

Chapitre 4

Espaces de Lebesgue

$L^p(X, \mu)$

Dans ce chapitre, sauf mention contraire μ désigne une mesure positive sur un espace mesuré $(\Omega, \mathfrak{M})$.

4.1 Définitions et Premières propriétés

Définition 4.1. Soit $1 \leq p < \infty$. On définit

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mu) := \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable} : \|u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega, \mu)} := \left(\int_{\Omega} |u|^p d\mu \right)^{1/p} < +\infty \right\},$$

et

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mu) := \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable} : \|u\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mu)} := \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |u(x)| < +\infty \right\},$$

où

$$\sup_{x \in \Omega} \text{ess} |u(x)| := \inf \{ C \in \mathbb{R} : |u(x)| \leq C \text{ } \mu\text{-p.p. dans } \Omega \}.$$

En général l'application $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu) \ni u \mapsto \|u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega, \mu)}$ ne définit pas une norme sur $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$, mais seulement une semi-norme. Néanmoins, il suit directement du Lemme 3.23-ii) que si $\|u\|_{\mathcal{L}^p(\Omega, \mu)} = 0$ alors $u = 0$ μ -p.p. dans Ω .

En conséquence, étant donné deux fonctions mesurables $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, on dit que u est équivalente à v , et on écrit $u \sim v$, si $u(x) = v(x)$ pour μ presque tout $x \in \Omega$. Notons que $\sim$ est une relation d'équivalence sur la classe des fonctions mesurables réelles. Les espaces quotients des espaces $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$ par la relation d'équivalence d'égalité μ presque partout sont notés $L^p(\Omega, \mu)$. Si $u \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$, on note $[u]$ sa classe d'équivalence dans $L^p(\Omega, \mu)$. Par abus de notation, il est d'usage fréquent (mais parfois dangereux !) d'identifier une fonction mesurable u à sa classe d'équivalence $[u]$.

Définition 4.2. Soit $u \in L^p(\Omega, \mu)$, on note

$$\begin{aligned}\|u\|_p &:= \left(\int_{\Omega} |u|^p d\mu \right)^{1/p} \quad \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \|u\|_{\infty} &:= \sup_{x \in \Omega} \text{ess } |u(x)| \quad \text{si } p = \infty.\end{aligned}$$

Nous allons montrer que les espaces de Lebesgue $L^p(\Omega, \mu)$ sont des espaces normés. On commence par deux inégalités utiles.

Proposition 4.3 (Inégalité de Hölder). Soit $1 \leq p \leq \infty$ et $p' \geq 1$ l'exposant conjugué de p , à savoir $1/p + 1/p' = 1$ (par $p' = 1$ si $p = +\infty$, et $p' = +\infty$ si $p = 1$). Si $u \in L^p(\Omega, \mu)$ et $v \in L^{p'}(\Omega, \mu)$ alors $uv \in L^1(\Omega, \mu)$ et

$$\|uv\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_{p'}.$$

Démonstration. Comme le logarithme est une fonction concave sur $\mathbb{R}_+$, pour $a, b > 0$ et $1 \leq p, p' < \infty$ avec $1/p + 1/p' = 1$, on a

$$\log(ab) = \log(a) + \log(b) = \frac{1}{p} \log(a^p) + \frac{1}{p'} \log(a^{p'}) \leq \log \left(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'} \right).$$

Comme d'autre part le logarithme est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$ on obtient l'inégalité de Young

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'}, \quad \forall a, b > 0.$$

Dès lors, quel que soit $\lambda > 0$, on a

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} |uv| d\mu &= \int_{\Omega} \left| \lambda u \frac{v}{\lambda} \right| d\mu \leq \frac{1}{p} \lambda^p \int_{\Omega} |u|^p d\mu + \frac{1}{p'} \lambda^{-p'} \int_{\Omega} |v|^{p'} d\mu \\ &= \frac{1}{p} \lambda^p \|u\|_p^p + \frac{1}{p'} \lambda^{-p'} \|v\|_{p'}^{p'},\end{aligned}$$

où au passage on a utilisé le Théorème de comparaison pour conclure que le produit uv appartient à $L^1(\Omega, \mu)$. Le dernier terme est minimal pour le choix

$$\lambda = \|v\|_{p'}^{1/p'} \|u\|_p^{(1-p)/p},$$

auquel cas on obtient précisément l'inégalité souhaitée.

