonction-tranche $x \longmapsto f_k^y(x)$ est mesurable pour tout $y \in \mathbb{R}^{d_2} \backslash E_k$.

Si nous introduisons alors :

$$E := \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k,$$

nous trouvons que $x \longmapsto f^y(x)$ est mesurable pour tout $y \in \mathbb{R}^{d_2} \backslash E$ et pour tout $k \geqslant 1$.

De plus, $m(E) = 0$, et comme $f_k^y \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f^y$ de manière croissante, le Théorème 5.8 de convergence monotone implique que pour tout $y \notin E$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_k(x,y)\,dx \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x,y)\,dx.$$

Ensuite, grâce à **(ii)** du Théorème 10.3, pour tout $k \geqslant 1$, la fonction :

$$y \longmapsto \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_k(x,y)\,dx$$

est mesurable lorsque $y \notin E$, et aussi, il en va de même pour la fonction :

$$y \longmapsto \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x,y)\,dx.$$

Une autre application du théorème de convergence monotone donne alors :

$$(*)\qquad \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \bigg(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_k(x,y)\,dx \bigg)\,dy \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \bigg(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x,y)\,dx \bigg)\,dy.$$

Enfin, grâce à **(iii)** du Théorème 10.3, nous savons que :

$$(**)\qquad \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \bigg(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_k(x,y)\,dx \bigg)\,dy \,=\, \int_{\mathbb{R}^{d}} f_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^{d}} f.$$

Une dernière application du théorème de convergence monotone à f_k donne aussi :

$$(**)\qquad \int_{\mathbb{R}^{d}} f_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^{d}} f.$$

La synthèse entre $(*)$, $(**)$, $(***)$ achève la démonstration du théorème de Tonelli. □

Corollaire 11.2. *Si $E \subset \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ est un sous-ensemble mesurable, alors pour presque tout $y \in \mathbb{R}^{d_2}$, l'ensemble-tranche :*

$$E^y \,:=\, \big\{ x \in \mathbb{R}^{d_1} \colon\, (x,y) \in E \big\},$$

est mesurable dans $\mathbb{R}^{d_1}$. De plus, la fonction :

$$y \,\longmapsto\, m\big(E^y\big)$$

est mesurable, et on a :

$$m(E) \,=\, \int_{\mathbb{R}^{d_2}} m\big(E^y\big)\,dy.$$

Démonstration. Cet énoncé est une conséquence immédiate de **(i)** du Théorème 11.1 de Tonelli appliqué à la fonction $\mathbf{1}_E$. Bien entendu, il existe un résultat symétrique concerant les x-tranches dans $\mathbb{R}^{d_2}$. □

Nous avons donc établi l'énoncé naturel que si $E \subset \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ est mesurable, alors pour presque tout $y \in \mathbb{R}^{d_2}$, son y-tranche E^y est mesurable dans $\mathbb{R}^{d_1}$, et pour presque tout $x \in \mathbb{R}^{d_1}$, sa x-tranche E_x est aussi mesurable dans $\mathbb{R}^{d_2}$. *On pourrait être tenté de croire que la réciproque est vraie, mais il n'en est rien.*

Exemple 11.3. Étant donné un ensemble *non* mesurable $\mathscr{N} \subset \mathbb{R}$, si nous introduisons le produit :

$$\begin{aligned} E \,&:=\, [0,1] \times \mathscr{N} \\ &\subset\, \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \end{aligned}$$

alors nous voyons que ses y-tranches valent :

$$E^y \,=\, \begin{cases} [0,1] & \text{lorsque } \ y \in \mathscr{N}, \\ \emptyset & \text{lorsque } \ y \notin \mathscr{N}. \end{cases}$$

Ainsi, ces E^y sont mesurables pour tout y.

Cependant, si E lui-même était mesurable, alors le corollaire que nous venons de démontrer — et qui est un corollaire *vrai !* — impliquerait que, pour presque tout $x \in [0,1]$, les x-tranches :

$$\begin{aligned} E_x \,&=\, \big\{ y \in \mathbb{R} \colon\, (x,y) \in [0,1] \times \mathscr{N} \big\} \\ &=\, \{ y \in \mathscr{N} \} \\ &=\, \mathscr{N}, \end{aligned}$$

seraient mesurables, ce qui n'est manifestement pas le cas !

Un exemple plus frappant apparaît dans l'Exercice 65

12. Mesurabilité des ensembles-produits

Si on découpe un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ en tranches verticales E_x et horizontales E^y, les choses s'avèrent très simples lorsque E s'adapte à la structure-produit.

Définition 12.1. Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ est un *ensemble-produit* lorsque :

$$E = E_1 \times E_2,$$

en termes de deux sous-ensembles $E_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$ et $E_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$.

L'objectif de cette section est de montrer que si E_1 et E_2 sont mesurables, alors leur produit $E_1 \times E_2$ est aussi mesurable. Deux lemmes seront nécessaires.

Lemme 12.2. *Si $E = E_1 \times E_2 \subset \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ est un ensemble-produit mesurable dans $\mathbb{R}^{d_1+d_2} = \mathbb{R}^d$, et si :*

$$m^*\big(E_2\big) > 0,$$

alors E_1 est mesurable dans $\mathbb{R}^{d_1}$.

Démonstration. Grâce au Théorème 10.3 de Fubini, nous savons que pour presque tout $y \in \mathbb{R}^{d_2}$, la fonction-tranche :

$$x \longmapsto \mathbf{1}_{E_1 \times E_2}^y(x) = \mathbf{1}_{E_1}(x)\, \mathbf{1}_{E_2}(y)$$

est mesurable.

Mais nous affirmons qu'il existe en fait un $y \in E_2$, pas seulement dans $\mathbb{R}^{d_2}$, tel que cette fonction de x est mesurable. Alors pour un tel y, on aura :

$$\mathbf{1}_{E_1 \times E_2}(x, y) = \mathbf{1}_{E_1}(x),$$

et alors, on obtiendra bien que E_1 est mesurable.

Pour montrer l'existence d'un tel $y \in E_2$, utilisons l'hypothèse $m^*(E_2) > 0$. Notons F l'ensemble des $y \in \mathbb{R}^{d_2}$ tels que la tranche E^y est mesurable. Il s'agit donc de montrer que $E_2 \cap F \neq \emptyset$. Nous savons en tout cas que $m(F^c) = 0$.

Or nous pouvons trivialement écrire :

$$E_2 = \big(E_2 \cap F\big) \cup \big(E_2 \cap F^c\big),$$

d'où par sous-additivité de m^* :

$$\begin{aligned} 0 &< m^*\big(E_2\big) \\ &\leqslant m^*\big(E_2 \cap F\big) + m^*\big(E_2 \cap F^c\big) \\ &= m^*\big(E_2 \cap F\big), \end{aligned}$$

et puisque cette mesure extérieure est strictement positive, on a bien $E_2 \cap F \neq \emptyset$. □

Lemme 12.3. *Si $E_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$ et $E_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$ sont deux sous-ensembles quelconques, alors :*

$$m^*\big(E_1 \times E_2\big) \leqslant m^*\big(E_1\big) \cdot m^*\big(E_2\big),$$

avec la convention locale que $\infty \cdot 0 = 0 \cdot \infty = 0$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. Par définition de m^*, on peut trouver deux familles infinies de cubes fermés :

$$\big\{Q_k\big\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{d_1} \qquad \text{et} \qquad \big\{Q'_\ell\big\}_{\ell=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{d_2},$$

recouvrant :

$$E_1 \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \qquad \text{et} \qquad E_2 \subset \bigcup_{\ell=1}^{\infty} Q'_\ell,$$

et satisfaisant :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big|Q_k\big| \leqslant m^*\big(E_1\big) + \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \sum_{\ell=1}^{\infty} \big|Q'_\ell\big| \leqslant m^*\big(E_2\big) + \varepsilon.$$

Alors en passant aux produits, il est clair que :

$$E_1 \times E_2 \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{\ell=1}^{\infty} Q_k \times Q'_\ell,$$

et la sous-additivité dénombrable de la mesure extérieure donne :

$$\begin{aligned} m^*\big(E_1 \times E_2\big) &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \big|Q_k \times Q'_\ell\big| \\ &= \bigg(\sum_{k=1}^{\infty} \big|Q_k\big|\bigg) \bigg(\sum_{\ell=1}^{\infty} \big|Q'_\ell\big|\bigg) \\ &\leqslant \big[m^*\big(E_1\big) + \varepsilon\big] \big[m^*\big(E_2\big) + \varepsilon\big]. \end{aligned}$$

Naturellement, il s'agit de développer ce dernier produit numérique — mais attention ! Si jamais $m^*(E_1) = \infty$ ou si $m^*(E_2) = \infty$, pourra-t-on dire que :

$$\infty \cdot \varepsilon = \mathrm{O}(\varepsilon)\,?$$

Non, certainement pas !

