Exercices : Barbara Tumpach
Relecture : François Lescure

Théorème de convergence monotone, dominée et lemme de Fatou

Exercice 1

1. Soit $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathscr{M}^+(\Omega,\Sigma)$. Montrer que
$$\int_\Omega \left(\sum_{n=1}^{+\infty} g_n\right) d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_\Omega g_n \, d\mu.$$
2. Montrer que
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x-1}\, dx = \Gamma(s)\zeta(s),$$
où Γ est la fonction d'Euler et où $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$. (On pourra considérer les fonctions $g_n(x) = x^{s-1}e^{-nx}\mathbf{1}_{[0,+\infty)}$.)

Correction ▼ [005939]

Exercice 2

Soit $\Omega = \mathbb{R}$, $\Sigma = \mathscr{B}(\mathbb{R})$ et μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Si on pose $f_n = \mathbf{1}_{[0,n]}$, $n \in \mathbb{N}$, alors la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone croissante vers $f = \mathbf{1}_{[0,+\infty)}$. Bien que les fonctions f_n soient uniformément bornées par 1 et que les intégrales des f_n sont finies, on a :
$$\int_\Omega f\, d\mu = +\infty.$$
Est-ce que le théorème de convergence monotone s'applique dans ce cas ?

Correction ▼ [005940]

Exercice 3

Soit $\Omega = \mathbb{R}$, $\Sigma = \mathscr{B}(\mathbb{R})$ et μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Si on pose $f_n = \frac{1}{n}\mathbf{1}_{[n,+\infty)}$, $n \in \mathbb{N}$, alors la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone décroissante et converge uniformément vers 0, mais
$$0 = \int_\Omega f\, d\mu \neq \lim \int_\Omega f_n\, d\mu = +\infty.$$
Est-ce que cela contredit le théorème de convergence monotone ?

Correction ▼ [005941]

Exercice 4

Soit $f_n = \frac{1}{n}\mathbf{1}_{[0,n]}$, $n \in \mathbb{N}$, et $f = 0$. Montrer que f_n converge uniformément vers f, mais que
$$\int_\Omega f\, d\mu \neq \lim \int_\Omega f_n\, d\mu$$
Est-ce que cela contredit le théorème de convergence monotone ?

Correction ▼ [005942]

Exercice 5

Soit $\Omega = \mathbb{R}$, $\Sigma = \mathscr{B}(\mathbb{R})$ et μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Soit $f_n = -\frac{1}{n}\mathbf{1}_{[0,n]}$, $n \in \mathbb{N}$, et $f = 0$. Montrer que f_n converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$ mais que
$$\liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n\, d\mu < \int_\Omega f\, d\mu.$$

Est-ce que cela contredit le lemme de Fatou ?

Correction ▼ [005943]

Exercice 6

Soit $f \in \mathscr{M}^+(\Omega,\Sigma)$ tel que $\int_\Omega f\,d\mu < +\infty$. Montrer que

$$\mu\{x \in \Omega,\ f(x) = +\infty\} = 0.$$

On pourra considérer les fonctions $f_n = n\mathbf{1}_{\{f \geqslant n\}}$.

Correction ▼ [005944]

Exercice 7

Soit (Ω,Σ,μ) un espace mesuré avec $\mu(\Omega) < +\infty$. Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables convergeant presque partout vers une fonction mesurable f. On suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $|f_n| \leqslant C$ pour tout $n \geqslant 1$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n\,d\mu = \int_\Omega f\,d\mu.$$

Correction ▼ [005945]

Exercice 8

Soit $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$. Que vaut la limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_\mathbb{R} f(x)\cos^n(\pi x)d\lambda(x)\ ?$$

Correction ▼ [005946]

Exercice 9

On rappelle qu'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est dite intégrable si $f_+ := \max\{f,0\}$ et $f_- = \max\{-f,0\}$ vérifient $\int_\Omega f_+\,d\mu < +\infty$ et $\int_\Omega f_-\,d\mu < +\infty$. On note $\mathscr{L}^1(\Omega,\Sigma,\mu)$ l'ensemble des fonctions réelles intégrables. Pour $f \in \mathscr{L}^1(\Omega,\Sigma,\mu)$, on pose