Si $p = +\infty$ ou si $p' = +\infty$, l'inégalité est immédiate. $\square$

Remarque 4.4. Il suit de l'inégalité de Hölder que si $\mu(\Omega) < \infty$ et $1 \leq q \leq p \leq \infty$ alors $L^\infty(\Omega, \mu) \subset L^q(\Omega, \mu) \subset L^p(\Omega, \mu) \subset L^1(\Omega, \mu)$. Si par contre $\mu(\Omega) = \infty$, il n'y a en général aucune inclusion entre L^p et L^q pour $q \neq p$.

Proposition 4.5 (Inégalité de Minkowski). Pour $1 \leq p \leq \infty$, et pour tous $u, v \in L^p(\Omega, \mu)$, on a

$$\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p.$$

Démonstration. Commençons par le cas $p = \infty$. On prétend d'abord que $|u(x)| \leq \|u\|_{\infty}$ et que $|v(x)| \leq \|v\|_{\infty}$ pour μ presque tout $x \in \Omega$. En effet,

$$\{x \in \Omega, |u(x)| > \|u\|_{\infty}\} = \bigcup_{n \geq 1} \{x \in \Omega, |u(x)| > \|u\|_{\infty} + 1/n\}$$

et une union dénombrable d'ensembles de mesure nulle est de mesure nulle. Dès lors

$$|u(x) + v(x)| \leq |u(x)| + |v(x)| \leq \|u\|_\infty + \|v\|_\infty,$$

pour μ -presque tout x dans Ω , et par définition de $\|u + v\|_\infty$ on obtient

$$\|u + v\|_\infty \leq \|u\|_\infty + \|v\|_\infty.$$

Pour le cas $p = 1$, on écrit

$$\|u + v\|_1 = \int_{\Omega} |u + v| d\mu \leq \int_{\Omega} (|u| + |v|) d\mu \leq \|u\|_1 + \|v\|_1.$$

Enfin, pour $1 < p < \infty$, par l'inégalité de Hölder on obtient

$$\begin{aligned} \|u + v\|_p^p &= \int_{\Omega} |u + v|^p d\mu = \int_{\Omega} |u + v| |u + v|^{p-1} d\mu \\ &\leq \int_{\Omega} |u| |u + v|^{p-1} d\mu + \int_{\Omega} |v| |u + v|^{p-1} d\mu \\ &\leq (\|u\|_p + \|v\|_p) \left(\int_{\Omega} (|u + v|^{p-1})^{p/(p-1)} d\mu \right)^{(p-1)/p} \\ &= (\|u\|_p + \|v\|_p) \|u + v\|_p^{p-1}, \end{aligned}$$

et la conclusion suit. $\square$

Nous pouvons maintenant affirmer la

Proposition 4.6. *Pour $1 \leq p \leq +\infty$, l'application $L^p(\Omega, \mu) \ni u \mapsto \|u\|_p$ définit une norme sur $L^p(\Omega, \mu)$.*

Démonstration. En effet si $\|u\|_p = 0$ alors $u = 0$ μ -presque partout (c'est une conséquence du Lemme 3.23 pour $p \neq +\infty$ et du fait que $|u(x)| \leq \|u\|_\infty$ μ -p.p. si $p = +\infty$ (cfr. la preuve de l'inégalité de Minkowski ci-dessus)), et par conséquent $u = 0$ (au sens $[u] = [0]$) dans $L^p(\Omega, \mu)$. Bien sûr on a aussi que $\|\lambda u\|_p = |\lambda| \|u\|_p$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $u \in L^p(\Omega, \mu)$. Enfin, l'inégalité triangulaire n'est autre que l'inégalité de Minkowski. $\square$

Nous reprenons dans la suite, et dans le cadre des espaces de Lebesgue $L^p(\Omega, \mu)$, le schéma Complétude - Séparabilité - Critère de compacité étudié dans le Chapitre 1.