Aussi, commençons par traiter le cas 'générique' où :

$$m^*\big(E_1\big) < \infty \qquad \text{et} \qquad m^*\big(E_2\big) < \infty.$$

Alors dans ce cas, on peut effectivement développer le produit en question et obtenir :

$$m^*\big(E_1 \times E_2\big) \leqslant m^*\big(E_1\big)\, m^*\big(E_2\big) + \mathrm{O}(\varepsilon),$$

ce qui démontre bien l'inégalité voulue.

Ensuite, lorsque $0 < m^*(E_1) < \infty$ et $m^*(E_2) = \infty$, ou lorsque, en échangeant les rôles, $m^*(E_1) = \infty$ et $0 < m^*(E_2) < \infty$, on a toujours $m^*(E_1)\, m^*(E_2) = \infty$, et l'inégalité affirmée par le lemme est alors satisfaite sans effort.

Il reste donc le dernier cas subtil où $m^*(E_1) = 0$ tandis que $m^*(E_2) = \infty$, logiquement équivalent à son symétrique $m^*(E_1) = \infty$, $m^*(E_2) = 0$. Il s'agit alors de faire voir que $m^*(E_1 \times E_2) = 0$.

En effet, en intersectant E_2 avec des boules fermées de taille grandissante :

$$E_{2,N} := E_2 \cap \big\{|y| \leqslant N\big\} \qquad {\scriptstyle (N \in \mathbb{N})},$$

on se ramène à $m^*(E_{2,N}) < \infty$, et donc ce qui a déjà été vu s'applique pour donner :

$$\begin{aligned} m^*\big(E_1 \times E_{2,N}\big) &\leqslant \underbrace{m^*(E_1)}_{\circ}\, m^*(E_{2,N}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Enfin, comme la suite d'ensembles $\{E_1 \times E_{2,N}\}_{N=1}^{\infty}$ tend en croissant vers $E_1 \times E_2$, on a bien $m^*(E_1 \times E_2) = \lim\limits_{N\to\infty} m^*(E_1 \times E_{2,N}) = 0$. □

Théorème 12.4. *Soient deux sous-ensembles mesurables :*

$$E_1 \subset \mathbb{R}^{d_1} \qquad \text{et} \qquad E_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}.$$

Alors leur produit $E := E_1 \times E_2$ est un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}^d$ de mesure :

$$m(E) \,=\, m(E_1)\cdot m(E_2),$$

toujours avec la convention locale $\infty \cdot 0 = 0 \cdot \infty = 0$.

Démonstration. Comme E_1 et E_2 sont mesurables, il existe grâce à un théorème vu dans le chapitre qui précède deux G_δ-ensembles :

$$E_1 \subset G_1 \subset \mathbb{R}^{d_1} \qquad \text{et} \qquad E_2 \subset G_2 \subset \mathbb{R}^{d_2},$$

satisfaisant :

$$0 = m^*\big(G_1 \backslash E_1\big) \qquad \text{et} \qquad 0 = m^*\big(G_2 \backslash E_2\big).$$

Mais alors, l'ensemble-produit $G := G_1 \times G_2$ est mesurable dans $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ (exercice), et l'on peut écrire :

$$\begin{aligned} G\backslash E \,&=\, \big(G_1 \times G_2\big)\big\backslash\big(E_1 \times E_2\big) \\ &\leqslant\, \big[(G_1\backslash E_1) \times G_2\big] \,\cup\, \big[G_1 \times (G_2 \backslash E_2\big]. \end{aligned}$$

Grâce au lemme qui précède, nous avons :

$$m^*\big[(G_1\backslash E_1) \times G_2\big] \,=\, 0 \,=\, m^*\big[G_1 \times (G_2\backslash E_2\big],$$

d'où découle $m^*(G\backslash E) = 0$, ce qui montre (exercice mental) que E est bien mesurable.

Enfin, le Corollaire 11.2 peut être appliqué, et comme la fonction $y \longmapsto m(E^y)$ s'identifie à la fonction :

$$y \,\longmapsto\, m(E_1)\cdot \mathbf{1}_{E_2}(y),$$

et on obtient bien :

$$\begin{aligned} m(E) \,&=\, \int_{\mathbb{R}^{d_2}} m(E_1)\cdot \mathbf{1}_{E_2}(y) \\ &=\, m(E_1)\cdot m(E_2), \end{aligned}$$

ce qui conclut. □

Corollaire 12.5. *Soit f une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^{d_1}$. Alors la fonction $\widetilde{f}$ prolongeant trivialement f au produit $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ qui est définie par :*

$$\widetilde{f}(x,y) \,:=\, f(x),$$

est aussi mesurable.

Démonstration. On peut supposer que f est à valeurs réelles. Pour $a \in \mathbb{R}$ quelconque, l'ensemble de sous-niveau :

$$E_1 := \big\{x \in \mathbb{R}^{d_1} \colon\, f(x) < a\big\}$$

est par définition mesurable. Mais puisque :

$$\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \colon\, \widetilde{f}(x,y) < a\big\} \,=\, E_1 \times \mathbb{R}^{d_2},$$

le théorème démontré à l'instant montre bien que $\{(x,y) \colon \widetilde{f}(x,y) < a\}$ est mesurable, ce qui conclut. □

Pour terminer en beauté ce chapitre, nous allons enfin établir l'interprétation géométrique tant attendue de l'intégrale de Lebesgue, que nous connaissons certes tous déjà puisque la théorie de l'intégrale de Cauchy-Riemann-Darboux nous l'a déjà amplement fait voir, mais qui va s'éclairer ici d'un jour nouveau et d'une généralité nouvelle.

Nous avons en effet à l'esprit ici que la valeur $\int f$ de l'intégrale de Lebesgue d'une fonction positive $f \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est l'aire généralisée, $(d+1)$-dimensionnelle, qui se trouve '*sous le graphe*' de f.

Théorème 12.6. *Soit une fonction mesurable à valeurs réelles positives :*

$$f \colon \quad \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+,$$

et soit son hypographe :

$$\mathscr{A}_f \,:=\, \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \colon\; 0 \leqslant y \leqslant f(x)\big\}.$$

Alors la fonction f est mesurable sur $\mathbb{R}^d$ si et seulement si son hypographe $\mathscr{A}_f$ est un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}^{d+1}$.

Dans ce cas :

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx \,=\, m(\mathscr{A}_f).}$$

Démonstration. Suppsons f mesurable et démontrons que $\mathscr{A}_f$ est mesurable. Le corollaire vu à l'instant assure alors que la fonction :

$$F(x,y) \,:=\, y - f(x)$$

est mesurable sur $\mathbb{R}^{d+1}$. On en déduit sans délai que que l'hypographe :

$$\mathscr{A}_f = \{y \geqslant 0\} \cap \{F \leqslant 0\}$$

est effectivement mesurable.

Réciproquement, supposons $\mathscr{A}_f$ mesurable. Observons que pour tout $x \in \mathbb{R}^{d_1}$, la tranche verticale :

$$\mathscr{A}_{f,x} \,=\, \big\{y \in \mathbb{R} \colon\; (x,y) \in \mathscr{A}_f\big\}$$

est le segment fermé :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_{f,x} \,&=\, [0,\, f(x)]\\ &\subset\, [0,\infty].\end{aligned}$$

Le Corollaire 11.2 (dans lequel on échange à l'avance le rôle de x avec celui de y) montre alors la mesurabilité de la fonction :

$$x \,\longmapsto\, m\big(\mathscr{A}_{f,x}\big) = f(x),$$

et il montre aussi que :

$$\begin{aligned}m(\mathscr{A}_f) \,&=\, \int \mathbf{1}_{\mathscr{A}_f}(x,y)\,dxdy\\ &=\, \int_{\mathbb{R}^{d_1}} m\big(\mathscr{A}_{f,x}\big)\\ &=\, \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x)\,dx,\end{aligned}$$

ce qu'il fallait faire voir. □

Terminons ce chapitre par un résultat simple et utile.

Proposition 12.7. *Si f est une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^d$, alors la fonction :*

$$\widetilde{f}(x,y) := f(x-y)$$

est mesurable sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

Démonstration. Pour $a \in \mathbb{R}$ quelconque, l'ensemble $E = \{z \in \mathbb{R}^d \colon f(z) < a\}$ est par hypothèse mesurable. Il s'agit alors de montrer que l'ensemble :

$$\begin{aligned}\widetilde{E} &:= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \colon \widetilde{f}(x,y) < a\big\}\\ &= \big\{(x,y) \colon x-y \in E\big\}\end{aligned}$$

est mesurable. Or nous affirmons que cela est vrai, plus généralement, pour *tout* sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$. Rappelons que tout ensemble mesurable E s'écrit comme différence :

$$E = G \backslash N,$$

entre un G_δ-ensemble $G \supset E$ et un ensemble $N = G \backslash E$ de mesure 0.