$$\int_\Omega f\,d\mu = \int_\Omega f_+\,d\mu - \int_\Omega f_-\,d\mu.$$

1. Montrer l'équivalence
$$f \in \mathscr{L}^1(\Omega,\Sigma,\mu) \Leftrightarrow |f| \in \mathscr{L}^1(\Omega,\Sigma,\mu)$$
et
$$\left|\int_\Omega f\,d\mu\right| \leqslant \int_\Omega |f|\,d\mu. \tag{1}$$
2. Montrer que si f est mesurable, g intégrable et $|f| \leqslant |g|$, alors f est intégrable et
$$\int_\Omega |f|\,d\mu \leqslant \int_\Omega |g|\,d\mu.$$
3. On rappelle qu'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est dite intégrable si la partie réelle $\mathrm{Re}f$ et la partie imaginaire $\mathrm{Im}f$ de f sont intégrables. On pose alors
$$\int_\Omega f\,d\mu = \int_\Omega \mathrm{Re}f\,d\mu + i\int_\Omega \mathrm{Im}f\,d\mu.$$
Montrer que l'inégalité (1) est vérifiée.

Correction ▼ [005947]

Exercice 10

Soit (Ω,Σ,μ) un espace mesuré. On dit que f_n converge vers f *en mesure* si pour tout ε,

$$\lim_{n\to+\infty}\mu\{x\in\Omega,\ |f_n(x)-f(x)|\ >\varepsilon\}\ =0.$$

Montrer que si $f_n\to f$ en mesure, alors il existe une sous-suite $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers f μ-presque partout.

Correction ▼ [005948]

Exercice 11

Donner un exemple de fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ qui est intégrable au sens de Lebesgue mais pas au sens de Riemann.

Correction ▼ [005949]

Exercice 12

1. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\}$ est une suite croissante et
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}.$$
2. Calculer la limite
$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}_+}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\mathrm{e}^{-bx}d\lambda(x)$$
où $b>1$.

Correction ▼ [005950]

Exercice 13

Montrer que

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^m dx=m!$ (pour tout $m\in\mathbf{N}$).
2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}dx=1.$

Correction ▼ [005951]

Exercice 14

Montrer le théorème suivant, Ω étant un espace mesurable. (On pourra utiliser le théorème des accroissements finis.)

Théorème.(Dérivation sous le signe $\int$)

Soit $f\ :\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ une fonction telle que

(i) Pour tout $s\in[s_1,s_2]$, la fonction $x\mapsto f(x,s)$ est intégrable ;

(ii) pour presque tout x, la fonction $s\mapsto f(x,s)$ est dérivable sur (s_1,s_2) ;

(ii) il existe $g\in\mathscr{L}^1(\Omega,\mathbb{R}^+)$ tel que pour tout $s\in[s_1,s_2]$ et pour presque tout $x\in\Omega$ on ait $|\frac{\partial f(x,s)}{\partial s}|\leqslant g(x)$.

Alors la fonction $I(s):=\int_\Omega f(x,s)\,d\mu(x)$ est dérivable sur (s_1,s_2) et

$$\frac{dI}{ds}=\int_\Omega\frac{\partial f(x,s)}{\partial s}\,d\mu(x).$$

Correction ▼ [005952]

Exercice 15

Soit $f\in\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$. Sa *transformée de Fourier* est la fonction $\hat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ définie par

$$\hat{f}(y):=\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-ixy}f(x)dx,$$

montrer que

1. $\hat{f}$ est continue,
2. $\hat{f}$ est bornée et $\sup|\hat{f}| \leqslant \|f\|_{L^1}$ $(=\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,dx)$,
3. Si $x \to xf(x)$ est intégrable, alors $\hat{f}$ est dérivable et on a

$$\frac{d}{dy}\,\hat{f} = \widehat{-ixf(x)}.$$

Correction ▼ [005953]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Soit $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathscr{M}^+(\Omega,\Sigma)$. Alors $f_k=\sum_{n=1}^{k} g_n$ est une suite croissante de $\mathscr{M}^+(\Omega,\Sigma)$. D'après le théorème de convergence monotone
$$\int_\Omega\left(\sum_{n=1}^{+\infty} g_n\right)d\mu=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_\Omega g_n\,d\mu.$$
2. Posons $g_n(x)=x^{s-1}e^{-nx}\mathbf{1}_{[0,+\infty)}$. Les g_n appartiennent à $\mathscr{M}^+(\Omega,\Sigma)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. D'après la question précédente,
$$\int_\Omega\left(\sum_{n=1}^{+\infty} g_n\right)d\mu=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_\Omega g_n\,d\mu.$$
Or d'une part,
$$\int_\Omega g_n\,d\mu=\int_\Omega x^{s-1}e^{-nx}\mathbf{1}_{[0,+\infty)}\,dx=\frac{1}{n^s}\int_0^{+\infty}y^{s-1}e^{-y}\,dy=\frac{1}{n^s}\Gamma(s),$$
donc
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_\Omega g_n\,d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\Gamma(s)=\zeta(s)\Gamma(s).$$
D'autre part,
$$\int_\Omega\left(\sum_{n=1}^{+\infty} g_n\right)d\mu=\int_0^{+\infty}x^{s-1}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-nx}\,dx=\int_0^{+\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}\,dx,$$
d'où l'égalité cherchée.