4.2 Complétude

On a montré à la Proposition 4.6 que les espaces de Lebesgue $L^p(\Omega, \mu)$ sont des espaces normés. On va maintenant montrer qu'ils sont complets, et donc des espaces de Banach. C'est cette propriété qui fait de l'intégrale de Lebesgue un outil bien plus adapté à l'analyse fonctionnelle que l'intégrale de Riemann.

Théorème 4.7 (Fréchet - Riesz). *Pour $1 \leq p \leq +\infty$, l'espace $L^p(\Omega, \mu)$ est un espace de Banach.*

Démonstration. Au vu du Théorème 1.22 il nous suffit de démontrer que toute série normalement convergente dans $L^p(\Omega, \mu)$ est convergente dans $L^p(\Omega, \mu)$. Soit donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega, \mu)$ telle que $\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|_p < +\infty$. La suite des sommes partielles

$$v_n := \sum_{k=0}^n |u_k|$$

est croissante et par l'inégalité de Minkowski

$$\int_{\Omega} v_n^p d\mu = \|v_n\|_p^p \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|u_k\|_p \right)^p < +\infty.$$

si $p < +\infty$, tandis que

$$v_n(x) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|u_k\|_{\infty}$$

μ -presque partout si $p = +\infty$. On déduit du Théorème de convergence monotone que (v_n) converge μ -p.p. dans Ω vers une fonction de $L^p(\Omega, \mu)$, et en particulier que $(v_n(x))$ converge μ -presque partout vers une limite finie. Si pour $x \in \Omega$ la série réelle $\sum_{k=0}^{\infty} |u_k(x)|$ converge, on déduit de la complétude de $\mathbb{R}$ que la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$ converge aussi. Par le Théorème de comparaison, la fonction définie presque partout par $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ appartient à $L^p(\Omega, \mu)$ et pour $n \geq m$, on a

$$\left\| \sum_{k=0}^n u_k - \sum_{k=0}^m u_k \right\|_p = \left\| \sum_{k=m+1}^n u_k \right\|_p \leq \sum_{k=m+1}^n \|u_k\|_p.$$

En faisant tendre $n \rightarrow \infty$ on déduit du Théorème de convergence dominée que

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} u_k - \sum_{k=0}^m u_k \right\|_p \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \|u_k\|_p,$$

et comme $\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|_p < +\infty$ on a $\sum_{k=m+1}^{\infty} \|u_k\|_p \rightarrow 0$ lorsque $m \rightarrow \infty$, et la conclusion suit. $\square$

Exercice 4.1. Montrer que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée dans $L^1(X, \mu)$ et dans $L^p(\Omega, \mu)$ pour un certain $1 < p \leq +\infty$ alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équi-intégrable.

4.3 Densité - Séparabilité

Toute fonction étagée sur Ω est bien sûr un élément de $L^p(\Omega, \mu)$ quel que soit $1 \leq p \leq +\infty$.

Théorème 4.8. Pour $1 \leq p \leq \infty$, l'espace des fonctions étagées est dense dans $L^p(\Omega, \mu)$.

Démonstration. Soit $u \in L^p(\Omega, \mu)$. Quitte à décomposer $u = u_+ - u_-$, on peut supposer sans perte de généralité que $u \geq 0$. Soit $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions étagées construites dans la démonstration du Théorème 3.7.

