SCIENCES SUP

El Haj Laamri

MESURES, INTÉGRATION, CONVOLUTION ET TRANSFORMÉE DE FOURIER DES FONCTIONS

Parce qu'on ne peut plus aujourd'hui faire de la physique, de l'électronique ou de la chimie, sans maîtriser les outils mathématiques que sont la théorie de la mesure et de l'intégration d'une part, et l'application de ces théories à la convolution et à la transformée de Fourier des fonctions d'autre part, El Haj Laamri rend visible et compréhensible dans ce livre toute la cohérence de ces concepts fondamentaux.

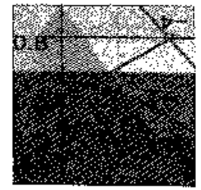
Écrit dans un style clair et méthodique, il traite en 195 exercices corrigés les thèmes suivants :

- espaces et fonctions mesurables,
- mesures positives,
- intégrales par rapport à une mesure positive,
- intégrales de Lebesgue et de Riemann sur IR,
- intégrales sur un espace produit,
- espaces L^p,
- convolution des fonctions,
- transformées de Fourier dans L^1(IR),
- transformées de Fourier dans L^2(IR),
- espace de Schwartz S(IR),
- transformées de Fourier à plusieurs variables.

L'ouvrage est pourvu de rappels de cours et d'un index détaillé permettant une approche adaptée aux besoins de chaque lecteur. Il est principalement destiné aux étudiants de deuxième cycle universitaire (mathématiques, physique, chimie, chimie physique, EEA, MST), aux élèves ingénieurs, ainsi qu'aux agrégatifs.

ISBN 2 10 005700 6

http://www.dunod.com



E. H. LAAMRI

EXERCICES

El Haj LAAMRI

Agrégé de mathématiques, l'auteur est maître de conférences à l'Université Nancy 2. Il est par ailleurs chargé de cours à l'école des Mines de Nancy.

MESURES, INTÉGRATION, CONVOLUTION ET TRANSFORMÉE DE FOURIER DES FONCTIONS

MATHÉMATIQUES

PHYSIQUE

CHIMIE

SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

INFORMATIQUE

SCIENCES DE LA VIE

SCIENCES DE LA TERRE

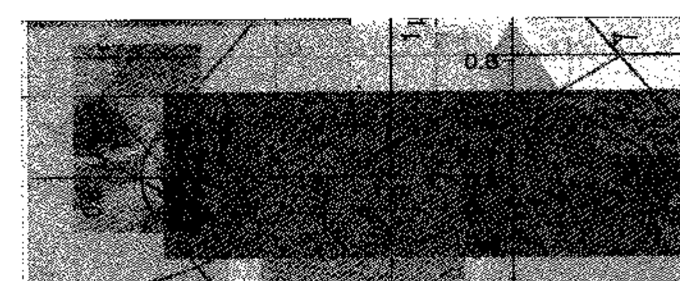
DUNOD

El Haj Laamri

2e CYCLE • ÉCOLES D'INGÉNIEURS • AGRÉGATION

Mesures, intégration, convolution et transformée de Fourier des fonctions

Rappels de cours et exercices corrigés



DUNOD

Mesures, intégration, convolution et transformée de Fourier des fonctions

Mesures, intégration convolution, et transformée de Fourier des fonctions

Rappels de cours et exercices corrigés

El Haj Laamri
Maître de conférences à l'École des Mines de Nancy

DUNOD

Illustration de couverture : Stéphane Degeilh

ISBN 2 10 005700 6

Table des matières

Avant-propos

Le premier objectif de cet ouvrage est de regrouper en un seul volume des exercices corrigés sur la théorie de la mesure et de l'intégration d'une part et l'application de ces théories à la convolution et la transformée de Fourier des fonctions d'autre part. En effet, il est rare de trouver des livres d'exercices corrigés compilant ces deux concepts. L'avantage de ce regroupement est de rendre visible à un public, dont le manque éventuel de maturité scientifique ne lui permet pas d'établir lui-même, la cohérence de ces concepts au travers d'approches et de styles variés.

Le deuxième objectif de cet ouvrage est une présentation nouvelle de certains exercices classiques. Chaque exercice est rédigé sous forme d'un énoncé détaillé pour guider le lecteur et favoriser son autonomie, et les corrigés proposés sont toujours complets et commentés quand il le faut, en privilégiant les solutions méthodiques et raisonnables aux approches « astucieuses » et « miraculeuses ». L'expérience prouve en effet qu'un corrigé trop « brillant » inquiète l'étudiant qui se sent incapable de la même performance et ne lui apprend rien de la démarche constructive qui peut amener à une solution lorsqu'on possède une maîtrise raisonnable des concepts. L'expérience montre également la vertu du contre-exemple... il en est fait ici un large usage. Par ailleurs, lorsqu'un exercice fait appel à un résultat d'algèbre ou de topologie, on inclut la démonstration quand elle n'est pas longue ou on en donne une référence bibliographique précise.

Bien entendu, aucun de ces exercices n'a de prétention à l'originalité ; ils sont tous classiques et font partie d'un fonds commun tombé dans le domaine public depuis longtemps. L'originalité de cet ouvrage ne réside donc pas tant dans le contenu, pour lequel je me suis inspiré de la littérature existante — notamment celle citée dans la bibliographie — que dans le choix et le regroupement des thèmes ainsi que dans la présentation des exercices et la rédaction des corrigés.

En complément des exercices, un rappel de cours est nécessaire pour guider le lecteur dans la compréhension de ces concepts difficiles se prêtant à des approches multiples. Il est également utile de fixer quelques notations, choisies parmi les standards, et de bien placer les exercices dans leur contexte théorique. Enfin, la difficulté et la finesse des notions abordées peuvent être cause d'incompréhension à l'origine de généralisations abusives et de contresens qu'il semble nécessaire d'éviter en posant quelques garde-fous. Ces théories n'ont d'intérêt que si elles sont bien comprises. Une compréhension approximative serait pire qu'une ignorance totale. L'objectif n'est en aucune manière de remplacer le cours magistral suivi par l'étudiant mais seulement de lui fournir, à proximité immédiate des exercices, les points de repère qui lui en permettent une résolution intelligente et constructive.

Bien sûr, ce n'est pas l'évolution d'une théorie, largement stabilisée depuis plusieurs dizaines d'années, qui justifie une nouvelle présentation, mais celle, rapide et récente, des étudiants lecteurs potentiels de l'ouvrage. En effet, cet ouvrage n'est pas destiné à des étudiants virtuels mais à des « vrais » étudiants du XXIe siècle, qui sont soumis à des sollicitations nombreuses les empêchant de consacrer autant de temps qu'on le souhaitait au siècle dernier à l'apprentissage de notions de base dans leur présentation classique. C'est une évidence qu'on doit répéter : les étudiants souhaitent aujourd'hui une compréhension globale rapide avant d'approfondir.

Les blocages éprouvés vis-à-vis de la théorie de la mesure et de l'intégration sont dus sans doute aux difficultés de la théorie mais aussi, certainement, à la forme de la présentation. Aller du simple au compliqué et du cas particulier au cas général — quand c'est possible bien sûr — semble, par expérience, une bonne méthode pour vaincre ces blocages et faire réellement comprendre aux étudiants l'intérêt d'une théorie dont les applications vont du traitement du signal aux mathématiques financières évoluées.

Cet ouvrage est accessible à un public scientifique généraliste de niveau bac +3 et peut être utilisé avec beaucoup de profit par les candidats aux concours de recrutement (CAPES et Agrégations externe et interne) ainsi qu'aux élèves de classes préparatoires. Le lecteur physicien, mécanicien, mathématicien ou ingénieur trouvera la notion voulue et les exercices qui l'illustrent en naviguant à son gré dans l'ouvrage grâce à un index détaillé.

Le plan de l'ouvrage est une conséquence des préoccupations pédagogiques déjà énoncées. Les chapitres 1 et 2 vont faire découvrir les notions d'ensembles mesurables et de mesure, plus particulièrement la mesure de Lebesgue et les ensembles négligeables. Le chapitre 3 permettra à l'étudiant « d'apprivoiser » l'intégrale abstraite. Au chapitre 4, après avoir comparé les intégrales de Riemann et de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, on constatera que les lacunes de la théorie de Riemann sont comblées par celle de Lebesgue. Le chapitre 5 est consacré au calcul des intégrales multiples, technique difficilement acquise par les étudiants, très « rétifs » aux changements de variables. Sur ces nouvelles bases, le chapitre 6 est consacré à la construction des nouveaux espaces, L^p, aux propriétés de complétude particulièrement importantes. La convolution au chapitre 7 est présentée comme un outil fondamental, conceptuel

et pratique, dont la consistance repose sur la solidité de l'intégrale de Lebesgue. Les quatre derniers chapitres concernent tous la transformation de Fourier des fonctions. Les différents contextes de mise en œuvre de cette notion engendrent des difficultés différentes et sont souvent sources de grandes confusions dans l'esprit des étudiants. Sous l'apparente unicité des concepts, la mise en œuvre peut être fondamentalement différente : L^1 et L^2 ont deux structures totalement différentes et la transformation de Fourier dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{R}^N$ ne relève pas des mêmes techniques.

Ce volume reprend et complète des exercices donnés en travaux dirigés à l'École des Mines de Nancy de 1996 à 1999, époque pendant laquelle j'ai assuré la responsabilité de cette partie du cours en première année. Cette responsabilité impliquait la distribution hebdomadaire d'exercices et de corrigés détaillés à chacun des chargés de travaux dirigés. Ainsi, la majorité des exercices constituant cet ouvrage a été lue et critiquée par huit collègues... et testés par au moins trois promotions d'élèves ingénieurs.

Je profite de cet avant-propos pour exprimer ma gratitude à tous ceux qui ont contribué, d'une manière ou d'une autre, à l'élaboration de cet ouvrage.

Je voudrais remercier le Professeur Jean-Louis Greffe — responsable de l'enseignement de Mathématiques à l'École des Mines de Nancy — de m'avoir confié la responsabilité pédagogique de cet enseignement et je profite de cette occasion pour lui souhaiter une heureuse retraite.

Une des difficultés majeure sera de trouver les mots pour remercier mon collègue Hervé Coilland, actuellement directeur de l'I.U.T Nancy-Charlemagne, pour tout ce qu'il a fait pour moi depuis ma nomination en septembre 1992. Je voudrais qu'il sache combien je lui suis reconnaissant.

Je voudrais exprimer mes sincères remerciements au Professeur Antoine Henrot pour sa lecture, ses critiques détaillées et constructives d'une bonne partie du manuscrit et pour sa disponibilité.

Mon collègue Simon Labrunie a eu la tâche ingrate de lire une bonne partie du manuscrit et m'a permis ainsi de préciser la rédaction de plusieurs points, qu'il en soit remercié.

Mohammed Hayouni a tapé le cours détaillé et les exercices des cinq premiers chapitres et a assuré un groupe de travaux dirigés quand j'ai commencé cet enseignement, je le remercie pour sa patience, son efficacité... et le temps passé.

Benjamin Bergé a réalisé la frappe des six derniers chapitres (cours détaillé et exercices) et la majorité des corrigés. Il a ensuite relu d'une manière critique et synthétique l'ensemble du texte avec le regard d'un étudiant « très averti »... docteur de l'Université Henri Poincaré depuis mai 2001 et m'a suggéré plusieurs améliorations. Je voudrais lui adresser tous mes remerciements pour s'être investi sans compter dans cette entreprise. Sans son zèle extrême, je ne serais pas parvenu à rendre un texte aussi bien présenté et à minimiser mon retard.

Je suis également très reconnaissant à Gilles Fremiot (agrégé et docteur de l'Université Henri Poincaré depuis décembre 2000) d'avoir relu entièrement le texte avec une rapidité et une efficacité remarquables ; il a aussi pris la peine de vérifier certains calculs, me permettant ainsi de corriger quelques imperfections.

Il est inévitable que certaines erreurs aient échappé à la vigilance de tous ceux qui ont relu cet ouvrage. J'en assume la responsabilité et j'espère que ceux parmi les lecteurs qui en découvriront voudront bien me faire part de leurs remarques.

Je remercie infiniment l'Institut Élie Cartan d'avoir mis à ma disposition les moyens informatiques pour la saisie de ce texte ainsi que la logistique en découlant.

Mes remerciements vont aussi à Anne Bourguignon des Éditions Dunod pour sa grande patience face à mes retards répétés.

Je voudrais terminer cet avant-propos en adressant à ma femme et à mes enfants ma tendre reconnaissance pour leur compréhension, leur patience et leur indulgence pour le temps que je leur ai volé ces derniers mois.

El Haj LAAMRI
Nancy, le 2 juillet 2001

Chapitre 1

Espaces et fonctions mesurables

RAPPELS DE COURS

Dans tout ce chapitre, E et E' désigneront deux ensembles non vides.

1.1 TRIBUS, ESPACES MESURABLES, SOUS-ENSEMBLES MESURABLES

Définition 1.1 (Tribu) *Une famille non vide $\mathcal{T}$ de parties de E est une* tribu *sur E lorsqu'elle vérifie les* trois *conditions suivantes :*

(i) $E \in \mathcal{T}$;

(ii) *si $A \in \mathcal{T}$ alors $A^c = E \setminus A \in \mathcal{T}$ (stabilité par passage au complémentaire) ;*

(iii) *si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{T}$, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$* (i.e. *$\mathcal{T}$ est stable par réunion* dénombrable*).*

On déduit de la définition 1.1 les propriétés élémentaires suivantes :

(iv) $\emptyset \in \mathcal{T}$;

(v) $\mathcal{T}$ est stable par intersection dénombrable, *i.e.* si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{T}$, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$;

(vi) si A et $B \in \mathcal{T}$ alors $A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{T}$ et $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \in \mathcal{T}$.

Définition 1.2 *Si $\mathcal{T}$ est une tribu de E, les éléments de $\mathcal{T}$ sont dits $\mathcal{T}$*-mesurables *(ou* mesurables *quand il n'y a pas de risque de confusion) et le couple $(E, \mathcal{T})$ est appelé* espace mesurable.

Proposition 1.1 *Soit I un ensemble quelconque d'indices et soit $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille de tribus sur E. Alors $\bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i$ est une tribu sur E.*

Tribus engendrées

Des classes particulières de parties de E jouent un rôle fondamental car elles portent « en germe » toute la tribu.

Proposition 1.2 *Soit $\mathcal{S}$ une famille de parties de E. Il existe* une plus petite tribu *(au sens de l'inclusion) sur E contenant $\mathcal{S}$, c'est l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{S}$. On l'appelle* tribu engendrée *par $\mathcal{S}$ et on la note $\sigma_E(\mathcal{S})$ (ou simplement $\sigma(\mathcal{S})$ quand il n'y a pas de risque de confusion).*
On dit aussi que $\mathcal{S}$ est un sous-ensemble générateur *de la tribu $\sigma_E(\mathcal{S})$.*

Exemples
1°) Si $\mathcal{S} = \{\emptyset\}$ ou bien si $\mathcal{S} = \{E\}$, alors $\sigma_E(\mathcal{S}) = \{\emptyset, E\}$.
2°) Si $\mathcal{S} = \{A\}$ ou bien si $\mathcal{S} = \{A^c\}$ où $A \neq \emptyset$ et $A \neq E$, alors $\sigma_E(\mathcal{S}) = \{\emptyset, A, A^c, E\}$.

Remarque 1.1 Soient $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2 \in \mathcal{P}(E)$.
- $\mathcal{S}_1 \subset \sigma_E(\mathcal{S}_1)$.
- Si $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2$ alors $\sigma_E(\mathcal{S}_1) \subset \sigma_E(\mathcal{S}_2)$.
- Si $\mathcal{T}$ est une tribu contenant $\mathcal{S}$ alors $\sigma_E(\mathcal{S}) \subset \mathcal{T}$.

Cas particulier important : tribu borélienne

Si l'ensemble E possède une structure topologique, la notion de tribu engendrée permet de définir la *plus petite tribu* adaptée à cette structure.

Définition 1.3 (Tribu borélienne)
1°) Soit E un espace métrique (plus généralement topologique) et $\mathcal{O}$ la famille des ouverts de E. On appelle tribu de Borel *ou* tribu borélienne *et on la note $\mathcal{B}(E)$ la tribu engendrée par la famille $\mathcal{O}$. Autrement dit,*

$$\mathcal{B}(E) = \sigma_E(\mathcal{O}).$$

2°) On appelle borélien *de E tout élément de la tribu $\mathcal{B}(E)$.*

Remarque 1.2 La tribu borélienne $\mathcal{B}(E)$ est également engendrée par la famille $\mathcal{F}$ des parties fermées de E.

Théorème 1.1
1°) La tribu de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu sur $\mathbb{R}$ engendrée par l'une des huit familles suivantes :

$$\{]a,b[: (a,b) \in \mathbb{R}^2\}; \quad \{[a,b] : (a,b) \in \mathbb{R}^2\}; \quad \{]a,b] : (a,b) \in \mathbb{R}^2\};$$
$$\{[a,b[: (a,b) \in \mathbb{R}^2\}; \quad \{]-\infty,a[: a \in \mathbb{R}\}; \quad \{]-\infty,a] : a \in \mathbb{R}\};$$
$$\{]a,+\infty[: a \in \mathbb{R}\}; \quad \{[a,+\infty[: a \in \mathbb{R}\}.$$

2°) La tribu de Borel $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ est la tribu sur $\bar{\mathbb{R}}$ engendrée par l'une des quatre familles suivantes :

$$\{[-\infty,a[: a \in \mathbb{R}\}; \quad \{[-\infty,a] : a \in \mathbb{R}\};$$
$$\{[a,+\infty] : a \in \mathbb{R}\}; \quad \{]a,+\infty] : a \in \mathbb{R}\}.$$

On peut bien sûr multiplier les exemples puisque $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Remarque 1.3 Toutes les parties de $\mathbb{R}$ qu'on rencontre dans la pratique sont des boréliens ; mais on montre que la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est strictement incluse dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, voir exercice 2.12. En fait, on montre que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ a le même nombre d'éléments que $\mathbb{R}$ (ce qu'on appelle la puissance du continu) alors que Cantor a montré que $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ a une puissance strictement supérieure à celle du continu.

1.2 SOUS-ESPACES MESURABLES

Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace mesurable et F un sous-ensemble de E non vide *mesurable ou non.*

Proposition 1.3
1°) Soit $\mathcal{T}_{|F}$ (ou encore $\mathcal{T} \cap F$) le sous-ensemble de $\mathcal{P}(F)$ défini par

$$\{F \cap T : T \in \mathcal{T}\}.$$

La classe $\mathcal{T}_{|F}$ est une tribu sur F qu'on appelle tribu trace *de $\mathcal{T}$ sur F.*
On a $F \in \mathcal{T}$ si et seulement si $\mathcal{T}_{|F} = \{A \in \mathcal{T} : A \subset F\} \subset \mathcal{T}$.
2°) Si $\mathcal{S}$ est un système générateur de $\mathcal{T}$, i.e. *$\mathcal{T} = \sigma_E(\mathcal{S})$, alors*

$$\mathcal{S}_{|F} = \{F \cap S : S \in \mathcal{S}\}$$

est un système générateur de $\mathcal{T}_{|F}$.
En particulier, si E est un espace métrique (plus généralement topologique) on a

$$\mathcal{B}(E)_{|F} = \mathcal{B}(F)$$

et $F \in \mathcal{B}(E)$ si et seulement si $\mathcal{B}(F) = \{A \in \mathcal{B}(E) : A \subset F\} \subset \mathcal{B}(E)$.

Exemples

– Comme $[0,+\infty[$ est un borélien de $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}([0,+\infty[) = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : A \subset [0,+\infty[\}$.

– Un borélien de $\bar{\mathbb{R}}$ est un borélien de $\mathbb{R}$ ou la réunion d'un borélien de $\mathbb{R}$ avec $\{+\infty\}, \{-\infty\}$ ou $\{-\infty,+\infty\}$.

– Si $F_2 \subset F_1 \subset E$, alors $\left(\mathcal{T}_{|F_1}\right)_{|F_2} = \mathcal{T}_{|F_2}$ (propriété de transitivité).

1.3 RAPPELS SUR L'IMAGE DIRECTE ET L'IMAGE RÉCIPROQUE

Soit f une application de E dans E' non nécessairement bijective, on lui associe canoniquement :

– la fonction *image directe* f_d de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E')$ qui à tout $A \subset E$ associe $f_d(A) = \{f(x) \in E' : x \in A\}$;

– la fonction *image réciproque* f_r^{-1} de $\mathcal{P}(E')$ dans $\mathcal{P}(E)$ qui à tout $A' \subset E'$ associe $f_r^{-1}(A') = \{x \in E : f(x) \in A'\}$.

Les applications ensemblistes f_d et f_r^{-1} vérifient ce qu'on appelle les *formules de Hausdorff.*

1°) Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E où I est un ensemble non vide d'indices. Alors on a :

– $f_d\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f_d(A_i)$;

– $f_d\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f_d(A_i)$ avec égalité si f est injective.

2°) Soit $(A'_j)_{j\in J}$ une famille de parties de E' où J est un ensemble non vide d'indices. Alors on a :

– $f_r^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} A'_j\right) = \bigcup_{j\in J} f_r^{-1}(A'_j)$;

– $f_r^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} A'_j\right) = \bigcap_{j\in J} f_r^{-1}(A'_j)$;

– $f_r^{-1}(A'^c) = \left(f_r^{-1}(A')\right)^c$ pour tout $A' \subset E'$.

Remarque 1.4 Lorsque la fonction f est *bijective*, il existe un lien simple entre f_r^{-1} et la bijection réciproque f^{-1} de f : pour toute partie A' de E', $f_r^{-1}(A') = \{f^{-1}(y) : y \in A'\}$.

Notation abusive : Dans tout ce qui suit, on note *abusivement* par souci de simplicité f au lieu de f_d et f^{-1} au lieu f_r^{-1}.

Si $E' = \mathbb{R}$ (resp. $\bar{\mathbb{R}}$), on notera, pour $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$,

$$\{f < a\} = \{x \in E : f(x) < a\} = f^{-1}(]-\infty, a[) \quad (\text{resp. } f^{-1}([-\infty, a[))$$

et de manière analogue, $\{f \leqslant a\}$, $\{f > a\}$, $\{f \geqslant a\}$, $\{f > a\}$, $\{a < f < b\}$, $\{a \leqslant f < b\}$, $\{a < f \leqslant b\}$ et $\{a \leqslant f \leqslant b\}$.

Enfin, si $\mathcal{S}'$ est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(E')$, on appelle *image réciproque* de $\mathcal{S}'$ par f et on note encore abusivement $f^{-1}(\mathcal{S}')$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$

$$f^{-1}(\mathcal{S}') = \{f^{-1}(A') : A' \in \mathcal{S}'\} ;$$

et pour $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(E)$, on appelle *image* de $\mathcal{S}$ par f et on note (encore abusivement) $f(\mathcal{S})$, le sous-ensemble de $\mathcal{P}(E')$

$$f(\mathcal{S}) = \{f(A) : A \in \mathcal{S}\} .$$

1.4 APPLICATIONS MESURABLES

Définition 1.4 *Soient $(E,\mathcal{T})$ et $(E',\mathcal{T}')$ deux espaces mesurables et soit f une application de E dans E'.*

*1°) L'application f est dite $(\mathcal{T},\mathcal{T}')$-*mesurable *si $f^{-1}(\mathcal{T}') \subset \mathcal{T}$,* i.e. *pour tout $A' \in \mathcal{T}'$, $f^{-1}(A') \in \mathcal{T}$.*

2°) Si $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ sont les tribus de Borel respectives de E et E' espaces métriques (plus généralement topologiques), on dit encore que f est borélienne.

Exemple très important

– Pour $A \in \mathcal{P}(E)$, la *fonction caractéristique* ou encore *indicatrice* de A définie sur E par

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A, \end{cases}$$

est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable si et seulement si $A \in \mathcal{T}$, car

$$\mathbb{1}_A^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = \{\emptyset, E, A, A^c\}$$

– Les fonctions indicatrices d'ensembles mesurables sont un premier exemple simple d'applications mesurables. Mais c'est surtout en tant que clé du passage qui conduit de la mesure d'ensembles à l'intégration des fonctions que ces fonctions élémentaires sont indispensables.

On déduit de la définition 1.4 ci-dessus la proposition suivante.

Proposition 1.4 *Soient $(E,\mathcal{T})$, $(E',\mathcal{T}')$ et $(E'',\mathcal{T}'')$ trois espaces mesurables. Soient $f : E \to E'$ $(\mathcal{T},\mathcal{T}')$-mesurable et $g : E' \to E''$ $(\mathcal{T}',\mathcal{T}'')$-mesurable. Alors $g \circ f$ est $(\mathcal{T},\mathcal{T}'')$-mesurable.*

Le théorème suivant exprime le rôle simplificateur des ensembles générateurs.

Théorème 1.2 *Soient $(E,\mathcal{T})$ et $(E',\mathcal{T}')$ deux espaces mesurables, $\mathcal{S}'$ un sous-ensemble générateur de $\mathcal{T}'$ et f une application de E dans E'. Alors f est $(\mathcal{T},\mathcal{T}')$-mesurable si et seulement si $f^{-1}(\mathcal{S}') \subset \mathcal{T}$.*

Corollaire 1.1 *Soient E et E' deux espaces métriques (plus généralement topologiques) et soit f une application de E dans E'. Si f est continue alors f est borélienne.*

Critère de mesurabilité des fonctions numériques

Si $E' = \mathbb{R}$ ou $\bar{\mathbb{R}}$, muni de sa tribu de Borel, on déduit des théorèmes 1.1 et 1.2 un critère simple de mesurabilité.

Théorème 1.3

1°) *Une fonction f de E dans $\mathbb{R}$ est $(\mathcal{T},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable si et seulement si l'une des huit conditions équivalentes suivantes est vérifiée :*
   - *(i) pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\{f < a\} \in \mathcal{T}$;*
   - *(ii) pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\{f \leqslant a\} \in \mathcal{T}$;*
   - *(iii) pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\{f > a\} \in \mathcal{T}$;*
   - *(iv) pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\{f \geqslant a\} \in \mathcal{T}$;*
   - *(v) pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leqslant b$, $\{a \leqslant f < b\} \in \mathcal{T}$;*
   - *(vi) pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leqslant b$, $\{a \leqslant f \leqslant b\} \in \mathcal{T}$;*
   - *(vii) pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leqslant b$, $\{a < f \leqslant b\} \in \mathcal{T}$;*
   - *(viii) pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leqslant b$, $\{a < f < b\} \in \mathcal{T}$.*

2°) *Une fonction f de E dans $\bar{\mathbb{R}}$ est $(\mathcal{T},\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$-mesurable si et seulement si l'une des quatre conditions équivalentes suivantes est vérifiée :*
   - *(i) pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\{f < a\} \in \mathcal{T}$;*
   - *(ii) pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\{f \leqslant a\} \in \mathcal{T}$;*
   - *(iii) pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\{f > a\} \in \mathcal{T}$;*
   - *(iv) pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\{f \geqslant a\} \in \mathcal{T}$.*

Opérations sur les fonctions numériques mesurables

Voila deux applications importantes dans la pratique du théorème précédent (théorème 1.3).

Théorème 1.4 *Soit $(E,\mathcal{T})$ un espace mesurable, soient f et g deux applications de E dans $\mathbb{R}$ $(\mathcal{T},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurables et soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in]0,+\infty[$. Alors αf, $f+g$, fg, $\sup(f,g)$, $\inf(f,g)$ et $|f|^\beta$ sont $(\mathcal{T},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurables.*

Si de plus f ne s'annule pas sur E, alors $\dfrac{1}{f}$ est $(\mathcal{T},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable.

Remarque 1.5 Si on convient de poser dans $\bar{\mathbb{R}}$

$$(+\infty)+(-\infty)=0, \quad 0\times\pm\infty=0, \quad \text{et} \quad \frac{1}{\pm\infty}=0,$$

le théorème 1.4 reste valable si f et g sont à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$.

En fait, on a un résultat plus général sur le sup et l'inf.

Théorème 1.5 *Soit $(E,\mathcal{T})$ un espace mesurable et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications $(\mathcal{T},\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$-mesurables de E dans $\bar{\mathbb{R}}$. Alors*

(i) pour tout sous-ensemble $I \subseteq \mathbb{N}$ non vide, les applications $\inf_{n\in I} f_n$ et $\sup_{n\in I} f_n$ sont $(\mathcal{T},\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$-mesurables ;

(ii) les applications $\liminf_{n\to+\infty} f_n$ et $\limsup_{n\to+\infty} f_n$ sont $(\mathcal{T},\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$-mesurables.

En particulier, si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement dans $\bar{\mathbb{R}}$, $f = \lim_{n\to+\infty} f_n$ est $(\mathcal{T},\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$-mesurable.

1.5 PRODUIT DE DEUX ESPACES MESURABLES

Étant donnés deux espaces mesurables $(E_1,\mathcal{T}_1)$ et $(E_2,\mathcal{T}_2)$, on veut définir sur l'ensemble produit $E_1\times E_2$ une *tribu produit* $\mathcal{T}$.

Notation abusive : Dans la suite, lorsqu'on considère deux sous-ensembles $\mathcal{S}_i \subset \mathcal{P}(E_i)$, $1\leqslant i\leqslant 2$, l'écriture $\mathcal{S}_1\times\mathcal{S}_2$ désignera (*abusivement*)

$$\{A_1\times A_2 : A_1\in\mathcal{S}_1, A_2\in\mathcal{S}_2\}$$

au lieu du produit cartésien $\{(A_1,A_2) : A_1\in\mathcal{S}_1, A_2\in\mathcal{S}_2\}$.
Remarquons que même si les $\mathcal{S}_i$ sont des tribus de parties de E_i, $\mathcal{S}_1\times\mathcal{S}_2$ n'est pas en général une tribu de parties de $E_1\times E_2$, d'où l'utilité de la définition suivante.

Définition 1.5 *Soient $(E_1,\mathcal{T}_1)$ et $(E_2,\mathcal{T}_2)$ deux espaces mesurables.*

1°) On appelle tribu produit (tensoriel) *des tribus $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ la tribu de parties de $E_1\times E_2$ engendrée par $\mathcal{T}_1\times\mathcal{T}_2$ et on la note $\mathcal{T}_1\otimes\mathcal{T}_2$, ou encore $\sigma_{E_1\times E_2}(\mathcal{T}_1\times\mathcal{T}_2)$.*

2°) Le couple $(E_1\times E_2,\mathcal{T}_1\otimes\mathcal{T}_2)$ est appelé espace mesurable produit *de $(E_1,\mathcal{T}_1)$ et de $(E_2,\mathcal{T}_2)$.*

La classe $\mathcal{T}_1\times\mathcal{T}_2$ peut être réduite en prenant des sous-ensembles générateurs de chacune des tribus qui la composent.

Théorème 1.6 *Soient $(E_1,\mathcal{T}_1)$ et $(E_2,\mathcal{T}_2)$ deux espaces mesurables. Si pour tout $i\in\{1,2\}$, $\mathcal{S}_i$ est un sous-ensemble générateur de $\mathcal{T}_i$ tel que $E_i\in\mathcal{S}_i$, alors $\mathcal{S}_1\times\mathcal{S}_2$ est un sous-ensemble générateur de la tribu $\mathcal{T}_1\otimes\mathcal{T}_2$. Autrement dit,*

$$\sigma_{E_1\times E_2}(\mathcal{S}_1\times\mathcal{S}_2) = \sigma_{E_1}(\mathcal{S}_1)\otimes\sigma_{E_2}(\mathcal{S}_2)\ .$$

On déduit du théorème précédent 1.6 le corollaire suivant qui est très important dans la pratique.