Correction de l'exercice 2 ▲

Oui, le théorème de convergence monotone ne dit pas que l'intégrale de f est finie. On a bien
$$+\infty=\int_\Omega f\,d\mu=\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega f_n\,d\mu=\lim_{n\to+\infty}n.$$

Correction de l'exercice 3 ▲

Non, le théorème de convergence monotone ne s'applique pas à une suite décroissante de fonctions positives.

Correction de l'exercice 4 ▲

Non, la suite de fonctions n'est pas même monotone.

Correction de l'exercice 5 ▲

En effet, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $N_\varepsilon=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$ tel que $\forall n\geqslant N_\varepsilon$,
$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$
i.e. f_n converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$. On a :
$$\lim_{n\to+\infty}\inf\int_\Omega f_n\,d\mu=\lim_{n\to+\infty}\inf-\int_0^n\frac{1}{n}\,d\mu=-1.$$
D'autre part $\int_\Omega f\,d\mu=0$. Le lemme de Fatou ne s'applique pas car les fonctions f_n ne sont pas à valeurs dans $[0,+\infty]$.

Correction de l'exercice 6 ▲

On a
$$\mu(f=+\infty)=\mu\left(\cap_{n\in\mathbb{N}}\{f\geqslant n\}\right).$$
Puisque les ensembles $A_n:=\{f\geqslant n\}$ vérifient $A_1\supset A_2\supset A_3\dots$ et $\mu(A_i)<+\infty$ $(i=1,2,\dots)$, par continuité de la mesure, on a :
$$\mu(f=+\infty)=\lim_{n\to+\infty}\mu(f\geqslant n).$$
Or, comme f est à valeurs positives, les fonctions f_n définies par $f_n=n\mathbf{1}_{\{f\geqslant n\}}$ vérifient $f_n\leqslant f$. Ainsi
$$\int_\Omega f_n\,d\mu=\int_\Omega n\mathbf{1}_{\{f\geqslant n\}}\,d\mu=n\mu(f\geqslant n)\ \leqslant\ \int_\Omega f\,d\mu<+\infty.$$
On en déduit que
$$\mu(f\geqslant n)\ \leqslant\ \frac{1}{n}\int_\Omega f\,d\mu\to 0,$$
donc
$$\mu(f=+\infty)=0.$$

Correction de l'exercice 7 ▲

Puisque $\mu(\Omega)<+\infty$, la fonction constante égale à C est intégrable, d'intégrale $C\mu(\Omega)$. Une application directe du théorème de convergence dominée donne
$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega f_n\,d\mu=\int_\Omega f\,d\mu.$$

Correction de l'exercice 8 ▲

Soit $f\in\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$. Comme $\cos(\pi x)<1$ si $x\notin\mathbb{Z}$, $\cos^n(\pi x)\to 0$ lorsque $n\to\infty$ presque partout (pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$). Notons $f_n(x)=f(x)\cos^n(\pi x)$. Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $|f_n(x)|\leqslant|f(x)|$ et comme $|f|\in\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue,
$$\lim_{n\to\infty}\int_\mathbb{R} f(x)\cos^n(\pi x)d\lambda(x)=\lim_{n\to\infty}\int_\mathbb{R} f_n(x)d\lambda(x)=\int_\mathbb{R}\lim_{n\to\infty}f_n(x)d\lambda(x)=0.$$