Si $p = \infty$, pour chaque $n \geq \|u\|_\infty$ par construction on a $|s_n(x) - u(x)| \leq 2^{-n}$ pour μ -presque tout $x \in \Omega$, et donc $\|s_n - u\|_\infty \leq 2^{-n} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Si $1 \leq p < \infty$, comme $s_n(x) \nearrow u(x)$ pour μ -presque tout $x \in \Omega$, on a aussi que $|u(x) - s_n(x)|^p \rightarrow 0$ pour μ -presque tout $x \in \Omega$. Par ailleurs $|u(x) - s_n(x)|^p \leq 2^p u(x)^p$ pour μ -presque tout $x \in \Omega$. Il suit alors du Théorème de convergence dominée que $\|u - s_n\|_p \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. $\square$

Dans la suite de cette section, nous faisons l'hypothèse supplémentaire que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et que μ est une mesure de Radon positive sur Ω , où plus généralement une mesure sur une σ -algèbre contenant $\mathcal{B}(\Omega)$, finie sur les compacts, et vérifiant les propriétés de régularité intérieure et extérieure (3.5.2) et (3.5.1).

Théorème 4.9. *Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $\mathcal{C}_c(\Omega, \mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\Omega, \mu)$.*

Démonstration. Au vu du théorème précédent, et de la transitivité de la densité, il suffit de démontrer que toute fonction étagée peut-être approchée au sens de $L^p(\Omega, \mu)$ par une suite de fonctions continues à support compact dans Ω . Par linéarité, il suffit aussi de se restreindre au cas où la fonction étagée à approcher est égale à la fonction caractéristique d'un ensemble mesurable E de mesure finie. Par le Théorème 3.38 (si μ est de Radon), ou par hypothèses (3.5.2) et (3.5.1) sinon, il existe un ensemble compact K et un ensemble ouvert V tels que $K \subset E \subset V$ et $\mu(V \setminus K) < \varepsilon$. Dès lors par le Lemme d'Urysohn il existe $v \in \mathcal{C}_c(V, [0, 1])$ telle que $v = 1$ sur K et donc

$$\int_{\Omega} |v - \chi_E|^p d\mu \leq \mu(V \setminus K) < \varepsilon,$$

ce qui termine la démonstration. $\square$

Corollaire 4.10. *Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega, \mu)$ est séparable.*

Démonstration. Soit $K_n := \{x \in \Omega, \|x\| \leq n, \text{dist}(x, \partial\Omega) \geq 1/n\}$, de sorte que $(K_n)_{n \geq 1}$ est une suite croissante de compacts de Ω telle que $\cup_n K_n = \Omega$. Pour chaque $n \geq 1$ on considère le sous-espace X_n de $L^p(\Omega, \mu)$ formé par les fonctions nulles en dehors de K_n et égales à une fonction continue sur K_n . Bien sûr, $\mathcal{C}_c(\Omega, \mathbb{R}) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$. Nous avons démontré au Corollaire 2.10 que $\mathcal{C}(K_n, \mathbb{R})$ est séparable pour la topologie de la distance uniforme. Comme μ est une mesure de Radon, elle est finie sur les compacts et par conséquent la convergence uniforme sur K_n implique la convergence dans $L^p(K_n, \mu)$ puisque

$$\int_{K_n} |u - v|^p d\mu \leq \mu(K_n) \sup_{x \in \Omega} |u(x) - v(x)|^p.$$

Par conséquent, on déduit que chaque X_n est séparable pour la topologie de $L^p(\Omega, \mu)$. Enfin, comme une union dénombrable de sous-espaces séparables est séparable, on déduit que $\mathcal{C}_c(\Omega, \mathbb{R})$ est séparable pour la topologie de $L^p(\Omega, \mu)$. La conclusion suit alors du Théorème 4.9. $\square$

La séparabilité de l'espace $L^\infty(\Omega, \mu)$ est très dépendante de la mesure de Radon μ . En effet, si μ est une mesure de Dirac en un point, alors l'espace $L^\infty(\Omega, \mu)$ peut être identifiée à $\mathbb{R}$, qui est bien sûr séparable. Par contre, ce n'est pas le cas pour le mesure de Lebesgue :

Théorème 4.11. Si $\mu = \mathcal{L}^N$ désigne la mesure de Lebesgue, alors $L^\infty(\Omega, \mathcal{L}^N)$ n'est pas séparable.