Corollaire 1.2 *Soient E_1 et E_2 deux espaces métriques (plus généralement topologiques) admettant chacun une base d'ouverts $\mathcal{S}_i$ (c'est-à-dire que pour tout Ω_i ouvert de E_i, Ω_i est une réunion d'ouverts de $\mathcal{S}_i$) qui soit* dénombrable, *alors*

$$\mathcal{B}(E_1) \otimes \mathcal{B}(E_2) = \mathcal{B}(E_1 \times E_2) .$$

Exemples. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$, et plus généralement $\mathcal{B}(\mathbb{R}^p) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^q) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{p+q})$ pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. De même, $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}^2) = \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}) \otimes \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$.

Mesurabilité et espace mesurable produit

Proposition 1.5 *Soient $(E, \mathcal{T})$, $(E_1, \mathcal{T}_1)$ et $(E_2, \mathcal{T}_2)$ trois espaces mesurables, et soit $f = (f_1, f_2) : E \longrightarrow E_1 \times E_2$. Alors f est $(\mathcal{T}, \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2)$-mesurable si et seulement si chaque f_i est $(\mathcal{T}, \mathcal{T}_i)$-mesurable.*

Exemple. En identifiant $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ au moyen de la bijection $(x, y) \mapsto x+iy$, les ouverts de $\mathbb{R}^2$ s'identifient à ceux de $\mathbb{C}$, de sorte que $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ s'identifie à $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$; ainsi, une application f de E dans $\mathbb{C}$ est $\big(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{C})\big)$-mesurable si et seulement si ses parties réelle $\Re\mathrm{e}(f)$ et imaginaire $\Im\mathrm{m}(f)$ sont $\big(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$-mesurables.

Corollaire 1.3 *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace mesurable. L'ensemble*

$$\big\{f : E \to \mathbb{C} : \big(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{C})\big)\text{-mesurable}\big\}$$

est une sous-algèbre *de $\mathbb{C}^E$ (sur $\mathbb{C}$).*

Corollaire 1.4 *Soient $(E_1, \mathcal{T}_1)$ et $(E_2, \mathcal{T}_2)$ deux espaces mesurables et $f_i : E_i \to \bar{\mathbb{R}}$, $1 \leqslant i \leqslant 2$ deux applications telles que, pour $i = 1, 2$, f_i est $(\mathcal{T}_i, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$-mesurable. Alors l'application produit tensoriel des f_i $f_1 \otimes f_2 : E_1 \times E_2 \to \bar{\mathbb{R}}$ définie par*

$$(f_1 \otimes f_2)(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2) ,$$

est $\big(\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})\big)$-mesurable.

Remarque 1.6 Cette notion d'espace mesurable produit se généralise très facilement (par récurrence) au cas de N espaces mesurables. Il y a alors une proposition essentielle dans cette construction.

Proposition 1.6 *Soient $(E_1, \mathcal{T}_1)$, $(E_2, \mathcal{T}_2)$ et $(E_3, \mathcal{T}_3)$ trois espaces mesurables. Alors*

$$(\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2) \otimes \mathcal{T}_3 = \mathcal{T}_1 \otimes (\mathcal{T}_2 \otimes \mathcal{T}_3) .$$

*C'est l'*associativité du produit tensoriel.

Exemple. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $A_1, \ldots, A_N \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{B}(A_1 \times \cdots \times A_N) = \mathcal{B}(A_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(A_N)$; en particulier $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) = (\mathcal{B}(\mathbb{R}))^{N\otimes}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}^p) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^q) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{p+q})$ pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. De même, $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}^N) = \big(\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})\big)^{N\otimes}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^N) = \big(\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\big)^{N\otimes}$.

EXERCICES

1.6 EXERCICES SUR LES TRIBUS

Exercice 1.1

On considère une partition $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'un ensemble E non vide. On note $\mathcal{T}$ la tribu engendrée par la famille $\{A_n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$. Expliciter les éléments de $\mathcal{T}$.

Solution

- Si $n = 1$, alors $\mathcal{T} = \{\emptyset, E\}$ et Card $\mathcal{T} = 2$;
- si $n = 2$, alors $\mathcal{T} = \{\emptyset, A_1, A_2, E\}$ et Card $\mathcal{T} = 2^2 = 4$;
- si $n = 3$, alors $\mathcal{T} = \{\emptyset, A_1, A_2, A_3, A_1 \cup A_2, A_1 \cup A_3, A_2 \cup A_3, E\}$ et Card $\mathcal{T} = 2^3 = 8$;
- si $n = 4$, alors $\mathcal{T} = \{\emptyset, A_1, A_2, A_3, A_4, A_1 \cup A_2, A_1 \cup A_3, A_1 \cup A_4, A_2 \cup A_3, A_2 \cup A_4, A_3 \cup A_4, A_1 \cup A_2 \cup A_3, A_1 \cup A_2 \cup A_4, A_1 \cup A_3 \cup A_4, A_2 \cup A_3 \cup A_4, E\}$ et Card $\mathcal{T} = 2^4 = 16$.

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ est une partition finie de E, la tribu $\mathcal{T}$ engendrée par la famille $(A_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est formée exactement des ensembles $\bigcup_{k \in K} A_k$, où K décrit l'ensemble des parties de $\{1, 2, \ldots, n\}$ et Card $\mathcal{T} = 2^n$.

Plus généralement si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une partition *dénombrable* de E, la tribu engendrée par les $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est formée exactement des sous-ensembles de E de la forme $\bigcup_{k \in K} A_k$, où K décrit cette fois $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$; elle a la cardinalité de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, c'est-à-dire celle de $\mathbb{R}$. On remarque que du point de vue de la cardinalité on passe de 2^p à $2^{\mathbb{N}}$ en sautant la cardinalité de $\mathbb{N}$, c'est-à-dire celle du dénombrable.

En fait, on montre qu'il n'existe pas de tribu infinie et dénombrable (voir exercice suivant 1.2).

Exercice 1.2

Le but de cet exercice est de montrer qu'il n'existe pas de tribu infinie dénombrable.

Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace mesurable tel que $\mathcal{T}$ soit une tribu infinie *dénombrable*. Pour $x \in E$, on pose

$$\mathcal{T}_x = \{A \in \mathcal{T} : x \in A\} \quad \text{et} \quad A_x = \bigcap_{A \in \mathcal{T}_x} A .$$

1°) Montrer que $A_x \neq \emptyset$ et $A_x \in \mathcal{T}$.

2°) Montrer que si $x, y \in E$ et si $A_x \cap A_y \neq \emptyset$ alors $A_x = A_y$.

3°) En déduire qu'il existe un ensemble *dénombrable* B d'indices tel que $(A_x)_{x \in B}$ soit une partition de E.

4°) Montrer que l'application $\Phi : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{T}$ définie par $\Phi(X) = \bigcup_{x \in X} A_x$ est bien définie et que c'est une bijection. Conclure.

Solution

1°) Soit $x \in E$. Alors $\mathcal{T}_x \neq \emptyset$ car $x \in E$ et $E \in \mathcal{T}$. Soit $A \in \mathcal{T}_x$. Alors $x \in A$ et donc $x \in \bigcap_{A\in\mathcal{T}_x} A = A_x$ donc $x \in A_x$ pour tout $x \in E$ et $A_x \neq \emptyset$. Comme $\mathcal{T}_x \subset \mathcal{T}$, $\mathcal{T}_x$ est dénombrable. Comme A_x est l'intersection d'une famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{T}_x$ (donc de $\mathcal{T}$), $A_x \in \mathcal{T}_x$.

2°) Soient $x \in E$ et $y \in E$ tel que $y \notin A_x$. Alors $y \in E \setminus A_x$ et $E \setminus A_x \in \mathcal{T}$ donc $A_y \subset E \setminus A_x$ et par suite $A_x \cap A_y = \emptyset$. Par contraposée, $A_x \cap A_y \neq \emptyset$ implique que $y \in A_x$ et donc que $A_y \subset A_x$. De même, $A_x \subset A_y$.

3°) Il est clair que $E = \bigcup_{x\in E}\{x\} = \bigcup_{x\in E} A_x$. Mais parmi les éléments de la famille $(A_x)_{x\in E}$, deux éléments non disjoints sont égaux par 2°). On ne conserve alors que les éléments A_x qui sont disjoints deux à deux. Alors $E = \bigcup_{x\in B} A_x$, où B est une famille d'indices qui permet aux A_x d'être disjoints deux à deux. L'ensemble B est dénombrable car la famille $(A_x)_{x\in E}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{T}$, qui est dénombrable.

4°) L'application Φ est bien définie car X est au plus dénombrable. Comme pour tout $x \in E$, $A_x \in \mathcal{T}$, la réunion $\bigcup_{x\in X} A_x$ est une réunion au plus dénombrable d'éléments de $\mathcal{T}$, c'est un élément de $\mathcal{T}$.
Montrons que Φ est surjective. Soit pour cela $A \in \mathcal{T}$. Alors $A = \bigcup_{x\in A}\{x\} = \bigcup_{x\in A} A_x = \bigcup_{x\in A\cap B} A_x$ par construction de B. Or $A \cap B \subset B$, et $\Phi(A \cap B) = A$.
Montrons maintenant que Φ est injective. Soient pour cela X_1 et X_2 deux éléments de $\mathcal{P}(B)$ différents. Alors il existe par exemple $y \in X_1$ tel que $y \notin X_2$. Comme les éléments $(A_x)_{x\in B}$ sont disjoints deux à deux, on a $\bigcup_{x\in X_1} A_x$ qui possède au moins un élément que $\bigcup_{x\in X_2} A_x$ ne possède pas, à savoir A_y. Alors $\Phi(X_1) = \bigcup_{x\in X_1} A_x \neq \bigcup_{x\in X_2} A_x = \Phi(X_2)$ et Φ est injective.

Conclusion : L'application Φ étant bijective, $\operatorname{Card}\mathcal{T} = \operatorname{Card}\mathcal{P}(B)$. Comme B est dénombrable, $\mathcal{P}(B)$ est soit fini, auquel cas $\mathcal{T}$ est également finie, soit B est infini dénombrable et dans ce cas $\mathcal{P}(B)$ a la puissance du continu, tout comme $\mathcal{T}$, et $\mathcal{T}$ n'est pas dénombrable.

Remarque 1.7 La preuve ci-dessus montre qu'en fait, le cardinal d'une tribu finie ne peut pas être tout nombre entier. Il est forcément de la forme 2^n, avec $n \in \mathbb{N}$, et si la tribu est infinie, elle ne peut pas être dénombrable.

Exercice 1.3

Soient $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ deux tribus sur un ensemble E, engendrées respectivement par deux sous-ensembles $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ de $\mathcal{P}(E)$.

1°) Vérifier que $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ est une tribu ; est-elle engendrée par $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$?

2°) On considère les sous-ensembles de $\mathcal{P}(E)$
$$\mathcal{F}_1 = \{A_1 \cap A_2 : A_1 \in \mathcal{T}_1,\ A_2 \in \mathcal{T}_2\}$$
et
$$\mathcal{F}_2 = \{A_1 \cup A_2 : A_1 \in \mathcal{T}_1,\ A_2 \in \mathcal{T}_2\}.$$
Montrer que $\sigma_E(\mathcal{F}_1) = \sigma_E(\mathcal{F}_2)$.

3°) Vérifier qu'en général $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ n'est pas une tribu et montrer que $\sigma_E(\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2) = \sigma_E(\mathcal{F}_1)$.

Solution

1°) – Il est évident que $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ est une tribu.
– $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ est-elle engendrée par $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$?
En général, non, comme le montre l'exemple suivant. Soit A une partie de E non vide et différente de E ; on prend $\mathcal{S}_1 = \{A\}$, $\mathcal{S}_2 = \{A^c\}$. On a dans ce cas $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \emptyset$ et $\sigma_E(\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2) = \emptyset$. Mais $\sigma_E(\mathcal{S}_1) = \sigma_E(\mathcal{S}_2) = \{\emptyset, A, A^c, E\} = \mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

2°) Montrons que $\sigma_E(\mathcal{F}_1) = \sigma_E(\mathcal{F}_2)$ par double inclusion.
– Montrons que $\sigma_E(\mathcal{F}_1) \subset \sigma_E(\mathcal{F}_2)$. Pour cela, il suffit de montrer que $\mathcal{F}_1 \subset \sigma_E(\mathcal{F}_2)$.
Soient donc $A_1 \in \mathcal{T}_1$ et $A_2 \in \mathcal{T}_2$, montrons que $A_1 \cap A_2 \in \sigma_E(\mathcal{F}_2)$. Or $A_1 \cap A_2 = \left(A_1^c \cup A_2^c\right)^c$ donc il suffit de montrer que $\left(A_1^c \cup A_2^c\right)^c \in \sigma_E(\mathcal{F}_2)$. Comme $A_1 \in \mathcal{T}_1$, $A_1^c \in \mathcal{T}_1$ car une tribu est stable par passage au complémentaire ; de même $A_2^c \in \mathcal{T}_2$. Donc $A_1^c \cup A_2^c \in \mathcal{F}_2$, d'où $A_1^c \cup A_2^c \in \sigma_E(\mathcal{F}_2)$ car $\mathcal{F}_2 \subset \sigma_E(\mathcal{F}_2)$ (remarque 1.1). On en déduit alors que $\left(A_1^c \cup A_2^c\right)^c \in \sigma_E(\mathcal{F}_2)$. Ainsi $\mathcal{F}_1 \subset \sigma_E(\mathcal{F}_2)$ et donc
$$\sigma_E(\mathcal{F}_1) \subset \sigma_E(\mathcal{F}_2)\,.$$
– En remarquant que $A_1 \cup A_2 = \left(A_1^c \cap A_2^c\right)^c$, on montre de la même façon que $A_1 \cup A_2 \in \sigma_E(\mathcal{F}_1)$ d'où $\mathcal{F}_2 \subset \sigma_E(\mathcal{F}_1)$ et par conséquent
$$\sigma_E(\mathcal{F}_2) \subset \sigma_E(\mathcal{F}_1)\,.$$
Ainsi
$$\sigma_E(\mathcal{F}_2) = \sigma_E(\mathcal{F}_1)\,.$$

3°) – En général $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ n'est pas une tribu comme le montre l'exemple suivant.
Soient A et B deux parties de E non vides disjointes telles que $A \cup B \neq E$. On prend $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, A, A^c, E\}$ et $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, B, B^c, E\}$. Il est clair que $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 = \{\emptyset, A, B, A^c, B^c, E\}$ et ce n'est pas une tribu car $A \cup B \notin \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$.
– Montrons que $\sigma_E(\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2) \subset \sigma_E(\mathcal{F}_1)$.
Soit $A_1 \in \mathcal{T}_1$; on a $A_1 = A_1 \cap E$ donc $A_1 \in \mathcal{F}_1$. Or $\mathcal{F}_1 \subset \sigma_E(\mathcal{F}_1)$ d'où
$$\mathcal{T}_1 \subset \sigma_E(\mathcal{F}_1)\,. \tag{1.1}$$
De même, $A_2 = E \cap A_2$ donc $A_2 \in \mathcal{F}_1$ d'où
$$\mathcal{T}_2 \subset \sigma_E(\mathcal{F}_1)\,. \tag{1.2}$$
Les relations (1.1) et (1.2) impliquent que $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \subset \sigma_E(\mathcal{F}_1)$. Par conséquent $\sigma_E(\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2) \subset \sigma_E\big(\sigma_E(\mathcal{F}_1)\big) = \sigma_E(\mathcal{F}_1)$ (remarque 1.1).
– Montrons que $\sigma_E(\mathcal{F}_1) \subset \sigma_E(\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2)$.
Soit $A_1 \in \mathcal{T}_1$, alors $A_1 \in \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ et par conséquent $A_1 \in \sigma_E(\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2)$. De même, tout élément A_2 de $\mathcal{T}_2$ appartient à $\sigma_E(\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2)$. Donc $A_1 \cap A_2 \in \sigma_E(\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2)$. D'où $\mathcal{F}_1 \subset \sigma_E(\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2)$ et alors $\sigma_E(\mathcal{F}_1) \subset \sigma_E(\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2)$. Par conséquent,
$$\sigma_E(\mathcal{F}_1) = \sigma_E(\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2)\,.$$

Exercice 1.4

Soient E_1 et E_2 deux ensembles non vides et soit f une application de E_1 dans E_2.

1°) Montrer que si $\mathcal{T}_2$ est une tribu de parties de E_2 alors

$$\mathcal{T} = f^{-1}(\mathcal{T}_2) = \left\{f^{-1}(B) : B \subset \mathcal{T}_2\right\}$$

est une tribu de parties de E_1 appelée *tribu image réciproque* de $\mathcal{T}_2$ par f.

2°) Soit $\mathcal{T}_1$ une tribu de parties de E_1 ; montrer sur un exemple que $f(\mathcal{T}_1) = \left\{f(A) : A \in \mathcal{T}_1\right\}$ n'est pas une tribu sur E_2.

3°) Soit $\mathcal{T}_1$ une tribu de parties de E_1 ; montrer que l'ensemble

$$\mathcal{T}' = \left\{B \subset E_2 : f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_1\right\}$$

est une tribu de parties de E_2 qu'on appelle *tribu induite* de $\mathcal{T}_1$ par f et qu'on note $\mathcal{T}_{1,f}$.

4°) Montrer que pour tout sous-ensemble $\mathcal{S}_2 \subset \mathcal{P}(E_2)$, on a

$$\sigma_{E_1}\left(f^{-1}(\mathcal{S}_2)\right) = f^{-1}\left(\sigma_{E_2}(\mathcal{S}_2)\right).$$

Ce résultat est parfois appelé le *lemme du transport.*

Solution

1°) Soit $\mathcal{T}_2$ une tribu de parties de E_2. Montrons que $\mathcal{T} = f^{-1}(\mathcal{T}_2)$ est une tribu de parties de E_1.

– $E_1 \in \mathcal{T}$. En effet $E_2 \in \mathcal{T}_2$, donc $E_1 = f^{-1}(E_2) \in f^{-1}(\mathcal{T}_2)$.

– Soit $A \in \mathcal{T}$, montrons que $A^c \in \mathcal{T}$. Il existe $B \in \mathcal{T}_2$ tel que $A = f^{-1}(B)$ et d'après les formules de Hausdorff (page 4), $\left(f^{-1}(B)\right)^c = f^{-1}(B^c)$. Or $B^c \in \mathcal{T}_2$, donc $A = f^{-1}(B^c) \in \mathcal{T}$.

– Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$, montrons que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $B_n \in \mathcal{T}_2$ tel que $A_n = f^{-1}(B_n)$ et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{T}_2$. Ainsi, on a d'après les formules de Hausdorff (page 4),

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \in \mathcal{T}.$$

Remarque 1.8 Par construction, $f^{-1}(\mathcal{T}_2)$ est la plus petite (au sens de l'inclusion) tribu de parties de E_1 rendant f $(\mathcal{T}, \mathcal{T}_2)$-mesurable.

2°) Posons $E_1 = \{0,1,2,3\}$, $E_2 = \{a,b,c\}$ et f définie sur E_1 par $f(0) = f(3) = a$, $f(1) = b$ et $f(2) = c$. De plus, on prend $\mathcal{T}_1 = \left\{\emptyset, E_1, \{0,1\}, \{2,3\}\right\}$. On a alors $f(\mathcal{T}_1) = \left\{\emptyset, E_2, \{a,b\}, \{a,c\}\right\}$. Il est clair que $f(\mathcal{T}_1)$ n'est pas une tribu puisqu'elle n'est pas stable par le passage au complémentaire. En effet, $\{a,b\}^c = \{c\} \notin f(\mathcal{T}_1)$.

3°) Montrons que si $\mathcal{T}_1$ est une tribu de parties de E_1, alors $\mathcal{T}'$ est une tribu de parties de E_2.

– $E_2 \in \mathcal{T}'$. En effet, $f^{-1}(E_2) = E_1 \in \mathcal{T}_1$.

– Soit $B \in \mathcal{T}'$, montrons que $B^c \in \mathcal{T}'$.
Comme $B \in \mathcal{T}'$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_1$ donc $\left(f^{-1}(B)\right)^c \in \mathcal{T}_1$. Or $f^{-1}(B^c) = \left(f^{-1}(B)\right)^c$ d'après les formules de Hausdorff (page 4) et donc $f^{-1}(B^c) \in \mathcal{T}_1$. Ainsi $B^c \in \mathcal{T}'$.

– Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}'$, montrons que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{T}'$.

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n \in \mathcal{T}'$ donc $f^{-1}(B_n) \in \mathcal{T}_1$. Comme $\mathcal{T}_1$ est une tribu, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n) \in \mathcal{T}_1$. Or $f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n)$, donc $f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \in \mathcal{T}_1$. Ainsi $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{T}'$.

Remarque 1.9 Par construction, $\mathcal{T}_{1,f}$ est la plus grande (au sens de l'inclusion) tribu de parties de E_2 telle que f soit $(\mathcal{T}_{1,f}, \mathcal{T}_2)$-mesurable.

4°) Démontrons le *lemme du transport.*

– Montrons que $\sigma_E\left(f^{-1}(S_2)\right) \subset f^{-1}\left(\sigma_{E_2}(S_2)\right)$.

Il est clair que $S_2 \subset \sigma_{E_2}(S_2)$ donc $f^{-1}(S_2) \subset f^{-1}\left(\sigma_{E_2}(S_2)\right)$. Par ailleurs, $f^{-1}\left(\sigma_{E_2}(S_2)\right)$ est une tribu de parties de E_1 d'après la première question, donc elle contient la tribu engendrée par $f^{-1}(S_2)$; autrement dit, $\sigma_{E_1}\left(f^{-1}(S_2)\right) \subset f^{-1}\left(\sigma_{E_2}(S_2)\right)$.

– Il reste à montrer l'inclusion $f^{-1}\left(\sigma_{E_2}(S_2)\right) \subset \sigma_{E_1}\left(f^{-1}(S_2)\right)$.

Soit $\mathcal{T}_{1,f}$ la tribu induite de $\sigma_{E_1}\left(f^{-1}(S_2)\right)$ par f. Il est clair que $S_2 \subset \mathcal{T}_{1,f}$ donc $\sigma_{E_2}(S_2) \subset \mathcal{T}_{1,f}$, d'où $f^{-1}\left(\sigma_{E_2}(S_2)\right) \subset f^{-1}(\mathcal{T}_{1,f})$. Par ailleurs, par définition même de $\mathcal{T}_{1,f}$, $f^{-1}\left(\mathcal{T}_{1,f}\right) \subset \sigma_E\left(f^{-1}(S_2)\right)$. D'où

$$f^{-1}\left(\sigma_{E_2}(S_2)\right) \subset \sigma_{E_1}\left(f^{-1}(S_2)\right).$$

Exercice 1.5

1°) Sachant que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par les ouverts, montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par les fermés.

2°) Montrer le théorème 1.1.

➢ **Indication.** On pourra utiliser le résultat de topologie suivant : tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable d'intervalles ouverts (car $\mathbb{R}$ est séparable, $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$).

Solution

Dans tout cet exercice, on note $\mathcal{F} = \{F : F \text{ fermé de } \mathbb{R}\}$ et $\mathcal{O} = \{O : O \text{ ouvert de } \mathbb{R}\}$.

1°) Montrons que $\sigma_{\mathbb{R}}(\mathcal{F}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

– Pour tout $F \in \mathcal{F}$, F^c est ouvert donc appartient à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$; ainsi $F = (F^c)^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, d'où $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Donc $\sigma_{\mathbb{R}}(\mathcal{F}) \subset \sigma_{\mathbb{R}}\big(\mathcal{B}(\mathbb{R})\big) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (remarque 1.1).

– Réciproquement, soit O un ouvert de $\mathbb{R}$, alors O^c est un fermé donc appartient à $\mathcal{F} \subset \sigma_{\mathbb{R}}(\mathcal{F})$ et donc $O = (O^c)^c \in \sigma_{\mathbb{R}}(\mathcal{F})$. Ainsi on a $\mathcal{O} \subset \sigma_{\mathbb{R}}(\mathcal{F})$, et par suite $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}) \subset \sigma_{\mathbb{R}}(\mathcal{F})$. D'où $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma_{\mathbb{R}}(\mathcal{F})$.

2°) Soit $\mathcal{S} = \{]a,b[: a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$. Montrons que $\sigma_{\mathbb{R}}(\mathcal{S}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Comme tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable d'intervalles ouverts, alors $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}) \subset \sigma_{\mathbb{R}}(\mathcal{S})$.

D'autre part, $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}$, donc $\sigma_{\mathbb{R}}(\mathcal{S}) \subset \sigma_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

On a bien

$$\sigma_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}) = \sigma_{\mathbb{R}}(\mathcal{S}) .$$

L'égalité des tribus engendrées par les autres sous-ensembles de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ découle par exemple du fait que

$$]a,b[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[a + \frac{1}{n}, b\right[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left]a, b - \frac{1}{n}\right[$$

$$]a,b] =]-\infty, b] \cap]-\infty, a]^c =]a, +\infty[\cap]b, +\infty[^c .$$

Le cas de $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ est laissé au lecteur.

Remarque 1.10

– Tout singleton $\{x\}$ est un borélien car c'est un fermé.

– $\mathbb{Q}$, qui n'est ni ouvert ni fermé, est un borélien en tant que réunion dénombrable de singletons.

– $\mathbb{Q}^c$ est un borélien car $\mathbb{Q}$ en est un.

– Il n'existe pas de caractérisation simple des boréliens.

1.7 EXERCICES SUR LES FONCTIONS MESURABLES

Exercice 1.6

1°) Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

1.a si f est monotone alors f est borélienne ;

1.b si f est dérivable alors f et f' sont boréliennes ;

1.c l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : f \text{ continue en } x\}$ est un borélien.

On pourra utiliser le résultat de topologie suivant

$$\{x \in \mathbb{R} : f \text{ continue en } x\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \left(\bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \operatorname{int}\left(f^{-1}\left(\left] r - \frac{1}{k}, r + \frac{1}{k} \right[\right) \right) \right)$$

où $\operatorname{int}(A)$ désigne l'intérieur de l'ensemble A (*i.e.* le plus grand ouvert contenu dans A).

2°) *Application.* Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f : (x,y) \mapsto f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

est borélienne.

Solution

1°) 1.a Supposons f croissante. Pour montrer que f est borélienne, il suffit d'après le théorème 1.3 de montrer que $f^{-1}([a, +\infty[)$ est un intervalle où $a \in \mathbb{R}$. Soient x et y deux éléments de $f^{-1}([a, +\infty[)$ tels que $x \leqslant y$. On a $a \leqslant f(x) \leqslant f(y)$ et donc pour tout $t \in [x, y]$, on a $a \leqslant f(x) \leqslant f(t) \leqslant f(y)$ en vertu de la croissance de f d'où $[x, y] \subset f^{-1}([a, +\infty[)$ cela signifie que $f^{-1}([a, +\infty[)$ est un intervalle. Il en résulte que $f^{-1}([a, +\infty[) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Si f est décroissante, soit $f = -(-f)$. Or $-f$ est borélienne car croissante, et αf est borélienne d'après le théorème 1.4 pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

1.b Puisque f est dérivable alors f est continue donc borélienne d'après le corollaire 1.1. Montrons que f' est borélienne.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction g_n définie pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$g_n(x) = \frac{f\left(x + \dfrac{1}{n}\right) - f(x)}{\dfrac{1}{n}} .$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g_n est continue sur $\mathbb{R}$ donc borélienne d'après le corollaire 1.1. En outre, la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers f' donc f' est borélienne d'après le théorème 1.5.

1.c Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $r \in \mathbb{Q}$, $B_{r,k} = \operatorname{int}\left(f^{-1}\left(\left] r - \frac{1}{k}, r + \frac{1}{k} \right[\right) \right)$ est un ouvert donc c'est un borélien.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé, $A_k = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} B_{r,k}$ est un borélien en tant que réunion dénombrable de boréliens (il est même ouvert comme réunion (dénombrable) d'ouverts). L'ensemble $\bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} A_k$ est un borélien en tant qu'intersection dénombrable de boréliens.

2°) *Application.* La fonction f n'est pas continue en $(0,0)$ donc non continue sur $\mathbb{R}^2$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f_n(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 + \frac{1}{n}}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc borélienne. En outre, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x,y) = f(x,y)$. D'après le théorème 1.5 (ii), f est borélienne comme limite simple d'une suite de fonctions boréliennes.

Exercice 1.7

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une application $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable. Soit $k \in]0,+\infty[$ donné. On pose

$$f_k(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| \leqslant k, \\ k & \text{si } f(x) > k, \\ -k & \text{si } f(x) < -k. \end{cases}$$

Montrer que f_k est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable.
Il est vivement conseillé de faire un schéma.

Solution

Soit $a \in \mathbb{R}$. Posons

$$A_a = \{x \in E : f(x) < a\} = f^{-1}(]-\infty, a[)$$

et

$$B_a = \{x \in E : f_k(x) < a\} = f_k^{-1}(]-\infty, a[).$$

Pour montrer que f_k est mesurable, il suffit de montrer d'après le théorème 1.3 que B_a est $\mathcal{T}$-mesurable *i.e.* $B_a \in \mathcal{T}$. Il y a trois cas à étudier :

- si $a > k$ alors $B_a = E$ donc $B_a \in \mathcal{T}$;
- si $a < -k$ alors $B_a = \emptyset$ donc $B_a \in \mathcal{T}$;
- si $-k \leqslant a \leqslant k$ alors $B_a = A_a$; or $A_a \in \mathcal{T}$ puisque f est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable par hypothèse, donc $B_a \in \mathcal{T}$.

Exercice 1.8

Cet exercice permet de caractériser la tribu produit tensoriel $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ comme la plus petite tribu rendant les projections canoniques π_1 $(\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_1)$-mesurable et π_2 $(\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_2)$-mesurable.

Soient $(E_1, \mathcal{T}_1)$ et $(E_2, \mathcal{T}_2)$ deux espaces mesurables. Soit $\pi_i : E_1 \times E_2 \to E_i$ l'application qui à (x_1, x_2) associe $\pi_i(x_1, x_2) = x_i$ pour $i = 1, 2$.

1°) Montrer que π_1 et π_2 sont respectivement $(\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_1)$ et $(\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_2)$-mesurables.

2°) Montrer que la tribu produit tensoriel $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ est la plus petite tribu rendant les projections canoniques π_1 $(\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_1)$-mesurable et π_2 $(\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_2)$-mesurable. Autrement dit, si une autre tribu $\mathcal{T}$ sur $E_1 \times E_2$ rend π_1 et π_2 respectivement $(\mathcal{T}, \mathcal{T}_1)$ et $(\mathcal{T}, \mathcal{T}_2)$-mesurables alors $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}$.

Solution

1°) La projection π_1 est $(\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_1)$-mesurable. En effet, soit $A_1 \in \mathcal{T}_1$, alors $\pi_1^{-1}(A_1) = A_1 \times E_2 \in \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$.
De même, π_2 est $(\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_2)$-mesurable.

2°) Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur $E_1 \times E_2$. Si π_1 et π_2 sont respectivement $(\mathcal{T}, \mathcal{T}_1)$ et $(\mathcal{T}, \mathcal{T}_2)$-mesurables alors, pour tous $A_1 \in \mathcal{T}_1$ et $A_2 \in \mathcal{T}_2$, on a

$$A_1 \times A_2 = (A_1 \times E_2) \cap (E_1 \times A_2) = \pi_1^{-1}(A_1) \cap \pi_2^{-1}(A_2) \in \mathcal{T}$$

soit $A_1 \times A_2 \in \mathcal{T}$, donc $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2 \in \mathcal{T}$. D'où

$$\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2 = \sigma_{E_1 \times E_2}(\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2) \subset \sigma_{E_1 \times E_2}(\mathcal{T}) = \mathcal{T}.$$

Exercice 1.9

Soient f et g deux fonctions boréliennes de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$. Montrer que la fonction Φ définie sur $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ par $\Phi(x,y) = f(x-y)g(y)$ est borélienne.

Solution

On considère les applications

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N & \xrightarrow{s} & \mathbb{R}^N & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & s(x,y) = x - y & \mapsto & f(x-y). \end{array}$$

L'application s est borélienne car continue et $\varphi_1 = f \circ s$ est borélienne comme composée de deux fonctions boréliennes d'après la proposition 1.4. De même

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N & \xrightarrow{\pi_2} & \mathbb{R}^N & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \pi_2(x,y) = y & \mapsto & g(y) \end{array}$$

$\varphi_2 = g \circ \pi_2$ est borélienne comme composée de deux fonctions boréliennes d'après la proposition 1.4.