En effet, lorsque $E = \mathscr{O}$ est un ouvert, $\widetilde{E} = \widetilde{\mathscr{O}}$ est aussi ouvert, donc mesurable. Lorsque $E = G = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{O}_n$ est intersection dénombrable d'ouverts $\mathscr{O}_n$, *i.e.* est un G_δ-ensemble :

$$\widetilde{E} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \widetilde{O}_n$$

est aussi un G_δ-ensemble dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

Il reste donc à établir que pour $E = N$ de mesure nulle, $\widetilde{E}$ est encore de mesure nulle, mais cela n'est pas immédiat.

Si donc $m(E) = 0$, il existe une suite d'ouverts $\mathscr{O}_n \supset E$ tels que $m(\mathscr{O}_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Pour $N \geqslant 1$ entier, introduisons les cylindres fermés dans l'espace des y :

$$C_N := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \colon |y| \leqslant N\big\},$$

posons :

$$\begin{aligned}\widetilde{E}_N &:= \widetilde{E} \cap C_N\\ &\subset \mathscr{O}_n \cap C_N,\end{aligned}$$

et calculons en utilisant le Théorème 10.3 de Fubini :

$$\begin{aligned}m\big(\widetilde{\mathscr{O}}_n \cap C_N\big) &= \int \mathbf{1}_{\mathscr{O}_n}(x-y)\, \mathbf{1}_{C_N}(y)\, dy dx\\ &= \int \bigg(\int \mathbf{1}_{\mathscr{O}_n}(x-y)\, dx\bigg) \mathbf{1}_{C_N}(y)\, dy\\ &= m(\mathscr{O}_n) \cdot m(C_N),\end{aligned}$$

la dernière ligne utilisant l'invariance de la mesure de Lebesgue par translation. Pour $N \geqslant 1$ fixé, nous en déduisons que :

$$\begin{aligned}m\big(\widetilde{E}_N\big) &\leqslant m\big(\widetilde{\mathscr{O}}_n \cap C_N\big)\\ &= m(\mathscr{O}_n) \cdot m(C_N) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0,\end{aligned}$$

ce qui montre que :

$$m\big(\widetilde{E}_N\big) = 0,$$

et comme $\widetilde{E}_N \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \widetilde{E}$ en croissant dans l'espace $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ on trouve :

$$m\big(\widetilde{E}\big) \,=\, \lim_{N\to\infty} m\big(\widetilde{E}_N\big) \,=\, 0,$$

ce qui termine la démonstration. □

13. **Exercices**

Exercice 43. Établir rigoureusement l'affirmation laissée en exercice dans la démonstration du Théorème 6.6 de convergence dominée de Lebesgue.

Exercice 44. Montrer que si une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ est Lebesgue-intégrable, alors :

$$0 = \lim_{\delta\to 1} \big\| f(x) - f(\delta x) \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Exercice 45. Soit une fonction :

$$f \,\in\, L^1\big(]-\pi,\, \pi]\big)$$

que l'on prolonge comme fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout intervalle I de longueur 2π, on a :

$$\int_I f(x)\, dx \,=\, \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx.$$

Exercice 46. Avec $b > 0$, à une fonction :

$$f \,\in\, L^1\big([0, b]\big),$$

on associe la fonction définie pour $0 < x \leqslant b$ par :

$$g(x) \,:=\, \int_x^b \frac{f(t)}{t}\, dt,$$

Montrer que g est Lebesgue-intégrable sur $[0, b]$ et que l'on a :

$$\int_0^b g(x)\, dx \,=\, \int_0^b f(t)\, dt.$$

Exercice 47. Soit un sous-ensemble fermé $F \subset \mathbb{R}$ dont le complémentaire est de mesure finie :

$$m\big(\mathbb{R}\backslash F\big) \,<\, \infty.$$

On note $\delta(\cdot)$ la fonction distance à F, définie par :

$$\delta(x) \,:=\, \mathsf{dist}(x, F) \,=\, \inf\big\{|x-y|:\ y \in F\big\},$$

et on introduit la fonction définie par une intégrale :

$$I(x) \,:=\, \int_{\mathbb{R}} \frac{\delta(y)}{|x-y|^2}\, dy.$$

(a) Montrer que δ est continue, et même mieux, montrer que δ satisfait la condition de 1-lipschitzianité :

$$\big|\delta(x) - \delta(y)\big| \,\leqslant\, |x-y|.$$

(b) Montrer que $I(x) = \infty$ pour tout $x \notin F$.

(c) Montrer que $I(x) < \infty$ pour presque tout $x \in F$. Certes, cela peut paraître surprenant, eu égard au fait que la condition de Lipschitz ne 'tue' qu'une puissance de $|x-y|$ dans l'intégrande de $I(x)$!
Indication: Étudier $\int_F I(x)\, dx$.

Exercice 48. Comme en théorie de Riemann (généralisée), l'intégrabilité d'une fonction positive f sur $\mathbb{R}$ n'implique *nullement* que $f(x)$ tende vers 0 lorsque $x \longrightarrow \infty$.

(a) Montrer qu'il existe une fonction réelle continue strictement positive f définie sur $\mathbb{R}$ telle que f est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$, bien que :

$$\infty \,=\, \limsup_{x \to \infty} f(x).$$

(b) Toutefois, quand f est supposée uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et intégrable (au sens de Riemann ou de Lebesgue), montrer que :

$$0 \,=\, \lim_{x \to \infty} f(x).$$

Exercice 49. À une fonction mesurable $f \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$, on associe son *graphe :*

$$\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \colon \; y = f(x)\big\}.$$

Montrer que Γ est un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$, et que sa mesure est nulle :

$$m(\Gamma) = 0.$$

Exercice 50. Si $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction Lebesgue-intégrable, montrer que la fonction définie par :

$$F(x) \,:=\, \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

est uniformément continue.

Exercice 51. [Inégalité de Tchebychev] Soit $f \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction intégrable à valeurs positives. Pour $\alpha > 0$, on pose :

$$E_\alpha \,:=\, \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon \; f(x) > \alpha\big\}.$$

Montrer que :

$$m\big(E_\alpha\big) \,\leqslant\, \frac{1}{\alpha} \int f.$$

Exercice 52. Soit une fonction $f \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ mesurable à valeurs positives. Pour $k \geqslant 1$ entier, on pose :

$$E_{2^k} \,:=\, \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon \; f(x) > 2^k\big\},$$

ainsi que :

$$F_k \,:=\, \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon \; 2^k < f(x) \leqslant 2^{k+1}\big\},$$

(a) Lorsque f prend presque partout des valeurs $< \infty$, vérifier que :

$$\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} F_k \,=\, \big\{f(x) > 0\big\},$$

cette réunion étant disjointe.

(b) Montrer que f est Lebesgue-intégrable si et seulement si :

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k\, m\big(F_k\big) \,<\, \infty,$$

si et seulement si :

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k\, m\big(E_{2^k}\big) \,<\, \infty.$$

(c) On introduit les deux fonctions :

$$f(x) \,:=\, \begin{cases} \dfrac{1}{|x|^a} & \text{pour } \; 0 < |x| \leqslant 1, \\ 0 & \text{autrement,} \end{cases}$$

et :

$$g(x) \,:=\, \begin{cases} \dfrac{1}{|x|^b} & \text{pour } \; |x| \geqslant 1, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Déduire de **(b)** que f est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}^d$ exactement lorsque $a < d$, et aussi, que g est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}^d$ exactement lorsque $b > d$.

Exercice 53. Si $f\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction satisfaisant $\int_E f(x)\,dx \geqslant 0$ pour *tout* sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$, montrer que $f \geqslant 0$ presque partout ; avec $\int_E f = 0$, montrer $f = 0$ p.p.

Exercice 54. Montrer qu'il existe une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et une suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de fonctions $f_n \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telles que :

$$0 = \lim_{n\to\infty} \big\| f - f_n \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)},$$

bien que $f_n(x)$ ne tende vers $f(x)$ pour *aucun* $x \in \mathbb{R}^d$.
Indication: En dimension $d = 1$, choisir $f_n = \mathbf{1}_{I_n}$, où les $I_n \subset \mathbb{R}$ sont des intervalles appropriés dont les mesures $m(I_n) \longrightarrow 0$ tendent vers zéro.