Démonstration. Si $x \in \Omega$ et $R > 0$ sont tels que $B(x, R) \subset \Omega$, alors la famille $\{\chi_{B(x, r)} : 0 < r < R\}$ est non dénombrable et pour $0 < r \neq r' < R$ on a $\|\chi_{B(x, r)} - \chi_{B(x, r')}\|_\infty = 1$. La conclusion suit alors du critère de non séparabilité (Lemme 1.33). $\square$

4.4 Régularisation par produit de convolution

Dans cette section, on considère exclusivement le cas de la mesure de Lebesgue $\mu = \mathcal{L}^N$ sur $\Omega = \mathbb{R}^N$. Les espaces de Lebesgue $L^p(\Omega, \mathcal{L}^N)$ correspondant seront simplement notés $L^p(\Omega)$.

Définition 4.12. Soient u et $v \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, le produit de convolution $u * v$ est défini par

$$(u * v)(x) := \int_{\mathbb{R}^N} u(x - y)v(y) dy$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.

Le lemme qui suit affirme que $u * v$ est elle-même une fonction de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$. Si de plus u ou v est plus régulière, alors le produit de convolution hérite de la régularité maximale. Pour un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, on désigne par

$$\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}) := \mathcal{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}) := \{u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}) : \text{supp}(u) \text{ est un compact de } \Omega\}.$$

Lemme 4.13.

- (i) Si $u, v \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ alors $u * v \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ et $\text{supp}(u * v) \subset \overline{\text{supp}(u) + \text{supp}(v)}$.
- (ii) Si $u \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ et $v \in D(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, alors $u * v \in D(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ et pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^N$, $\partial^\alpha(u * v) = u * (\partial^\alpha v)$.
- (iii) Pour tout $1 \leq p \leq \infty$,

$$\|u * v\|_p \leq \|u\|_p \|v\|_1. \quad (4.4.1)$$

Démonstration. Concernant la première affirmation, il suit de la définition du produit de convolution et du Théorème de convergence dominée que la fonction $x \mapsto (u * v)(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^N$. De plus, comme $u(x - y)v(y)$ est nulle quel que soit $y \in \mathbb{R}^N$ si $x \notin \overline{\text{supp}(u) + \text{supp}(v)}$, il suit que $\text{supp}(u * v) \subset \overline{\text{supp}(u) + \text{supp}(v)}$ et donc que $u * v \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$.

Concernant la deuxième affirmation, il suffit par récurrence de considérer le cas $|\alpha| = 1$. Par la formule du changement de variable dans les intégrales (on utilise ici à plein le fait que $\mu = \mathcal{L}^N$!) on a

$$\frac{(u * v)(x + h\alpha) - (u * v)(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^N} u(y) \frac{v(x + h\alpha - y) - v(x - y)}{h} dy$$

et par conséquent la conclusion suit une fois encore du Théorème de convergence dominée.

Enfin, pour la troisième affirmation, à l'aide du Théorème de Fubini on écrit

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |(u * v)(x)| dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \left| \int_{\mathbb{R}^N} u(x-y)v(y) dy \right| dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} |u(x-y)||v(y)| dy dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x-y)| dx \right) |v(y)| dy \\
&= \|u\|_1 \|v\|_1,
\end{aligned}$$

ce qui démontre le cas . Si $1 < p < \infty$, à l'aide de l'inégalité de Hölder et du Théorème de Fubini on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |(u * v)(x)|^p dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \left| \int_{\mathbb{R}^N} u(x-y)v(y) dy \right|^p dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left| \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x-y)|^p |v(y)| dy \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v(y)| dy \right)^{1-1/p} \right|^p dx \\
&= \|v\|_1^{p-1} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} |u(x-y)|^p |v(y)| dy dx \\
&= \|u\|_p^p \|v\|_1^p.
\end{aligned}$$

Si $p = \infty$, on écrit simplement

$$|(u * v)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |u(x-y)||v(y)| dy \leq \|u\|_\infty \|v\|_1$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^N$. □