Donc $\Phi = \varphi_1\varphi_2$ est borélienne comme produit de deux fonctions boréliennes d'après le théorème 1.4.

Exercice 1.10

Soient $(E, \mathcal{T})$, $(E_1, \mathcal{T}_1)$ et $(E_2, \mathcal{T}_2)$ trois espaces mesurables. Soient g_1 une fonction de E dans E_1 et g_2 une fonction de E dans E_2. On considère la fonction

$$\begin{array}{rcl} g : E & \to & E_1 \times E_2 \\ x & \mapsto & \big(g_1(x), g_2(x)\big) . \end{array}$$

Montrer que g est $(\mathcal{T}, \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2)$-mesurable si et seulement si g_1 et g_2 sont respectivement $(\mathcal{T}, \mathcal{T}_1)$ et $(\mathcal{T}, \mathcal{T}_2)$-mesurables.

Solution

Supposons g $(\mathcal{T}, \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2)$-mesurable.

- Soit $A_1 \in \mathcal{T}_1$. On a par définition $g_1^{-1}(A_1) = g^{-1}(A_1 \times E_2)$. La fonction g est $(\mathcal{T}, \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2)$-mesurable par hypothèse, donc $g^{-1}(A_1 \times E_2) \in \mathcal{T}$ et $g_1^{-1}(A_1)$ aussi ; ainsi g_1 est bien $(\mathcal{T}, \mathcal{T}_1)$-mesurable.
- Soit $A_2 \in \mathcal{T}_2$. On a par définition $g_2^{-1}(A_2) = g^{-1}(E_1 \times A_2)$. La fonction g est $(\mathcal{T}, \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2)$-mesurable par hypothèse, donc $g^{-1}(E_1 \times A_2) \in \mathcal{T}$ et $g_2^{-1}(A_2)$ aussi ; ainsi g_2 est bien $(\mathcal{T}, \mathcal{T}_2)$-mesurable.
- Réciproquement, supposons g_1 et g_2 respectivement $(\mathcal{T}, \mathcal{T}_1)$ et $(\mathcal{T}, \mathcal{T}_2)$-mesurables. Pour montrer que g est $(\mathcal{T}, \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2)$-mesurable, il suffit, d'après le théorème 1.2, de montrer que $g^{-1}(\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2) \subset \mathcal{T}$. Soient $A_1 \in \mathcal{T}_1$ et $A_2 \in \mathcal{T}_2$. En remarquant que $A_1 \times A_2 = (A_1 \times E_2) \cap (E_1 \times A_2)$, on a alors $g^{-1}(A_1 \times A_2) = g_1^{-1}(A_1) \cap g_2^{-1}(A_2)$. Or par hypothèse, g_1 et g_2 sont respectivement $(\mathcal{T}, \mathcal{T}_1)$ et $(\mathcal{T}, \mathcal{T}_2)$-mesurables donc $g_1^{-1}(A_1) \in \mathcal{T}$ et $g_2^{-1}(A_2) \in \mathcal{T}$. Par conséquent $g^{-1}(A_1 \times A_2) = g_1^{-1}(A_1) \cap g_2^{-1}(A_2) \in \mathcal{T}$.

Exercice 1.11

Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace mesurable et $f : E \to \mathbb{R}$ une application $\big(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$-mesurable.

1°) Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} g : E \times \mathbb{R} & \to & (\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ (x, t) & \mapsto & g(x, t) = \big(f(x), t\big) \end{array}$$

est $\big(\mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$-mesurable.

2°) En déduire que les sous-ensembles de $E \times \mathbb{R}$ suivants appartiennent à $\mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$G(f) = \{(x, t) \in E \times \mathbb{R} : f(x) = t\} ,$$

appelé le *graphe* de f ;

$$\text{Épi}(f) = \{(x, t) \in E \times \mathbb{R} : f(x) \leqslant t\} ,$$

appelé l'*épigraphe* de f.

Solution

1°) Montrons que g est $\big(\mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$-mesurable.

D'après l'exercice 1.10 ci-dessus, g est $\big(\mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$-mesurable si et seulement si

$$\begin{array}{rcl} g_1 : E \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x, t) & \mapsto & g_1(x, t) = f(x) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} \pi_2 = g_2 : E \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x, t) & \mapsto & g_2(x, t) = t \end{array}$$

sont $\big(\mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$-mesurables.

D'une part, $g_1 = f \circ \pi_1$ où $\pi_1 : E \times \mathbb{R} \to E$ définie par $\pi_1(x, t) = x$, donc g_1 est $\big(\mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$-mesurable. D'autre part, il est clair que g_2 est $\big(\mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$-mesurable.

2°) Soit l'application h de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par $h(x, y) = x - y$. La fonction h est continue donc borélienne et l'application $\varphi = h \circ g$ est $\big(\mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$-mesurable.

$$\begin{array}{ccccc} E \times \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & (\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \xrightarrow{h} & \mathbb{R} \\ (x, t) & \mapsto & (f(x), t) & \mapsto & f(x) - t . \end{array}$$

Ainsi,

$$G(f) = \varphi^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) ,$$

et

$$\text{Épi}(f) = \varphi^{-1}(]-\infty, 0]) \in \mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) .$$

Exercice 1.12

Soient $(E_1, \mathcal{T}_1)$, $(E_2, \mathcal{T}_2)$ et $(E_3, \mathcal{T}_3)$ trois espaces mesurables.

1°) Soit $x \in E_1$ fixé, on considère l'application Id_x qui à tout $y \in E_2$ associe $Id_x(y) = (x, y)$. Montrer que Id_x est $\big(\mathcal{T}_2, \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2\big)$-mesurable.

2°) Soit A un sous-ensemble de $E_1 \times E_2$. Pour tout $x \in E_1$, on appelle *x-section* de A et on note A_x le sous-ensemble de E_2 défini par

$$\{y \in E_2 : (x, y) \in A\} ;$$

de même, pour tout $y \in E_2$, on appelle *y-section* de A et on note A_y le sous-ensemble de E_1 défini par

$$\{x \in E_1 : (x, y) \in A\} .$$

Montrer que si $A \in \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ alors, pour tout $x \in E_1$, $A_x \in \mathcal{T}_2$ et, pour tout $y \in E_2$, $A_y \in \mathcal{T}_1$.

3°) Soit f la fonction définie par

$$\begin{array}{rcl} f : E_1 \times E_2 & \to & E_3 \\ (x, y) & \mapsto & f(x, y) . \end{array}$$

Pour tout $x \in E_1$, on appelle *x-section* de f la fonction qu'on note f_x définie par

$$\begin{array}{rcl} f_x : E_2 & \to & E_3 \\ y & \mapsto & f_x(y) = f(x,y)\,; \end{array}$$

de même, pour tout $y \in E_2$, on appelle *y-section* de f la fonction qu'on note f_y définie par

$$\begin{array}{rcl} f_y : E_1 & \to & E_3 \\ x & \mapsto & f_y(x) = f(x,y)\,. \end{array}$$

Montrer que si f est $(\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3)$-mesurable alors pour tout $x \in E_1$, la fonction f_x est $(\mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3)$-mesurable et pour tout $y \in E_2$, la fonction f_y est $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_3)$-mesurable.

Dans la pratique $E_3 = [0, +\infty]$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $\mathcal{T}_3$ est sa tribu borélienne.

Solution

1°) Soit $x \in E_1$ fixé. Montrons que la fonction Id_x est $\big(\mathcal{T}_2, \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2\big)$-mesurable.

Il suffit, d'après le théorème 1.2, de montrer que $(Id_x)^{-1}(A_1 \times A_2) \in \mathcal{T}_2$ pour tous $A_1 \in \mathcal{T}_1$ et $A_2 \in \mathcal{T}_2$. Or

$$(Id_x)^{-1}(A_1 \times A_2) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x \notin A_1\,, \\ A_2 & \text{si } x \in A_1\,. \end{cases}$$

Dans les deux cas, $(Id_x)^{-1}(A_1 \times A_2) \in \mathcal{T}_2$. On montre de la même façon que pour tout $y \in E_2$ fixé, la fonction Id_y est $\big(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2\big)$-mesurable.

2°) Soit $A \in \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$. Comme pour tout $x \in E_1$, l'application Id_x est $\big(\mathcal{T}_2, \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2\big)$-mesurable, $Id_x^{-1}(A) \in \mathcal{T}_2$. Or $y \in Id_x^{-1}(A)$ si et seulement si $Id_x(y) = (x,y) \in A$. Autrement dit, $Id_x^{-1}(A) = A_x$, d'où le résultat.

De même, on montre que $A_y \in \mathcal{T}_1$ pour tout $y \in E_2$.

3°) Pour tout $x \in E_1$, on a $f_x = Id_x \circ f$, donc la première question et la proposition 1.4 entraînent que la fonction f_x est $(\mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3)$-mesurable.

De même, pour tout $y \in E_2$, on a $f_y = Id_y \circ f$, donc la première question et la proposition 1.4 entraînent que la fonction f_y est $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_3)$-mesurable.

Exercice 1.13

On considère le sous-ensemble $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ formé des parties A vérifiant la propriété

$$(\text{pour tout } \ n \in \mathbb{N}^*, 2n \in A) \Leftrightarrow (2n+1 \in A)\,.$$

1°) Montrer que $\mathcal{T}$ est une tribu sur $\mathbb{Z}$ strictement contenue dans $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$.

2°) Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ définie par $\varphi(n) = n + 2$ est bijective, $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$-mesurable et que φ^{-1} n'est pas $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$-mesurable.

Solution

1°) Montrons que $\mathcal{T}$ est une tribu sur $\mathbb{Z}$.

- $\mathbb{Z} \in \mathcal{T}$.
- Soit $A \in \mathcal{T}$, montrons que $A^c \in \mathcal{T}$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(2n \in A^c) \Leftrightarrow (2n \notin A) \Leftrightarrow (2n+1 \notin A) \Leftrightarrow (2n+1 \in A^c)$.
- Montrons que $\mathcal{T}$ est stable par union dénombrable.

  Soit $(A_k)_{k \geqslant 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} 2n \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k &\Leftrightarrow (\text{il existe } \ k \in \mathbb{N} \ \text{ tel que } \ 2n \in A_k) \\ &\Leftrightarrow (\text{il existe } \ k \in \mathbb{N} \ \text{ tel que } \ 2n+1 \in A_k) \\ &\Leftrightarrow 2n+1 \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\,. \end{aligned}$$

  D'où $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{T}$. De plus, $\{1\} \notin \mathcal{T}$ et plus généralement $\{n\} \notin \mathcal{T}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2°) La fonction φ est bijective et sa fonction réciproque est la fonction ψ de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ définie par $\psi(n) = n - 2$.

- Montrons que φ est $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$-mesurable. Soit $A \in \mathcal{T}$, montrons que $\varphi^{-1}(A) \in \mathcal{T}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} 2n \in \varphi^{-1}(A) &\Leftrightarrow 2n+2 = \varphi(2n) \in A \\ &\Leftrightarrow 2(n+1) \in A \\ &\Leftrightarrow 2(n+1)+1 \in A \\ &\Leftrightarrow (2n+1)+2 \in A \\ &\Leftrightarrow \varphi(2n+1) \in A \\ &\Leftrightarrow (2n+1) \in \varphi^{-1}(A)\,. \end{aligned}$$

  D'où $\varphi^{-1}(A) \in \mathcal{T}$. Donc φ est $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$-mesurable.
- Montrons que ψ $(= \varphi^{-1})$ n'est pas $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$-mesurable.

  $\mathbb{Z}^* \in \mathcal{T}$ donc $\{0\} = (\mathbb{Z}^*)^c \in \mathcal{T}$, mais $\psi^{-1}(\{0\}) = \{2\} \notin \mathcal{T}$ donc ψ n'est pas $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$-mesurable.

Commentaire : Cet exercice donne l'exemple d'une bijection $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$-mesurable dont la bijection réciproque n'est pas $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$-mesurable.

Exercice 1.14

Soit $\mathcal{T} = \{A \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) : A = -A\}$ où $-A = \{-x : x \in A\}$.

1°) Montrer que $\mathcal{T}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$.

2°) Les applications $f : x \mapsto e^x$, $g : x \mapsto x^3$ et $h : x \mapsto \cos x$

2.a sont-elles $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{T})$-mesurables ?

2.b sont-elles $\big(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$-mesurables ?

2.c sont-elles $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$-mesurables ?

3°) Caractériser les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurables.

4°) Caractériser les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$-mesurables.

Solution

1°) Pour montrer que $\mathcal{T}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$, on peut utiliser soit la définition d'une tribu (définition 1.1), soit l'exercice 1.4 1°), en montrant que $\mathcal{T} = \varphi^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ où φ est une application $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ bien choisie. On prend $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors φ est borélienne car continue. Ainsi pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\varphi^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. De plus, $(x \in \varphi^{-1}(B)) \Leftrightarrow (\varphi(x) \in B) \Leftrightarrow (\varphi(-x) = \varphi(x) \in B) \Leftrightarrow (-x \in \varphi^{-1}(B)) \Leftrightarrow (x \in -\varphi^{-1}(B))$, donc $\varphi^{-1}(B) \in \mathcal{T}$ et φ est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable.

2°) 2.a Les fonctions f, g et h sont continues donc boréliennes d'après le corollaire 1.1. Ainsi, pour tout $A \in \mathcal{T}, f^{-1}(A), g^{-1}(A), h^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

2.b On a $\{e\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mais $f^{-1}(\{e\}) = \{1\} \notin \mathcal{T}$, donc f n'est pas $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable. $\{1\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mais $g^{-1}(\{1\}) = \{1\} \notin \mathcal{T}$, donc g n'est pas $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable.

Montrons que h est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable. Soient $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $x \in h^{-1}(A)$, on a en vertu de la parité de h, $h(-x) = h(x) \in A$. Donc $(x \in h^{-1}(A)) \Leftrightarrow (-x \in h^{-1}(A))$ *i.e.* $h^{-1}(A) \in \mathcal{T}$. D'où h est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable.

2.c L'ensemble $\{-e, e\} \in \mathcal{T}$ mais $f^{-1}(\{-e\} \cup \{e\}) = \{1\} \notin \mathcal{T}$, donc f n'est pas $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$-mesurable.

Soit $A \in \mathcal{T}$, montrons que $g^{-1}(A) \in \mathcal{T}$ c'est-à-dire que $g^{-1}(A)$ est borélien, ce qui est évident et que $-(g^{-1}(A)) = g^{-1}(A)$. Or $(x \in g^{-1}(A)) \Leftrightarrow (g(x) \in A) \Leftrightarrow (-g(x) \in A) \Leftrightarrow (g(-x) = -g(x) \in A) \Leftrightarrow (-x \in g^{-1}(A))$. Donc g est $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$-mesurable.

La fonction h est évidemment $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$-mesurable par 2.b.

3°) Caractérisation des applications $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurables.

- Il est clair que toute fonction paire est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable par une démonstration semblable à 2.b.
- Réciproquement, toute fonction ψ $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$-mesurable est paire et borélienne.

  En effet, elle est borélienne car pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\psi^{-1}(B) \in \mathcal{T} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et d'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\psi^{-1}\{\psi(x)\}) \in \mathcal{T}$, donc $-x \in \psi^{-1}\{\psi(x)\})$ c'est-à-dire $\psi(-x) = \psi(x)$.

4°) Caractérisation des applications $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$-mesurables.

Remarquons que si ψ est $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$-mesurable alors $\varphi \circ \psi$ est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable par la proposition 1.4. Et d'après la question précédente, $|\psi|$ est borélienne et paire.

Réciproquement, soit ψ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $|\psi|$ soit borélienne et paire et soit $A \in \mathcal{T}$. Alors $\psi^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R} : \psi(x) \in A\}$ est symétrique par rapport à l'origine puisque $|\psi|$ est paire. De plus $\psi^{-1}(A) = |\psi|^{-1}(|A|)$ (où l'on note $|A| = \{|x| : x \in A\}$). Par ailleurs $|A| = A \cap [0, +\infty[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $|\psi|^{-1}(|A|) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ puisque $|\psi|$ est borélienne.

Conclusion : Les applications $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$-mesurables sont celles telles que $|\psi|$ soit paire et borélienne.

Exercice 1.15

Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace mesurable. On suppose que $\mathcal{T} \subsetneq \mathcal{P}(E)$.

1°) Montrer que $A \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \mathbb{1}_A$ est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable.

2°) Donner un exemple de fonction $f : E \to \mathbb{R}$ non $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable et telle que $|f|$ soit $\mathcal{T}$-mesurable.

Solution

1°) Montrons que si $A \in \mathcal{T}$, alors $\mathbb{1}_A$ est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable.

D'après le théorème 1.3, il suffit de montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$B_a = \{x \in E : \mathbb{1}_A(x) < a\} \in \mathcal{T} .$$

Il y a trois cas à distinguer :

- si $a \leqslant 0$, alors $B_a = \emptyset \in \mathcal{T}$;
- si $a > 1$, alors $B_a = E \in \mathcal{T}$;
- si $a \in]0, 1]$, alors $B_a = A^c \in \mathcal{T}$.

Réciproquement, si $\mathbb{1}_A$ est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable, alors $\mathbb{1}_A^{-1}(\{1\}) \in \mathcal{T}$. Or $A = \mathbb{1}_A^{-1}(\{1\})$ donc $A \in \mathcal{T}$.

2°) Soit $A \in \mathcal{P}(E) \setminus \mathcal{T}$ et soit $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \mathbb{1}_A(x)$. On a $f^{-1}(\{1\}) = A \notin \mathcal{T}$ donc f n'est pas $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable. D'autre part $|f| = \mathbb{1}_E$ est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable d'après la question précédente puisque $E \in \mathcal{T}$.

Chapitre 2

Mesures positives

RAPPELS DE COURS

Après « que mesure-t-on ? », nous allons voir dans ce chapitre « comment mesure-t-on ? »

2.1 GÉNÉRALITÉS

Dans tout ce qui suit, $(E, \mathcal{T})$ est un espace mesurable.

Définition 2.1 (Mesure positive)

1°) On appelle mesure positive *sur l'espace mesurable* $(E, \mathcal{T})$ *toute application* μ *de* $\mathcal{T}$ *dans* $[0, +\infty]$ *vérifiant :*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$ *;*

(ii) pour toute suite $(A_n)_{n \geqslant 0}$ *d'éléments de* $\mathcal{T}$ *deux à deux disjoints, on a*

$$\mu\left(\bigcup_{n \geqslant 0} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n).$$

Cette propriété est appelée σ-additivité *de* μ *et* μ *est dite* σ*-additive.*

2°) On dit que le triplet $(E, \mathcal{T}, \mu)$ *est un* espace mesuré.

Notre propos ne concernant que les mesures *positives*, nous ne mentionnerons plus ce détail par la suite. De plus, $(E, \mathcal{T}, \mu)$ désigne un espace mesuré.

Quelques propriétés supplémentaires donnent lieu à définition.

Définition 2.2

- *Une mesure* μ *est dite* finie *ou* bornée *si* $\mu(E) < +\infty$.
- *Une mesure* μ *est dite* σ-finie *s'il existe une suite* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* $\mathcal{T}$ *vérifiant* $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *et, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\mu(A_n) < +\infty$.
- *Dans le cas où* $\mu(E) = 1$, μ *est appelée* probabilité *ou* mesure de probabilité *et* $(E, \mathcal{T}, \mu)$ *un* espace probabilisé.
- *Une mesure* μ *sur* $\big(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)\big)$ *est dite* borélienne *si pour tout borélien borné* B *de* $\mathbb{R}^N$, $\mu(B) < +\infty$.
- *Une mesure* μ *est dite* diffuse *si, pour tout* $a \in E$, $\{a\} \in \mathcal{T}$ *et* $\mu(\{a\}) = 0$.

Propriétés élémentaires des mesures positives

Dans la proposition suivante nous retrouvons, pour un nombre fini d'ensembles, les caractères d'additivité et de croissance qui nous sont familiers pour la mesure expérimentale d'une grandeur physique.

Proposition 2.1 *Soient* A *et* $B \in \mathcal{T}$.

- *Si* $A \cap B = \emptyset$ *alors* $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ (additivité) *;*
- *si* $A \subset B$ *alors* $\mu(A) \leqslant \mu(B)$ (croissance) *et, si de plus* $\mu(A) < +\infty$, $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Remarque 2.1 Bien entendu, la σ-additivité implique l'additivité, la réciproque est fausse en général (voir un contre-exemple dans l'exercice 2.4).

Ce comportement de la fonction « mesure » vis-à-vis des opérations ensemblistes habituelles se prolonge à une famille dénombrable de sous-ensembles de E par la proposition suivante.

Proposition 2.2 *Soit* $(E, \mathcal{T}, \mu)$ *un espace mesuré et* $(A_n)_{n\geqslant 1}$ *une suite d'éléments de* $\mathcal{T}$. *Alors :*

(i) μ *vérifie la propriété de* σ-sous-additivité, i.e.

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)\,;$$

(ii) si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n \subset A_{n+1}$ *alors* μ *vérifie la propriété de la* continuité croissante, i.e.

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)\,;$$

(iii) si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n \supset A_{n+1}$ *et si* $\mu(A_1) < +\infty$ *alors* μ *vérifie la propriété de la* continuité décroissante, i.e.

$$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)\,.$$

Remarque 2.2 On peut montrer que s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(A_{n_0}) < +\infty$, alors la propriété (iii) ci-dessus est encore valable. C'est l'hypothèse de finitude de la mesure d'un des éléments de la suite décroissante qui est fondamentale (voir à ce propos l'exercice 2.5).

2.2 CONSTRUCTION DES MESURES

La construction des mesures est un point *délicat.* En effet, il est rare que l'on puisse définir explicitement une mesure positive sur un espace mesurable $(E, \mathcal{T})$. La situation est en général la suivante : on a $\mathcal{T} = \sigma_E(\mathcal{S})$, où $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(E)$ et l'on sait associer à tout élément A de $\mathcal{S}$ un nombre réel positif $\nu(A)$. La question légitime est « existe-t-il une mesure positive μ sur $\mathcal{T}$ qui prolonge de façon canonique ν, c'est-à-dire telle que $\mu(A) = \nu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{S}$? Et dans l'affirmative, ce prolongement est-il unique ? »

Avant d'énoncer le théorème général de prolongement (théorème 2.4), commençons par exposer les trois exemples les plus significatifs et les plus courants dans les applications où il y a un problème de prolongement. Ces résultats sont une conséquence immédiate du théorème de prolongement 2.4.

Exemple 1 : Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$. C'est celui de l'existence et de l'unicité de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$. Il s'agit alors de prolonger aux boréliens de $\mathbb{R}^N$ l'application qui à tout « pavé » de $\mathbb{R}^N$, c'est-à-dire un produit de N intervalles finis, associe son « volume », c'est-à-dire le produit des longueurs des intervalles qui définissent ce pavé. Ce prolongement devant être bien sûr une mesure positive sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

Le théorème de prolongement 2.4 ci-dessous nous assurera l'existence et l'unicité de ce prolongement.

Théorème 2.1 *Il existe une unique mesure* σ*-finie sur* $\big(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)\big)$ *qu'on appelle* mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$ *et qu'on note* $\lambda^{(N)}$ *telle que*

$$\lambda^{(N)}\big([a_1, b_1[\times[a_2, b_2[\times\cdots\times[a_N, b_N[\big) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\cdots(b_N - a_N)\,.$$

De plus, la mesure de Lebesgue sur $\big(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)\big)$ *est* invariante par translation, i.e.

$$\lambda^{(N)}(B + x) = \lambda^{(N)}(B)$$

pour tout vecteur x *de* $\mathbb{R}^N$ *et tout borélien* B *de* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ *(exercice 2.13).*

Notation : On note λ la mesure de Lebesgue sur $\big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$ au lieu de $\lambda^{(1)}$.

Exemple 2 : Mesure produit. Soient $(E_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$ et $(E_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés. Considérons la famille $\mathcal{A}$ des « pavés » de $E_1 \times E_2$: $A \in \mathcal{A}$ si et seulement si

$$A = A_1 \times A_2 \quad \text{où} \quad A_1 \in \mathcal{T}_1 \quad \text{et} \quad A_2 \in \mathcal{T}_2\,.$$

Rappelons que par définition, la tribu produit $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ n'est autre que $\sigma(\mathcal{A})$ (voir page 7). Posons, pour tout $A \in \mathcal{A}$,

$$\nu(A) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)$$

où $A = A_1 \times A_2$, $A_1 \in \mathcal{T}_1$, $A_2 \in \mathcal{T}_2$ et où l'on convient que si a et b appartiennent à $[0, +\infty]$,

$$(+\infty) \times a = a \times (+\infty) = +\infty \text{ si } a > 0,\ 0 \text{ si } a = 0.$$

Existe-t-il une mesure positive sur $\mathcal{T}$ qui prolonge ν ? Est-elle unique ?

La réponse est positive, toutefois pour obtenir *l'unicité* de ce prolongement il sera nécessaire de supposer que μ_1 et μ_2 sont σ-finies (voir Wagschal [50, p. 2]).

Théorème 2.2 *Soient $(E_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$ et $(E_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés tels que les mesures μ_1 et μ_2 soient σ-finies. Il existe une unique mesure sur l'espace mesurable produit $(E_1 \times E_2, \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2)$, qu'on note $\mu_1 \otimes \mu_2$ telle que pour tout $A_1 \in \mathcal{T}_1$, pour tout $A_2 \in \mathcal{T}_2$,*

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2).$$

On l'appelle mesure produit *des mesures μ_1 et μ_2.*

Corollaire 2.1 *Pour tout $N \geqslant 2$, $\lambda^{(N)} = \bigotimes_{i=1}^{N} \lambda$.*

Exemple 3 : Mesures de Lebesgue-Stieljes sur $\mathbb{R}$. Cet exemple est fondamental puisqu'il donne une caractérisation élémentaire des mesures *boréliennes* sur $\mathbb{R}$ (*i.e. finies sur tout intervalle borné*) et fournit un mode de construction général de ces mesures. Par ailleurs, la restriction aux intervalles bornés permet d'associer à une mesure borélienne sur $\mathbb{R}$ des *fonctions de répartition.* D'où la définition suivante.

Définition 2.3 *Soit μ une mesure borélienne sur $\mathbb{R}$. On appelle* fonction de répartition *de μ toute application F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leqslant b$, on ait*

$$\mu([a, b[) = F(b) - F(a). \tag{2.1}$$

Remarquons qu'étant donnée une mesure borélienne μ sur $\mathbb{R}$, alors il existe une infinité d'applications F vérifiant (2.1). Si on considère par exemple la fonction qui à tout réel x associe

$$F_0(x) = \begin{cases} \mu([0, x[) & \text{si } x \geqslant 0, \\ -\mu([x, 0[) & \text{si } x \leqslant 0, \end{cases}$$

on vérifie (voir exercice 2.14) que $F_0(0) = 0$, F_0 est croissante, continue à gauche et que toute autre fonction F vérifiant (2.1) est de la forme $F = F_0 + C$ où C est une constante réelle.

Inversement, étant donnée une application F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ croissante et continue à gauche, existe-t-il une unique mesure μ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ qui prolonge l'application ν définie par

$$\nu([a, b[) = F(b) - F(a)$$

pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leqslant b$?

Théorème 2.3 *Soit F une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ croissante et continue à gauche. Alors il existe une unique mesure μ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leqslant b$, on ait*

$$\mu([a, b[) = F(b) - F(a).$$

La mesure μ est appelée mesure de Lebesgue-Stieljes *associée à F et F est appelée* fonction de répartition *de μ.*

Cas particuliers importants

- Si F est l'application identique, on retrouve la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.
- Si, en plus du fait que F soit croissante et continue à gauche, on a $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$ alors μ est une *probabilité* et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mu(]-\infty, x[) = F(x)$.

Afin d'énoncer correctement le théorème fondamental du prolongement, on donne deux définitions.

Définition 2.4 *Une partie non vide $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(E)$ est un* demi-anneau *si elle vérifie les trois propriétés suivantes :*

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$;

(ii) *si $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ alors $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$;*

(iii) *si $A, A_1 \in \mathcal{A}$ sont tels que $A_1 \subsetneq A$, alors il existe $A_2, A_3, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ deux à deux disjoints, tels que $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$.*

La deuxième définition est la suivante.

Définition 2.5 *Soit $\mathcal{A}$ un demi-anneau de E. Une* pré-mesure *sur $\mathcal{A}$ est une application ν de $\mathcal{A}$ dans $[0, +\infty]$ vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) $\nu(\emptyset) = 0$;

(ii) $\nu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \nu(A_n)$ *pour toute suite $(A_n)_{n \geqslant 1}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints.*

Remarque 2.3 Sur une tribu, on emploie le terme *mesure*. Le terme de *pré-mesure* est réservé aux demi-anneaux.

Théorème 2.4 (Théorème de prolongement) *Soit $\mathcal{A}$ un demi-anneau sur E et ν une pré-mesure sur $(E, \mathcal{A})$. Alors il existe une mesure μ sur $(E, \sigma(\mathcal{A}))$ qui prolonge ν. Si de plus la pré-mesure ν est* σ-finie, *alors son extension μ est unique et est σ-finie.*

2.3 ENSEMBLES NÉGLIGEABLES

Les ensembles négligeables jouent un rôle important dans la théorie de la mesure et de l'intégration. Il s'avère techniquement nécessaire de ne pas restreindre la notion d'ensemble négligeable aux seuls sous-ensembles mesurables.

Définition 2.6 *Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. On dit qu'une partie N de E est* μ-négligeable *s'il existe $A \in \mathcal{T}$ tel que $N \subset A$ et $\mu(A) = 0$.*

Proposition 2.3

– *Toute partie d'un ensemble* μ*-négligeable est* μ*-négligeable.*

– *La réunion d'une famille* dénombrable *de parties* μ*-négligeables est* μ*-négligeable.*

Proposition 2.4 (Caractérisation des ensembles négligeables dans $\mathbb{R}^p$) *Une partie A de* $\mathbb{R}^p$ *est négligeable si et seulement si, pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe une famille dénombrable de pavés ou de boules* $\left(P_n(\varepsilon)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que*

$$A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n(\varepsilon) \quad et \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{(p)}\left(P_n(\varepsilon)\right) < \varepsilon\,.$$

Les ensembles négligeables vont permettre d'exprimer le fait que certaines propriétés ponctuelles (continuité, convergence simple, majoration...) n'ont pas lieu en tout point (c'est-à-dire partout) mais seulement « presque partout », c'est-à-dire sur le complémentaire d'un ensemble négligeable.

Définition 2.7 *Une propriété* $\mathcal{P}(x)$ *dépendant de l'élément x de E sera dite vérifiée* μ-presque partout *(ou simplement* presque partout *quand il n'y a pas d'ambiguïté) si l'ensemble des x de E pour lesquels la propriété* $\mathcal{P}(x)$ *est fausse est* μ*-négligeable.*

On écrira en abrégé $\mathcal{P}(x)$ est vérifiée μ-p.p. (ou simplement p.p. quand il n'y a pas d'ambiguïté sur la mesure).

2.4 ESPACES MESURÉS COMPLETS

On a vu dans la définition 2.6 qu'une partie N de E μ-négligeable n'est pas nécessairement un élément de $\mathcal{T}$. Pourtant pour respecter le principe de monotonie croissante de la mesure μ (voir proposition 2.1), il est naturel d'attribuer à N la mesure 0. On est alors en train d'élargir la tribu $\mathcal{T}$. D'où la définition suivante.

Définition 2.8 *Si toutes les parties de E* μ*-négligeables sont mesurables, on dit que l'espace* $(E, \mathcal{T}, \mu)$ *est* complet.

On prendra garde de ne pas confondre espace métrique complet *i.e.* où toute suite de Cauchy converge avec espace mesuré complet, dont la tribu contient tous les ensembles négligeables.