Exercice 55. Trouver deux ensembles mesurables A et B tels que $A + B$ n'est *pas* mesurable.
Indication: Dans $\mathbb{R}^2$, prendre $A := \{0\} \times [0,1]$ et $B := \mathscr{N} \times \{0\}$, où $\mathscr{N} \subset [0,1]$ est le sous-ensemble *non* mesurable construit par Vitali.

Exercice 56. On se propose d'évaluer la mesure de la boule unité ouverte — ou fermée, cela reviendrait au même — de $\mathbb{R}^d$:

$$v_d := m\Big(\big\{x \in \mathbb{R}^d\colon\ |x| < 1\big\}\Big).$$

(a) En dimension $d = 2$, montrer que :

$$v_2 = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\,dx,$$

puis en déduire que $v_2 = \pi$.
(b) Montrer que :

$$v_d \;=\; 2\,v_{d-1}\int_0^1 \big(1 - x^2\big)^{\frac{d-1}{2}}\,dx.$$

(c) Avec la fonction $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}\,e^{-t}\,dt$ d'Euler, obtenir le résultat :

$$v_d = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2+1)}.$$

Exercice 57. Soit $f\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Pour un d-uplet quelconque $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_d) \in (\mathbb{R}^*)^d$ de nombres réels non nuls, on pose :

$$f^\delta(x) := f\big(\delta_1 x_1, \dots, \delta_d x_d\big).$$

Montrer que la fonction f^δ est intégrable et qu'elle satisfait :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f^\delta(x)\,dx \;=\; \frac{1}{|\delta_1 \cdots \delta_d|}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx.$$

Exercice 58. Soit une suite $(b_k)_{k=0}^n$ de nombres réels strictement positifs dont la série infinie converge :

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \;=:\; s \;<\; \infty.$$

On note ses sommes partielles d'ordre un entier $n \in \mathbb{N}$ quelconque :

$$a_n := \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} b_k.$$

Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) \;=\; \begin{cases} a_n & \text{lorsque } \ n \leqslant x < n+1,\ \ n \leqslant y < n+1,\ \ \text{avec } \ n \in \mathbb{N}, \\ -\,a_n & \text{lorsque } \ n \leqslant x < n+1,\ \ n+1 \leqslant y < n+2,\ \ \text{avec } \ n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

(a) Montrer que toutes les fonctions-tranches f^y et f_x sont intégrables, puis que :

$$\int f_x(y)\,dy \,=\, 0 \,=\, \int \bigg(\int f(x,y)\,dy\bigg)\,dx.$$

(b) Montrer que $\int f^y(x)\,dx = a_0$ pour $0 \leqslant y < 1$, et plus généralement, que :

$$\int f^y(x)\,dx \,=\, a_n - a_{n-1} \qquad\qquad (n \leqslant y < n+1;\; n \geqslant 1).$$

(c) Montrer que la fonction $y \longmapsto \int f^y(x)\,dx$ est intégrable sur $[0,\infty[$, avec :

$$\int \bigg(\int f(x,y)\,dx\bigg)\,dy \,=\, s.$$

(d) Montrer que :

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \big|f(x,y)\big|\,dxdy \,=\, \infty.$$

Exercice 59. Soit f une fonction réelle mesurable à valeurs finies sur $[0,1]$. Montrer que si $|f(x)-f(y)|$ est intégrable sur $[0,1]\times[0,1]$, alors f est intégrable sur $[0,1]$.

Exercice 60. Soit une fonction intégrable $f\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$. Pour tout $\alpha > 0$, on introduit :

$$E_\alpha \,:=\, \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon\, |f(x)| > \alpha\big\}.$$

Montrer que :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \big|f(x)\big|\,dx \,=\, \int_0^\infty m\big(E_\alpha\big)\,d\alpha.$$

Exercice 61. Dans la démonstration du Théorème de Fubini, on a signalé le problème que certaines tranches d'ensembles mesurables peuvent n'être parfois pas mesurables. Ce problème peut être contourné en restreigant l'attention aux sous-ensembles boréliens.

Montrer en effet que si $E \subset \mathbb{R}^2_{x,y}$ est un borélien, alors pour tout $y \in \mathbb{R}$, la tranche E^y est un borélien de $\mathbb{R}_x$.

Indication: Introduire la collection $\mathscr{C}$ des sous-ensembles $E \subset \mathbb{R}^2$ ayant la propriété que *toute* tranche E^y est un borélien de $\mathbb{R}_x$, et vérifier que $\mathscr{C}$ est une σ-algèbre qui contient les ouverts.

Exercice 62. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} & \text{lorsque } \ 0 < x < 1, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Soit une énumération $(r_n)_{n=1}^\infty$ des nombres rationnels $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. On introduit la fonction définie par une série :

$$F(x) := \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n}\, f\big(x - r_n\big).$$

(a) Montrer que F est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que la série qui définit F converge presque partout vers une valeur finie.

(c) Montrer que F est non bornée sur tout intervalle d'intérieur non vide.

(d) Montrer que toute fonction égale à F presque partout est non bornée dans tout intervalle d'intérieur non vide.

Exercice 63. Une suite $(f_k)_{k=1}^\infty$ de fonctions mesurables sur $\mathbb{R}^d$ est dite *de Cauchy en mesure* lorsque, pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$0 \,=\, \lim_{k,\ell\to\infty} m\Big(\big\{x \in \mathbb{R}^d \colon\, \big|f_k(x) - f_\ell(x)\big| \geqslant \varepsilon\big\}\Big).$$

Elle est dite *converger en mesure* vers une fonction mesurable f lorsque, pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$0 \,=\, \lim_{k\to\infty} m\Big(\big\{x \in \mathbb{R}^d \colon\, \big|f_k(x) - f(x)\big| \geqslant \varepsilon\big\}\Big).$$

Cette notion coïncide avec celle qu'en Théorie des probabilités, on appelle *convergence en probabilité*.

(a) Montrer que si une suite $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ de fonctions intégrables converge en norme L^1 vers une certaine fonction intégrable f, alors $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ converge aussi en mesure vers f.

(b) La réciproque est-elle vraie ?

(c) Relier la convergence en mesure au Théorème d'Egorov.

Exercice 64. Il a déjà été vu que si $E \subset \mathbb{R}^d$ est un sous-ensemble mesurable, et si $L \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est une transformation linéaire, alors $L(E)$ est aussi mesurable, avec :

$$m\big(L(E)\big) \,=\, \big|\mathsf{det}(L)\big|\, m(E),$$

d'où $m\big(L(E)\big) \,=\, 0$ lorsque $m(E) \,=\, 0$. Cas spécial important : la mesure de Lebesgue est invariante par rotations, *i.e.* $m\big(L(E)\big) = m(E)$ lorsque $L \in \mathsf{O}_n(\mathbb{R})$, *i.e.* lorsque $L\,{}^t\!L = \mathsf{Id}$. On se propose de redémontrer cela en utilisant le Théorème de Fubini.

(a) En dimension $d = 2$, soit L une transformation triangulaire supérieure stricte de la forme $x' = x + ay$, $y' = y$. Vérifier que :

$$\mathbf{1}_{L(E)}(x,y) \,=\, \mathbf{1}_E\big(L^{-1}(x,y)\big) \,=\, \mathbf{1}_E\big(x - ay,\, y\big).$$

(b) En utilisant *seulement* l'invariance de la mesure de Lebesgue par translations, montrer que :

$$m\big(L(E)\big) = m(E).$$

(c) Montrer aussi que $m\big(L(E)\big) = m(E)$ lorsque L est triangulaire supérieure stricte.

(d) Montrer généralement que $m\big(L(E)\big) \,=\, \big|\mathsf{det}(L)\big|\, m(E)$.

Indication: Écrire $L \,=\, L_1 D L_2$, où L_1 et L_2 sont triangulaires supérieure et inférieure strictes, et où D est diagonale.

(e) Traiter la dimension $d \geqslant 2$ quelconque.

Exercice 65. L'*Hypothèse du Continu* demande que tout sous-ensemble $S \subset \mathbb{R}$ soit ou bien de cardinal égal à celui de $\mathbb{Z}$, *i.e.* soit dénombrable, ou bien soit de cardinal égal à celui de $\mathbb{R}$: *aucun cardinal intermédiaire n'existe*. D'après Gödel 1938, cette hypothèse est compatible avec les axiomes de Zermelo-Fraenkel de la Théorie des ensembles, et d'après Cohen 1963, la négation de cette hypothèse est *tout aussi* compatible avec la théorie des ensembles. Nous sommes donc libres d'accepter l'hypothèse du continu comme axiome supplémentaire.