Corollaire 4.14. *Le produit de convolution $(u, v) \mapsto u * v$ de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \times \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ s'étend de manière unique comme application (multilinéaire) continue de $L^p(\mathbb{R}^N) \times L^1(\mathbb{R}^N)$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ (quel que soit $1 \leq p \leq \infty$). De plus, si $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ est tel que $u = 0$ p.p. dans $\mathbb{R}^N \setminus K$, pour un compact $K \subset \mathbb{R}^N$, et si $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, alors $u * v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ et $\text{supp}(u * v) \subset K + \text{supp}(v)$.*

Démonstration. Pour $1 \leq p < \infty$, l'existence et l'unicité du prolongement continu sont une conséquence du Théorème 1.20, de la densité de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ (Théorème 4.9) et de la complétude de $L^p(\mathbb{R}^N)$ (Théorème 4.7). Le caractère uniformément continu (uniquement sur les bornés de $L^1(\mathbb{R}^N) \times L^p(\mathbb{R}^N)$) est une conséquence de l'estimation (4.4.1) démontrée dans le Lemme 4.13.

Pour $p = \infty$, on observe que pour $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $v \in L^1(\mathbb{R}^N)$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ la fonction $y \mapsto u(x-y)v(y)$ (définie pour presque tout $y \in \mathbb{R}^N$) appartient à $L^1(\mathbb{R}^N)$ (Théorème de comparaison), et que $|(u * v)(x)| \leq \|u\|_\infty \|v\|_1$.

Les affirmations concernant le support et la régularité suivent de la même manière du Lemme 4.13. □

Introduisons maintenant les suites régularisantes.

Définition 4.15. Soit $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N, [0, +\infty))$ telle que $\text{supp}(\rho) \subset B(0, 1)$ et $\int_{\mathbb{R}^N} \rho(x) dx = 1$. Pour tout $n \geq 1$, on définit $\rho_n(x) := n^N \rho(nx)$ de sorte que $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x) dx = 1$ et $\text{supp}(\rho_n) \subset B(0, \frac{1}{n})$. On dit que la suite $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite régularisante.

Lemme 4.16.

- (i) Si $u \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, alors $u * \rho_n$ converge uniformément vers u sur $\mathbb{R}^N$ lorsque $n \rightarrow \infty$.
- (ii) Si $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ pour un certain $1 \leq p < \infty$, alors $u * \rho_n \rightarrow u$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Démonstration. Supposons que $u \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Comme $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x) dx = 1$ et $\text{supp}(\rho_n) \subset B(0, \frac{1}{n})$, on a

$$\begin{aligned} |(u * \rho_n)(x) - u(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} (u(x-y) - u(x)) \rho_n(y) dy \right| \\ &\leq \int_{B(0, \frac{1}{n})} |u(x-y) - u(x)| \rho_n(y) dy \\ &\leq \sup\{|u(z_1) - u(z_2)| : z_1, z_2 \in \mathbb{R}^N, |z_1 - z_2| \leq 1/n\} \end{aligned}$$

et le dernier terme tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$ puisque u est uniformément continue. Donc $u * \rho_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^N$ vers u .

Pour ce même u , en utilisant l'inégalité de Hölder avec $f_x(y) := (u(x-y) - u(x))(\rho_n(y))^{\frac{1}{p}}$ et $g(y) := (\rho_n(y))^{\frac{1}{p'}}$, on obtient

$$|(u * \rho_n)(x) - u(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} f_x(y) g(y) dy \right| \leq \|f_x\|_p \|g\|_{p'}.$$

Par ailleurs

$$\|f_x\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x-y) - u(x)|^p \rho_n(y) dy \right)^{\frac{1}{p}} \text{ et } \|g\|_{p'} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(y) dy \right)^{\frac{1}{p'}} = 1.$$