Lorsqu'un espace mesuré $(E, \mathcal{T}, \mu)$ n'est pas complet, on peut le *compléter* canoniquement de la façon suivante.

Proposition 2.5 *Soit* $(E, \mathcal{T}, \mu)$ *un espace mesuré et soit* $\mathcal{N}$ *l'ensemble des parties* μ*-négligeables de E. On considère*

$$\tilde{\mathcal{T}} = \{A \cup N : A \in \mathcal{T} \quad et \quad N \in \mathcal{N}\}\,.$$

Pour tout $A \in \mathcal{T}$ *et pour tout* $N \in \mathcal{N}$*, on pose* $\tilde{\mu}(A \cup N) = \mu(A)$*. Alors*

(i) $\tilde{\mathcal{T}}$ *est une tribu sur E contenant* $\mathcal{T}$ *;*

(ii) $\tilde{\mu}$ *définit une mesure positive sur* $\tilde{\mathcal{T}}$ *qui coïncide avec* μ *sur* $\mathcal{T}$ *;*

(iii) si on note $\tilde{\mathcal{N}}$ *la famille des sous-ensembles de E* $\tilde{\mu}$*-négligeables alors* $\tilde{\mathcal{N}} = \mathcal{N}$ *;*

(iv) $(E, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mu})$ *est un espace mesuré complet.*

Définition 2.9 *On dit que* $(E, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mu})$ *est le* complété *de l'espace mesuré* $(E, \mathcal{T}, \mu)$.

Remarque 2.4

– Un espace mesuré complet est égal à son complété.

– La tribu $\tilde{\mathcal{T}}$ dépend et de la tribu $\mathcal{T}$ et de la mesure μ par rapport à laquelle on effectue la complétion.

– Si $\mathcal{P}(x)$ est une propriété dépendant de $x \in E$ alors, $\mathcal{P}(x)$ est vraie μ-p.p. si et seulement si $\mathcal{P}(x)$ est vraie $\tilde{\mu}$-p.p.

Exemple historique : la tribu de Lebesgue $\mathcal{L}(\mathbb{R})$

Si $(E, \mathcal{T}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. L'espace $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ n'est pas complet. Alors :

– la tribu $\tilde{\mathcal{T}}$ est *la tribu de Lebesgue sur* $\mathbb{R}$ et on la note $\mathcal{L}(\mathbb{R})$;

– la mesure $\tilde{\mu}$ s'appelle aussi *la mesure de Lebesgue* et sera aussi notée λ au lieu de $\tilde{\lambda}$;

– les éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ sont appelés *parties mesurables au sens de Lebesgue* ou parties *Lebesgue-mesurables.*

Remarque 2.5 Lebesgue a montré que la tribu de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est strictement contenue dans la tribu $\mathcal{L}(\mathbb{R})$. Voir l'exercice 2.12 où on exhibe une partie de $\mathbb{R}$ Lebesgue-mesurable et non Borel-mesurable. D'autre part, on montre que :

(i) la tribu de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ a le même cardinal que $\mathbb{R}$;

(ii) la tribu de Lebesgue $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ a le même cardinal que $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, mais $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ est strictement contenue dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ (pour ce dernier point, voir exercice 2.11).

EXERCICES

2.5 EXERCICES SUR LA DÉFINITION AXIOMATIQUE D'UNE MESURE

Exercice 2.1

Pour chacun des 2 cas suivants,

(i) prouver que μ est une mesure ;

(ii) montrer que μ est σ-finie ;

(iii) déterminer la classe des parties μ-négligeables de E ;

(iv) expliciter à quelle condition une propriété est vraie μ-presque partout.

1°) Soient E un ensemble non vide, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(E)$ et $a \in E$. On pose, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$,

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A, \\ 0 & \text{si } a \notin A. \end{cases}$$

Autrement dit : $\delta_a(A) = \mathbb{1}_A(a)$.

δ_a est appelée *mesure* ou *masse de Dirac au point a*.

2°) Soit D un ensemble dénombrable ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ etc). Soit

$$\begin{aligned} \mu_d : \mathcal{P}(D) &\to [0, +\infty] \\ A &\mapsto \mu_d(A) = \operatorname{Card} A. \end{aligned}$$

On appelle μ_d *mesure de dénombrement* ou *mesure de comptage*.

Solution

1°) Sur la mesure de Dirac.

(i) Montrons que δ_a est une mesure.

– $\delta_a(\emptyset) = 0$;

– Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{P}(E)$ deux à deux disjoints. On a

$$\delta_a\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mathbb{1}_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n}(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{A_n}(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta_a(A_n).$$

(ii) $\delta_a(E) = \mathbb{1}_E(a) = 1$ donc δ_a est une probabilité et est donc σ-finie.

(iii) Un sous-ensemble de E est δ_a-négligeable si et seulement si il ne contient pas a.

(iv) Une propriété est vraie δ_a-presque partout si et seulement si elle est vraie en a.

2°) Sur la mesure de comptage.

(i) Montrons que μ_d est une mesure.

– $\mu_d(\emptyset) = \operatorname{Card} \emptyset = 0$;

– Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de D deux à deux disjointes. D'après les propriétés du cardinal d'un ensemble

$$\mu_d\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \operatorname{Card}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Card} A_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_d(A_n).$$

(ii) Un sous-ensemble de D est μ_d-négligeable si et seulement si il est vide.

(iii) Une propriété est vraie μ_d-presque partout si et seulement si elle est vraie en tout point de D, c'est-à-dire vraie partout.

(iv) Montrons que μ_d est σ–finie.

Par hypothèse, D est dénombrable donc s'écrit sous la forme $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{a_n\}$ et $\mu_d(\{a_n\}) = \operatorname{Card}\{a_n\} = 1 < +\infty$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, μ_d est σ-finie.

Exercice 2.2 (Mesure image)

Soient $(E_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$ un espace mesuré, $(E_2, \mathcal{T}_2)$ un espace mesurable et g une application de E_1 dans E_2 $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$-mesurable. On considère l'application μ_2 qui à tout élément $B \in \mathcal{T}_2$ associe $\mu_2(B) = \mu_1\big(g^{-1}(B)\big)$.

1°) Montrer que μ_2 est une mesure sur $(E_2, \mathcal{T}_2)$.

On appelle μ_2 *mesure image* de la mesure μ_1 par l'application g et on la note $\mu_2 = g(\mu_1)$.

2°) Deux exemples de mesure image.

2.a Dans cette question, $a \in \mathbb{R}$, $(E_1, \mathcal{T}_1, \mu_1) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, $(E_2, \mathcal{T}_2) = (\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$ et $g = E$ (partie entière). Déterminer $g(\mu_1) = E(\lambda)$.

2.b Dans cette question, $(E_1, \mathcal{T}_1, \mu_1) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \delta_a)$, $(E_2, \mathcal{T}_2) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $g = h$ (où h est une fonction borélienne donnée). Déterminer $h(\delta_a)$ (voir exercice 2.1).

On verra d'autres exemples de mesures images aux exercices 2.15, 3.5, 3.7 et 5.19.

Solution

1°) Montrons que μ_2 est une mesure sur $(E_2, \mathcal{T}_2)$. On a

– $\mu_2(\emptyset) = \mu_1\big(g^{-1}(\emptyset)\big) = \mu_1(\emptyset) = 0$;

– Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}_2$ deux à deux disjoints. Comme l'image réciproque d'une union disjointe est la réunion disjointe des images réciproques et que μ_1 est une mesure sur $\mathcal{T}_1$, on a

$$\begin{aligned} \mu_2\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) &= \mu_1\left(g^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right)\right) \\ &= \mu_1\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} g^{-1}(B_n)\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_1\big(g^{-1}(B_n)\big) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_2(B_n), \end{aligned}$$

et μ_2 est une mesure.

2°) Exemples de mesure image.

2.a Déterminons $g(\mu_1) = E(\lambda)$.

$E(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$, donc la mesure image $E(\lambda)$ est concentrée sur $\mathbb{Z}$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, $E(\lambda)(\{n\}) \overset{\text{déf}}{=} \lambda\big(E^{-1}(\{n\})\big) = \lambda([n, n+1[) = 1$. Soit $B \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$, alors

$$E(\lambda)(B) = E(\lambda)\left(\bigcup_{n\in B}\{n\}\right) = \sum_{n\in B} E(\lambda)(\{n\}) = \sum_{n\in B} 1 = \operatorname{Card} B.$$

Ainsi $E(\lambda)$ est la mesure de dénombrement sur $\mathbb{Z}$.

2.b Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Alors on a $h(\delta_a)(A) = \delta_a\left(h^{-1}(A)\right) = \mathbb{I}_{h^{-1}(A)}(a) = \mathbb{I}_A(h(a)) = \delta_{h(a)}(A)$. Ainsi

$$h(\delta_a) = \delta_{h(a)}\,.$$

Exercice 2.3

Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace mesurable, $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures sur $(E, \mathcal{T})$. Pour tout $A \in \mathcal{T}$, on pose

$$\mu(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n(A)\,.$$

1°) Montrer que μ est une mesure sur $(E, \mathcal{T})$. On pourra utiliser le résultat de l'exercice 3.3.

2°) On suppose que les mesures μ_n sont des probabilités (*i.e.* $\mu_n(E) = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$) et on considère une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs tels que $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$. Pour tout $A \in \mathcal{T}$, on pose

$$\mu(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \mu_n(A)\,.$$

Vérifier que μ est une probabilité sur $(E, \mathcal{T})$.

3°) *Application :* on considère les mesures suivantes :

$$\mu_1 = \sum_{p=0}^{+\infty} \delta_p\,, \quad \mu_2 = \sum_{p=0}^{+\infty} p\delta_p \quad \text{et} \quad \mu_3 = \lambda\,.$$

Pour chacune des mesures ci-dessus, calculer les mesures des ensembles (mesurables) suivants :

$$A_n = \left[n, n+1+\frac{1}{n^2}\right] \quad \text{où } n \in \mathbb{N}^*,$$

$$B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \quad \text{et} \quad B = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} A_k\,,$$

$$C_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k \quad \text{et} \quad C = \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} A_k\,.$$

Solution

1°) Montrons que μ est une mesure.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, μ_n est une mesure donc $\mu_n(\emptyset) = 0$ et donc $\mu(\emptyset) = 0$.
- Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$ deux à deux disjoints. Alors on a

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \mu_n(A_k)\right) \quad \text{car } \mu_n \text{ est une mesure}\,.\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n(A_k)\right)\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(A_k)\,.\end{aligned}$$

Donc μ est une mesure. On a utilisé pour passer de la deuxième égalité à la troisième égalité le fait que si $a_{n,k} \geqslant 0$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,k}$ (voir l'exercice 3.3).

2°) Si $\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n\mu_n$, alors μ est une mesure d'après 1°). Par ailleurs, $\mu(E) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n\mu_n(E) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$ donc μ est une probabilité.

3°) *Application :*

- $\mu_1(A_1) = 3$ et si $n \geqslant 2$, $\mu_1(A_n) = \mathbb{I}_{A_n}(n) + \mathbb{I}_{A_n}(n+1) = 2$.
  $\mu_2(A_1) = 1+2+3 = 6$ et si $n \geqslant 2$, $\mu_2(A_n) = n\mathbb{I}_{A_n}(n) + (n+1)\mathbb{I}_{A_n}(n+1) = 2n+1$.
  $\mu_3(A_n) = 1 + \frac{1}{n^2}$.
- $B_n = \left[1, n+1+\frac{1}{n^2}\right]$ et $B = [1, +\infty[$, donc $\mu_1(B_1) = 3$, $\mu_2(B_1) = 6$ et $\mu_3(B_n) = n + \frac{1}{n^2}$; pour $n \geqslant 2$, $\mu_1(B_n) = n+1$, $\mu_2(B_n) = 1+2+3+\cdots+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, puis $\mu_1(B) = \mu_2(B) = \mu_3(B) = +\infty$.
  On remarque que $\mu_i(B) = \lim_{n\to+\infty} \mu_i(B_n)$ pour $1 \leqslant i \leqslant 3$.

Distinguons les cas $n = 1, 2, 3$ du cas $n \geqslant 4$.

- Il est clair que $C_1 = [1, 3]$, d'où $\mu_1(C_1) = 3$, $\mu_2(C_1) = 6$ et $\mu_3(C_1) = 2$;
- de même $C_2 = [2, 3]$, alors $\mu_1(C_2) = 2$, $\mu_2(C_2) = 3$, et $\mu_3(C_2) = 1$;
- enfin, comme $C_3 = \{3\}$, alors $\mu_1(C_3) = 1$, $\mu_2(C_3) = 3$, et $\mu_3(C_3) = 0$;
  pour $n \geqslant 4$, $C_n = \emptyset$ donc $\mu_1(C_n) = \mu_2(C_n) = \mu_3(C_n) = 0$, et finalement, $C = \emptyset$ donc $\mu_1(C) = \mu_2(C) = \mu_3(C) = 0$.

Exercice 2.4

1°) Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré ; vérifier que l'application μ est additive *i.e.* $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ pour tous éléments A et B de $\mathcal{T}$ disjoints.

2°) On considère l'application ν qui à toute partie A de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ associe $\nu(A)$ définie par

$$\nu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A = \emptyset\,; \\ \displaystyle\sum_{n \in A} \frac{1}{n^2} & \text{si } A \text{ est fini et ne contient pas } 0\,, \\ +\infty & \text{si } A \text{ est infini ou contient } 0\,. \end{cases}$$

Vérifier que ν est additive mais n'est pas σ-additive.

En déduire qu'en général, l'additivité n'entraîne pas la σ-additivité (voir proposition 2.1 et remarque 2.1).

Solution

1°) Soient A et B deux éléments disjoints de la tribu $\mathcal{T}$. Posons $A_1 = A$, $A_2 = B$ et $A_p = \emptyset$ pour tout entier $p \geqslant 2$. Comme $(A_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{T}$ deux à deux disjoints et que μ est σ-additive, on a

$$\mu\left(\bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} A_p\right) = \sum_{p=1}^{+\infty} \mu(A_p) = \sum_{p=1}^{2} \mu(A_p)$$

soit

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)\,.$$

Donc la σ-additivité entraîne l'additivité.

2°) 2.a Montrons que ν est additive.

Soient A et B deux parties disjointes de $\mathbb{N}$. Deux cas se présentent.

Premier cas : 0 appartient à $A \cup B$. On a d'une part $\nu(A \cup B) = +\infty$ par définition de ν, et d'autre part, 0 appartient à A ou à B et donc $\nu(A) + \nu(B) = +\infty$. En définitive,

$$\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B)\,.$$

Deuxième cas : 0 n'appartient pas à $A \cup B$. Deux sous-cas se présentent : $A \cup B$ est fini ou non.

– Si $A \cup B$ est fini alors A et B sont finis, et on a donc

$$\nu(A \cup B) = \sum_{k \in A \cup B} \frac{1}{k^2} = \sum_{k \in A} \frac{1}{k^2} + \sum_{k \in B} \frac{1}{k^2} = \nu(A) + \nu(B)\,;$$

– si $A \cup B$ est infini, alors A ou B est infini et on a alors

$$\nu(A \cup B) = +\infty = \nu(A) + \nu(B)\,.$$

Ainsi, ν est additive.

2.b Pour vérifier que ν n'est pas σ-additive (et donc que ce n'est pas une mesure), il suffit d'exhiber une suite infinie et dénombrable $(A_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de parties de $\mathbb{N}$ deux à deux disjointes telle que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \nu(A_k) \neq \nu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} A_k\right).$$

En prenant pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A_k = \{k\}$, on a d'une part

$$\nu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \{k\}\right) = \nu(\mathbb{N}^*) = +\infty$$

et d'autre part

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \nu(\{k\}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty$$

soit

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \nu(\{k\}) \neq \nu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \{k\}\right).$$

Exercice 2.5

Soit l'espace mesuré $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_d)$ (voir l'exercice 2.1 1°) pour les notations). On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A_k = \{n \in \mathbb{N},\ n \geqslant k\}$.

Comparer $\mu_d\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} A_k\right)$ et $\lim_{k \to +\infty} \mu_d(A_k)$.

Que peut-on en déduire ?

Solution

On a $\mu_d(A_k) = +\infty$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $\bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} A_k = \emptyset$. Ainsi

$$0 = \mu_d\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} A_k\right) \neq \lim_{k \to +\infty} \mu_d(A_k) = +\infty\,.$$

On déduit de ce qui précède que l'hypothèse de finitude de la mesure des éléments de la suite $(A_k)_{k \geqslant 0}$ est nécessaire dans la proposition 2.2 (iii).

Exercice 2.6 (Lemme de Borel-Cantelli)

Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré.

1°) Supposons qu'il existe une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{T}$ telle que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n) < +\infty\,.$$

Soit F l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à une infinité de A_n. Montrer que $F \in \mathcal{T}$ et que $\mu(F) = 0$.

Ce résultat est connu sous le nom du *lemme de Borel-Cantelli (première partie)* (voir par exemple [32, p. 199]).

2°) Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ et f des fonctions définies sur E, à valeurs dans $\mathbb{R}$, $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurables telles que pour tout $\alpha > 0$, on ait

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\big(\mu(|f_n - f| \geqslant \alpha)\big) < +\infty\,.$$

Déduire de ce qui précède que la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge μ-p.p. vers f.

Solution

1°) Montrons que $F \in \mathcal{T}$. Pour cela, montrons que $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcup_{k\geqslant n} A_k\right)$. En effet

$$\begin{aligned}(x \in F) &\Leftrightarrow \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ il existe } k \in \mathbb{N} \text{ tel que } k \geqslant n \text{ et } x \in A_k\\ &\Leftrightarrow \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ x \in \bigcup_{k\geqslant n} A_k\\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{k\geqslant n} A_k\,.\end{aligned}$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \bigcup_{k\geqslant n} A_k$; alors $F_n \in \mathcal{T}$ car F_n est une union dénombrable d'éléments de $\mathcal{T}$. Par suite, $F \in \mathcal{T}$ en tant qu'intersection dénombrable d'éléments de $\mathcal{T}$.
Montrons maintenant que $\mu(F) = 0$. Comme la suite $(F_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et $\mu(F_0) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}\mu(A_n) < +\infty$ par hypothèse, on a, d'après la propriété de continuité décroissante de μ (proposition 2.2),

$$\mu(F) = \lim_{n\to+\infty}\mu(F_n)\,.$$

Or, d'après la sous-additivité de μ (proposition 2.2), on a

$$\mu(F_n) \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty}\mu(A_k)\,,$$

d'où

$$0 \leqslant \lim_{n\to+\infty}\mu(F_n) \leqslant \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\mu(A_k) = 0\,.$$

Ainsi, $\mu(F) = 0$.

2°) Soit $\alpha > 0$ donné. Posons

$$A_n^\alpha = \{|f_n - f| \geqslant \alpha\} \quad \text{et} \quad F^\alpha = \bigcap_{n\geqslant 0}\left(\bigcup_{k\geqslant n} A_k^\alpha\right).$$

On a $\sum_{n=0}^{+\infty}\mu(A_n^\alpha) < +\infty$ par hypothèse. D'après la première question, $\mu(F^\alpha) = 0$.
Soit $x \in E$ tel que $\overline{\lim_{n\to+\infty}}\,|f_n(x) - f(x)| > 0$. Alors il existe $p_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $p \geqslant p_0$, il existe $N_p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_p$, $|f_n(x) - f(x)| \geqslant \dfrac{1}{p}$.
Donc, pour un certain $p \geqslant p_0$, un tel x appartient à une infinité d'ensembles $F^{1/p}$. Ainsi

$$\{x \in E : f_n(x) \ \text{ne converge pas vers}\ f(x)\} \subset \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} F^{1/p}\,,$$

d'où

$$0 \leqslant \mu\left(\{x \in E : f_n(x) \ \text{ne converge pas vers}\ f(x)\}\right) \leqslant \sum_{p=1}^{+\infty}\mu\left(F^{1/p}\right) = 0\,.$$

2.6 EXERCICES SUR LA MESURE DE LEBESGUE

Exercice 2.7

Soit A un borélien de $\mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue finie ; montrer que l'application f qui à tout réel x associe $\lambda\,(]-\infty, x] \cap A)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Solution

Pour établir ce résultat, il suffit de montrer que pour tout point x de $\mathbb{R}$, $f(x) = f(x^-) = f(x^+)$ où l'on désigne par $f(x^+)$ la limite à droite en x et $f(x^-)$ la limite à gauche en x.

Continuité à droite de x.
Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite décroissante de réels qui tend vers x. Alors

$$]-\infty, x] \cap A = \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}]-\infty, x_n]\right) \cap A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}(]-\infty, x_n] \cap A)\,.$$

Comme $\lambda(]-\infty, x] \cap A) \leqslant \lambda(A)$ (proposition 2.1), la propriété de continuité décroissante de la mesure (de Lebesgue) λ (proposition 2.2) est applicable. On a

$$\lambda(]-\infty, x] \cap A) = \lim_{n\to+\infty}\lambda\,(]-\infty, x_n] \cap A)\,,$$

ce qui signifie que f est bien continue à droite en x.

Continuité à gauche en x.
Soit $(y_n)_{n\geqslant 1}$ une suite croissante de réels qui tend vers x. Alors

$$]-\infty, x[\cap A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}(]-\infty, y_n] \cap A)\,.$$

Comme $\lambda(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (voir théorème 2.1), on a

$$\lambda(]-\infty, x] \cap A) = \lambda(]-\infty, x[\cap A) .$$

Donc, d'après la propriété de continuité croissante de la mesure (de Lebesgue) λ (proposition 2.2) et le fait que $\lambda(\{x\}) = 0$, on a

$$\lambda(]-\infty, x] \cap A) = \lim_{n\to+\infty} \lambda(]-\infty, y_n] \cap A) .$$

Ainsi, f est aussi continue à gauche en x.

Remarque 2.6 La condition $\lambda(A) < +\infty$ est nécessaire pour appliquer la propriété de continuité décroissante des mesures.

Exercice 2.8

Pour chaque $\varepsilon > 0$, construire un ouvert O^ε partout dense dans $\mathbb{R}$ tel que $\lambda(O^\varepsilon) \leqslant \varepsilon$. On pourra remarquer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Solution

Considérons $\mathbb{Q}$ sous la forme $\mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\{r_n\}$ et posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n^\varepsilon = \left]r_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, r_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right[$.

Alors $O^\varepsilon = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} I_n^\varepsilon$ est un ouvert en tant qu'union d'ouverts, partout dense dans $\mathbb{R}$ car $\overline{O^\varepsilon} \supset \bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Comme λ est sous-additive (proposition 2.2), on a aussi

$$\lambda(O^\varepsilon) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(I_n^\varepsilon) = \varepsilon \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \varepsilon .$$

Exercice 2.9 (Vrai ou faux?)

1°) Un ouvert de $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^N$) est borné si et seulement si sa mesure de Lebesgue est finie.

2°) Un borélien de $\mathbb{R}$ est de mesure de Lebesgue nulle si et seulement si il est dénombrable.

3°) La mesure de Lebesgue d'un borélien de $\mathbb{R}$ (ou de $\mathbb{R}^N$) est strictement positive si et seulement si il contient un ouvert non vide.

4°) La mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^{N-p} \times \{0\}^p$ est nulle pour tout $p \in \{1, \ldots, N\}$.

Solution

1°) – L'assertion « O ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ implique $\lambda^{(N)}(O)$ finie » est vraie. En effet, il existe $(a_i, b_i) \in \mathbb{R}^2$, $1 \leqslant i \leqslant N$, tels que

$$O \subset]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[\times \cdots \times]a_N, b_N[.$$

D'où, en vertu de la croissance des mesures (proposition 2.1),

$$\lambda^N(O) \leqslant \prod_{i=1}^{N}(b_i - a_i) < +\infty .$$

– La réciproque est fausse *i.e.* il existe des ouverts non bornés et de mesure de Lebesgue finie (voir exercice 2.8). Par exemple, l'ouvert $O = \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*}\left]p - \frac{1}{2^{p+1}}, p + \frac{1}{2^{p+1}}\right[$ est non borné, mais $\lambda(O) \leqslant \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{2^p} = 1$.

2°) Soit B un borélien de $\mathbb{R}$.

L'assertion « B est dénombrable entraîne que B est de mesure de Lebesgue nulle » est vraie. En effet, comme B est un dénombrable de $\mathbb{R}$ il existe une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $B \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}$. D'où, en vertu de la croissance et de la sous-additivité de la mesure de Lebesgue (proposition 2.2), on a

$$0 \leqslant \lambda(B) \leqslant \lambda\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda(\{x_n\}) = 0 ,$$

c'est-à-dire

$$\lambda(B) = 0 .$$

La réciproque est fausse *i.e.* il existe des boréliens de $\mathbb{R}$ non dénombrables et de mesure de Lebesgue nulle, par exemple, l'ensemble triadique de Cantor (voir exercice 2.10).

3°) – Soit B un borélien de $\mathbb{R}^N$. L'assertion « B contient un ouvert non vide O de $\mathbb{R}^N$ implique que $\lambda^{(N)}(B) > 0$ » est vraie. En effet, soit $a = (a_1, a_2, \ldots, a_N) \in O$; puisque O est un ouvert, il existe $(r_1, r_2, \ldots, r_N) \in (]0, +\infty[)^N$ tel que $]a_1 - r_1, a_1 + r_1[\times \ldots \times]a_N - r_N, a_N + r_N[\subset O$. D'où, en vertu de la croissance des mesures,

$$0 < 2^N \prod_{i=1}^{N} r_i \leqslant \lambda^{(N)}(O) \leqslant \lambda^{(N)}(B) .$$

– La réciproque est fausse *i.e.* il existe des boréliens ne contenant aucun ouvert non vide et de mesure de Lebesgue strictement positive. Par exemple, $B = \mathbb{Q}^c \cap [0, 1]$ est un borélien qui ne contient aucun ouvert non vide, car tout ouvert contient un élément de $\mathbb{Q}$. Pourtant $\lambda(B) = 1 > 0$. En effet, on a

$$[0, 1] = ([0, 1] \cap \mathbb{Q}^c) \cup ([0, 1] \cap \mathbb{Q})$$

donc, en vertu de l'additivité de la mesure de Lebesgue λ (proposition 2.1),

$$\lambda([0, 1]) = \lambda([0, 1] \cap \mathbb{Q}^c) + \lambda([0, 1] \cap \mathbb{Q}) .$$

Mais $\lambda([0, 1] \cap \mathbb{Q}) \leqslant \lambda(\mathbb{Q}) = 0$ car $\mathbb{Q}$ est dénombrable, et donc $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$ d'après 2°). D'où $\lambda([0, 1] \cap \mathbb{Q}) = 0$ et $\lambda(B) = 1$.

4°) L'assertion $\lambda^{(N)}(\mathbb{R}^{N-p}\times\{0\}^p)=0$ est vraie. En effet, posons, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$,
$$A_k=]-k,k[^{N-p}\times\{0\}.$$
La suite $(A_k)_{k\geqslant 1}$ est une suite croissante et on a
$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}A_k=\mathbb{R}^{N-p}\times\{0\}.$$
Donc, d'après la propriété de continuité croissante (proposition 2.2),
$$\lambda^{(N)}\left(\mathbb{R}^{N-p}\times\{0\}\right)=\lim_{k\to+\infty}\lambda^{(N)}(A_k). \tag{2.2}$$
Or, d'après le corollaire 2.1
$$\lambda^{(N)}(A_k)=(2k)^{N-p}\times 0=0. \tag{2.3}$$
En combinant (2.2) et (2.3), on trouve
$$\lambda^{(N)}\left(\mathbb{R}^{N-p}\times\{0\}\right)=0.$$

Exercice 2.10 (Ensemble triadique de Cantor)

Le but de cet exercice est d'exhiber un borélien de $\mathbb{R}$ non dénombrable et de mesure de Lebesgue nulle.

On considère la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de $[0,1]$ définie par
$$A_0=[0,1],$$
$$A_1=\left[0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},1\right],$$
$$A_2=\left[0,\frac{1}{3^2}\right]\cup\left[\frac{2}{3^2},\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\frac{7}{3^2}\right]\cup\left[\frac{8}{3^2},1\right],$$
si $A_n=\bigcup_{1\leqslant p\leqslant N}[a_{n,p},b_{n,p}]$ où $a_{n,p}<b_{n,p}$ alors
$$A_{n+1}=\bigcup_{1\leqslant p\leqslant N}\left(\left[a_{n,p},a_{n,p}+\frac{b_{n,p}-a_{n,p}}{3}\right]\bigcup\left[a_{n,p}+2\frac{b_{n,p}-a_{n,p}}{3},b_{n,p}\right]\right).$$
On pose
$$C=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n.$$
L'ensemble C s'appelle *l'ensemble triadique de Cantor*. On pourra faire un dessin pour les premières étapes.

1°) Vérifier que pour tout entier n, A_n est formé de 2^n intervalles fermés, deux à deux disjoints et que $\lambda(A_n)=\dfrac{2^n}{3^n}$.

2°) Montrer que C est un borélien non vide et de mesure de Lebesgue nulle.

3°) Sans utiliser la question précédente, montrer que C^c est un borélien et que $\lambda(C^c)=1$.

4°) Vérifier que C est en bijection avec $[0,1]$ et est donc non dénombrable.

➢ **Indication.** On pourra utiliser que $C\setminus\{1\}$ est l'ensemble des réels de $[0,1[$ dont le développement en base 3 ne comporte que les chiffres 0 et 2.

Commentaire : *L'ensemble C est très grand (il a le même cardinal que $[0,1]$ donc que $\mathbb{R}$), compact, d'intérieur vide et sans point isolé : il est donc complètement discontinu, autrement dit ses composantes connexes sont des singletons (voir le livre de Schwartz [41, pp. 217–221]). On l'utilise pour constuire des contre-exemples très intéressants, notamment des fonctions pathologiques, comme des fonctions continues partout et qui ne sont dérivables en aucun point, ou des fonctions dérivables à dérivée nulle part continue ou des fonctions Riemann-intégrables et non boréliennes (voir par exemple Briane-Pagès [8, p. 247]).*

Solution

1°) Vérifions que pour tout entier n, A_n est formé de 2^n intervalles fermés, deux à deux disjoints et que $\lambda(A_n)=\dfrac{2^n}{3^n}$.

Il est clair que la propriété demandée est vraie pour $n=1,2,3$.

Soit $n>3$ et supposons qu'on ait construit A_n réunion de 2^n intervalles fermés et deux à deux disjoints $J_{n,p}$, chacun ayant une longueur égale à $\dfrac{1}{3^n}$. Alors, pour chaque p variant entre 1 et 2^n, on ôte un intervalle ouvert de même milieu que $J_{n,p}$ de longueur $\dfrac{1}{3^{n+1}}$, les deux intervalles restant qu'on notera $J_{n+1,2p-1}$ et $J_{n+1,2p}$ sont fermés et ont même longueur égale à $\dfrac{1}{3^{n+1}}$. On pose alors $A_{n+1}=\bigcup_{1\leqslant p\leqslant 2^{n+1}}J_{n+1,p}$.

Alors A_{n+1} a toutes les propriétés demandées.

2°) Montrons que C est un borélien non vide de mesure de Lebesgue nulle.

- C contient $0,1,\dfrac{1}{3},\ldots$, donc il est non vide.
- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, A_n est un fermé comme toute réunion d'intervalles fermés, donc A_n est un borélien comme tout fermé. On en déduit que C est un borélien comme toute intersection dénombrable de boréliens.

En outre, la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $\lambda(A_0)=1$. D'après la continuité décroissante des mesures (proposition 2.2 (iii)), on a $\lambda(C)=\lim_{n\to+\infty}\lambda(A_n)=0$.

3°) Montrons directement que C^c est un borélien et que $\lambda(C^c)=1$.

Tout d'abord, en posant pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'ensemble $D_n=A_n^c$ et $D=C^c$. On a alors $D=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}D_n$.