Un ensemble E est dit *totalement ordonné* s'il est muni d'une relation binaire $(\cdot) \leqslant (\cdot)$ satisfaisant :

- $x \leqslant x$ pour tout $x \in E$;
- deux éléments quelconques *distincts* $x, y \in E$ sont toujours comparables : ou bien $x \leqslant y$ ou bien $y \leqslant x$, ces deux relations n'étant alors pas satisfaites simultanément ;
- si $x \leqslant y$ et si $y \leqslant z$, alors $x \leqslant z$.

On dit qu'un ensemble E peut être *bien ordonné* s'il peut être muni d'un ordre total ayant la propriété que *tout* sous-ensemble $A \subset E$ possède un (unique) *élément minimal*, à savoir un élément $a_* \in A$ tel que $a_* \leqslant a$ pour tout autre $a \in A \backslash \{a_*\}$.

On admet ici le théorème que *tout ensemble E peut être muni d'un bon ordre*.

(a) Montrer qu'il existe un ordre (hautement paradoxal) $\prec$ sur $\mathbb{R}$ ayant la propriété que pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'ensemble :

$$\big\{x \in \mathbb{R} \colon\; x \prec y\big\},$$

est de cardinal au plus dénombrable.

Indication: Choisir un bon ordre $\prec$ sur $\mathbb{R}$, et introduire :

$$X \,:=\, \big\{x \in \mathbb{R} \colon\; \text{l'ensemble}\, \{y \in \mathbb{R} \colon\, y \prec x\}\, \text{n'est pas dénombrable}\big\}.$$

Si $X = \emptyset$, rien n'est à faire. Sinon, considérer l'élément minimal $x_* \in X$, et utiliser l'hypothèse du continu.

(b) Étant donné un tel ordre, on considère l'ensemble :

$$E \,:=\, \big\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \colon\; x \prec y\big\}.$$

Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, la y-tranche E^y est de mesure $m(E^y) = 0$, tandis que $m(E_x) = 1$ pour $x \in \mathbb{R}$.

(c) Interpréter ce résultat.

Exercice 66. $**$

Espaces de Hölder $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Sud, France

Dans ce chapitre, l'hypothèse d'intégrabilité quadratique sera remplacée par celle de l'intégrabilité de $|f(x)|^{\mathsf{p}}$. L'analyse de ces classes de fonctions jettera une lumière toute particulière sur l'avantage spécial dont bénéficie l'exposant $\mathsf{p} = 2$. F. RIESZ, 1910

Les espaces de fonctions intégrables sur $\mathbb{R}^d$, notamment les espaces L^1, L^2, L^{p}, jouent un rôle central dans de nombreuses questions de l'Analyse Mathématique. L'importance toute particulière des espaces $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ provient du fait qu'ils offrent une généralisation partielle, mais utile, des espaces de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^d)$ de fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}^d$.

Dans l'ordre de simplicité logique, l'espace $L^1(\mathbb{R}^d)$ vient en première position, puisqu'il décrit l'espace des fonctions Lebesgue-intégrables. Par dualité, l'espace $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ des fonctions mesurables bornées apparaît naturellement, et ce n'est qu'une généralisation de l'espace $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}^d)$ des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}^d$ munies de la norme du supremum $\|\cdot\|_{\mathscr{C}^0(\mathbb{R}^d)}$.

Mais c'est l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^d)$ qui présente l'intérêt le plus élevé, en tant qu'il plonge les racines de son origine dans l'acte de naissance de la théorie des séries de Fourier sur le cercle unité $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Les espaces de Hölder $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ de fonctions de puissance p-ème intégrables, avec $1 < \mathsf{p} < \infty$ et $\mathsf{p} \neq 2$, pourraient sembler quelque peu artificiels, mais les résultats structuraux fondamentaux que nous allons démontrer dans ce court chapitre vont nous convaincre du contraire.

1. Espaces L^{p} pour $0 \leqslant \mathsf{p} \leqslant \infty$

Dans tout ce qui va suivre, en dimension $d \geqslant 1$ quelconque, l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$ sera muni de la mesure de Lebesgue, notée $dx = dx_1 \cdots dx_d$, les sous-ensembles dits *mesurables* $E \subset \mathbb{R}^d$ ayant été définis dans un chapitre qui précède.

Définition 1.1. Pour un exposant p satisfaisant :

$$1 \leqslant \mathsf{p} < \infty,$$

l'espace $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ est constitué des fonctions mesurables de puissance p-ème intégrable :

$$L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d) := \left\{ f\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}\colon\ f \text{ est mesurable et satisfait } \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^{\mathsf{p}}\, dx < \infty \right\}.$$

Lorsque $\mathsf{p} = 1$, on retrouve bien entendu l'espace, noté dans un chapitre qui précède :

$$L^1(\mathbb{R}^d),$$

des fonctions dites *Lebesgue-intégrables*. Nous avons alors démontré que la quantité :

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} := \int_{\mathbb{R}^d} \big|f(x)\big|\, dx$$

définit une norme sur l'espace vectoriel $L^1(\mathbb{R}^d)$, *et que* $\big(L^1(\mathbb{R}^d),\, \|\cdot\|_{L^1}\big)$ *est un espace vectoriel normé complet*, pourvu seulement qu'on s'accorde pour dire que deux fonctions sont *égales* lorsqu'elles prennent les mêmes valeurs sauf éventuellement sur un sous-ensemble de mesure nulle.

De même, nous avons déjà établi, lorsque $\mathsf{p} = 2$, que l'espace :

$$L^2(\mathbb{R}^d) := \bigg\{f\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}\colon f \text{ est mesurable et satisfait } \int_{\mathbb{R}^d} \big|f(x)\big|^2\, dx <, \infty\bigg\},$$

est un espace vectoriel normé complet. *Une structure supplémentaire très importante enrichit $L^2(\mathbb{R}^d)$, à savoir la structure d'un espace de Hilbert pour le produit scalaire :*

$$\big\langle f,\, g\big\rangle_{L^2} := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx.$$

On peut aussi définir les espaces L^{p} pour $\mathsf{p} = \infty$, sans utiliser d'intégrale, mais nous verrons dans la Section 4 que les L^{p} tendent en un certain sens naturel vers L^∞ lorsque $\mathsf{p} \longrightarrow \infty$.

Définition 1.2. L'espace des $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ des fonctions *essentiellement bornées* sur $\mathbb{R}^d$ est :

$$L^\infty(\mathbb{R}^d) := \Big\{f\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}\colon f \text{ est mesurable et il existe une constante } 0 \leqslant C < \infty$$
$$\text{telle que } \big|f(x)\big| \leqslant C \text{ pour presque tout } x \in \mathbb{R}^d\Big\}.$$

On définit alors la *norme* L^∞ de f :

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} := \mathsf{inf}\, C,$$

comme étant l'infimum de ces constantes C, lorsqu'il en existe au moins une, et l'on a alors en presque tout point $x \in \mathbb{R}^d$:

$$\big|f(x)\big| \leqslant \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}.$$

Démonstration. En effet, en introduisant l'ensemble :

$$E := \big\{x \in \mathbb{R}^d\colon |f(x)| > \|f\|_{L^\infty}\big\},$$

et en introduisant, pour $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, les ensembles :

$$E_n := \big\{x \in \mathbb{R}^d\colon |f(x)| > \|f\|_{L^\infty} + 1/n\big\},$$

on a $m(E_n) = 0$ pour tout n et $E = \cup E_n$, d'où $m(E) = 0$. □

Parfois, on appelle $\|f\|_{L^\infty}$ le *supremum essentiel* de f. Il est clair que cette norme généralise la norme du supremum sur les fonctions continues $g\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$:

$$\|g\|_{\mathscr{C}^0(\mathbb{R}^d)} := \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \big|g(x)\big|.$$

Mais revenons aux « vrais » espaces $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ avec $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$ de fonctions dont la puissance p-ème est intégrable sur $\mathbb{R}^d$.

Comme dans les cas déjà connus de $L^1(\mathbb{R}^d)$ et de $L^2(\mathbb{R}^d)$, il est naturel de convenir que les fonctions sont définies à un ensemble de mesure nulle près, et donc que l'on a :

$$\big\|f\big\|_{L^{\mathsf{p}}} = 0,$$

lorsque et seulement lorsque $f = 0$ presque partout, où la quantité « *norme* L^{P} » d'une fonction $f \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ devrait, comme on doit s'y attendre, être naturellement définie par :

$$\big\|f\big\|_{L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)} := \bigg(\int_{\mathbb{R}^d} \big|f(x)\big|^{\mathsf{p}}\,dx\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}}},$$

la puissance $\frac{1}{\mathsf{p}}$ garantissant l'homogénéité par dilatation que toute norme doit satisfaire :

$$\big\|\lambda\,f\big\|_{L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)} \,=\, |\lambda|\cdot\|f\|_{L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)} \qquad\qquad (\lambda\in\mathbb{C}).$$

Toutefois, cette idée de définir une telle norme ne pourrait avoir de sens que si on parvenait à prouver que $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ jouit d'une structure d'espace vectoriel, et heureusement, les raisonnements qui vont suivre vont nous faire parvenir à un tel résultat.