Par le Théorème de Fubini on obtient donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |(u * \rho_n)(x) - u(x)|^p dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} |u(x-y) - u(x)|^p \rho_n(y) dy dx \\ &= \int_{B(0, \frac{1}{n})} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x-y) - u(x)|^p dx \right) \rho_n(y) dy \\ &\leq \sup_{y \in B(0, \frac{1}{n})} \|\tau_y u - u\|_p^p, \end{aligned}$$

où $\tau_y u(x) := u(x-y)$ désigne la translatée par y de u . Sur $B(0, 1) + \text{supp}(u)$, la convergence uniforme implique la convergence dans $L^p(\mathbb{R}^N)$, par conséquent $\sup_{y \in B(0, \frac{1}{n})} \|\tau_y u - u\|_p^p$ et donc aussi $\|u * \rho_n - u\|_p$ converge vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$.

Le cas général où $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ s'obtient en utilisant la densité de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ (Théorème 4.9). Plus précisément, pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $\tilde{u} \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ tel que $\|\tilde{u} - u\|_p \leq \varepsilon$. De plus, nous venons de démontrer qu'il existe $n_0 \geq 1$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\|\tilde{u} * \rho_n - \tilde{u}\|_p \leq \varepsilon$. Dès lors, on a

$$\|u * \rho_n - u\|_p \leq \|\tilde{u} * \rho_n - \tilde{u}\|_p + \|u * \rho_n - \tilde{u} * \rho_n\|_p + \|u - \tilde{u}\|_p \leq 3\varepsilon.$$

Pour le second terme dans le membre de droite ci-dessus, nous avons utilisé (4.4.1). $\square$

Remarque 4.17. Remarquons qu'en procédant par approximation comme dans la démonstration précédente, on montre que pour tout $1 \leq p < \infty$ et tout $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $\sup_{y \in B(0, \delta)} \|\tau_y u - u\|_p$ tend vers 0 lorsque δ tend vers 0.

Corollaire 4.18. Quel que soit l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, l'espace $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\Omega)$.

Démonstration. Il suit du Théorème 4.9 que pour tout $u \in L^p(\Omega)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $v \in \mathcal{C}_c(\Omega, \mathbb{R})$ tel que

$$\left(\int_{\Omega} |u - v|^p dx \right)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On étend v par zéro en dehors de Ω et on désigne par $\tilde{v}$ cette extension. Par construction $\tilde{v} \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ et $\text{supp}(\tilde{v}) \subset \Omega$. Par le Lemme 4.16, on peut choisir $n_0 \geq 1$ suffisamment grand pour que quel que soit $n \geq n_0$,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{v} - (\tilde{v} * \rho_n)|^p dx \right)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par le Corollaire 4.14, on a

$$\text{supp}(\tilde{v} * \rho_n) \subset \overline{\text{supp}(\tilde{v}) + \text{supp}(\rho_n)} \subset \overline{\text{supp}(v) + B(0, 1/n)}.$$

Dès lors, pour $n > \max\{n_0, 1/\text{dist}(\text{supp}(v), \mathbb{R}^N \setminus \Omega)\}$ on a $\text{supp}(\tilde{v} * \rho_n) \subset \Omega$ et donc $\tilde{v} * \rho_n \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$ et

$$\left(\int_{\Omega} |u - (\tilde{v} * \rho_n)|^p dx \right)^{1/p} < \varepsilon.$$

□

4.5 Compacité

Le procédé de régularisation par convolution de la section précédente fournit un outil adéquat pour transposer aux espaces de Lebesgue le Théorème d'Ascoli pour les fonctions continues.

Théorème 4.19 (Riesz - Fréchet - Kolmogorov). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ tel que $\bar{\omega} \subset \Omega$. Soit $1 \leq p < \infty$ et $A \subset L^p(\Omega)$ une famille telle que

- (i) $\sup_{u \in A} \|u\|_{L^p(\Omega)} < \infty$.
- (ii) $\sup_{y \in B(0, \delta), u \in A} \|\tau_y u - u\|_{L^p(\omega)} \rightarrow 0$ lorsque $\delta \rightarrow 0$.

Alors $A|_{\omega}$ (la restriction à ω des fonctions de A) est d'adhérence compacte dans $L^p(\omega)$.