Par ailleurs, pour tout $n\in\mathbb{N}$, D_n est un borélien en tant que complémentaire d'un borélien et le sous-ensemble D est un borélien en tant que réunion dénombrable de boréliens. Calculons maintenant la longueur de chaque borélien D_n.

Il est clair que $D_1=\left]\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right[$ est un intervalle de longueur $\dfrac{1}{3}$.

De même, $D_2 = \left]\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2}\right[\cup \left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[\cup \left]\frac{7}{3^2}, \frac{8}{3^2}\right[$. Ainsi, D_2 est la réunion de D_1 et de deux intervalles disjoints de même longueur $\frac{2}{3^2}$. D'où $\lambda(D_2) = \frac{2}{3^2} + \frac{1}{3^2}$.
Supposons que D_n est réunion de $2^n - 1$ intervalles deux à deux disjoints et que $\lambda(D_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k-1}}{3^k}$.
Alors D_{n+1} est réunion de D_n et de 2^n intervalles deux à deux disjoints de même longueur $\frac{1}{3^{n+1}}$. Donc D_{n+1} est réunion de $2^{n+1} - 1$ intervalles deux à deux disjoints et

$$\begin{aligned}\lambda(D_{n+1}) &= \lambda(D_n) + \frac{2^n}{3^{n+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^{k-1}}{3^k} \\ &= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}.\end{aligned}$$

Calculons maintenant $\lambda(D)$. La suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, donc d'après la continuité croissante des mesures (proposition 2.2 (ii)), on a

$$\lambda(D) = \lim_{n\to+\infty} \lambda(D_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = 1.$$

4°) Montrons que C est en bijection avec $[0, 1]$.
Par construction, $C \setminus \{1\}$ est l'ensemble des réels de $[0, 1[$ dont le développement en base 3 ne contient que des 0 et des 2 (voir le livre de Schwartz [41, pp. 217–221]).

Soit $x \in C$ et $x \neq 1$. Comme x s'écrit $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a_i}{3^i}$ avec $a_i \in \{0, 2\}$, on lui associe alors $\phi(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\frac{a_i}{2}}{2^i}$ avec $\frac{a_i}{2} \in \{0, 1\}$. L'application ϕ ainsi définie est une bijection car tout $x \in [0, 1[$ s'écrit de manière unique en base 2 sous la forme $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{d_i}{2^i}$ avec $d_i \in \{0, 1\}$.
On la prolonge en une bijection de C dans $[0, 1]$ en posant $\phi(1) = 1$.
Ainsi C est non dénombrable car en bijection avec l'intervalle $[0, 1]$.

Exercice 2.11

Le but de cet exercice est d'exhiber un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ non Lebesgue-mesurable.

1°) Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie sur $[0, 1[$ par

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

est une relation d'équivalence sur $[0, 1[$.

2°) On note :

- $\hat{x} = \{y \in [0, 1[: x\mathcal{R}y\}$, *i.e.* la classe de x modulo $\mathcal{R}$. Notons que les classes d'équivalence forment une partition de $[0, 1[$;
- F l'ensemble obtenu en choisissant exactement un élément dans chaque classe $\hat{x}$ (cela est possible grâce à l'axiome du choix). Montrer que

$$[0, 1[\subseteq \bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} (F + q) \subseteq [-1, 2]$$

où $F + q = \{x + q : x \in F\}$.

3°) Montrer que, pour q_1 et q_2 deux éléments distincts de $\mathbb{Q} \cap [-1, 1]$, les ensembles $(F + q_1)$ et $(F + q_2)$ sont disjoints.

4°) En supposant que F est dans $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ et en considérant

$$\lambda\left(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} (F + q)\right)$$

montrer qu'on aboutit à une contradiction.

Solution

1°) Le fait que $\mathcal{R}$ soit une relation d'équivalence sur $[0, 1[$ est évident.

2°) Soit $x \in [0, 1[$ et ω_x l'unique élément de la classe $\hat{x}$ qui est dans l'ensemble F. On a donc $x - \omega_x \in \mathbb{Q}$; posons alors $q_x = x - \omega_x$. Remarquons que $q_x \in [-1, 1]$.
Considérons l'ensemble

$$D = \{q_x \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1] : q_x \text{ correspond à } x \in [0, 1[\}.$$

L'ensemble D est évidemment dénombrable et n'est pas fini. Par construction on a

$$[0, 1[\subset \bigcup_{q\in D} F_q \quad \text{où } F_q = F + q.$$

Par ailleurs,

$$D \subset [-1, 1] \quad \text{et} \quad F \subset [0, 1[$$

donc $F_q \subset [-1, 2]$ pour tout $q \in D$. Ainsi,

$$\bigcup_{q\in D} F_q \subset [-1, 2].$$

3°) Il est évident que, si q_1 et q_2 sont distincts, alors $F_{q_1} \cap F_{q_2} = \emptyset$.

4°) Si F était Lebesgue-mesurable, F_q serait Lebesgue-mesurable et $\bigcup_{q\in D} F_q$ le serait aussi en tant que réunion dénombrable. On aurait alors, d'après la σ-additivité de λ,

$$\lambda\left(\bigcup_{q\in D} F_q\right) = \sum_{q\in D} \lambda(F_q).$$

Par ailleurs, en vertu de l'invariance de λ par translation (voir exercice 2.13), on a, pour tout $q \in D$,

$$\lambda(F_q) = \lambda(F).$$

En outre, D contient une infinité d'éléments, donc

$$\sum_{q\in D} \lambda(F_q) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda(F) = 0, \\ +\infty & \text{si } \lambda(F) > 0. \end{cases}$$

D'autre part, on a vu en 2°) que

$$[0,1] \subset \bigcup_{q\in D} F_q \subset [-1,2]$$

donc

$$1 = \lambda([0,1]) \leqslant \lambda\left(\bigcup_{q\in D} F_q\right) \leqslant \lambda([-1,2]) = 3.$$

Cela est en contradiction avec les deux valeurs possibles 0 ou $+\infty$ trouvées précédemment.

Ainsi F est une partie de $\mathbb{R}$ non mesurable pour la mesure de Lebesgue ; F n'est donc pas un élément de $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ et *a fortiori* n'est pas élément de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Exercice 2.12

Le but de cet exercice est d'exhiber un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ Lebesgue-mesurable et non borélien. On va utiliser les résultats des exercices 2.10 et 2.11.

Soit C l'ensemble de Cantor défini dans l'exercice 2.10 et $f : [0,1] \to C$ l'application qui à 1 associe 1 et à tout réel x de $[0,1[$ ayant $(a_n)_{n\geqslant 1}$ pour D.B.P. (développement binaire propre) associe le réel $f(x)$ ayant $(2a_n)_{n\geqslant 1}$ pour D.T.P. (développement triadique propre). Autrement dit, à $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n}$ où $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de $\{0,1\}$ non 1-stationnaire, on associe $f(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{2a_n}{3^n}$.

1°) Montrer que f est strictement croissante et non continue.

Remarquer que $f = \phi^{-1}$ où ϕ est la bijection définie dans l'exercice 2.10 5.b.

2°) Soit A une partie de $[0,1[$ n'appartenant pas à $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ (une telle partie existe d'après l'exercice 2.11). Démontrer que $f(A)$ appartient à $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ et n'appartient pas à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (et qu'ainsi l'inclusion $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R})$ est stricte).

Solution

1°) – La stricte croissance de f résulte de la comparaison de réels à l'aide des représentations propres, c'est-à-dire si $x = 0, a_1a_2\ldots a_n\ldots$ et $y = 0, b_1b_2\ldots b_n\ldots$ alors

$$x = y \Leftrightarrow a_n = b_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

et si $x \neq y$ alors, en notant $n_1 = \min\{n \geqslant 1 : a_n \neq b_n\}$, on a

$$x < y \Leftrightarrow a_{n_1} < b_{n_1}.$$

– Si f était continue, $f([0,1[)$ serait un intervalle donc $\lambda\big(f([0,1[)\big) > 0$ ce qui contredit $0 = \lambda(C) \neq \lambda(f^{-1}([0,1[))$.

2°) Soit A une partie de $[0,1[$ n'appartenant pas $\mathcal{L}(\mathbb{R})$. Puisque $f(A) \subset C$ et C est un borélien de mesure nulle, $f(A)$ est une partie de mesure de Lebesgue nulle ou λ-négligeable ; d'où $f(A) \in \tilde{\mathcal{B}}(\mathbb{R}) = \mathcal{L}(\mathbb{R})$.

Si $f(A)$ appartenait à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ alors, puisque f est injective, $A = f^{-1}\big(f(A)\big)$ et puisque f est borélienne (car croissante, voir exercice 1.6), $A = f^{-1}\big(f(A)\big)$ appartiendrait à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et donc *a fortiori* à $\mathcal{L}(\mathbb{R})$, ce qui contredit l'hypothèse $A \notin \mathcal{L}(\mathbb{R})$.

En résumé, $f(A) \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ et $f(A) \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$: $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est strictement incluse dans $\mathcal{L}(\mathbb{R})$.

Exercice 2.13

Soient $a \in \mathbb{R}^*$ fixé et $\mathcal{T}_a = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : A + a \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ où l'on note par $A + a$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par $A + a = \{x + a : x \in A\}$.

1°) Montrer que $\mathcal{T}_a$ est une tribu sur $\mathbb{R}$.

2°) Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{T}_a$ (c'est *l'invariance de la tribu de Borel par translation*).

3°) Pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on pose $\mu(A) = \lambda(A + a)$.

3.a Montrer que μ est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

3.b En déduire que, pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\lambda(A + a) = \lambda(A)$. Cette propriété est celle d'*invariance par translation.*

Solution

1°) Montrons que $\mathcal{T}_a$ est une tribu.

– $\emptyset = \emptyset + a$ donc $\emptyset \in \mathcal{T}_a$.

– Soit $A \in \mathcal{T}_a$. Montrons que $A^c \in \mathcal{T}_a$; en effet

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{T}_a &\Leftrightarrow (A + a) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \text{par définition de } \mathcal{T}_a \\ &\Leftrightarrow (A + a)^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \text{car } \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ est une tribu} \\ &\Leftrightarrow A^c + a \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \text{car } A^c + a = (A + a)^c \text{ (voir ci-dessous)} \\ &\Leftrightarrow A^c \in \mathcal{T}_a \quad \text{par définition de } \mathcal{T}_a. \end{aligned}$$

Soit A une partie quelconque de $\mathbb{R}$; vérifions que $A^c + a = (A+a)^c$. En effet

$$\begin{aligned}(x \in (A+a)^c) \quad &\Leftrightarrow \quad (x \notin A+a) \quad \Leftrightarrow \quad (x-a \notin A)\\ &\Leftrightarrow \quad (x-a \in A^c) \quad \Leftrightarrow \quad (x \in A^c + a).\end{aligned}$$

– Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}_a$, montrons que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}_a$. Ce qui revient à montrer que $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) + a \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Or, par définition de $\mathcal{T}_a$, $(A_n + a) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n + a) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Par ailleurs, on a $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n + a) = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) + a$, car

$$\begin{aligned}x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n + a) &\Leftrightarrow \text{il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } x \in (A_n + a)\\ &\Leftrightarrow \text{il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } (x-a) \in A_n\\ &\Leftrightarrow (x-a) \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\\ &\Leftrightarrow x \in \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) + a.\end{aligned}$$

D'où $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) + a \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, soit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}_a$. Ainsi, $\mathcal{T}_a$ est une tribu.

2°) Montrons que $\mathcal{T}_a = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ par double inclusion.

- Montrons que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{T}_a$.
  Pour cela, il suffit de montrer que pour tous réels x et y tels que $x \leqslant y$, $[x,y[\in \mathcal{T}_a$ (voir remarque 1.1). En effet, si on le suppose, alors $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{[x,y[: (x,y) \in \mathbb{R}^2, x \leqslant y\}) \subset \sigma(\mathcal{T}_a) = \mathcal{T}_a$ car $\mathcal{T}_a$ est une tribu. Or, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x \leqslant y$, on a $[x,y[+a = [x+a, y+a[$. Donc $[x,y[+a \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, soit $[x,y[\in \mathcal{T}_a$.
- Montrons que $\mathcal{T}_a \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
  Soit $A \in \mathcal{T}_a$, alors $(A+a) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Comme $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{T}_{-a}$ (il suffit de remplacer a par $-a$ dans ce qui précède, on a $(A+a) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{T}_{-a}$ entraîne que $(A+a-a) = A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ce qui prouve que $\mathcal{T}_a \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
  En conclusion, $\mathcal{T}_a = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

3°) 3.a Montrons que μ est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

- $\emptyset = \emptyset + a$ donc $\mu(\emptyset) = \lambda(\emptyset) = 0$.
- Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de boréliens deux à deux disjoints. Puisque $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) + a = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n + a)$ et les $(A_n + a)_{n\in\mathbb{N}}$ sont également des boréliens deux à deux disjoints,

on a alors

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &= \lambda\left(\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) + a\right)\\ &= \lambda\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n + a)\right)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda(A_n + a)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n).\end{aligned}$$

Conclusion μ est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

3.b On a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \leqslant y$,

$$\mu([x,y[) = \lambda([x+a, y+a[) = \lambda([x,y[).$$

Comme λ et μ coïncident sur le demi-anneau des intervalles, le théorème de prolongement (théorème 2.4) permet de conclure, puisque λ est σ-finie.

2.7 EXERCICES SUR LES MESURES DE LEBESGUE-STIELJES

Exercice 2.14 (Complément de la définition 2.3)

Soit μ une mesure borélienne sur $\mathbb{R}$ *i.e. finie sur tout intervalle borné* de $\mathbb{R}$.

1°) On pose, pour tout réel x,

$$F_0(x) = \begin{cases}\mu([0,x[) & \text{si } x \geqslant 0,\\ -\mu([x,0[) & \text{si } x \leqslant 0.\end{cases}$$

1.a Vérifier que F_0 est une fonction de répartition de la mesure μ.

1.b Vérifier que $F_0(0) = 0$ et que si F est une autre fonction de répartition de μ alors $F = F(0) + F_0$.

2°) Soit F une fonction de répartition de la mesure μ.

2.a Vérifier que F est croissante et continue à gauche.

2.b Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x^+) - F(x) = \mu(\{x\})$$

où $F(x^+)$ désigne la limite à droite de F au point x (qui existe puisque F est croissante).

2.c Montrer que μ est diffuse si et seulement si F est continue sur $\mathbb{R}$.

2.d Montrer que μ est finie si et seulement si F est bornée.

Solution

1°) 1.a Montrons que F_0 est une fonction de répartition de μ.

En vertu des propriétés de la mesure μ, on a, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leqslant b$,

$$F_0(b) - F_0(a) = \begin{cases} -\mu([b,0[) + \mu([a,0[) = \mu([a,0[\setminus[b,0[) = \mu([a,b[) & \text{si } a \leqslant b \leqslant 0\,, \\ -\mu([0,b[) + \mu([a,0[) = \mu([a,0[\cup[0,b[) = \mu([a,b[) & \text{si } a \leqslant 0 < b\,, \\ \mu([0,b[) - \mu([a,0[) = \mu([0,b[\setminus[0,a[) = \mu([a,b[) & \text{si } 0 < a < b\,. \end{cases}$$

1.b Par définition, $F_0(0) = \mu([0,0[) = \mu(\emptyset) = 0$. Donc F_0 est la fonction de répartition de μ qui s'annule en 0. Par ailleurs, si F est une autre fonction de répartition de μ, alors, si $x \leqslant 0$, on a $F(0) - F(x) = \mu([x,0[)$ donc $F(x) = F(0) - \mu([x,0[) = F(0)+F_0(x)$ et si $x \geqslant 0$, on a $F(x)-F(0) = \mu([0,x[)$, donc $F(x) = F(0)+\mu([0,x[) = F(0) + F_0(x)$; ainsi $F = F(0) + F_0$.

Inversement, on montre sans peine que pour tout réel C, la fonction $F = F_0 + C$, vérifie bien, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$F(b) - F(a) = \mu([a,b[)\,.$$

2°) Soit F une fonction de répartition quelconque de μ.

2.a Vérifions que F est croissante et continue à gauche.

- Soient $a, b \in \mathbb{R}^2$ tels que $a \leqslant b$. Par définition d'une fonction de répartition, $F(b) - F(a) = \mu([a,b[) \geqslant 0$, donc F est croissante.
- Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante qui converge vers x, alors $([x_n, x[)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de boréliens de mesures finies et d'intersection $[x,x[= \emptyset$. Donc, en vertu de la continuité décroissante de la mesure μ (proposition 2.2), on a

$$\lim_{n\to+\infty} \big(F(x) - F(x_n)\big) = \lim_{n\to+\infty} \mu([x_n, x[) = 0\,.$$

D'où, $\lim\limits_{n\to+\infty} F(x_n) = F(x)$. Ainsi, F est continue à gauche sur $\mathbb{R}$.

2.b Vérifions que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mu(\{x\}) = F(x^+) - F(x)$.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante qui converge vers x, alors $([x, x_n[)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de boréliens de mesure finie et d'intersection $[x,x] = \{x\}$. Donc, en vertu de la continuité décroissante de μ (proposition 2.2), on a

$$\lim_{n\to+\infty} \mu([x_n, x[) = \lim_{n\to+\infty} \big(F(x_n) - F(x)\big) = \lim_{n\to+\infty} F(x_n) - F(x)\,,$$

soit

$$\mu(\{x\}) = F(x^+) - F(x)\,.$$

2.c Par définition, μ est diffuse si et seulement si $\mu(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc, d'après la question précédente, μ est diffuse si et seulement si, $F(x^+) - F(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire que F est continue à droite sur $\mathbb{R}$. Or F est continue à gauche sur $\mathbb{R}$ par 2.b, μ est diffuse si et seulement si F est continue sur $\mathbb{R}$.

2.d Vérifions que μ est finie si et seulement si F est bornée.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante qui tend vers $+\infty$, alors $([-x_n, x_n[)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de boréliens de réunion $\mathbb{R}$. Donc, en vertu de la continuité croissante de μ (proposition 2.2), on a

$$\mu(\mathbb{R}) = \lim_{n\to+\infty} \mu([-x_n, x_n[) = \lim_{n\to+\infty} \big(F(x_n) - F(-x_n)\big)\,.$$

Par ailleurs, puisque F est croissante, elle admet une limite en $+\infty$ et une limite en $-\infty$. D'où

$$\mu(\mathbb{R}) = \lim_{n\to+\infty} F(x_n) - \lim_{n\to+\infty} F(-x_n)\,.$$

Exercice 2.15

Cet exercice utilise les résultats de l'exercice précédent 2.14.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit F_α la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F_\alpha(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{si } x \leqslant 0\,, \\ \alpha(x-1) + 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1°) Vérifier que si $\alpha \in [0,1]$, alors F_α est une fonction de répartition.

On note désormais, pour tout $\alpha \in [0,1]$, μ_α la mesure de Lebesgue-Stieljes dont F_α est une fonction de répartition.

2°) 2.a Pour quelle(s) valeur(s) de α la mesure μ_α est-elle finie ? Calculer dans ce(s) cas $\mu_\alpha(\mathbb{R})$.

2.b Pour quelle(s) valeur(s) de α la mesure μ_α n'est-elle pas diffuse ? Calculer dans ce(s) cas $\mu_\alpha(\{0\})$.

3°) On prend dans cette question $\alpha = \dfrac{1}{2}$. Calculer $\mu_{\frac{1}{2}}([a,b[)$ et $\mu_{\frac{1}{2}}([a,b])$.

On distinguera les cas : $a < b < 0$, $a < b = 0$, $a < 0 < b$, $0 = a < b$ et $0 < a < b$.

4°) Dans cette question, on prend $\alpha = 1$ et on désigne par ν l'image de la mesure de Lebesgue λ par F_1 (voir exercice 2.2 pour la définition de la mesure image).

Calculer $\nu(]-1,0])$ et en déduire que ν n'est pas une mesure borélienne.

Solution

1°) Rappelons qu'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est une fonction de répartition si elle est croissante et continue à gauche.

F_α est croissante si et seulement si ($\alpha \geqslant 0$ et $1 - \alpha \geqslant 0$) donc si et seulement si $\alpha \in [0,1]$.

Pour tout $\alpha \geqslant 0$, F_α est continue sur $\mathbb{R}^*$ et admet une limite à gauche ainsi qu'une limite à droite au point 0 ; il reste donc à étudier la continuité à gauche en 0.

- Si $\alpha = 1$, F_α est continue en 0 donc sur $\mathbb{R}$.

– Si $\alpha = 0$, F_α est continue à gauche en 0 et $\lim_{x \to 0^+} F_\alpha(x) = 1$.

– Si $\alpha \in]0,1[$, F_α est continue à gauche en 0 et $\lim_{x \to 0^+} F_\alpha(x) = 1 - \alpha$.

Ainsi, F_α est une fonction de répartition si et seulement si $\alpha \in [0,1]$.

2°) 2.a D'après l'exercice précèdent 2.14, $\mu_\alpha(\mathbb{R})$ est finie si et seulement si F_α est bornée donc si et seulement si $\alpha = 0$, et dans ce cas $\mu_0(\mathbb{R}) = \lim_{x \to +\infty} F_0(x) - \lim_{x \to -\infty} F_0(x) = 2$.

2.b Pour tout $\alpha \in [0,1[$, la fonction F_α est discontinue au point 0. Donc la mesure μ_α n'est pas diffuse pour tout $\alpha \in [0,1[$ et dans ce cas $\mu_\alpha(\{0\}) = F_\alpha(0^+) - F_\alpha(0) = 1 - \alpha$.

3°) Dans cette question $\alpha = \dfrac{1}{2}$. Calculons $\mu_{\frac{1}{2}}([a,b[)$ et $\mu_{\frac{1}{2}}([a,b])$ pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

– Si $a < b < 0$ ou $0 < a < b$ ou $a < 0 < b$, alors

$$\mu_{\frac{1}{2}}([a,b[) = F_{\frac{1}{2}}(b) - F_{\frac{1}{2}}(a) = \begin{cases} e^b - e^a & \text{si } a < b < 0, \\ \dfrac{b-a}{2} & \text{si } 0 < a < b, \\ \dfrac{b+3}{2} - e^a & \text{si } a < 0 < b, \end{cases}$$

de plus, puisque $F_{\frac{1}{2}}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$, on a

$$\mu_{\frac{1}{2}}([a,b]) = \mu_{\frac{1}{2}}(]a,b[) = \mu_{\frac{1}{2}}(]a,b]) = \mu_{\frac{1}{2}}([a,b[)\,.$$

– Si $a < b = 0$, alors puisque $F_{\frac{1}{2}}$ est continue sur $]-\infty,0[$,

$$\mu_{\frac{1}{2}}(]a,0[) = \mu_{\frac{1}{2}}([a,0[) = F_{\frac{1}{2}}(0) - F_{\frac{1}{2}}(a) = 1 - e^a\,,$$

et en vertu de l'additivité de μ (proposition 2.1 et aussi exercice 2.4), on a

$$\mu_{\frac{1}{2}}(]a,0]) = \mu_{\frac{1}{2}}([a,0]) = \mu_{\frac{1}{2}}([a,0[) + \mu_{\frac{1}{2}}(\{0\}) = \frac{3}{2} - e^a\,.$$

– Si $0 = a < b$, alors puisque $F_{\frac{1}{2}}$ est continue sur $]0,+\infty[$

$$\mu_{\frac{1}{2}}([0,b]) = \mu_{\frac{1}{2}}([0,b[) = F_{\frac{1}{2}}(b) - F_{\frac{1}{2}}(0) = \frac{b+1}{2}\,,$$

et en vertu de l'additivité de μ, on a

$$\mu_{\frac{1}{2}}(]0,b]) = \mu_{\frac{1}{2}}(]0,b[) = \mu_{\frac{1}{2}}([0,b[) - \mu_{\frac{1}{2}}(\{0\}) = \frac{b+1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{b}{2}\,.$$

4°) Soit $\alpha = 1$ et notons ν la mesure image de λ par F_1.
La mesure ν est borélienne si elle est finie sur tout intervalle borné. Or,

$$\nu(]-1,0]) = F_1(\lambda)(]-1,0]) = \lambda\left(F_1^{-1}(]-1,0])\right) = \lambda(]-\infty,0]) = +\infty\,,$$

et la mesure ν n'est pas borélienne.

Chapitre 3

Intégrale de Lebesgue par rapport à une mesure positive

RAPPELS DE COURS

Dans tout ce chapitre, on désigne par :

- E un ensemble non vide et $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré ;
- $\mathcal{E}^+(E,\mathcal{T})$ (ou tout simplement $\mathcal{E}^+$ quand il n'y a pas de risque de confusion) l'ensemble des applications de E dans $[0,+\infty[$ $(\mathcal{T}, \mathcal{B}([0,+\infty[))$-mesurables ;
- $\mathcal{M}^+(E,\mathcal{T})$ (ou tout simplement $\mathcal{M}^+$ quand il n'y a pas de risque de confusion) l'ensemble des applications de E dans $[0,+\infty]$ $(\mathcal{T}, \mathcal{B}([0,+\infty]))$-mesurables ;
- $\mathcal{M}(E,\mathcal{T})$ (ou tout simplement $\mathcal{M}$ quand il n'y a pas de risque de confusion) l'ensemble des applications de E dans $\bar{\mathbb{R}}$ $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$-mesurables.

D'autre part, on utilise les conventions suivantes :

- $0 \times \mu(A) = 0$ si $\mu(A) = +\infty$;
- $0 \times f(x) = 0$ si $f(x) = \pm\infty$;
- $0 \times a = 0$ si $a = \pm\infty$.

3.1 FONCTIONS ÉTAGÉES

Les fonctions étagées jouent, dans la construction de l'intégrale de Lebesgue, le rôle réservé aux fonctions en escalier dans la théorie de l'intégrale de Riemann.

Définition 3.1 (Fonction étagée) *Soient $(E,\mathcal{T})$ un espace mesurable et f une application de E dans $\mathbb{R}$ $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable. L'application f est dite* étagée *si $f(E)$ est un sous-ensemble* fini *de $\mathbb{R}$.*

Définition 3.2 (Représentation canonique d'une fonction étagée) *Soit f une fonction étagée. Désignons par $a_1, \ldots, a_m$ les éléments de $f(E)$, la suite $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ étant strictement croissante, et posons pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$*

$$A_i = f^{-1}(\{a_i\}) .$$

Les sous-ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_m$ de E sont non vides, mesurables, deux à deux disjoints et de réunion E. Ainsi, f s'écrit sous la forme

$$f = \sum_{i=1}^{m} a_i \mathbb{I}_{A_i} . \tag{3.1}$$

Inversement, étant données une suite strictement croissante $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ d'éléments de $\mathbb{R}$ et une suite $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ de sous-ensembles de E, mesurables, non vides, deux à deux disjoints et dont la réunion est E, il existe une application étagée f de E dans $\mathbb{R}$ et une seule telle que

$$f = \sum_{i=1}^{m} a_i \mathbb{I}_{A_i} .$$

Nous dirons que le couple $\big((a_1, \ldots, a_m), (A_1, \ldots, A_m)\big)$ est le couple canonique *de f et que (3.1) est la* représentation canonique *de f.*

Exemple. Soit $A \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$. La fonction $u = \mathbb{I}_A$ est étagée et a pour représentation canonique $u = 0 \times \mathbb{I}_{A^c} + 1 \times \mathbb{I}_A$.

Remarque 3.1 Si $(E, \mathcal{T}) = \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$ et si A_i est un intervalle pour tout i, on retrouve les fonctions en escalier.

Proposition 3.1 (Opérations sur les fonction étagées) *Soient f et g deux fonctions étagées, α et β deux réels. Alors, $\alpha f + \beta g$, fg, $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ sont des fonctions étagées.*

3.2 INTÉGRALE DES FONCTIONS MESURABLES POSITIVES

Définition 3.3 (Intégrale d'une fonction étagée positive) *Soit $u \in \mathcal{E}^+$ et $\sum_{i=1}^{N} a_i \mathbb{I}_{A_i}$ sa représentation canonique. On appelle* intégrale de u sur E par rapport à la mesure μ *et on note $\int_E u \, d\mu$ ou $\int_E u(x) \, d\mu(x)$, la somme*

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \mu(A_i) .$$

En vertu de la convention ci-dessus ($0 \times \mu(A) = 0$ si $\mu(A) = +\infty$), la somme $\sum_{i=1}^{m} a_i \mu(A_i)$ a toujours un sens dans $[0, +\infty]$ puisque chaque terme $a_i \mu(A_i)$ appartient à $[0, +\infty]$.

Exemple. On prend $(E, \mathcal{T}) = \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$ et $u = \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$. Il est clair que $u \in \mathcal{E}^+$.

Pour $\mu = \lambda$, on a $\int_{\mathbb{R}} u \, d\lambda = \lambda(\mathbb{R}) = +\infty$.

Pour $\mu = \delta_0$, on a $\int_{\mathbb{R}} u \, d\delta_0 = \delta_0(\mathbb{R}) = 1$.

Intégration des fonctions mesurables positives

Le théorème suivant joue un rôle essentiel dans la théorie de l'intégration de Lebesgue.

Théorème 3.1 *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace mesurable et soit $f : E \to [0, +\infty]$ une application $\big(\mathcal{T}, \mathcal{B}([0, +\infty])\big)$-mesurable. Alors il existe une suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ de fonctions étagées telle que*

(i) $0 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant \cdots \leqslant u_n \leqslant \cdots \leqslant f$;

(ii) *pour tout $x \in E$, $\lim_{n \to +\infty} u_n(x) = f(x)$.*

En effet, soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé ; posons pour $1 \leqslant i \leqslant n2^n$

$$E_{n,i} = \left\{ x \in E : \frac{i-1}{2^n} \leqslant f(x) < \frac{i}{2^n} \right\} ,$$
$$F_n = \{ x \in E : f(x) \geqslant n \} .$$

La suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ définie sur E par

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^{n2^n} \left(\frac{i-1}{2^n} \mathbb{I}_{E_{n,i}}(x) \right) + n \mathbb{I}_{F_n}(x)$$

convient et est dite *adaptée.*

Remarque 3.2 Si f est bornée, la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ converge uniformément sur E vers f.

Définition 3.4 (Intégrale d'une fonction mesurable positive) *Soit $f \in \mathcal{M}^+$; on appelle* intégrale de f sur E par rapport à μ *et on note $\int_E f \, d\mu$ ou $\int_E f(x) \, d\mu(x)$, l'élément de $[0, +\infty]$ suivant*

$$\sup \left\{ \int_E u \, d\mu : u \in \mathcal{E}^+, u \leqslant f \right\} .$$

Autrement dit,

$$\int_E f \, d\mu = \sup \left\{ \int_E u \, d\mu : u \in \mathcal{E}^+, u \leqslant f \right\} .$$

Plus généralement, si $A \in \mathcal{T}$, on pose

$$\int_A f \, d\mu = \int_E f \mathbb{I}_A \, d\mu .$$

Attention : Bien distinguer le fait que $\int_E f\, d\mu$ a toujours un sens dans $[0, +\infty]$ et le fait que $\int_E f\, d\mu$ est finie, c'est-à-dire $\int_E f\, d\mu \in [0, +\infty[$. D'où la définition suivante.

Définition 3.5 *Soit $f \in \mathcal{M}^+$. On dit que f est* μ-intégrable *sur E (ou simplement* intégrable *quand il n'y a pas de risque de confusion) si l'intégrale $\int_E f\, d\mu$ est* finie.

Exemple. La fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{R}}$ est δ_0-intégrable sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas λ-intégrable sur $\mathbb{R}$.

Propriétés de l'intégrale de fonctions positives

Proposition 3.2 *Soit $(f, g) \in \mathcal{M}^+ \times \mathcal{M}^+$ et soit $\alpha \in [0, +\infty]$. Alors*

(i) $\int_E (\alpha f)\, d\mu = \alpha \int_E f\, d\mu$ (homogénéité positive) *;*

(ii) $\int_E (f + g)\, d\mu = \int_E f\, d\mu + \int_E g\, d\mu$ (additivité) *;*

(iii) si $f \leqslant g$ alors $\int_E f\, d\mu \leqslant \int_E g\, d\mu$ (croissance de l'intégrale) *;*

(iv) $f = 0$ μ-p.p. si et seulement si $\int_E f\, d\mu = 0$;

(v) si $f = g$ μ-p.p. alors $\int_E f\, d\mu = \int_E g\, d\mu$;

(vi) si $\int_E f\, d\mu < +\infty$ alors $f < +\infty$ μ-p.p. ; autrement dit, si f est μ-intégrable sur E alors f est finie μ-p.p.