Lorsque l'exposant p satisfait $0 < \mathsf{p} < 1$, on constate (Exercice 67) qu'une inégalité du triangle ne peut pas être satisfaite, ce qui justifie, pour bénéficier d'une structure naturelle d'espace vectoriel, de se restreindre à supposer $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$. Dans cette circonstance, c'est l'*inégalité* dite *de Hölder* généralisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz (cas $\mathsf{p} = 2$) qui constitue l'outil principal de toute la théorie, et elle servira à démontrer l'*inégalité de Minkowski*, établissant que $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ est bien un espace vectoriel.

2. Inégalités de Hölder et de Minkowski

Soit donc un exposant réel p, et supposons qu'il est éventuellement égal à l'infini :

$$1 \leqslant \mathsf{p} \leqslant \infty.$$

Définition 2.1. L'*exposant conjugué* de p est l'unique nombre réel p' satisfaisant :

$$\frac{1}{\mathsf{p}} + \frac{1}{\mathsf{p}'} \,=\, 1.$$

Autrement dit :

$$\begin{aligned}\mathsf{p}' &= \frac{1}{1-\frac{1}{\mathsf{p}}}\\ &= \frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}-1},\end{aligned}$$

ce qui montre que :

$$1 < \mathsf{p} < \infty \qquad\Longleftrightarrow\qquad 1 < \mathsf{p}' < \infty.$$

Bien entendu ici, on convient que :

$$\frac{1}{\infty} \,=\, 0 \qquad \text{et que :} \qquad \frac{1}{0} \,=\, \infty,$$

d'où (exercice visuel) :

$$\infty' = 1 \qquad \text{et} \qquad 1' = \infty.$$

Observation 2.2. L'exposant $\mathsf{p} = 2$, et seulement lui, est auto-conjugué :

$$2 = \mathsf{p} = \mathsf{p}' = 2. \qquad \square$$

Théorème 2.3. [Inégalité de Hölder] *Étant donné un exposant* p *quelconque satisfaisant :*

$$1 < \mathsf{p} < \infty,$$

pour toute paire de fonctions appartenant à des espaces conjugués :

$$f \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d) \qquad \text{et} \qquad g \in L^{\mathsf{p}'}(\mathbb{R}^d),$$

le produit $f\,g$ *appartient à* $L^1(\mathbb{R}^d)$ *et l'on a l'inégalité :*

$$\big|\big| f\,g \big|\big|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant ||f||_{L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)} \cdot ||g||_{L^{\mathsf{p}'}(\mathbb{R}^d)},$$

à savoir on a :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \big|f(x)\,g(x)\big|\,dx \leqslant \bigg(\int_{\mathbb{R}^d} \big|f(x)\big|^{\mathsf{p}}\,dx\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}}} \bigg(\int_{\mathbb{R}^d} \big|g(x)\big|^{\mathsf{p}'}\,dx\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}'}}.$$

En particulier, pour $\mathsf{p} = \mathsf{p}' = 2$, on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\big|\big| f\,g \big|\big|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant ||f||_{L^2(\mathbb{R}^d)} \cdot ||g||_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

que l'on a déjà démontrée par d'autres voies.

De plus, pour $\mathsf{p} = \infty$, d'où $\mathsf{p}' = 1$, nous affirmons que l'inégalité est encore valable :

$$\big|\big| f\,g \big|\big|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant ||f||_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \cdot ||g||_{L^1(\mathbb{R}^d)},$$

ce qui est essentiellement évident, puisqu'il suffit de majorer dans l'intégrale la fonction f par son supremum essentiel :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \big|f(x)\,g(x)\big|\,dx &\leqslant \operatorname*{supess}_{\mathbb{R}^d} |f| \int_{\mathbb{R}^d} \big|g(x)\big|\,dx \\ &= ||f||_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \cdot ||g||_{L^1(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

Démonstration. Pour ce qui est du cas le plus fréquent $1 < \mathsf{p} < \infty$, commençons par généraliser l'inégalité évidente (exercice !) :

$$t\,s \leqslant \frac{t^2 + s^2}{2},$$

satisfaite par deux nombres réels $t, s \geqslant 0$ quelconques.

Lemme 2.4. *Pour tout exposant* θ *avec* $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, *deux nombres réels* $t, s \geqslant 0$ *quelconques satisfont toujours :*

$$t^\theta\, s^{1-\theta} \leqslant \theta\,t + (1-\theta)\,s.$$

Démonstration. En effet, puisqu'on a gratuitement $0 \leqslant 0$ lorsque $s = t = 0$, on peut supposer que $(s,t) \neq (0,0)$. Ensuite, grâce au fait que l'inégalité à établir est symétrique à travers les échanges simultanés :

$$\theta \longleftrightarrow (1-\theta) \qquad\qquad s \longleftrightarrow t,$$

on peut supposer que $s \neq 0$.

Or puisque l'ensemble des couples $(t,s) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$ est le même que l'ensemble des couples (ts, s) avec $s \neq 0$, nous sommes ramenés à établir :

$$(ts)^\theta\, s^{1-\theta} \overset{?}{\leqslant} \theta\,ts + (1-\theta)\,s,$$

ce qui, après division par s, et disparition de s, devient :

$$t^\theta \overset{?}{\leqslant} \theta\, t + 1 - \theta.$$

On a donc affaire ici à la fonction d'une seule variable $t \in \mathbb{R}_+$:

$$f(t) \,:=\, t^\theta - \theta\, t - 1 + \theta,$$

partant de la valeur négative $f(0) = -1 + \theta$, dont la fonction dérivée :

$$f'(t) \,=\, \theta\big(t^{\theta-1} - 1\big),$$

est $\geqslant 0$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$, puis $\leqslant 0$ pour $1 \leqslant t < \infty$, ce qui force f à atteindre son maximum au point $t = 1$, où elle vaut :

$$f(1) = 0,$$

et donc f prend toujours des valeurs $\leqslant 0$, ce qui établit l'inégalité désirée. □

Maintenant, nous pouvons raisonner comme suit pour obtenir l'inégalité de Hölder.

Si l'on a soit $\|f\|_{L^{\mathsf{p}}} = 0$, soit $\|g\|_{L^{\mathsf{p}'}} = 0$, il vient soit $f = 0$ soit $g = 0$ presque partout, et donc dans les deux cas $f\, g = 0$ presque partout, et enfin, l'inégalité de Hölder se réduit à l'inégalité triviale $0 \leqslant 0$.

Nous pouvons donc supposer que :

$$\|f\|_{L^{\mathsf{p}}} \neq 0 \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \|g\|_{L^{\mathsf{p}'}} \neq 0.$$

Divisons alors f et g par leurs normes :

$$f \,\longmapsto\, \frac{f}{\|f\|_{L^{\mathsf{p}}}} \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad g \,\longmapsto\, \frac{g}{\|g\|_{L^{\mathsf{p}'}}},$$

afin de nous ramener, dans l'inégalité à établir, au cas où f et g sont toutes deux de norme unité :

$$\|f\|_{L^{\mathsf{p}}} \,=\, 1 \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \|g\|_{L^{\mathsf{p}'}} \,=\, 1.$$

En un point fixé $x \in \mathbb{R}^d$, appliquons alors le lemme qui précède aux deux nombres réels :

$$t \,:=\, \big|f(x)\big|^{\mathsf{p}} \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad s \,:=\, \big|g(x)\big|^{\mathsf{p}'},$$

avec l'exposant :

$$\theta \,:=\, \frac{1}{\mathsf{p}} \qquad\qquad \text{d'où} \qquad\qquad 1 - \theta \,=\, \frac{1}{\mathsf{p}'},$$

ce qui nous donne :

$$\big|f(x)\, g(x)\big| \,\leqslant\, \frac{1}{\mathsf{p}}\, \big|f(x)\big|^{\mathsf{p}} + \frac{1}{\mathsf{p}'}\, \big|g(x)\big|^{\mathsf{p}'}.$$