Correction de l'exercice 9 ▲

1. Par définition, $f\in\mathscr{L}^1(\Omega,\Sigma,\mu)$ si et seulement si f_+ et f_- sont intégrables. On note que $|f|=f_++f_-$. Donc $f\in\mathscr{L}^1(\Omega,\Sigma,\mu)\Rightarrow|f|\in\mathscr{L}^1(\Omega,\Sigma,\mu)$. Réciproquement, on a $0\leqslant f_\pm\leqslant|f|$, donc $|f|\in\mathscr{L}^1(\Omega,\Sigma,\mu)\Rightarrow f\in\mathscr{L}^1(\Omega,\Sigma,\mu)$. D'autre part :
$$\left|\int_\Omega f\,d\mu\right|\ =\ \left|\int_\Omega f_+\,d\mu-\int_\Omega f_-\,d\mu\right|\ \leqslant\ \int_\Omega f_+\,d\mu+\int_\Omega f_-\,d\mu\ =\ \int_\Omega|f|\,d\mu.$$
2. Par monotonie de l'intégrale, on a
$$\int_\Omega|f|\,d\mu\ \leqslant\ \int_\Omega|g|\,d\mu<+\infty.$$
D'après la question (a), il en découle que f est intégrable.
3. Définissons $z=\int_\Omega f\,d\mu$. Comme z est un nombre complexe, il s'écrit $z=|z|e^{i\theta}$. Soit u la partie réelle de $e^{-i\theta}f$. On a $u\leqslant|e^{-i\theta}f|=|f|$. Donc
$$\left|\int_\Omega f\,d\mu\right|\ =\ e^{-i\theta}\int_\Omega f\,d\mu\ =\ \int_\Omega e^{-i\theta}f\,d\mu\ =\ \int_\Omega u\,d\mu\ \leqslant\ \int_\Omega|f|\,d\mu,$$
où la troisième égalité découle du fait que le nombre $\int_\Omega e^{-i\theta}f\,d\mu$ est réel donc est l'intégrale de la partie réelle de $e^{-i\theta}f$ c'est-à-dire de u.

Correction de l'exercice 10 ▲

On cherche une sous-suite $\{f_{n_k}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour μ-presque tout $x\in\Omega$, étant donné un $\varepsilon>0$, il existe un $k\in\mathbb{N}$ (dépendant à priori de x) vérifiant $j\geqslant k \Rightarrow |f_{n_j}(x)-f(x)|<\varepsilon$. Il suffit de montrer que pour μ-presque tout x, il existe un $k\in\mathbb{N}$ tel que $j\geqslant k\Rightarrow |f_{n_j}(x)-f(x)|<\frac{1}{2^j}\leqslant\frac{1}{2^k}$. Cela revient à montrer que le complémentaire de l'ensemble

$$A:=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{j\geqslant k}\left\{|f_{n_j}-f|<\frac{1}{2^j}\right\}$$

est de mesure nulle. Or

$$A^c=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j\geqslant k}\left\{|f_{n_j}-f|\geqslant\frac{1}{2^j}\right\}.$$

Posons $B_k:=\bigcup_{j\geqslant k}\left\{|f_{n_j}-f|\geqslant\frac{1}{2^j}\right\}$. On a $B_1\supset B_2\supset B_3\ldots$ avec B_1 de mesure fini ; donc par continuité de la mesure, il vient :

$$\mu(A^c)=\lim_{k\to+\infty}\mu(B_k).$$

Par σ-additivité, on a :

$$\mu(B_k)\leqslant\sum_{j\geqslant k}\mu\left(\left\{|f_{n_j}-f|\geqslant\frac{1}{2^j}\right\}\right).$$

On définit alors la sous-suite $\{f_{n_k}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante. Puisque f_n converge vers f en mesure, il existe un indice n_1 tel que pour $n\geqslant n_1$,

$$\mu\left(\left\{|f_n-f|\geqslant\frac{1}{2}\right\}\right)\leqslant\frac{1}{2}.$$

Il existe un indice $n_2>n_1$ tel que pour $n\geqslant n_2$,

$$\mu\left(\left\{|f_n-f|\geqslant\frac{1}{2^2}\right\}\right)\leqslant\frac{1}{2^2},$$

et ainsi de suite : pour tout $k\in\mathbb{N}$, il existe un $n_k>n_{k-1}$, tel que pour $n\geqslant n_k$

$$\mu\left(\left\{|f_n-f|\geqslant\frac{1}{2^k}\right\}\right)\leqslant\frac{1}{2^k}.$$

Pour cette sous-suite on a alors :

$$\mu(B_k)\leqslant\sum_{j\geqslant k}\mu\left(\left\{|f_{n_j}-f|\geqslant\frac{1}{2^j}\right\}\right)\leqslant\sum_{j\geqslant k}\frac{1}{2^j}=\frac{1}{2^{k-1}}.$$

On a bien

$$\mu(A^c)=\lim_{k\to+\infty}\mu(B_k)=0.$$

Correction de l'exercice 11 ▲

La fonction de Dirichlet restreint à l'intervalle $[a,b]$, $f(x)=\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}\big|_{[a,b]}(x)$, est intégrable au sens de Lebesgue et son intégrale par rapport à la mesure de Lebesgue vaut 0. Mais elle n'est pas intégrable au sens de Riemann : $\underline{S}(f,\tau)=0$ et $\overline{S}(f,\tau)=b-a$ pour toute subdivision τ de l'intervalle $[a,b]$.