Démonstration. Remarquons d'abord que $\tau_y u$ est bien définie sur ω dès que $\delta < \text{dist}(\omega, \mathbb{R}^N \setminus \Omega)$ et donc (ii) a bien du sens. Quitte à étendre les fonctions de A par 0 en dehors de Ω , on peut supposer que $\Omega = \mathbb{R}^N$.

Comme $L^p(\omega)$ est complet, il en va de même pour la fermeture de $A|_{\omega}$. Il nous suffit donc, en invoquant le Théorème 1.29, de montrer qu'il est possible

de recouvrir $A|_\omega$ par un nombre fini de boules ouvertes dans $L^p(\omega)$ de rayon au plus égal à ε , quel que soit $\varepsilon > 0$. Commençons par choisir $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand pour que

$$\sup_{y \in B(0, \frac{1}{n}), u \in A} \|\tau_y u - u\|_{L^p(\omega)} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Soit $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite régularisante et soit $B := \{(u * \rho_n)|_{\bar{\omega}} : u \in A\}$, nous allons montrer que l'ensemble $B \subset \mathcal{C}(\bar{\omega}, \mathbb{R})$ satisfait aux hypothèses du Théorème d'Ascoli. Premièrement, pour tout $x \in \bar{\omega}$ on a

$$\sup_{u \in A} |u * \rho_n(x)| \leq \sup_{u \in A} \int_{\mathbb{R}^N} |u(x-y)| \rho_n(y) dy \leq \sup_{u \in A} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|\rho_n\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)} < \infty,$$

où on a utilisé l'inégalité de Hölder et où $1/p + 1/p' = 1$. D'autre part,

$$\begin{aligned} & \sup_{u \in A, x_1, x_2 \in \bar{\omega}} |u * \rho_n(x_1) - u * \rho_n(x_2)| \\ &= \sup_{u \in A, x_1, x_2 \in \bar{\omega}} |u * (\rho_n - \tau_{x_1-x_2} \rho_n)(x_1)| \\ &\leq \sup_{u \in A} \|u\|_{L^1(\bar{\omega}+B[0, \frac{1}{n}])} \sup_{x_1, x_2 \in \bar{\omega}} \|\rho_n - \tau_{x_1-x_2} \rho_n\|_{L^\infty(\bar{\omega}+B[0, \frac{1}{n}])} \\ &\leq C \sup_{u \in A} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|\rho_n\|_{\text{Lip}} |x_1 - x_2|. \end{aligned}$$

Il suit du Théorème d'Ascoli que B est d'adhérence compacte dans $\mathcal{C}(\bar{\omega}, \mathbb{R})$. Soit $\sigma > 0$ que nous fixerons ultérieurement. Il existe une collection finie de boules ouvertes de $\mathcal{C}(\bar{\omega}, \mathbb{R})$ de rayon $\sigma\varepsilon$ dont l'union recouvre B dans $\mathcal{C}(\bar{\omega}, \mathbb{R})$. Mais pour u et $v \in \mathcal{C}(\bar{\omega}, \mathbb{R})$,

$$\|u - v\|_{L^p(\omega)} = \left(\int_{\omega} |u - v|^p dx \right)^{1/p} \leq \mathcal{L}^N(\omega)^{1/p} d_u(u, v).$$

Nous choisissons par conséquent $\sigma := \frac{\mathcal{L}^N(\omega)^{-1/p}}{3}$ et on déduit alors que B est contenue dans une union finie de boules ouvertes de $L^p(\omega)$ dont les rayons sont d'au plus $\varepsilon/3$. Aussi, il suit de la démonstration du Lemme 4.16 que pour $u \in A$,

$$\|u * \rho_n - u\|_{L^p(\omega)} \leq \sup_{y \in B(0, \frac{1}{n})} \|\tau_y u - u\|_{L^p(\omega)} \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

L'inégalité de Minkowski implique alors que $A|_\omega$ est contenue dans une union finie de boules de rayons au plus ε , ce qui termine la démonstration. $\square$