Remarque 3.3

1°) On voit bien dans la proposition précédente le rôle important des ensembles négligeables annoncé dans le chapitre 2.

2°) La réciproque de (vi) est fausse. Par exemple, la fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{R}}$ est finie partout mais n'est pas λ-intégrable.

3°) En fait, l'additivité de l'intégrale est une conséquence du théorème de la convergence monotone (théorème 3.2) ci-dessous.

Principaux théorèmes d'intégration des fonctions positives

Le développement de la théorie de l'intégration sur $\mathcal{M}^+$ repose sur un important théorème de convergence des intégrales, propre aux suites croissantes d'éléments de $\mathcal{M}^+$, qui permet sous un minimum d'hypothèses de commuter « intégration » et « passage à la limite ».

Théorème 3.2 (de convergence monotone ou de Beppo-Levi) *Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite* croissante *d'éléments de $\mathcal{M}^+$* i.e.

$$f_0 \leqslant f_1 \leqslant \cdots \leqslant f_n \leqslant \cdots$$

Alors

$$\int_E \lim_{n\to+\infty} f_n\, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n\, d\mu\, .$$

En l'absence de l'hypothèse de croissance sur la suite de fonctions de $\mathcal{M}^+$, on a tout de même le résultat partiel suivant

Théorème 3.3 (lemme de Fatou) *Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite quelconque d'éléments de $\mathcal{M}^+$. Alors on a*

$$\int_E \liminf_{n\to+\infty} f_n\, d\mu \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \int_E f_n\, d\mu\, .$$

Les séries de fonctions sont d'utilisation courante, il est utile de donner l'expression du théorème de la convergence monotone dans ce cas.

Théorème 3.4 (intégration d'une série de fonctions de $\mathcal{M}^+$) *Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}^+$. Alors*

$$\int_E \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_E f_n\, d\mu\, .$$

3.3 INTÉGRATION DES FONCTIONS RÉELLES MESURABLES DE SIGNE QUELCONQUE

Étant donnée une fonction $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$, on définit :

- la fonction f^+ de E dans $[0, +\infty]$ par $f^+(x) = \max(f(x), 0)$;
- la fonction f^- de E dans $[0, +\infty]$ par $f^-(x) = -\min(f(x), 0)$.

Ces fonctions vérifient $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$ et si $f \in \mathcal{M}$ alors $f^+ \in \mathcal{M}^+$ et $f^- \in \mathcal{M}^+$.

Définition 3.6 *Soit $f \in \mathcal{M}$. On dit que f est* μ-intégrable *sur E si f^+ et f^- sont μ-intégrables sur E. Dans ce cas, on appelle* intégrale de f par rapport à la mesure μ, *et on note $\int_E f\, d\mu$, le réel $\int_E f^+\, d\mu - \int_E f^-\, d\mu$. Autrement dit,*

$$\int_E f\, d\mu = \int_E f^+\, d\mu - \int_E f^-\, d\mu\, .$$

Propriétés des fonctions μ-intégrables

Proposition 3.3 *Soit $f \in \mathcal{M}$. Alors f est μ-intégrable sur E si et seulement si $|f|$ est μ-intégrable sur E et on a*

$$\left|\int_E f\,d\mu\right| \leqslant \int_E |f|\,d\mu\,.$$

L'inégalité devient égalité si f est de signe constant μ-presque partout.

Proposition 3.4 *Soit f une fonction μ-intégrable. Alors*

(i) f est finie μ-presque partout ;

(ii) s'il existe $g \in \mathcal{M}$ telle que $f = g$ μ-p.p, alors g est μ-intégrable et

$$\int_E f\,d\mu = \int_E g\,d\mu\,.$$

Remarque 3.4 La proposition précédente montre qu'étant donnée une application f μ-intégrable, l'application $f\mathbb{1}_{f^{-1}(\mathbb{R})}$ lui est μ-presque partout égale ; elle est donc aussi μ-intégrable avec même valeur d'intégrale et elle est de plus à *valeurs finies* (c'est-à-dire à valeurs dans $\mathbb{R}$).

Se restreindre à de telles fonctions μ-intégrables permet d'éviter toute difficulté pour définir leur somme et leur différence.

Notation : On note $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,\mathcal{T},\mu)$ (ou $\mathcal{L}^1(\mu)$ s'il n'y a pas de risque de confusion) le sous-ensemble de $\mathcal{M}$ des fonctions μ-intégrables sur E à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$.

Propriétés de $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,\mathcal{T},\mu)$

Les propriétés algébriques et topologiques de $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,\mathcal{T},\mu)$ sont résumés dans les deux théorèmes suivants.

Théorème 3.5

(i) $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,\mathcal{T},\mu)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

(ii) L'application de $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,\mathcal{T},\mu)$ dans $\mathbb{R}$ qui à f associe $\int_E f\,d\mu$ est une forme linéaire positive *(i.e. $f \geqslant 0$ implique $\int_E f\,d\mu \geqslant 0$), et donc* croissante *i.e. ($f \geqslant g$ implique $\int_E f\,d\mu \geqslant \int_E g\,d\mu$).*

Théorème 3.6

(i) L'application de $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,\mathcal{T},\mu)$ dans $\mathbb{R}^+$ qui à f associe $\int_E |f|\,d\mu$ est une semi-norme qu'on note $\|f\|_{\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,\mathcal{T},\mu)}$ (ou tout simplement $\|f\|_1$ quand il n'y a pas de risque de confusion).

(ii) $\left(\mathcal{L}^1(E,\mathcal{T},\mu), \|\cdot\|_1\right)$ est un espace vectoriel semi-normé complet, *c'est-à-dire que toute suite de Cauchy pour la semi-norme $\|\cdot\|_1$ converge pour cette semi-norme vers un élément de $\mathcal{L}^1(\mu)$.*

Terminologie : La semi-norme $\|\cdot\|_1$ est appelée *semi-norme de la convergence en moyenne.*

3.4 INTÉGRATION DES FONCTIONS MESURABLES COMPLEXES

Une fonction f définie sur E à valeurs complexes s'écrit $f = u + iv$ où u et v sont à valeurs réelles. Rappelons que f est $(\mathcal{T},\mathcal{B}(\mathbb{C}))$-mesurable si et seulement si u et v sont $(\mathcal{T},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurables. De plus, les inégalités

$$|u| \leqslant |f|\,,\ |v| \leqslant |f| \ \text{ et } \ |f| \leqslant |u| + |v|$$

montrent que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f est mesurable et $\int_E |f|\,d\mu < +\infty$;

(ii) u et v sont μ-intégrables et $\int_E |u|\,d\mu < +\infty$ et $\int_E |v|\,d\mu < +\infty$.

Lorsque l'une de ces conditions est satisfaite, la fonction f est dite μ-intégrable et l'on pose

$$\int_E f\,d\mu = \int_E u\,d\mu + i\int_E v\,d\mu\,.$$

On note

$$\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(E,\mathcal{T},\mu) = \left\{f : E \to \mathbb{C} : f \ \text{ est mesurable et } \int_E |f|\,d\mu < +\infty\right\}$$

ou $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ quand il n'y a pas de risque de confusion. C'est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et l'application de $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par

$$f \mapsto \int_E |f|\,d\mu$$

est une semi-norme.

3.5 THÉORÈME DE LA CONVERGENCE DOMINÉE DE LEBESGUE

Dans ce paragraphe, on va introduire le théorème essentiel de Lebesgue et le plus célèbre de toute la théorie de l'intégration. Il permet de résoudre, sous des conditions très générales, le problème de passage à la limite sous le signe intégral, et de simplifier l'étude des fonctions définies par des intégrales.

Théorème 3.7 (Théorème de convergence dominée) *Soit $(E,\mathcal{T},\mu)$ un espace mesuré et soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions complexes $(\mathcal{T},\mathcal{B}(\bar{\mathbb{C}}))$-mesurables telle que*

(i) pour μ-presque tout $x \in E$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$,

(ii) il existe une fonction positive g, μ-intégrable sur E et telle que

$$|f_n(x)| \leqslant g(x)\ \mu\text{-p.p.}$$

Alors la fonction f (définie μ-p.p.) est μ-intégrable et on a

$$\lim_{n\to+\infty}\int_E |f_n - f|\,d\mu = 0 \quad et \quad \lim_{n\to+\infty}\int_E f_n\,d\mu = \int_E f\,d\mu\,.$$

Remarque 3.5 En fait, si $\lim_{n\to+\infty}\int_E |f_n - f|\,d\mu = 0$ alors $\lim_{n\to+\infty}\int_E f_n\,d\mu = \int_E f\,d\mu$.

La puissance et la simplicité d'utilisation du théorème de la convergence dominée (théorème 3.7) sont particulièrement mises en évidence dans le théorème d'interversion des symboles de « somme » et « intégrale » pour l'intégration des fonctions μ-intégrables.

Théorème 3.8 (Intégration d'une série de fonctions intégrables) *Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions μ-intégrables sur E telles que la série numérique*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_E |f_n|\,d\mu$$

converge. Alors la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge absolument pour μ-presque tout $x \in E$. De plus, la fonction f (définie μ-p.p.) par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est μ-intégrable sur E et on a

$$\int_E f\,d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_E f_n\,d\mu\,.$$

3.6 FONCTIONS DÉFINIES PAR DES INTÉGRALES

Le théorème de la convergence dominée (théorème 3.7) a, entre autres, une application importante dans l'étude de la continuité et la dérivabilité des fonctions définies par des intégrales.

Continuité

Soit X un espace métrique et soit

$$\begin{array}{rcl} f : X \times E & \to & \mathbb{C} \\ (x,t) & \mapsto & f(x,t)\,. \end{array}$$

Théorème 3.9 (Continuité sous le signe intégral) *Soit $x_0 \in X$. On suppose que*

(i) pour tout $x \in E$, l'application $t \mapsto f(x,t)$ est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$-mesurable ;

(ii) pour μ-presque tout $t \in E$, l'application $x \mapsto f(x,t)$ est continue au point x_0 ;

(iii) il existe un voisinage V de x_0 inclus dans X et une fonction g μ-intégrable tels que pour tout $x \in V$, on a, pour μ-presque tout $t \in E$,

$$|f(x,t)| \leqslant g(t)\,.$$

Alors la fonction $F : x \mapsto F(x) = \int_E f(x,t)\,d\mu(t)$ est continue en x_0.

Dérivabilité

Théorème 3.10 (Dérivabilité sous le signe intégral) *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times E \to \mathbb{C}$. On suppose que*

(i) pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$-mesurable et il existe $x_0 \in I$ tel que $t \mapsto f(x_0,t)$ est μ-intégrable sur E ;

(ii) pour tout $t \in E$, $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable sur I ;

(iii) pour tout compact K inclus dans I, il existe une fonction g_K μ-intégrable telle que pour tout $x \in K$, on a, pour μ-presque tout $t \in E$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant g_K(t)\,.$$

Alors

1°) pour tout $x \in I$, les fonctions

$$t \mapsto f(x,t) \quad et \quad t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$$

sont μ-intégrables sur E ;

2°) la fonction $x \mapsto F(x) = \int_E f(t,x)\,d\mu(x)$ est dérivable sur I et on a, pour tout $x \in I$,

$$F'(x) = \int_E \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,d\mu(x)\,.$$

Remarque 3.6 Si pour tout $t \in E$, $x \mapsto f(t,x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I alors, en vertu des théorèmes 3.9 et 3.10, F est de classe $\mathcal{C}^1$.

Commentaire : Les théorèmes 3.9 et 3.10 sont applicables quel que soit l'espace mesuré $(E, \mathcal{T}, \mu)$ sur lequel on intègre, et c'est ce qui fait leur force. On peut ainsi les appliquer à $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et retrouver des conditions suffisantes pour la continuité et la dérivabilité des intégrales de Riemann généralisées de fonctions dépendant d'un paramètre réel, et à $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_d)$ où μ_d est la mesure de dénombrement et retrouver les conditions suffisantes pour la continuité et la dérivabilité des séries de fonctions.

Théorème 3.11 (Holomorphie d'une fonction définie par une intégrale) *Soit V un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit la fonction*

$$\begin{array}{rcl} f : V \times E & \to & \mathbb{C} \\ (z,x) & \mapsto & f(z,x)\,. \end{array}$$

On suppose que

– pour tout $z \in V$, la fonction $x \mapsto f(z,x)$ est mesurable ;

– pour tout $x \in E$, la fonction $z \mapsto f(z,x)$ est holomorphe sur V ;

– *pour tout compact K inclus dans V, il existe une fonction μ-intégrable g_K telle que pour tout $z \in K$, on a, pour μ-presque tout $x \in E$,*

$$|f(z,x)| \leqslant g_K(x).$$

Alors la fonction $z \mapsto F(z) = \int_E f(z,x)\,d\mu(x)$ *est holomorphe sur V et on a, pour tout* $p \in \mathbb{N}$,

$$F^{(p)}(z) = \int_E \frac{\partial^p f}{\partial z^p}(z,x)\,d\mu(x).$$

EXERCICES

3.7 SUR LA DÉFINITION DE L'INTÉGRALE

Exercice 3.1

Soient E un ensemble non vide, $a \in E$ et $\mathcal{T} = \mathcal{P}(E)$. Soit $f \in \mathcal{M}(E,\mathcal{T})$, établir que $\int_E f\,d\delta_a = f(a)$.

Solution

– Si f est une fonction indicatrice *i.e.* $f = \mathbb{1}_A$ où $A \in \mathcal{T}$, on a

$$\int_E f\,d\delta_a = \int_E \mathbb{1}_A\,d\delta_a = \delta_a(A) = \mathbb{1}_A(a) = f(a).$$

Donc le résultat est vrai pour les fonctions indicatrices.

– Si f est une fonction étagée *i.e.* $f = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i}$ (où $a_i \geqslant 0$ et $A_i \in \mathcal{T}$, pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$ et $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$), on a

$$\int_E f\,d\delta_a = \int_E \left(\sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i}\right) d\delta_a = \sum_{i=1}^n a_i \int_E \mathbb{1}_{A_i}\,d\delta_a = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i}(a) = f(a).$$

Donc le résultat est vrai pour les fonctions étagées.

– Si f est mesurable positive, alors il existe une suite croissante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions étagées positives qui converge simplement vers f d'après le théorème d'approximation (théorème 3.1). Le théorème de la convergence monotone (théorème 3.2) et l'étape précédente impliquent alors que

$$\int_E f\,d\delta_a = \int_E \lim_{n\to+\infty} u_n\,d\delta_a = \lim_{n\to+\infty}\int_E u_n\,d\delta_a = \lim_{n\to+\infty} u_n(a) = f(a).$$

– Soit f une fonction mesurable de signe quelconque. La fonction $f \in \mathcal{L}^1(\delta_a)$ si et seulement si $\int_E |f|\,d\delta_a < +\infty$, ce qui s'écrit $|f(a)| < +\infty$. Dans ce cas, on a

$$\int_E f\,d\delta_a = \int_E f^+\,d\delta_a - \int f^-\,d\delta_a = f^+(a) - f^-(a) = f(a).$$

Exercice 3.2

Soient μ_1 et μ_2 deux mesures sur l'espace mesurable $(E,\mathcal{T})$. Rappelons qu'on a montré à l'exercice 2.3 que $\mu_1+\mu_2$ est une mesure sur $(E,\mathcal{T})$.

1°) Montrer que si f est une fonction mesurable positive, on a

$$\int_E f\,d(\mu_1+\mu_2) = \int_E f\,d\mu_1 + \int_E f\,d\mu_2.$$

2°) Que dire pour une fonction mesurable de signe quelconque?

Solution

1°) Nous allons démontrer le résultat en trois étapes.

– Si f est une fonction indicatrice *i.e.* $f = \mathbb{1}_A$ avec $A \in \mathcal{T}$. On a

$$\int_E \mathbb{1}_A\,d(\mu_1+\mu_2) = (\mu_1+\mu_2)(A) = \mu_1(A)+\mu_2(A) = \int_E \mathbb{1}_A\,d\mu_1 + \int_E \mathbb{1}_A\,d\mu_2.$$

Donc le résultat est vrai pour les fonctions indicatrices.

– Si f est une fonction étagée positive *i.e.* $f = \sum_{i=1}^n a_i\mathbb{1}_{A_i}$ (où $a_i \geqslant 0$ et $A_i \in \mathcal{T}$ et $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$ alors

$$\begin{aligned}\int_E \left(\sum_{i=1}^n a_i\mathbb{1}_{A_i}\right) d(\mu_1+\mu_2) &= \sum_{i=1}^n a_i \int_E \mathbb{1}_{A_i}\,d(\mu_1+\mu_2)\\ &= \sum_{i=1}^n a_i \left(\int_E \mathbb{1}_{A_i}\,d\mu_1 + \int_E \mathbb{1}_{A_i}\,d\mu_2\right)\\ &= \sum_{i=1}^n a_i \int_E \mathbb{1}_{A_i}\,d\mu_1 + \sum_{i=1}^n a_i \int_E \mathbb{1}_{A_i}\,d\mu_2\\ &= \int_E \left(\sum_{i=1}^n a_i\mathbb{1}_{A_i}\right) d\mu_1 + \int_E \left(\sum_{i=1}^n a_i\mathbb{1}_{A_i}\right) d\mu_2.\end{aligned}$$

Le résultat subsiste donc pour les fonctions étagées.

– Si f est une fonction mesurable positive, alors il existe une suite croissante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions étagées positives qui converge simplement vers f d'après le théorème d'approximation (théorème 3.1). Donc le théorème de la convergence monotone (théorème 3.2) ainsi que l'étape précédente entraînent

$$\begin{aligned}\int_E f\,d(\mu_1+\mu_2) &= \lim_{n\to+\infty}\int_E u_n\,d(\mu_1+\mu_2)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(\int_E u_n\,d\mu_1 + \int_E u_n\,d\mu_2\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\int_E u_n\,d\mu_1 + \lim_{n\to+\infty}\int_E u_n\,d\mu_2\\ &= \int_E f\,d\mu_1 + \int_E f\,d\mu_2.\end{aligned}$$

Donc le résultat est démontré pour toute fonction mesurable positive.

2°) D'après la première question, nous avons les équivalences suivantes pour une fonction $f : E \mapsto \bar{\mathbb{R}}$ mesurable,

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{L}^1(\mu_1+\mu_2) &\Leftrightarrow \int_E |f|\, d(\mu_1+\mu_2) < +\infty \\ &\Leftrightarrow \int_E |f|\, d\mu_1 + \int_E |f|\, d\mu_2 < +\infty \\ &\Leftrightarrow \int_E |f|\, d\mu_1 < +\infty \quad \text{et} \quad \int_E |f|\, d\mu_2 < +\infty \\ &\Leftrightarrow f \in \mathcal{L}^1(\mu_1) \cap \mathcal{L}^1(\mu_2)\,. \end{aligned}$$

Pour une telle fonction, on a alors

$$\begin{aligned} \int_E f\, d(\mu_1+\mu_2) &= \int_E f^+\, d(\mu_1+\mu_2) - \int_E f^-\, d(\mu_1+\mu_2) \\ &= \left(\int_E f^+\, d\mu_1 + \int_E f^+\, d\mu_2\right) - \left(\int_E f^-\, d\mu_1 + \int_E f^-\, d\mu_2\right) \\ &= \left(\int_E f^+\, d\mu_1 - \int_E f^-\, d\mu_1\right) + \left(\int_E f^+\, d\mu_2 - \int_E f^-\, d\mu_2\right) \\ &= \int_E f\, d\mu_1 + \int_E f\, d\mu_2\,. \end{aligned}$$

Exercice 3.3

Soit μ_d la mesure de dénombrement sur l'espace mesurable $(E,\mathbb{N}) = (\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ (voir exercice 2.1).

1°) Soit $f \in \mathcal{M}^+$, autrement dit, soit $f : \mathbb{N} \to [0,+\infty]$ une suite positive. Expliciter $\int_{\mathbb{N}} f\, d\mu_d$.

2°) En déduire que pour toute suite double $(u_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ de réels positifs, on a

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}\right).$$

3°) Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Expliciter la condition pour que f soit μ_d-intégrable.

Solution

1°) Comme $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n)\mathbb{I}_{\{n\}}$, on a, d'après le théorème d'intégration d'une série à termes positifs (théorème 3.4),

$$\int_{\mathbb{N}} f\, d\mu_d = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{\mathbb{N}} f(n)\mathbb{I}_{\{n\}}\, d\mu_d = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n)\mu_d(\{n\})\,.$$

D'où, comme $\mu_d(\{n\}) = 1$,

$$\int_{\mathbb{N}} f\, d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n)\,,$$

formule qui fait apparaître les séries numériques à termes positifs comme des intégrales de Lebesgue particulières.

2°) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_m définie sur $\mathbb{N}$ par $f_m(n) = u_{m,n}$. On a, en vertu du théorème d'intégration d'une série à termes positifs (théorème 3.4),

$$\int_{\mathbb{N}}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} f_m\right) d\mu_d = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\int_{\mathbb{N}} f_m\, d\mu_d\right).$$

Par ailleurs, d'après la première question, on a

$$\int_{\mathbb{N}}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} f_m\right) d\mu_d = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} f_m(n)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}\right)$$

et

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\int_{\mathbb{N}} f_m\, d\mu_d\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_m(n)\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n}\right),$$

d'où l'égalité demandée.

3°) Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ une suite complexe, la fonction f est μ_d-intégrable si et seulement si $\int_{\mathbb{N}} |f|\, d\mu_d < +\infty$. Ce qui est équivalent d'après la première question à $\sum_{n=0}^{+\infty} |f(n)| < +\infty$.

Ainsi f est μ_d-intégrable si et seulement si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$ converge absolument et dans ce cas $\int_{\mathbb{N}} f\, d\mu_d = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$.

Exercice 3.4

Cet exercice utilise les résultats et les notations de l'exercice 3.3.

On considère une suite double $(u_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ de nombres complexes.

1°) En appliquant le théorème d'intégration d'une série de fonctions intégrables (théorème 3.4), montrer que si la série $\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_{m,n}|\right)$ est convergente, alors

– $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n}$ converge pour tout $m \in \mathbb{N}$ et $\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}$ converge pour tout $n \in \mathbb{N}$;

– les séries $\sum_m \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n}\right)$ et $\sum_n \left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}\right)$ sont convergentes ;

– on a l'égalité

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}\right). \tag{3.2}$$

2°) Montrer sur un exemple que si $\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_{m,n}|\right) = +\infty$, alors l'égalité (3.2) n'est pas nécessairement vraie.

Solution

1°) Rappelons que d'après l'exercice 3.3, on a d'une part

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_{m,n}|\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} |u_{m,n}|\right)$$

et donc m et n jouent des rôles symétriques ; et d'autre part l'hypothèse

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_{m,n}|\right) < +\infty$$

s'écrit en termes d'intégrales

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\int_{\mathbb{N}} |f_m|\, d\mu_d < +\infty,$$

où f_m a été définie à l'exercice 3.3. Donc le théorème 3.4 est applicable et entraîne

– que la série $\sum_{m=0}^{+\infty} f_m(n)$ converge absolument pour μ_d-presque tout $n \in \mathbb{N}$;

– que la série $\sum_{m=0}^{+\infty} f_m$ est égale μ_d-presque partout à une fonction de l'espace $\mathcal{L}^1(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_d)$;

– et l'égalité

$$\int_{\mathbb{N}} \sum_{m=0}^{+\infty} f_m\, d\mu_d = \sum_{m=0}^{+\infty}\int_{\mathbb{N}} f_m\, d\mu_d. \tag{3.3}$$

Or, on a vu dans l'exercice 2.1 2°) (iii) que le seul ensemble de mesure nulle dans l'espace mesuré $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_d)$ est l'ensemble vide. On en déduit que

(i) la série $\sum_{m=0}^{+\infty} |f_m(n)| = \sum_{m=0}^{+\infty} |u_{m,n}|$ converge pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc la série $\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}$ converge pour tout $n \in \mathbb{N}$ car la convergence absolue entraîne la convergence. D'autre part, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n}$ converge pour tout $m \in \mathbb{N}$ car m et n jouent des rôles symétriques ;

(ii) la fonction $\sum_{m=0}^{+\infty} f_m \in \mathcal{L}^1(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_d)$ si et seulement si $\sum_{n=0}^{+\infty}\left|\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}\right| < +\infty$; en particulier $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}\right)$ est convergente. Il est clair qu'il en est de même pour la série $\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n}\right)$;

(iii) la relation (3.3) s'écrit

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n}\right).$$

2°) Soit par exemple $u_{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m, \\ -1 & \text{si } n = m+1. \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_{m,n}| = 2$, et par suite, $\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} |u_{m,n}| = +\infty$. Cependant, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n} = 1 - 1 = 0$ et donc $\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n} = 0$; mais $\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,0} = u_{0,0} = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n} = 0$. En conclusion, $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}\right) = 1$, et (3.2) n'est pas vérifiée.

Exercice 3.5 (Intégration par rapport à une mesure image)

Soient $(E_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$ un espace mesuré, $(E_2, \mathcal{T}_2)$ un espace mesurable et $\varphi : E_1 \to E_2$ une application $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$-mesurable. On rappelle qu'on a montré à l'exercice 2.2 que l'application μ_2 qui à tout $B \in \mathcal{T}_2$ associe $\mu_1\left(\varphi^{-1}(B)\right)$ est une mesure positive sur $(E_2, \mathcal{T}_2)$ qu'on note $\mu_2 = \varphi(\mu_1)$.

1°) Montrer que, pour toute application

$$f : E_2 \to [0, +\infty] \ \left(\mathcal{T}_2, \mathcal{B}([0, +\infty])\right)\text{-mesurable},$$

on a

$$\int_{E_2} f\, d\mu_2 = \int_{E_1} f \circ \varphi\, d\mu_1.$$

2°) Soit $f : E_2 \to \bar{\mathbb{R}}$ $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$-mesurable. Montrer que f est μ_2-intégrable sur E_2 si et seulement si $f \circ \varphi$ est μ_1-intégrable sur E_1 et que dans ce cas, on a

$$\int_{E_2} f \, d\mu_2 = \int_{E_1} f \circ \varphi \, d\mu_1 .$$

Solution

1°) – Si $f = \mathbb{I}_B$ où $B \in \mathcal{T}_2$. Alors

$$\int_{E_2} \mathbb{I}_B \, d\mu_2 = \mu_2(B) = \mu_1(\varphi^{-1}(B)) = \int_{E_2} \mathbb{I}_{\varphi^{-1}(B)} \, d\mu_1 .$$

Mais $\mathbb{I}_{\varphi^{-1}(B)} = \mathbb{I}_B \circ \varphi$; en effet,

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_{\varphi^{-1}(B)}(x) &= \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \varphi^{-1}(B) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } \varphi(x) \in B \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \mathbb{I}_B(\varphi(x)) = \mathbb{I}_B \circ \varphi(x) . \end{aligned}$$

D'où $\displaystyle\int_{E_2} \mathbb{I}_B \, d\mu_2 = \int_{E_1} \mathbb{I}_B \circ \varphi \, d\mu_1$.

– Si $f = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} a_i \mathbb{I}_{B_i}$, où $B_i \in \mathcal{T}_2$ et $a_i \geqslant 0$, d'après ce qui précède, on a

$$\begin{aligned} \int_{E_2} f \, d\mu_2 &= \sum_{i=1}^{N} a_i \int_{E_2} \mathbb{I}_{B_i} \, d\mu_2 \\ &= \sum_{i=1}^{N} a_i \int_{E_1} \mathbb{I}_{B_i} \circ \varphi \, d\mu_1 \\ &= \int_{E_1} \sum_{i=1}^{N} a_i (\mathbb{I}_{B_i} \circ \varphi) \, d\mu_1 \\ &= \int_{E_1} \left(\sum_{i=1}^{N} a_i \mathbb{I}_{B_i} \right) \circ \varphi \, d\mu_1 \\ &= \int_{E_1} f \circ \varphi \, d\mu_1 . \end{aligned}$$

– Soit $f \in \mathcal{M}^+(E_2, \mathcal{T}_2)$. D'après le théorème 3.1, il existe une suite croissante $(u_n)_{n \geqslant 1}$ de fonctions étagées positives convergeant simplement vers f sur E_2. Et d'après le théorème de la convergence monotone (théorème 3.2),

$$\int_{E_2} f \, d\mu_2 = \lim_{n \to +\infty} \int_{E_2} u_n \, d\mu_2 .$$

Par ailleurs d'après ce qui précède, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{E_2} u_n \, d\mu_2 = \int_{E_1} u_n \circ \varphi \, d\mu_1$$

donc

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{E_2} u_n \, d\mu_2 = \lim_{n \to +\infty} \int_{E_1} u_n \circ \varphi \, d\mu_1 .$$

Mais $(u_n \circ \varphi)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions de $\mathcal{M}^+(E_1, \mathcal{T}_1)$ convergeant simplement vers $f \circ \varphi$ sur E_1. Donc d'après le théorème de la convergence monotone (théorème 3.2),

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{E_1} u_n \circ \varphi \, d\mu_1 = \int_{E_1} f \circ \varphi \, d\mu_1 .$$

2°) Soit f une fonction de E_2 dans $\bar{\mathbb{R}}$ $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$-mesurable. On a

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{L}^1(E_2, \mu_2) &\Leftrightarrow \int_{E_2} |f| \, d\mu_2 < +\infty \\ &\Leftrightarrow \int_{E_1} |f| \circ \varphi \, d\mu_1 < +\infty \\ &\Leftrightarrow \int_{E_1} (f^+ + f^-) \circ \varphi \, d\mu_1 < +\infty \\ &\Leftrightarrow \int_{E_1} (f^+ \circ \varphi + f^- \circ \varphi) \, d\mu_1 < +\infty \\ &\Leftrightarrow \int_{E_1} ((f \circ \varphi)^+ + (f \circ \varphi)^-) \, d\mu_1 < +\infty \\ &\Leftrightarrow \int_{E_1} |f \circ \varphi| \, d\mu_1 < +\infty , \end{aligned}$$

et $f \in \mathcal{L}^1(E_2, \mathcal{T}, \mu_2)$ si et seulement si $f \circ \varphi \in \mathcal{L}^1(E_1, \mathcal{T}, \mu_1)$. Si $f \in L^1(E_2, \mu_2)$, alors

$$\begin{aligned} \int_{E_2} f \, d\mu_2 &= \int_{E_2} f^+ \, d\mu_2 - \int_{E_2} f^- \, d\mu_2 \\ &= \int_{E_1} f^+ \circ \varphi \, d\mu_1 - \int_{E_1} f^- \circ \varphi \, d\mu_1 \\ &= \int_{E_1} (f \circ \varphi)^+ \, d\mu_1 - \int_{E_1} (f \circ \varphi)^- \, d\mu_1 \\ &= \int_{E_1} f \circ \varphi \, d\mu_1 . \end{aligned}$$

Exercice 3.6 (Intégration par rapport à une mesure à densité)

Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, g une application de E dans $[0, +\infty]$ $(\mathcal{T}, \mathcal{B}([0, +\infty]))$-mesurable.

1°) Pour tout $A \in \mathcal{T}$, on pose $\nu(A) = \int_A g\, d\nu$.

1.a Montrer que ν est une mesure sur $(E, \mathcal{T})$. On dit que la mesure ν admet g pour densité par rapport à μ et on note $\nu = g \cdot \mu$ ou encore $d\nu(x) = g(x)\, d\mu(x)$.

1.b Soit $A \in \mathcal{T}$; vérifier que si $\mu(A) = 0$ alors $\nu(A) = 0$. On dit que μ est *absolument continue par rapport à* ν.