Pour terminer, une simple intégration de cette inégalité apporte sur un plateau doré le jeu d'(in)égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\big\|f\, g\big\|_{L^1} \,&\leqslant\, \frac{1}{\mathsf{p}}\, \|f\|_{L^{\mathsf{p}}} + \frac{1}{\mathsf{p}'}\, \|g\|_{L^{\mathsf{p}'}} \\
&=\, \frac{1}{\mathsf{p}} \cdot 1 + \frac{1}{\mathsf{p}'} \cdot 1 \\
&=\, 1 \\
&=\, \|f\|_{L^{\mathsf{p}}} \cdot \|g\|_{L^{\mathsf{p}'}},
\end{aligned}$$

qui conclut les hostilités. □

Nous sommes maintenant prêts pour établir l'inégalité du triangle dans l'espace $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 2.5. [Minkowski] *Étant donné un exposant* p *quelconque satisfaisant :*

$$1 \leqslant \mathsf{p} \leqslant \infty,$$

pour toute paire de fonctions dans le même espace de Hölder :

$$f \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d) \qquad \text{et} \qquad g \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d),$$

on a :

$$\big\|f+g\big\|_{L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|f\|_{L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)} + \|g\|_{L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)}.$$

Démonstration. Le cas déjà connu $\mathsf{p} = 1$ s'obtient instantanément en intégrant l'inégalité :

$$\big|f(x)+g(x)\big| \leqslant \big|f(x)\big| + \big|g(x)\big|.$$

Le cas $\mathsf{p} = \infty$, aisé, est laissé au lecteur en exercice de compréhension.

Maintenant, pour $1 < \mathsf{p} < \infty$, commençons par vérifier que $f + g \in L^{\mathsf{p}}$ lorsque $f, g \in L^{\mathsf{p}}$.

À cet effet, comme en tout point $x \in \mathbb{R}^d$ on a soit :

$$\big|f(x)\big| \leqslant \big|g(x)\big|, \qquad \text{soit} \qquad \big|g(x)\big| \leqslant \big|f(x)\big|,$$

on a toujours soit :

$$\big|f(x)+g(x)\big|^{\mathsf{p}} \leqslant 2^{\mathsf{p}}\,\big|g(x)\big|, \qquad \text{soit} \qquad \big|f(x)+g(x)\big|^{\mathsf{p}} \leqslant 2^{\mathsf{p}}\,\big|f(x)\big|,$$

d'où toujours :

$$\big|f(x)+g(x)\big|^{\mathsf{p}} \leqslant 2^{\mathsf{p}}\big(\big|f(x)\big|^{\mathsf{p}} + \big|g(x)\big|^{\mathsf{p}}\big),$$

ce qui démontre bien, en intégrant cette dernière inégalité, que $f + g \in L^{\mathsf{p}}$ avec l'estimation :

$$\big\|f+g\big\|_{L^{\mathsf{p}}} \leqslant 2^{\mathsf{p}}\big(\|f\|_{L^{\mathsf{p}}} + \|g\|_{L^{\mathsf{p}}}\big),$$

qui est moins bonne que l'inégalité de Minkowski désirée à cause de la constante $2^{\mathsf{p}} > 1$, donc il rest du travail.

En fait, comme $\mathsf{p} > 1$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\big|f(x)+g(x)\big|^{\mathsf{p}} &= |f(x)+g(x)| \cdot \big|f(x)+g(x)\big|^{\mathsf{p}-1} \\ &\leqslant |f(x)| \cdot \big|f(x)+g(x)\big|^{\mathsf{p}-1} + |g(x)| \cdot \big|f(x)+g(x)\big|^{\mathsf{p}-1}.\end{aligned}$$

Or si p' est l'exposant conjugué de p :

$$\mathsf{p}' = \frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}-1},$$

qui satisfait :

$$(\mathsf{p}-1)\,\mathsf{p}' = \mathsf{p},$$

nous voyons que la fonction $(f+g)^{\mathsf{p}-1}$ qui apparaît deux fois dans l'inégalité ci-dessus appartient à l'espace $L^{\mathsf{p}'}(\mathbb{R}^d)$, donc nous pouvons appliquer deux fois l'inégalité de Hölder et chercher ensuite à faire ré-apparaître les normes L^{p} :

$$\begin{aligned}
\big(\|f+g\|_{L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)}\big)^{\mathsf{p}} &\leqslant \big\||f|\cdot|f+g|^{\mathsf{p}-1}\big\|_{L^1} + \big\||g|\cdot|f+g|^{\mathsf{p}-1}\big\|_{L^1}\\
&\leqslant \|f\|_{L^{\mathsf{p}}}\cdot\big\||f+g|^{\mathsf{p}-1}\big\|_{L^{\mathsf{p}'}} + \|g\|_{L^{\mathsf{p}}}\cdot\big\||f+g|^{\mathsf{p}-1}\big\|_{L^{\mathsf{p}'}}\\
&= \|f\|_{L^{\mathsf{p}}}\cdot\bigg(\int_{\mathbb{R}^d}\big(\big|f+g\big|^{\mathsf{p}-1}\big)^{\mathsf{p}'}\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}'}} + \|g\|_{L^{\mathsf{p}}}\cdot\bigg(\int_{\mathbb{R}^d}\big(\big|f+g\big|^{\mathsf{p}-1}\big)^{\mathsf{p}'}\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}'}}\\
&= \|f\|_{L^{\mathsf{p}}}\cdot\bigg(\int_{\mathbb{R}^d}\big|f+g\big|^{\mathsf{p}}\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}}\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}'}} + \|g\|_{L^{\mathsf{p}}}\cdot\bigg(\int_{\mathbb{R}^d}\big|f+g\big|^{\mathsf{p}}\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}}\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}'}}\\
&= \|f\|_{L^{\mathsf{p}}}\cdot\Big(\big\|f+g\big\|_{L^{\mathsf{p}}}\Big)^{\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}'}} + \|g\|_{L^{\mathsf{p}}}\cdot\Big(\big\|f+g\big\|_{L^{\mathsf{p}}}\Big)^{\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}'}}
\end{aligned}$$

ce qui donne en factorisant :

$$\big(\|f+g\|_{L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)}\big)^{\mathsf{p}} \leqslant \Big(\big\|f+g\big\|_{L^{\mathsf{p}}}\Big)^{\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}'}}\Big\{\|f\|_{L^{\mathsf{p}}}+\|g\|_{L^{\mathsf{p}}}\Big\}.$$

Pour terminer, dans l'inégalité de Minkowski à démontrer, on peut bien sûr supposer que $\|f+g\|_{L^{\mathsf{p}}} > 0$ (exercice mental), et donc en simplifiant à gauche et à droite par la bonne puissance de $\|f+g\|_{L^{\mathsf{p}}}$, grâce au fait « miraculeux » (exercice) que :

$$\mathsf{p}-\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}'} = 1,$$

on obtient bien l'inégalité de Minkowski :

$$\big(\|f+g\|_{L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)}\big)^{\mathsf{p}-\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}'}} \leqslant \|f\|_{L^{\mathsf{p}}}+\|g\|_{L^{\mathsf{p}}},$$

ce qui conclut. □

3. **Complétude de** $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$

En adaptant la démonstration que $L^1(\mathbb{R}^d)$ est complet, on démontre plus généralement que tous les espaces $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ sont complets.

> Taking limits is a necessity in many problems, and the L^{p} spaces would be of little use if they were not complete. Elias STEIN, 2002

Théorème 3.1. [Riesz-Fischer] *Pour $1 \leqslant \mathsf{p} \leqslant \infty$, le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $L^{\mathsf{p}}\big(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}\big)$ muni de la métrique dérivée de sa norme :*

$$d\big(f,g\big) := \bigg(\int_{\mathbb{R}^d}\big|f-g\big|^{\mathsf{p}}\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}}},$$

est complet. □

La démonstration dans le cas $\mathsf{p}=\infty$, plus élémentaire que celle des cas $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$, est suggérée en exercice (utiliser la Théorie de la mesure).

4. Espaces $L^{\mathsf{p}}(E)$

Naturellement, les espaces L^{p} ont un sens sur les sous-ensembles mesurables quelconques de $\mathbb{R}^d$.

Définition 4.1. Si $E \subset \mathbb{R}^d$ est un sous-ensemble mesurable, pour un exposant $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$, l'espace $L^{\mathsf{p}}(E)$ est constitué des fonctions mesurables sur E de puissance p-ème intégrable :

$$L^{\mathsf{p}}(E) := \left\{ f\colon E \longrightarrow \mathbb{C}\colon \ f \text{ est mesurable et satisfait } \int_E \big|f(x)\big|^{\mathsf{p}}\,dx < \infty \right\}.$$

On peut aussi définir $L^\infty(E)$, en mimant la définition de $L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Lorsque $m(E) < \infty$ est de mesure (de Lebesgue) finie, les espaces $L^{\mathsf{p}}(E)$ peuvent être comparés entre eux.