Correction de l'exercice 12 ▲

1. Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $(1+\frac{x}{n})^n$ est une suite croissante et que $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a
$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\frac{x^k}{k!},$$
où $\quad a_{n,k} = \dfrac{n!}{(n-k)!n^k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}.$

Les assertions suivantes sont vraies :
 i) $a_{n+1,k} \geqslant a_{n,k}$. En effet, $\frac{n+1-l}{n+1} \geqslant \frac{n-l}{n}$ pour $l \in \mathbb{N}$ car $n^2+n-l\cdot n \geqslant n^2+n-l\cdot n-l$,
 ii) $a_{n,k} < 1$ (évident);
 iii) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} a_{n,k} = 1$.

Comme $a_{n+1,n+1} > 0$, $\left(1+\dfrac{x}{n+1}\right)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} a_{n+1,k}\dfrac{x^k}{k!} > \sum_{k=0}^{n} a_{n+1,k}\dfrac{x^k}{k!}$. Il s'ensuit donc de (i) que la suite $\left\{\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\right\}$ est croissante. Les assertions (ii) et (iii) impliquent que
$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\frac{x^k}{k!} \leqslant \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = e^x$$
et que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n \geqslant \sum_{k=0}^{m}\dfrac{x^k}{k!}$. Ainsi, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$.

2. Par le théorème de convergence monotone, on a pour $b > 1$,
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}_+}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-bx}d\lambda(x) &= \textstyle\int_{\mathbb{R}_+}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-bx}d\lambda(x)\\ &= \textstyle\int_0^\infty e^{(1-b)x}d\lambda(x) = \frac{1}{b-1}.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 13 ▲

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$ on a
$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \leqslant e^{-x}.$$
En effet, comme $\ln y \leqslant y-1$ pour $y > 0$, on a $\ln y^{-\frac{1}{n}} \leqslant y^{-\frac{1}{n}}-1$, c'est-à-dire $\left(1-\frac{\ln y}{n}\right)^n \leqslant y^{-1}$. Ainsi, en posant $x = \ln y$, il vient $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \leqslant e^{-x}$. De plus,
$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} e^{n\left(-\frac{x}{n}+\frac{x}{n}\varepsilon\left(\frac{x}{n}\right)\right)},$$
où $\lim_{u\to0}\varepsilon(u) = 0$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = e^{-x}$.
Posons $f_n(x) = \left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^m \mathbf{1}_{[0,n]}$. Alors en utilisant le théorème de convergence dominée et sachant que $\Gamma(m+1) = \int_0^\infty e^{-x}x^m dx = m!$, on obtient le résultat.

2. Soit $f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\mathbf{1}_{[0,n]}$. Comme la suite $\{f_n(x)\}$ est croissante et $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = e^{-x}$, on obtient le résultat en appliquant le théorème de convergence monotone.

Correction de l'exercice 14 ▲

Cf le théorème 24.2 dans le polycopié de Marc Troyanov.

Correction de l'exercice 15 ▲

1. Notons $g(x,y) = e^{-ixy}f(x)$. Alors,
   i.) pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto g(x,y)$ est mesurable ;
   ii.) pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ (pour tout les $x \in \mathbb{R}$ tels que $f(x)$ est finie) la fonction $y \mapsto g(x,y)$ est continue pour tout $y \in \mathbb{R}$;
   iii.) $|g(x,y)| = |e^{-ixy}f(x)| \leqslant |f(x)|$ et $|f| \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}_+)$.

   On doit montrer que pour tout suite $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers y, on a $\lim_{n\to+\infty}\hat{f}(y_n) = \hat{f}(y)$. Posons $g_n(x) = g(x,y_n)$. D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty}\hat{f}(y_n) \ := \ \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} g_n(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} g(x,y)dx =: \hat{f}(y).$$

   Ainsi $\hat{f}$ est continue.
2. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $|\hat{f}(y)| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |e^{-ixy}f(x)|dx \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx = \|f\|_{L_1}$ et donc

$$\sup|\hat{f}| \leqslant \|f\|_{L_1}.$$

3. Soit $g(x,y) = e^{-ixy}f(x)$. Alors, on a
   i.) pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto g(x,y)$ est intégrable ;
   ii.) pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction $y \mapsto g(x,y)$ est dérivable pour tout $y \in \mathbb{R}$;
   iii.) $|\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}| = |-ixe^{-ixy}f(x)| \leqslant |xf(x)|$ avec $x \mapsto xf(x)$ intégrable.

   Ainsi, d'après l'exercice 14 (le théorème de dérivation sous le signe $\int$), on a

$$\frac{d}{dy}\hat{f} = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy}(-ixf(x))dx = \widehat{-iyf(y)}.$$