1.c Caractériser les éléments A de $\mathcal{T}$ tels que $\nu(A) = 0$.

2°) Soit $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$ $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$-mesurable. Montrer que f est ν-intégrable sur E si et seulement si fg est μ-intégrable sur E et que dans ce cas, on a

$$\int_E f\, d\nu = \int_E fg\, d\mu$$

où fg désigne l'application définie sur E par $(fg)(x) = f(x)g(x)$.

3°) Dans cette question $E = [-1, 1]$, $\mathcal{T} = \mathcal{B}([-1, 1])$ et $\mu = \lambda$ désigne la mesure de Lebesgue sur $[-1, 1]$. On note δ_0 la mesure de Dirac en 0 (voir exercice 2.1). Existe-t-il une fonction mesurable g (resp. h) telle que, pour tout $A \in \mathcal{B}([-1, 1])$, on ait

$$\lambda(A) = \int_A g\, d\delta_0 \left(\text{resp. } \delta_0(A) = \int_A h\, d\lambda\right) ?$$

Solution

1°) 1.a Montrons que ν est une mesure sur $\mathcal{T}$.

– $\nu(\emptyset) = 0$.

– Soit $(A_n)_{n \geqslant 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$ deux à deux disjoints et posons $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$. Comme $\mathbb{I}_A = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{I}_{A_n}$ on a alors $g\mathbb{I}_A = \sum_{n=1}^{+\infty} g\mathbb{I}_{A_n}$ et donc $\int_E g\mathbb{I}_A\, d\mu = \int_E \sum_{n=1}^{+\infty} g\mathbb{I}_{A_n}\, d\mu$. Par ailleurs, le théorème d'intégration d'une série de fonctions positives (théorème 3.4) entraîne

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{+\infty} g\mathbb{I}_{A_n}\right) d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_E (g\mathbb{I}_{A_n})\, d\mu$$

D'où

$$\nu(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \nu(A_n).$$

1.b Soit $A \in \mathcal{T}$ tel que $\mu(A) = 0$, alors $g\mathbb{I}_A = 0$ μ-p.p. donc $\nu(A) = \int_E g\mathbb{I}_A\, d\mu = 0$ d'après la proposition 3.2 (iv).

1.c Soit $A \in \mathcal{T}$.

$\nu(A) = 0 \Leftrightarrow \int_E g\mathbb{I}_A\, d\mu = 0$. D'après la proposition 3.2 (iv)

$$\int_E g\mathbb{I}_A\, d\mu = 0 \Leftrightarrow g\mathbb{I}_A = 0 \ \mu\text{-p.p.}$$

donc

$$\begin{aligned} \nu(A) = 0 &\Leftrightarrow \mu(\{x \in E : g(x)\mathbb{I}_A(x) \neq 0\}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \mu\big((g \neq 0) \cap A\big) = 0. \end{aligned}$$

2°) – Si $f = \mathbb{I}_A$ où A est un élément de $\mathcal{T}$, on a

$$\int_E f\, d\nu = \int_E \mathbb{I}_A\, d\nu = \nu(A) = \int_A g\, d\mu = \int_E \mathbb{I}_A g\, d\mu = \int_E fg\, d\mu.$$

– Par additivité et homogénéité positive de l'intégrale, le résultat est vrai pour les fonctions étagées positives.

– Soit f une fonction mesurable, il existe, en vertu du théorème fondamental d'approximation (théorème 3.1), une suite croissante $(u_n)_{n \geqslant 1}$ qui converge simplement vers f. D'après ce qui précède, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_E u_n\, d\nu = \int_E u_n g\, d\mu.$$

Le théorème de la convergence monotone (théorème 3.2) entraîne

$$\int_E f\, d\nu = \lim_{n \to +\infty} \int_E u_n\, d\nu = \lim_{n \to +\infty} \int_E u_n g\, d\mu.$$

D'autre part, la suite $(gu_n)_{n \geqslant 1}$ est aussi croissante, à termes positifs et converge simplement vers fg, donc le théorème de la convergence monotone (théorème 3.2) entraîne

$$\lim_{n \to +\infty} \int_E u_n g\, d\mu = \int_E \lim_{n \to +\infty} u_n g\, d\mu = \int_E fg\, d\mu,$$

et ainsi,

$$\int_E f\, d\nu = \int_E fg\, d\nu.$$

– Soit f une fonction mesurable à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$. Nous avons, d'après ce qui précède, les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{L}^1(\nu) &\Leftrightarrow \int_E |f|\, d\nu < +\infty \\ &\Leftrightarrow \int_E f^+\, d\nu + \int_E f^-\, d\nu < +\infty \\ &\Leftrightarrow \int_E f^+\, d\nu < +\infty \quad \text{et} \quad \int_E f^-\, d\nu < +\infty \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \int_E f^+ g\,d\mu < +\infty \quad \text{et} \quad \int_E f^- g\,d\mu < +\infty$$
$$\Leftrightarrow \int_E (f^+ g + f^- g)\,d\mu < +\infty$$
$$\Leftrightarrow \int_E (f^+ + f^-) g\,d\mu < +\infty$$
$$\Leftrightarrow \int_E |f| g\,d\mu < +\infty$$
$$\Leftrightarrow \int_E |fg|\,d\mu < +\infty$$
$$\Leftrightarrow fg \in \mathcal{L}^1(\mu).$$

Pour une telle fonction, on a alors

$$\int_E f\,d\nu = \int_E fg\,d\nu.$$

3°) – Si λ admettait une densité g par rapport à la mesure de Dirac δ_0, alors pour $\varphi = \mathbb{I}_{[0,1]}$, on aurait d'après 2°)

$$\int_{[-1,1]} \varphi\,d\lambda = \int_{[-1,1]} \varphi g\,d\delta_0,$$

soit

$$1 = \varphi(0)g(0) = 0$$

ce qui est absurde.

– Pour toute fonction h mesurable et positive on a $\delta_0(\{0\}) = 1 \neq 0 = \int_{\{0\}} h\,d\lambda$.

Exercice 3.7

Soient $(E_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$ un espace mesuré, $(E_2, \mathcal{T}_2)$ un espace mesurable, $f : E_1 \to [0, +\infty[$ une application $(\mathcal{T}_1, \mathcal{B}([0,+\infty[))$-mesurable et $\varphi : E_1 \to E_2$ une bijection bi-mesurable (*i.e.* φ et φ^{-1} sont mesurables).

On note $\nu_1 = \varphi(f \cdot \mu_1)$ la mesure image par φ de la mesure de densité f par rapport à la mesure μ_1 et $\nu_2 = (f \circ \varphi^{-1}) \cdot (\varphi(\mu_1))$ la mesure de densité $f \circ \varphi^{-1}$ par rapport à la mesure image de μ_1 par φ. Montrer que $\nu_1 = \nu_2$. Autrement dit, établir la formule

$$\varphi(f \cdot \mu_1) = (f \circ \varphi^{-1}) \cdot (\varphi(\mu_1)).$$

On pourra utiliser le résultat de l'exercice 3.5.

Solution

Remarquons tout d'abord que :
(i) $f \circ \varphi^{-1}$ est $(\mathcal{T}_2, \mathcal{B}([0,+\infty[))$-mesurable ;
(ii) la mesure image $\varphi(\mu_1)$ est une mesure sur $(E_2, \mathcal{T}_2)$;
(iii) la mesure à densité $f \cdot \mu_1$ est une mesure sur $(E_1, \mathcal{T}_1)$ et la mesure image $\varphi(f \cdot \mu_1)$ est une mesure à densité sur $(E_2, \mathcal{T}_2)$.

Soit $B \in \mathcal{T}_2$. Alors on a, en utilisant le résultat de l'exercice 3.5,

$$\begin{aligned}
\nu_2(B) &= \int_E \mathbb{I}_B\,d\nu_2 = \int_{E_2} \mathbb{I}_B f \circ \varphi^{-1}\,d(\varphi \cdot \mu_1)\\
&= \int_{E_1} \left(\mathbb{I}_B f \circ \varphi^{-1}\right) \circ \varphi\,d\mu_1\\
&= \int_{E_1} (\mathbb{I}_B \circ \varphi)(f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi)\,d\mu_1 \quad \text{car } (gh) \circ k = (g \circ k)(h \circ k)\\
&= \int_{E_1} (\mathbb{I}_B \circ \varphi) f\,d\mu_1\\
&= \int_{E_1} \mathbb{I}_B \circ \varphi\,d(f \cdot \mu_1)\\
&= \int_{E_2} \mathbb{I}_B\,d\big(\varphi(f \cdot \mu_1)\big)\\
&= \varphi(f \cdot \mu_1)(B) = \nu_1(B).
\end{aligned}$$

3.8 APPLICATION DES THÉORÈMES DE CONVERGENCE

Exercice 3.8

Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré.

1°) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions positives mesurables telle que $\int_E f_0\,d\mu < +\infty$. Montrer que si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f, alors $f \in \mathcal{M}^+(E, \mathcal{T})$ et

$$\int_E f\,d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n\,d\mu < +\infty.$$

Montrer sur un exemple que l'hypothèse $\int_E f_0\,d\mu < +\infty$ est nécessaire. Que devient cette assertion lorsque $f_n = \mathbb{I}_{A_n}$ où $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{T}$?

2°) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables positives qui converge simplement vers f et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_E f_n\,d\mu \leqslant M$ où M est une constante donnée. Montrer que $\int_E f\,d\mu \leqslant M$.

3°) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions mesurables positives telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_E f_n \, d\mu < M$ où M est une constante donnée.

3.a Montrer que, pour μ-presque tout x, $\left(f_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée (on écrira la condition nécessaire et suffisante pour qu'en un point x, la suite ne soit pas bornée).

3.b En déduire qu'il existe une fonction mesurable $f : E \to \mathbb{R}^+$, avec $\int_E f \, d\mu < +\infty$ telle que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f presque partout et que la suite $\left(\int_E f_n \, d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\int_E f \, d\mu$.

Solution

1°) La fonction f_0 est μ-intégrable sur E donc f_0 est finie μ-p.p. Alors, pour μ-presque tout $x \in E$, la suite $\left(f_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge car elle est décroissante et minorée par 0. Soit f la limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La fonction f est mesurable et positive comme limite simple de fonctions mesurables et positives. La suite $(f_0 - f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante de fonctions mesurables positives qui converge simplement vers $f_0 - f$. Le théorème de la convergence monotone (théorème 3.2) entraîne alors

$$\int_E f_0 - f \, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_E f_0 - f_n \, d\mu .$$

Comme $\int_E f_0 \, d\mu$ est finie, on peut retrancher $\int_E f_0 \, d\mu$ aux deux membres de l'égalité précédente. Ainsi

$$\int_E f \, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n \, d\mu .$$

La condition $\int_E f_0 \, d\mu < +\infty$ est nécessaire. En effet, la suite $(\mathbb{I}_{[n,+\infty[})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la fonction nulle en décroissant mais

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty} f_n \, d\lambda = 0 \neq +\infty = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda .$$

On aurait pu appliquer le théorème de la convergence dominée (théorème 3.7) et obtenir le résultat de la première question immédiatement.

Si $f_n = \mathbb{I}_{A_n}$ alors $\int_E f_n \, d\mu = \mu(A_n)$ et on retrouve la condition de la continuité décroissante des mesures (proposition 2.2 (iii)).

2°) La convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f implique que $f = \liminf_{n\to+\infty} f_n$ et le lemme de Fatou (théorème 3.3) donne alors

$$\int_E f \, d\mu = \int_E \liminf_{n\to+\infty} f_n \, d\mu \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \int_E f_n \, d\mu \leqslant M .$$

3°) 3.a Puisque la suite $\left(f_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, la condition nécessaire et suffisante pour qu'en un point x cette suite ne soit pas bornée est :

$$\text{pour tout } \ k \in \mathbb{N}^*, \ \text{ il existe } \ p \in \mathbb{N}^* \ \text{ tel que } \ f_p(x) \geqslant k .$$

Si A est l'ensemble des points x de E où la suite $\left(f_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée alors

$$A = \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \{f_p \geqslant k\} ,$$

et il est clair que $A \in \mathcal{T}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in \mathbb{N}$, on a

$$k\mu(f_p \geqslant k) = \int_{\{f_p \geqslant k\}} k \, d\mu \leqslant \int_{\{f_p \geqslant k\}} f_p \, d\mu \leqslant \int_E f_p \, d\mu \leqslant M ,$$

d'où $\mu(\{f_p \geqslant k\}) \leqslant \dfrac{M}{k}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Comme $(\{f_p \geqslant k\})_{p\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{T}$, on a, en vertu de la continuité croissante de la mesure μ (proposition 2.2),

$$\lim_{p\to+\infty} \mu(\{f_p \geqslant k\}) = \mu\left(\bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} \{f_p \geqslant k\}\right) \leqslant \frac{M}{k} .$$

Par ailleurs, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$A \subset \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} \{f_p \geqslant k\} ,$$

donc $\mu(A) \leqslant \dfrac{M}{k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, d'où $\mu(A) = 0$. Ainsi, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée presque partout.

3.b La suite $\left(f_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc elle converge dans $[0, +\infty]$. Si on pose $f = \lim_{n\to+\infty} f_n \mathbb{I}_{A^c}$, alors f est finie μ-presque partout et le théorème de la convergence monotone (théorème 3.2) conduit à

$$\int_E f \, d\mu = \int_E \lim_{n\to+\infty} f_n \, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n \, d\mu \leqslant M .$$

Exercice 3.9

Soient $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : E \to [0, +\infty]$ une fonction μ-intégrable.

1°) Montrer que $A = \{x \in E : f(x) = +\infty\}$ est μ-négligeable ; autrement dit f est finie μ-presque partout (voir la proposition 3.2).

2°) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \{x \in E : f(x) \geqslant n\}$.

2.a Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_{A_n} f \, d\mu = 0$.

2.b En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mu(A_n)$ est finie et

$$\lim_{n\to+\infty} n\mu(A_n) = 0 .$$

3°) Montrer sur un contre-exemple que $\lim_{n\to+\infty} n\mu(A_n) = 0$ n'entraîne pas que f est μ-intégrable.

Solution

1°) Supposons que $\mu(A) > 0$ et posons $g_n = n\mathbb{1}_A$. D'après la croissance de l'intégrale, on a
$$\int_E f\,d\mu \geqslant \int_E g_n\,d\mu = n\mu(A)\,,$$
donc
$$\int_E f\,d\mu \geqslant \lim_{n\to+\infty}\int_E g_n\,d\mu = +\infty\,.$$
Ce qui est absurde puisque f est μ-intégrable sur E. Ainsi, $\mu(A) = 0$.

2°) 2.a Montrons que $\lim_{n\to+\infty}\int_{A_n} f\,d\mu = 0$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n = f\mathbb{1}_{A_n}$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f\mathbb{1}_A$ et est dominée par f. Donc le théorème de la convergence dominée (théorème 3.7) implique $\lim_{n\to+\infty}\int_{A_n} f\,d\mu = 0$.

2.b Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n\mathbb{1}_{A_n} \leqslant f\mathbb{1}_{A_n}$. Donc
$$n\mu(A_n) \leqslant \int_E f\mathbb{1}_{A_n} d\mu < +\infty\,.$$
On en déduit que d'une part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mu(A_n) < +\infty$ et, d'autre part, grâce à 2.a
$$\lim_{n\to+\infty} n\mu(A_n) = 0\,.$$

3°) On prend $(E, \mathcal{T}, \mu) = \big(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_d\big)$ où μ_d est la mesure de dénombrement et f l'application constante égale à 1 sur $\mathbb{N}$. Pour tout $n \geqslant 2$, $A_n = \emptyset$ et donc $\mu_d(A_n) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} n\mu_d(A_n) = 0$. Par contre $\int_{\mathbb{R}} f\,d\mu_d = \mu_d(\mathbb{N}) = +\infty$.

Exercice 3.10

Cet exercice utilise l'exercice précédent 3.9.

Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E)$ soit finie et soit $f : E \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \{n \leqslant f\}$, $a_n = \mu(A_n)$, $B_n = \{n \leqslant f < n+1\}$ et $b_n = n\mu(B_n)$.

1°) Montrer que f est μ-intégrable si et seulement si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ est convergente.

2°) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k - na_{n+1}\,.$$

3°) Déduire des questions précédentes que f est μ-intégrable si et seulement si la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ est convergente.

4°) Montrer sur un contre-exemple que les résultats de 1°) et de 3°) sont faux si $\mu(E) = +\infty$.

Solution

1°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n\mathbb{1}_{B_n} \leqslant f\mathbb{1}_{B_n} \leqslant (n+1)\mathbb{1}_{B_n}$, donc
$$n\mu(B_n) \leqslant \int_{B_n} f\mathbb{1}_{B_n}\,d\mu \leqslant (n+1)\mu(B_n)\,.$$
En sommant alors ces deux inégalités, on obtient
$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\mu(B_n) \leqslant \int_E f\,d\mu \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\mu(B_n)\,.$$
Ainsi, si $\int_E f\,d\mu < +\infty$, alors $\sum_{n=1}^{+\infty} n\mu(B_n) < +\infty$; réciproquement, si $\sum_{n=1}^{+\infty} n\mu(B_n)$ converge alors
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\mu(B_n) \leqslant \mu(B_0) + 2\sum_{n=1}^{+\infty} n\mu(B_n) < \mu(E) + 2\sum_{n=1}^{+\infty} n\mu(B_n) < +\infty$$
et donc $\int_E |f|\,d\mu < +\infty$.

2°) Comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B_k = A_k \setminus A_{k+1}$ et $\mu(A_{k+1}) < \mu(E) < +\infty$, on a, en vertu de la proposition 2.1,
$$\mu(B_k) = \mu(A_k) - \mu(A_{k+1})$$
soit
$$\mu(B_k) = a_k - a_{k+1}\,.$$
Comme $b_k = k\mu(B_k)$, on a alors
$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k - na_{n+1}\,.$$

3°) Si f est μ-intégrable alors $\lim_{n\to+\infty} na_n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ d'après l'exercice précédent 3.9, et dans ce cas
$$\lim_{n\to+\infty} na_{n+1} = \lim_{n\to+\infty}(n+1)a_{n+1} - \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = 0\,.$$
Ainsi
$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k\,.$$
On déduit alors de 1°) que si $f \in L^1(\mu)$ alors $\sum_{k=1}^{+\infty} k\mu(\{|f| \geqslant k\}) < +\infty$.

– Si la série $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge, on déduit de la question 2°) que $\sum_{k=1}^{n} b_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k$ et donc que la série $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge aussi. Ainsi, la question 1°) entraîne que f est μ-intégrable.

4°) Soit $(E, \mathcal{T}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et soit f l'application constante égale à $\frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $n \geqslant 1$, $A_n = \emptyset$ et $B_n = \emptyset$, ainsi les séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(A_n)$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(B_n)$ convergent, par contre $\int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda = \frac{\lambda(\mathbb{R})}{2} = +\infty$.

Exercice 3.11

Soient $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{T}, \mu)$.

1°) Établir que $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_{\{\frac{1}{n} \leqslant |f| \leqslant n\}} |f|\, d\mu = \int_E |f|\, d\mu$.

2°) En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathcal{T}$ tel que

$$\mu(A) < +\infty, \ \sup_{x \in A} |f(x)| < +\infty \quad \text{et} \quad \int_{A^c} |f|\, d\mu < \varepsilon .$$

Solution

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \left\{\frac{1}{n} \leqslant |f| \leqslant n\right\}$ et $f_n = |f| \mathbb{1}_{A_n}$.

1°) f est μ-intégrable sur E, donc f est finie μ-presque partout (voir l'exercice 3.9 1°)). On en déduit que pour tout $x \in E$ tel que $|f(x)| < +\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = |f(x)|$. Ainsi, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge μ-presque partout vers $|f|$ et est dominée par $|f|$. Donc le théorème de la convergence dominée (théorème 3.7) entraîne que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_E f_n\, d\mu = \int_E |f|\, d\mu .$$

2°) Soit $\varepsilon > 0$. On déduit de la question précédente que $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_{A_n^c} |f|\, d\mu = 0$. En particulier, il existe un entier $n_0 \geqslant 1$ tel que $\int_{A_{n_0}^c} |f|\, d\mu \leqslant \varepsilon$. Par ailleurs, si $\frac{1}{n_0} \mathbb{1}_{A_{n_0}} \leqslant |f|$ alors $\frac{1}{n_0} \mu(A_{n_0}) \leqslant \int_E |f|\, d\mu < +\infty$. Ce qui prouve que $\mu(A_{n_0}) < +\infty$ et par construction, $\sup\limits_{x \in A_{n_0}} |f(x)| \leqslant n_0$.

Exercice 3.12

Soient $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{T}, \mu)$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $A \in \mathcal{T}$ et $\mu(A) < \eta$ alors $\left|\int_A f\, d\mu\right| < \varepsilon$.

Autrement dit, $\int_A f\, d\mu$ tend vers 0 lorsque $\mu(A)$ tend vers 0 (c'est ce qu'on appelle continuité absolue de l'intégrale).

Solution

Soit $\varepsilon > 0$.

Première démonstration.

D'après le théorème d'approximation (théorème 3.1), il existe une fonction g $\mathcal{T}$-étagée telle que $0 \leqslant g \leqslant |f|$ et $\int_E (|f| - g)\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$. D'où

$$\int_A |f|\, d\mu = \int_A (|f| - g)\, d\mu + \int_A g\, d\mu \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \int_A g\, d\mu .$$

Il s'agit donc de prouver la propriété pour la fonction g. Or par définition $g = \sum_{i=1}^{N} a_i \mathbb{1}_{A_i}$ où $a_i > 0$ et $A_i \in \mathcal{T}$. On obtient

$$\int_A g\, d\mu = \sum_{i=1}^{N} a_i \mu(A_i \cap A) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{N} a_i\right) \mu(A) .$$

Ainsi, en choisissant $\eta \leqslant \frac{\varepsilon}{2 \sum_{i=1}^{N} a_i}$, on a alors $\int_A |f|\, d\mu < \varepsilon$.

Deuxième démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a pour $A \in \mathcal{T}$

$$\begin{aligned}\int_A |f|\, d\mu &= \int_{A \cap \{|f| \leqslant n\}} |f|\, d\mu + \int_{A \cap \{|f| > n\}} |f|\, d\mu .\\ &\leqslant n\mu(A) + \int_{\{|f| > n\}} |f|\, d\mu .\end{aligned}$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n = |f| \mathbb{1}_{\{|f| > n\}}$. On a d'une part $|f_n| \leqslant |f|$ et d'autre part $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = |f| \mathbb{1}_{\{|f| = +\infty\}} = 0$ μ-p.p. car f est μ-intégrable (voir exercice 3.9 1°)). Donc le théorème de la convergence dominée (théorème 3.7) entraîne que $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_{\{|f| > n\}} |f|\, d\mu = 0$.

Ainsi pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \geqslant n_0$, on a $\int_{\{|f| > n\}} |f|\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$. D'où, en prenant $\eta \leqslant \frac{\varepsilon}{2n_0}$, on a, pour $A \in \mathcal{T}$ tel que $\mu(A) < \frac{\varepsilon}{2n_0}$,

$$\int_A |f|\, d\mu < \varepsilon .$$

Exercice 3.13

Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E)$ soit fini, et soit $(f_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de fonctions qui converge uniformément vers f.

1°) Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_E |f_n - f|\, d\mu = 0 .$$

2°) Montrer sur un contre-exemple que le résultat est faux si $\mu(E) = +\infty$.

Solution

1°) Soit $\varepsilon > 0$, il s'agit de montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $n \geqslant n_0$, on ait

$$\int_E |f_n - f| \, d\mu \leqslant \varepsilon .$$

Comme la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers f, il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $n \geqslant n_0$, on ait

$$\sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{\mu(E)} .$$

Donc pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\int_E |f_n - f| \, d\mu \leqslant \varepsilon .$$

2°) Pour le contre-exemple, prenons $(E, \mathcal{T}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $f_n = \frac{1}{n}\mathbb{1}_{[n,+\infty[}$. Comme $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \frac{1}{n}$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$ mais

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n| \, d\lambda = \frac{1}{n}\lambda([n, +\infty[) = +\infty .$$

Autrement dit, la suite $(f_n)_{n\leqslant 1}$ ne converge pas vers la fonction nulle dans $\left(\mathcal{L}^1(E); \|\cdot\|_1\right)$.

Exercice 3.14

Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{T}, \mu)$ qui converge (au sens de la semi-norme $\|\cdot\|_1$) vers un élément f, et qui converge μ-presque partout vers une application mesurable g. Montrer que $f = g$ μ-p.p.

Solution

On a d'après le lemme de Fatou (théorème 3.3)

$$\int_E \liminf_{n\to+\infty} |f_n - f| \, d\mu \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \int_E |f_n - f| \, d\mu .$$

Or, par hypothèse, $\lim_{n\to+\infty} \int_E |f_n - f| \, d\mu = 0$ et la suite $(|f_n - f|)_{n\geqslant 1}$ converge μ-presque partout vers $|g - f|$, donc

$$\int_E |g - f| \, d\mu = 0 .$$

La proposition 3.2 (iv) entraîne que $|g - f| = 0$ μ-p.p., c'est-à-dire que $f = g$ μ-p.p.

Exercice 3.15

Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et soit $f : E \to [0, +\infty[$ une application mesurable positive. On suppose que $0 < \int_E f(x) \, d\mu(x) < +\infty$ et on fixe un réel strictement positif α.

Déterminer suivant les valeurs de α

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E n \ln\left(1 + \left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha\right) d\mu(x) .$$

On pourra montrer que si $t \geqslant 0$ et $\alpha \geqslant 1$, $1 + t^\alpha \leqslant e^{\alpha t}$.

Solution

Posons $f_n(x) = n \ln\left(1 + \left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha\right)$.

Si $f(x)$ est différent de zéro, $f_n(x) \sim_{+\infty} n^{1-\alpha} f(x)$ et si $f(x)$ est nul, $f_n(x)$ est nul.

On voit alors apparaître trois cas.

Premier cas : $\alpha \in]0, 1[$.

Dans ce cas $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = +\infty \mathbb{1}_{\{f\neq 0\}}$. Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions mesurables positives, le lemme de Fatou (théorème 3.3) entraîne

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_E f_n(x) \, d\mu(x) \geqslant \int_E \liminf_{n\to+\infty} f_n(x) \, d\mu(x) = +\infty\mu(\{f \neq 0\}) .$$

Par ailleurs, f est positive et d'intégrale strictement positive donc

$$\mu\left(\{x \in E : f(x) \neq 0\}\right) > 0 .$$

Par suite, $\liminf_{n\to+\infty} \int_E f_n(x) \, d\mu(x) = +\infty$ et finalement $\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n(x) \, d\mu(x) = +\infty$.

Deuxième cas : $\alpha = 1$.

Dans ce cas, la suite $\left(f_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $f(x)$. De plus, en vertu de l'inégalité élémentaire $\ln(1 + t) \leqslant t$ valable pour tout $t \in [0, +\infty[$, on a pour tout $(n, x) \in \mathbb{N}^* \times E$

$$|f_n(x)| = f_n(x) \leqslant n\frac{f(x)}{n} = f(x) .$$

La fonction f étant μ-intégrable, le théorème de la convergence dominée (théorème 3.7) donne

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n(x) \, d\mu(x) = \int_E f(x) \, d\mu(x) .$$

Troisième cas : $\alpha \in]1, +\infty[$.

Dans ce cas, la suite $\left(f_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0. De plus pour tout réel $t > 0$, on a l'estimation suivante

$$1 + t^\alpha \leqslant (1 + t)^\alpha .$$

(Cette estimation se montre de façon élémentaire en étudiant les variations de la fonction $t \mapsto (1+t)^\alpha - 1 - t^\alpha$). Finalement, pour tout réel $t > 0$,

$$1 + t^\alpha \leqslant (1+t)^\alpha \leqslant \left(\sum_{k\geqslant 0} \frac{t^k}{k!}\right)^\alpha = e^{\alpha t}.$$

Ainsi pour tout $(x, n) \in E \times \mathbb{N}^*$, on a

$$|f_n(x)| = n \ln\left(1 + \left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha\right) \leqslant n \ln\left(\exp\left(\frac{\alpha f(x)}{n}\right)\right) = \alpha f(x).$$

La fonction αf étant μ-intégrable, on peut à nouveau appliquer le théorème de la convergence dominée (théorème 3.7) et on obtient alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n(x)\, d\mu(x) = \int_E \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\, d\mu(x).$$

Exercice 3.16

Le but de cet exercice est de donner une condition suffisante de la convergence en moyenne.

Soient $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions μ-intégrables de E dans $\mathbb{R}$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction μ-intégrable.

1°) Vérifier que si $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_E |f_n - f|\, d\mu = 0$ alors,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n\, d\mu = \int_E f\, d\mu \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \int_E |f_n|\, d\mu = \int_E |f|\, d\mu.$$

2°) On suppose que la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge μ-presque partout vers f. Démontrer que si

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E |f_n|\, d\mu = \int_E |f|\, d\mu$$

alors,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E |f_n - f|\, d\mu = 0.$$

On pourra appliquer le lemme de Fatou (théorème 3.3) à la suite de fonctions $(g_n)_{n\geqslant 1}$ où $g_n = |f| + |f_n| - |f - f_n|$.

3°) 3.a Sur l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, donner un exemple de suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ de fonctions λ-intégrables sur $\mathbb{R}$, convergeant simplement vers une fonction f λ-intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n\, d\lambda = \int_E f\, d\lambda,$$

et telle que la suite $\left(\int_{\mathbb{R}} |f_n - f|\, d\lambda\right)_{n\geqslant 1}$ ne tende pas vers 0.

3.b Même question sur l'espace probabilisé $\big([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda\big)$.

Solution

1°) Il suffit d'utiliser les majorations suivantes

$$\left|\int_E f_n\, d\mu - \int_E f\, d\mu\right| = \left|\int_E (f_n - f)\, d\mu\right| \leqslant \int_E |f_n - f|\, d\mu$$

et

$$\left|\int_E |f_n|\, d\mu - \int_E |f|\, d\mu\right| = \int_E (|f_n| - |f|)\, d\mu \leqslant \int_E \big||f_n| - |f|\big|\, d\mu \leqslant \int_E |f_n - f|\, d\mu.$$

2°) En posant $g_n = |f| + |f_n| - |f - f_n|$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, on définit une suite de fonctions μ-intégrables et positives qui converge μ-presque partout vers $2|f|$. D'après le lemme de Fatou (théorème 3.3), on a

$$\int_E \liminf_{n\to+\infty} g_n\, d\mu \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \int_E g_n\, d\mu$$

soit

$$\int_E 2|f|\, d\mu \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \left[\int_E |f|\, d\mu + \int_E |f_n|\, d\mu - \int_E |f_n - f|\, d\mu\right].$$

Or

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to+\infty}\left(\int_E |f|\, d\mu + \int_E |f_n|\, d\mu - \int_E |f_n - f|\, d\mu\right) &= 2\int_E |f|\, d\mu + \liminf_{n\to+\infty}\left(-\int_E |f_n - f|\, d\mu\right)\\ &= 2\int_E |f|\, d\mu - \limsup_{n\to+\infty}\int_E |f_n - f|\, d\mu\end{aligned}$$

car $\liminf\limits_{n\to+\infty}(-x_n) = -\limsup\limits_{n\to+\infty} x_n$. D'où

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_E |f_n - f|\, d\mu \leqslant 0$$

soit

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_E |f_n - f|\, d\mu = 0$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n\to} \int_E |f_n - f|\, d\mu = 0.$$

3°) 3.a On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n = \frac{1}{n}\left(\mathbb{1}_{[0,n]} - \mathbb{1}_{[-n,0]}\right)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_{\mathbb{R}} |f_n|\, d\lambda = 2$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions λ-intégrables qui converge simplement vers 0 et $\int_{\mathbb{R}} f_n\, d\lambda = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n - f|\, d\lambda = 2 \neq 0$.