Proposition 4.2. *Si $E \subset \mathbb{R}^d$ est mesurable avec $m(E) < \infty$, pour tout couple d'exposants :*

$$1 \leqslant \mathsf{p} \leqslant \mathsf{q} \leqslant \infty,$$

on a les inclusions inversées :

$$L^1(E) \supset L^{\mathsf{p}}(E) \supset L^{\mathsf{q}}(E) \supset L^\infty(E),$$

et lorsque de plus :

$$1 \leqslant \mathsf{p} \leqslant \mathsf{q} < \infty,$$

on a les inégalités normiques :

$$\frac{1}{m(E)^{\frac{1}{\mathsf{p}}}}\,\|f\|_{L^{\mathsf{p}}} \leqslant \frac{1}{m(E)^{\frac{1}{\mathsf{q}}}}\,\|f\|_{L^{\mathsf{q}}}.$$

Démonstration. Le cas où $\mathsf{q} = \infty$ étant laissé au lecteur-étudiant, nous pouvons alors bien entendu supposer que :

$$1 \leqslant \mathsf{p} < \mathsf{q} < \infty.$$

Si donc une fonction quelconque $f \in L^{\mathsf{q}}(E)$ est donnée, il s'agit de faire voir que cette fonction appartient automatiquement à $L^{\mathsf{p}}(E)$, et pour ce faire, nous devons chercher à majorer :

$$\int_E |f|^{\mathsf{p}}\,dx,$$

sachant que seule l'intégrabilité de la puissance q-ème de f est connue, et alors une *astuce simple et artificielle mais omniprésente dans toute la théorie* consiste à faire apparaître un facteur 1 implicite afin d'appliquer l'inégalité de Hölder :

$$\int_E |f|^{\mathsf{p}}\cdot 1\,dx \leqslant \left(\int_E \big(|f|^{\mathsf{p}}\big)^{\mathsf{p}_1}\right)^{\frac{1}{\mathsf{p}_1}} \underbrace{\left(\int_E 1^{\mathsf{p}_1'}\right)^{\frac{1}{\mathsf{p}_1'}}}_{\substack{\text{quantité finie} \\ \text{puisque } m(E) < \infty}},$$

en choisissant des exposants conjugués :

$$\frac{1}{\mathsf{p}_1} + \frac{1}{\mathsf{p}_1'} = 1,$$

afin que l'exposant de $|f|$ soit justement égal à q :

$$\mathsf{p}\,\mathsf{p}_1 = \mathsf{q},$$

ce qui impose le choix unique :

$$\mathsf{p}_1 := \frac{\mathsf{q}}{\mathsf{p}} \qquad \text{d'où} \qquad \frac{1}{\mathsf{p'}_1} = 1 - \frac{\mathsf{p}}{\mathsf{q}}.$$

L'inégalité obtenue devient alors :

$$\begin{aligned}\Big(\|f\|_{L^{\mathsf{p}}(E)}\Big)^{\mathsf{p}} &\leqslant \bigg(\int_E |f|^{\mathsf{q}}\bigg)^{\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{q}}} \cdot \Big(m(E)\Big)^{1-\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{q}}} \\ &= \Big(\|f\|_{L^{\mathsf{q}}(E)}\Big)^{\mathsf{p}} \cdot \Big(m(E)\Big)^{1-\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{q}}} \\ &< \infty,\end{aligned}$$

ce qui montre tout d'abord bien que $f \in L^{\mathsf{p}}(E)$, et ensuite, après prise de racine p-ème, offre l'inégalité annoncée. □

Toutefois, lorsque la mesure $m(E) = \infty$ de E est infinie, ces inclusions cessent d'être vraies en général, *cf.* l'Exercice 68.

Pour conclure ce bref chapitre, voici un énoncé qui montre que l'espace $L^\infty(E)$ est un cas-limite des espaces $L^{\mathsf{p}}(E)$.

Proposition 4.3. *Sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ de mesure $m(E) < \infty$, pour toute fonction :*

$$f \in L^\infty(E),$$

d'où par la Proposition 4.2, pour tout $1 \leqslant \mathsf{p} \leqslant \infty$:

$$f \in L^{\mathsf{p}}(E),$$

on a :

$$\|f\|_{L^{\mathsf{p}}(E)} \longrightarrow \|f\|_{L^\infty(E)},$$

lorsque $\mathsf{p} \longrightarrow \infty$.

Démonstration. Si $\|f\|_{L^\infty} = 0$, on a $f = 0$ presque partout, donc $\|f\|_{L^{\mathsf{p}}} = 0$ pour tout p, et $0 \to 0$ gratuitement. De même, lorsque $m(E) = 0$, il n'y a rien à vérifier.

En supposant donc que $m(E) > 0$ et que $\|f\|_{L^\infty} > 0$, majorons :

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^{\mathsf{p}}} &= \bigg(\int_E |f(x)|^{\mathsf{p}}\,dx\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}}} \\ &\leqslant \bigg(\int_E \big(\|f\|_{L^\infty}\big)^{\mathsf{p}}\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}}} \\ &\leqslant \|f\|_{L^\infty} \cdot \big(m(E)\big)^{\frac{1}{\mathsf{p}}}.\end{aligned}$$

Or comme $a^{\frac{1}{\mathsf{p}}} \longrightarrow 1$ pour tout nombre réel $a > 0$, on déduit :

$$\limsup_{\mathsf{p}\to\infty} \|f\|_{L^{\mathsf{p}}} \leqslant \|f\|_{L^\infty}.$$

D'un autre côté, étant donné $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, on doit avoir d'après la Définition 1.2 du supremum essentiel :

$$m\Big(\big\{x \in E\colon\ |f(x)| \geqslant \|f\|_{L^\infty} - \varepsilon\big\}\Big) \geqslant \delta > 0,$$

pour un certain $\delta = \delta(\varepsilon)$ strictement positif, d'où (exercice mental) :

$$\int_E |f(x)|^{\mathsf{p}}\,dx \;\geqslant\; \delta\cdot\big(\|f\|_{L^\infty}-\varepsilon\big)^{\mathsf{p}}.$$

Après prise de la racine p-ème de cette inégalité, nous déduisons :

$$\liminf_{\mathsf{p}\to\infty}\|f\|_{L^{\mathsf{p}}} \;\geqslant\; \|f\|_{L^\infty}-\varepsilon,$$

et comme $\varepsilon > 0$ était arbitraire :

$$\liminf_{\mathsf{p}\to\infty}\|f\|_{L^{\mathsf{p}}} \;\geqslant\; \|f\|_{L^\infty}$$

La comparaison visuelle entre les deux inégalités concernant les limites supérieure et inférieure montre que le résultat tombe du ciel. □

5. Exercices

Exercice 67. On considère les espaces $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ pour $0<\mathsf{p}<\infty$. Montrer que si l'on a :

$$\big\|f+g\big\|_{L^{\mathsf{p}}} \;\leqslant\; \|f\|_{L^{\mathsf{p}}}+\|g\|_{L^{\mathsf{p}}}$$

pour toutes fonctions $f, g \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$, alors nécessairement $\mathsf{p}\geqslant 1$.

Exercice 68. Sur $\mathbb{R}^d$ muni de la mesure de Lebesgue, on considère l'espace $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$. Soit la première fonction :

$$f_0(x) \;:=\; \begin{cases} \dfrac{1}{|x|^\alpha} & \text{lorsque } |x|<1 \\ 0 & \text{lorsque } |x|\geqslant 1, \end{cases}$$

et soit la deuxième fonction :

$$f_\infty(x) \;:=\; \begin{cases} 0 & \text{lorsque } |x|<1 \\ \dfrac{1}{|x|^\alpha} & \text{lorsque } |x|\geqslant 1, \end{cases}$$

(a) Montrer que $f_0 \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si $p\,\alpha < d$.
(b) Montrer que $f_\infty \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si $d < p\,\alpha$.
(c) Qu'arrive-t-il si on considère la première fonction modifiée :

$$f_0(x) \;:=\; \begin{cases} \dfrac{1}{|x|^\alpha \log\big(\frac{2}{|x|}\big)} & \text{lorsque } |x|<1 \\ 0 & \text{lorsque } |x|\geqslant 1, \end{cases}$$

et si on considère la deuxième fonction modifiée :

$$f_\infty(x) \;:=\; \begin{cases} 0 & \text{lorsque } |x|<1 \\ \dfrac{1}{|x|^\alpha \log\big(2\,|x|\big)} & \text{lorsque } |x|\geqslant 1\,? \end{cases}$$

Exercice 69. $**$