3.b Il suffit de prendre par exemple $f_n = n\left(\mathbb{1}_{]0,\frac{1}{n}]} - \mathbb{1}_{]\frac{1}{n},\frac{2}{n}]}\right)$ pour $n \geqslant 2$.

Commentaire : On vient d'obtenir le critère remarquable suivant de convergence en moyenne. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions μ-intégrables qui converge μ-presque partout vers une fonction μ-intégrable f. On a alors

$$\left(\lim_{n\to+\infty}\int_E |f_n - f|\, d\mu = 0\right) \Leftrightarrow \left(\lim_{n\to+\infty}\int_E |f_n|\, d\mu = \int_E |f|\, d\mu\right).$$

Exercice 3.17

Le but de cet exercice est de donner une condition nécessaire et suffisante de la convergence en moyenne pour des suites monotones.

Soient $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite monotone d'applications de E dans $\mathbb{R}$ μ-intégrables de limite simple f (à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$). Démontrer que les quatre assertions suivantes sont équivalentes :

(A_1) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_E |f_n - f|\, d\mu = 0$;

(A_2) f est μ-intégrable sur E ;

(A_3) $\displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\int_E f_n\, d\mu\right| < +\infty$;

(A_4) $\displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_E |f_n|\, d\mu < +\infty$.

Solution

Supposons que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

$(A_1) \Rightarrow (A_2)$

L'assertion $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_E |f_n - f|\, d\mu = 0$ implique qu'il existe en particulier un entier n_0 tel que $\displaystyle\int_E |f_{n_0} - f|\, d\mu < +\infty$, c'est-à-dire que $f_{n_0} - f$ est μ-intégrable sur E. Donc $f = (f - f_{n_0} + f_{n_0})$ est μ-intégrable sur E.

$(A_2) \Rightarrow (A_3)$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc $f_0 \leqslant f_n \leqslant f$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. En vertu de la croissance de l'intégrale (proposition 3.2 (iii)), on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_E f_0\, d\mu \leqslant \int_E f_n\, d\mu \leqslant \int_E f\, d\mu.$$

Ainsi la suite $\displaystyle\left(\int_E f_n\, d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et par conséquent

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\int_E f_n\, d\mu\right| < +\infty.$$

$(A_3) \Rightarrow (A_4)$

Posons $\displaystyle M_1 = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\int_E f_n\, d\mu\right| < +\infty$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $f_n = (f_n - f_0) + f_0$, donc

$$|f_n| = |(f_n - f_0) + f_0| \leqslant |f_n - f_0| + |f_0|,$$

mais $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante, donc $|f_n - f_0| = f_n - f_0$ d'où

$$|f_n| \leqslant f_n - f_0 + |f_0|.$$

Ainsi,

$$\int_E |f_n|\, d\mu \leqslant \int_E f_n\, d\mu + \int_E |f_0 - f_0|\, d\mu.$$

On déduit de l'inégalité précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_E |f_n|\, d\mu \leqslant M_1 + \int_E |f_0 - f_0|\, d\mu$$

d'où

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_E |f_n|\, d\mu < +\infty.$$

$(A_4) \Rightarrow (A_1)$

Posons $\displaystyle M_2 = \sup_{n\in\mathbb{N}}\int_E |f_n|\, d\mu < +\infty$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a d'après l'inégalité triangulaire

$$f_n - f_0 = |f_n - f_0| \leqslant |f_n| + |f_0|,$$

et d'après la croissance de l'intégrale (proposition 3.2 (iii)), on a

$$\int_E f_n - f_0\, d\mu = \int_E |f_n - f_0|\, d\mu \leqslant \int_E |f_n|\, d\mu + \int_E |f_0|\, d\mu \leqslant \underbrace{M_2 + \int_E |f_0|\, d\mu}_{M_3}.$$

D'autre part, la suite $(f_n - f_0)_{n\geqslant 0}$ est une suite croissante de fonctions mesurables et positives qui a pour limite simple $f - f_0$, donc d'après le théorème de la convergence monotone croissante (théorème 3.2), on a

$$\int_E f - f_0\, d\mu = \lim_{n\to+\infty}\int_E f_n - f_0\, d\mu \leqslant M_3,$$

ainsi $f - f_0$ est μ-intégrable sur E. Par ailleurs, la suite $(f - f_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de fonctions mesurables qui a pour limite simple la fonction nulle et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leqslant f - f_n \leqslant f - f_0 \in \mathcal{L}^1(\mu).$$

Donc en vertu du théorème de la convergence dominée (théorème 3.7)

$$\lim_{n\to+\infty}\int_E |f_n - f_0|\, d\mu = 0.$$

Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, il suffit de considérer la suite $(-f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour se ramener au cas précédent.

Chapitre **4**

Intégrales de Lebesgue et de Riemann sur $\mathbb{R}$

RAPPELS DE COURS

4.1 RAPPELS SUR L'INTÉGRALE DE RIEMANN SUR $\mathbb{R}$

Intégrale d'une fonction en escalier

Définition 4.1

(i) *On appelle* subdivision *du segment* $[a, b]$ *et on note* σ *tout* $(n+1)$*-uplet* $(a_0, \ldots, a_n)$ *vérifiant* $a = a_0 < \cdots < a_n = b$.

(ii) *Une fonction* $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ *est dite* en escalier *s'il existe une subdivision* $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ *de* $[a, b]$ *et* n *réels* $c_0, \ldots, c_{n-1}$ *tels que*

$$u = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \mathbb{I}_{]a_i, a_{i+1}[}\,.$$

(iii) L'intégrale *de* u *relativement à une subdivision* $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$*, qu'on note provisoirement* $I(u, \sigma)$*, est définie par*

$$I(u, \sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i (a_{i+1} - a_i)\,.$$

Remarque 4.1

1°) Une fonction en escalier u n'est pas spécifiée aux points a_i de la subdivision et le réel $I(u, \sigma)$ ne dépend pas de la valeur de u en ces points.

2°) On montre que $I(u,\sigma)$ est indépendante du choix de la subdivision σ et on la note $\int_a^b u(x)\,dx$.

Notation : On note $\mathcal{E}_s([a,b])$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$.

Intégrale de Riemann

Soit f une fonction réelle définie sur $[a,b]$ et *bornée* ; on pose

$$s(f) = \sup\left\{\int_a^b u(x)\,dx : u \in \mathcal{E}_s([a,b]), u \leqslant f\right\};$$

$$S(f) = \inf\left\{\int_a^b v(x)\,dx : v \in \mathcal{E}_s([a,b]), v \geqslant f\right\};$$

Définition 4.2 *La fonction f est* Riemann-intégrable *sur $[a,b]$ — ou intégrable au sens de Riemann — si $s(f) = S(f)$ et dans ce cas, $s(f) = S(f)$ est noté $\int_a^b f(x)\,dx$.*

Théorème 4.1 *La fonction f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier u et v telles que $u \leqslant f \leqslant v$ et $\int_a^b \big(v(x) - u(x)\big)\,dx < \varepsilon$.*

Remarque 4.2 Le théorème 4.1 impose à la fonction f d'être bornée.

Exemples de fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$.

- Toute fonction continue sur $[a,b]$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$.
- Toute fonction monotone sur $[a,b]$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$.

Remarque 4.3 Soit f une fonction définie sur $[a,b]$, à valeurs complexes, de parties réelle et imaginaire g et h. Alors f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si g et h le sont et dans ce cas

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx + i\int_a^b h(x)\,dx.$$

Intégrale de Riemann et primitives

Théorème 4.2 *Soit f une fonction Riemann-intégrable sur $[a,b]$. On pose pour tout $x \in [a,b]$, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.*

(i) La fonction F est continue sur $[a,b]$, elle est même lipschitzienne i.e. *$|F(x) - F(y)| \leqslant \|f\|_u |x-y|$, pour tout $(x,y) \in [a,b]^2$, et où $\|f\|_u = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$.*

(ii) Si f est continue à droite en un point c de $[a,b[$, alors F est dérivable à droite en c et $F'_d(c) = f(c^+)$.

(iii) Si f est continue à gauche en un point c de $]a,b]$, alors F est dérivable à gauche en c et $F'_g(c) = f(c^-)$.

Corollaire 4.1 *Si f est continue sur $[a,b]$, alors f admet une primitive sur $[a,b]$,* i.e. *il existe une application F dérivable sur $[a,b]$ telle que $F' = f$ et toute autre primitive G de f vérifie pour tout $x \in [a,b]$*

$$G(x) = G(a) + \int_a^x f(t)\,dt.$$

D'ailleurs, $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est la *primitive de f qui s'annule en a.*

4.2 INTÉGRALES DE RIEMANN IMPROPRES

Soit f une fonction réelle définie sur $[a,b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ (on pourrait aussi envisager le cas d'un intervalle $]a,b]$ avec $-\infty \leqslant a < b < +\infty$, ou encore $]a,b[$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$), et telle que pour tout $x \in [a,b[$, f est bornée et Riemann-intégrable sur $[a,x]$. On pose pour tout $x \in [a,b]$, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

Définition 4.3

1°) On dit que l'intégrale de Riemann impropre $\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente *si $F(x)$ admet une limite* finie *quand x tend vers b et on pose par définition*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to b} F(x).$$

2°) Si $F(x)$ admet une limite infinie *ou* n'a pas de limite *quand x tend vers b, on dit que l'intégrale de Riemann impropre $\int_a^b f(t)\,dt$ est* divergente.

Exemple fondamental :

- L'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leqslant 1$.
- L'intégrale impropre $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ converge si $\alpha < 1$ et diverge si $\alpha \geqslant 1$.

Définition 4.4 *On dit que l'intégrale de Riemann impropre $\int_a^b f(t)\,dt$ est* absolument convergente *si l'application croissante $x \mapsto \int_a^x |f(t)|\,dt$ de $[a,b[$ dans $\mathbb{R}$ a une* limite finie *quand x tend vers b.*

Proposition 4.1 *Si l'intégrale de Riemann impropre $\int_a^b f(t)\,dt$ est absolument convergente alors elle est convergente et on a*

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Remarque 4.4 La réciproque est fausse. Il y a des intégrales de Riemann impropres qui convergent sans converger absolument. Par exemple,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{alors que} \quad \int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = +\infty$$

(voir exercices 4.9 et surtout 5.8).

Définition 4.5 *Si l'intégrale de Riemann impropre* $\int_a^b f(t)\,dt$ *est convergente sans que* $\int_a^b |f(t)|\,dt$ *le soit, on dit que l'intégrale impropre est* semi-convergente *ou que la fonction* f *est* semi-intégrable *sur* $[a, b[$.

Dans toute la suite, nous ne mentionnerons plus « de Riemann » pour parler des intégrales impropres.

Quelques critères de convergence de l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$

D'après la définition, la question est réglée en déterminant la limite de $\int_a^x f(t)\,dt$ quand x tend vers $+\infty$. Cependant cette méthode est conditionnée par l'obtention d'une primitive de f. Or, il n'est pas toujours facile d'en obtenir une, d'où l'intérêt de ces critères de convergence suivants portant sur la fonction donnée f.

Théorème 4.3 (Critère de Cauchy) *L'intégrale impropre* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *converge si et seulement si pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $C = C(\varepsilon) > 0$ *tel que pour tous réels A et B vérifiant* $C \leqslant A \leqslant B$, *on ait*

$$\int_A^B f(x)\,dx < \varepsilon\,.$$

Théorème 4.4 (Critère d'Abel) *On suppose que la fonction f est de la forme uv où u et v sont des fonctions continues sur* $[a, +\infty[$, *telles que :*

(i) la fonction u est continue, positive, décroissante et tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ *;*

(ii) la fonction v est continue et il existe $M > 0$ *tel que pour tous réels A et B, vérifiant* $a \leqslant A \leqslant B$, *on ait*

$$\left|\int_A^B v(x)\,dx\right| \leqslant M\,.$$

Alors, l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *converge. De plus, pour tout* $b \geqslant a$,

$$\left|\int_b^{+\infty} f(x)\,dx\right| \leqslant Mu(b)\,.$$

Les critères ci-dessous ne concernent que les fonctions positives.

Théorème 4.5 *Soient f et g deux fonctions positives.*

1°) Théorème de comparaison.

Si $0 \leqslant f \leqslant g$, *alors la convergence de* $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *entraîne la convergence de* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *et la divergence de* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *entraîne la divergence de* $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$.

2°) Théorème d'équivalence.

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = C$ *où C est une constante strictement positive, alors* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *et* $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *convergent ou divergent simultanément.*

3°) Critère de Riemann.

On suppose que $x^\alpha f(x)$ *admet une limite l quand x tend vers* $+\infty$.

– *Si* $l \in [0, +\infty[$, *alors* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *converge si* $\alpha > 1$ *et diverge si* $\alpha \leqslant 1$.

– *Si* $l = +\infty$, *alors* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *diverge si* $\alpha \leqslant 1$.

4°) Comparaison avec une série à termes positifs.

Si en plus de la positivité, f est décroissante alors $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *est de même nature que la série de terme général* $u_n = f(n)$.

4.3 COMPARAISON ENTRE L'INTÉGRALE DE LEBESGUE ET L'INTÉGRALE DE RIEMANN SUR $\mathbb{R}$

Cas d'un intervalle compact

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et borélienne.

Théorème 4.6 *Si f est Riemann-intégrable sur* $[a, b]$ *alors f est Lebesgue-intégrable sur* $[a, b]$ *et son intégrale de Lebesgue coïncide avec son intégrale de Riemann ; autrement dit*

$$\int_{[a,b]} f(t)\,d\lambda(t) = \int_a^b f(t)\,dt \quad \text{et} \quad \int_{[a,b]} |f(t)|\,d\lambda(t) = \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Remarque 4.5 La réciproque du théorème 4.6 est fausse ; il existe des fonctions Lebesgue-intégrables sur $[a, b]$ et non Riemann-intégrables sur $[a, b]$. C'est le cas par exemple de la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ (voir exercice 4.1).

Commentaire : Le contre-exemple ci-dessus souligne combien l'ensemble des fonctions étagées est plus riche que celui des fonctions en escalier. Cela constitue l'une des raisons du succès de l'approche de Lebesgue.

D'autre part, la théorie de la mesure nous permet de caractériser les fonctions Riemann-intégrables par le théorème suivant (qui est dû à Lebesgue).

Théorème 4.7 *Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bornée est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si f est continue presque partout sur $[a,b]$.*

Cas d'un intervalle non compact

Théorème 4.8 *Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction borélienne, telle que pour tout $x \in [a,b[$, f est bornée et Riemann-intégrable sur $[a,x]$.*

Alors, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est absolument convergente si et seulement si f est Lebesgue-intégrable sur $[a,b[$ et on a

$$\int_{[a,b[} f(t)\,d\lambda(t) = \int_a^b f(t)\,dt \quad \text{et} \quad \int_{[a,b[} |f(t)|\,d\lambda(t) = \int_a^b |f(t)|\,dt\,.$$

Notation : Dorénavant, on utilisera la notation classique dx au lieu de $d\lambda(x)$ sauf dans l'exercice 4.1. D'autre part, toutes les intégrales sont des intégrales de Lebesgue sauf mention du contraire.

4.4 ESPACE DES FONCTIONS LOCALEMENT INTÉGRABLES SUR $\mathbb{R}$

Il est important d'avoir des relations entre les intégrales sur $\mathbb{R}$ tout entier et celles sur les intervalles bornés.

Théorème 4.9

1°) Soit $f : \mathbb{R} \to [0,+\infty]$ une fonction borélienne. Alors $\displaystyle\lim_{a\to-\infty,\, b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx$ existe, appartient à $[0,+\infty]$ et on a

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty,\, b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

2°) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction borélienne, alors f est intégrable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\displaystyle\lim_{a\to-\infty,\, b\to+\infty} \int_a^b |f(x)|\,dx < +\infty$

3°) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable, alors

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty,\, b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Il peut arriver qu'une fonction borélienne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ soit intégrable sur tout compact et ne soit pas intégrable sur $\mathbb{R}$ (par exemple la fonction $x \mapsto e^x$). D'où la définition suivante.

Définition 4.6 *On appelle espace des fonctions localement intégrables et on note $\mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions intégrables sur tout intervalle borné et qui ne sont pas intégrables sur $\mathbb{R}$ tout entier.*

Il est clair que $\mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel et contient $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

EXERCICES

4.5 QUELQUES LACUNES DE L'INTÉGRALE DE RIEMANN

Exercice 4.1

1°) Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Montrer que f n'est pas Riemann-intégrable.

2°) Comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable, $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ l'est aussi. On a alors $\mathbb{Q}\cap[0,1] = (q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n définie sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \{q_0, q_1, \ldots, q_n\}, \\ 0 & \text{sinon}. \end{cases}$$

2.a Montrer que chaque f_n est Riemann-intégrable et calculer

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx\,.$$

2.b Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur $[0,1]$. Que peut-on en déduire ?

3°) On se place dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue. Montrer que f est Lebesgue-intégrable et vérifier qu'on peut appliquer le théorème de la convergence dominée (théorème 3.7).

Solution

1°) Montrons que f n'est pas Riemann-intégrable sur $[0,1]$.

Soit u une fonction en escalier sur $[0,1]$ minorant f et soit $\sigma = (a_0,\ldots,a_n)$ une subdivision associée à u. Comme chaque intervalle $]a_i,a_{i+1}[$ contient un irrationnel (car $\mathbb{Q}^c$ est dense dans $\mathbb{R}$) et u est constante sur $]a_i,a_{i+1}[$, alors $u \leqslant 0$ sur chaque $]a_i,a_{i+1}[$ et donc $\displaystyle\int_0^1 u(x)\,dx \leqslant 0$.

On montre de la même façon (en utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$) que si v est une fonction en escalier majorant f, alors $\displaystyle\int_0^1 v(x)\,dx \geqslant 1$.

Comme u et v sont deux fonctions en escalier arbitraires vérifiant $u \leqslant f \leqslant v$ et $\int_0^1 \big(v(x) - u(x)\big)\,dx \geqslant 1$, la fonction f n'est pas Riemann-intégrable en vertu du théorème 4.1.

2°) 2.a Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, la fonction f_n est une fonction en escalier, nulle en dehors des rationnels $q_0, q_1, \ldots, q_n$; elle est donc Riemann-intégrable et $\int_0^1 f_n(x)\,dx = 0$.

On peut aussi remarquer que chaque f_n est continue sur $[0,1]$ sauf aux $(n+1)$ points rationnels $q_0, q_1, \ldots, q_n$; elle est donc Riemann-intégrable en vertu du théorème 4.7.

2.b Soit $x \in [0,1]$. Alors

- si x est irrationnel, $f_n(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$;
- si x est rationnel, il existe un indice $p \in \mathbb{N}$ tel que $x = q_p$. Ainsi, pour $n \geqslant p$, $f_n(x) = 1$; d'où $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 1$.

Finalement, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement en croissant vers la fonction $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$. Or f n'est pas Riemann-intégrable par 1°). Ainsi, la limite ponctuelle d'une suite de fonctions Riemann-intégrables n'est pas toujours Riemann-intégrable et le théorème de la convergence dominée (théorème 3.7) ne peut pas s'appliquer dans le cadre de l'intégrale de Riemann.

3°) Maintenant, plaçons nous dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue.

$$(E, \mathcal{T}, \mu) = \big([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda\big).$$

La fonction f est l'indicatrice d'un borélien donc c'est une fonction étagée et bornée. En appliquant la définition 3.3 on a

$$\int_{[0,1]} f\,d\lambda = \lambda(\mathbb{Q}\cap[0,1]) = 0$$

(voir à ce propos les corrigés des exercices 2.7 et 2.9). Donc f est Lebesgue-intégrable d'intégrale nulle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est borélienne et $|f_n| \leqslant \mathbb{1}_{[0,1]}$. Comme la fonction $\mathbb{1}_{[0,1]}$ est λ-intégrable sur $[0,1]$, on a, en vertu du théorème de la convergence dominée (théorème 3.7), f est λ-intégrable et

$$\int_{[0,1]} f\,d\lambda = \lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} f_n\,d\lambda = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 0.$$

Remarque 4.6 On voit sur cet exemple l'amélioration apportée par l'intégrale de Lebesgue sur l'intégrale de Riemann pour le passage à la limite sous le signe intégral.

Exercice 4.2

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues réelles sur $[0,1]$.

1°) On pose, pour tout $f \in E$, $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt$. Vérifier que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur E.

2°) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n^2}, \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } \dfrac{1}{n^2} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_1)$.

3°) Montrer qu'il n'existe aucune fonction f continue sur $[0,1]$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$. Pour cela, supposer qu'il existe $f \in E$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$ et montrer que

$$\int_0^{1/M^2} |f_n(x) - f(x)|\,dx \geqslant \frac{1}{M} - \frac{1}{n}$$

où $M = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ et $n \geqslant M$.

4°) Montrer que la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge dans $\mathcal{L}^1(0,1)$ vers la fonction définie sur $]0,1]$ par $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Solution

1°) – Soient $f \in E$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. On a

$$\|\alpha f\|_1 = \int_0^1 |\alpha f(t)|\,dt = |\alpha| \int_0^1 |f(t)|\,dt = |\alpha|\|f\|_1.$$

– Soit $(f,g) \in E \times E$. Alors

$$\|f+g\|_1 = \int_0^1 |f(t)+g(t)|\,dt \leqslant \int_0^1 (|f(t)| + |g(t)|)\,dt = \|f\|_1 + \|g\|_1.$$

– Au lieu de montrer que $\|f\|_1 = 0$ entraîne $f = 0$, nous allons montrer la contraposée. Soit $f \in E$ non identiquement nulle sur $[0,1]$. Il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Comme f est continue en x_0, il existe un voisinage $[a,b]$ de x_0 (inclus dans $[0,1]$) tel que pour tout $x \in]a,b[$ on ait

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \frac{1}{2}|f(x_0)|.$$

D'où

$$\int_0^1 |f(t)|\,dt \geqslant \int_a^b |f(t)|\,dt \geqslant \int_a^b \frac{1}{2}|f(x_0)|\,dt = \frac{1}{2}(b-a)|f(x_0)| > 0.$$

Ainsi, $\|\cdot\|_1$ est une norme sur E.

2°) Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Montrons qu'il existe un entier $N = N(\varepsilon)$ tel que pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ vérifiant $N \leqslant m \leqslant n$, on ait

$$\|f_m - f_n\|_1 \leqslant \varepsilon.$$

Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $m < n$.

$$\begin{aligned}\|f_m - f_n\|_1 &= \int_0^1 |f_n(t) - f_m(t)|\,dt \\ &= \int_0^{1/n^2} (n-m)\,dt + \int_{1/n^2}^{1/m^2} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} - m\right) dt \\ &= \frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \frac{1}{m}\,.\end{aligned}$$

Comme $\lim_{m\to+\infty} \frac{1}{m} = 0$, il existe $N = N(\varepsilon)$ tel que $\frac{1}{m} < \varepsilon$.

3°) Supposons qu'il existe une fonction f continue sur $[0,1]$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$. La fonction f ne peut pas être identiquement nulle sinon, on aurait $\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_1 = 0$. Ce qui n'est pas vrai puisque $\|f_n\|_1 = 2 - \frac{1}{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
La fonction f étant continue sur $[0,1]$, donc elle est bornée ; posons $M = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ (il est clair $M > 0$ puisque f est non identiquement nulle). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geqslant M$. Alors

$$\begin{aligned}\int_0^{1/M^2} |f_n(t) - f(t)|\,dt &\geqslant \int_0^{1/M^2} \big||f_n(t)| - |f(t)|\big|\,dt \\ &\geqslant \int_0^{1/M^2} \big(f_n(t) - M\big)\,dt\,. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Or

$$\begin{aligned}\int_0^{1/M^2} \big(f_n(t) - M\big)\,dt &= \int_0^{1/M^2} f_n(t)\,dt - \int_0^{1/M^2} M\,dt \\ &= \int_0^{1/n^2} f_n(t)\,dt + \int_{1/n^2}^{1/M^2} f_n(t)\,dt - \frac{1}{M} \\ &= \int_0^{1/n^2} n\,dt + \int_{1/n^2}^{1/M^2} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt - \frac{1}{M} \\ &= \frac{1}{M} - \frac{1}{n}\,. \end{aligned} \tag{4.2}$$

En faisant tendre n vers l'infini et en combinant (4.1) et (4.2), on obtient $0 \geqslant \frac{1}{M}$ ce qui est absurde.

Commentaire : En fait, on vient de montrer qu'il n'existe pas de fonction Riemann-intégrable telle que $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$ puisqu'on n'a pas utilisé la continuité de f mais seulement le fait qu'elle est bornée, ce qui est le cas de toute fonction Riemann-intégrable. Autrement dit, on vient de montrer que l'espace vectoriel normé $\big(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{C}), \|\cdot\|_1\big)$ n'est pas complet et que l'espace vectoriel des fonctions Riemann-intégrables sur $[0,1]$, qu'on note $\mathcal{R}([0,1])$ muni de la semi-norme $\|\cdot\|_1$ n'est pas complet non plus. On verra au chapitre 6 que le complété de $\big(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{C}), \|\cdot\|_1\big)$ et de $\big(\mathcal{R}([0,1]), \|\cdot\|_1\big)$ est $\big(\mathcal{L}^1([0,1]), \|\cdot\|_1\big)$ espace des fonctions Lebesgue-intégrables sur $[0,1]$ qui est complet d'après le théorème 3.6 (ii)).

4°) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale impropre $\int_0^1 \left|f_n(t) - \frac{1}{\sqrt{t}}\right| dt$ est convergente et on a

$$\int_0^1 \left|f_n(t) - \frac{1}{\sqrt{t}}\right| dt = \int_0^{1/n^2} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} - n\right) dt = \frac{1}{n}\,.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \left\|f_n - \frac{1}{\sqrt{t}}\right\|_1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0\,.$$

On remarquera que la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ n'est pas Riemann-intégrable sur $[0,1]$ puisqu'elle n'est pas bornée (voir remarque 4.2 mais qu'elle est Lebesgue-intégrable puisque l'intégrale impropre $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ converge.

Exercice 4.3

Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues réelles sur $[0,1]$.

1°) On pose, pour tout $f \in E$, $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2\,dt}$. Vérifier que $\|\cdot\|_2$ est une norme sur E.

2°) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n^3}\,, \\ \frac{1}{\sqrt[3]{x}} & \text{si } \frac{1}{n^3} \leqslant x \leqslant 1\,. \end{cases}$$

Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_2)$.

3°) Montrer qu'il n'existe aucune fonction f continue sur $[0,1]$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_2 = 0$. Pour cela, supposer qu'il existe $f \in E$ non identiquement nulle telle que $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_2 = 0$ et montrer que

$$\int_0^{1/M^3} |f_n(x) - f(x)|^2\,dx \geqslant \frac{1}{M} - \frac{2}{n} + \frac{M}{n^2}$$

où $M = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ et $n \geqslant M$.

4°) Montrer que la suite $(f_n)n \in \mathbb{N}^*$ converge en moyenne quadratique sur $]0,1]$ vers la fonction $x \mapsto g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Autrement dit

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \left|f_n(t) - \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\right|^2 dt = 0\,.$$

Solution

1°) – Soient $f \in E$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. On a

$$\|\alpha f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |\alpha f(t)|^2\,dt} = |\alpha|\sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2\,dt} = |\alpha|\|f\|_2\,.$$

– Soit $(f,g) \in E \times E$. Alors d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}\|f+g\|_2^2 &= \int_0^1 |f(t)|^2\,dt + \int_0^1 |g(t)|\,dt + 2\int_0^1 |f(t)g(t)|\,dt\\ &\leqslant \int_0^1 |f(t)|^2\,dt + \int_0^1 |g(t)|^2\,dt + 2\sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2\,dt}\sqrt{\int_0^1 |g(t)|^2\,dt}\\ &\leqslant (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2\end{aligned}$$

d'où $\|f+g\|_2 \leqslant \|f\|_2 + \|g\|_2$.

– Pour montrer que $\|f\|_2 = 0$ entraîne $f = 0$, on fait le même raisonnement que la première question de l'exercice précédent 4.2 en remplaçant $f(x)$ par $\left(f(x)\right)^2$ et $f(x_0)$ par $\left(f(x_0)\right)^2$.

Ainsi, $\|\cdot\|_2$ est une norme sur E.

2°) Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Montrons qu'il existe un entier $N = N(\varepsilon)$ tel que pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ vérifiant $N \leqslant m \leqslant n$, on ait

$$\|f_m - f_n\|_2 \leqslant \varepsilon\,.$$

On a pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $m < n$,

$$\begin{aligned}\|f_m - f_n\|_2^2 &= \int_0^1 |f_n(t) - f_m(t)|^2\,dt\\ &= \int_0^{1/n^3} (n-m)^2\,dt + \int_{1/n^3}^{1/m^3}\left(\frac{1}{\sqrt{t}} - m\right)^2 dt\\ &= \frac{1}{m} - \frac{2}{n} + \frac{m}{n^2}\,.\end{aligned}$$

D'où

$$\|f_m - f_n\|_2 \leqslant \sqrt{\frac{1}{m} - \frac{1}{n}} \leqslant \sqrt{\frac{1}{m}}\,.$$

Comme $\lim\limits_{m\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{m}} = 0$, il existe $N = N(\varepsilon)$ tel que pour tout $m > N$, on ait $\dfrac{1}{\sqrt{m}} < \varepsilon$.

Ainsi, la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_2)$.

3°) Supposons qu'il existe une fonction f continue sur $[0,1]$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_2 = 0$.

– Tout d'abord, La fonction f ne peut pas être identiquement nulle, sinon, on aurait $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n\|_2 = 0$. Ce qui n'est pas vraie puisque $\|f_n\|_2 = \sqrt{3 - \dfrac{2}{n}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

– La fonction f étant continue sur $[0,1]$, donc elle est bornée ; posons $M = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)| > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geqslant M$. On vérifie alors que

$$\int_0^{1/M^3} |f_n(t) - f(t)|^2\,dt \geqslant \int_0^{1/M^3} \left(f_n(t) - M\right)^2 dt = \frac{1}{M} - \frac{2}{n} + \frac{M}{n^2}$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient $0 \geqslant \dfrac{1}{M}$ ce qui est absurde.

Commentaire : On vient de montrer qu'il n'existe pas de fonction Riemann-intégrable telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_2 = 0$ puisqu'on n'a pas utilisé la continuité de f mais seulement le fait qu'elle est bornée, ce qui est le cas de toute fonction Riemann-intégrable. Autrement dit, on vient de montrer que l'espace préhilbertien $\left(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{C}), \|\cdot\|_2\right)$ n'est pas complet et que l'espace vectoriel des fonctions de carré Riemann-intégrables sur $[0,1]$, qu'on note $\mathcal{R}([0,1])$ muni de la semi-norme $\|\cdot\|_2$ n'est pas complet non plus. On verra au chapitre 6 que le complété de $\left(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_2\right)$ et de $\left(\mathcal{R}([0,1]), \|\cdot\|_2\right)$ est l'espace de Hilbert $\left(L^2([0,1]), \|\cdot\|_2\right)$ espace des fonctions de carré Lebesgue-intégrables sur $[0,1]$ qui est complet comme tout espace de Hilbert (voir le théorème 6.5).

4°) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 \left|f_n(t) - \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\right|^2 dt$ est convergente et on a

$$\int_0^1 \left|f_n(t) - \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\right|^2 dt = \int_0^{1/n^3} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{t}} - n\right)^2 dt = \frac{1}{n}\,.$$

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left\|f_n - \dfrac{1}{\sqrt[3]{t}}\right\|_2 = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. On remarquera que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ n'est pas de carré Riemann-intégrable puisqu'elle n'est pas bornée (voir remarque 4.2) mais qu'elle est de carré Lebesgue-intégrable puisque l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt[3]{t}}\right)^2 dt$ converge.

Exercice 4.4

On considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $[0,+\infty[$ par $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}e^{-x}$.

1°) Montrer que la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$ vers la fonction nulle.

On pourra utiliser la *formule de Stirling* ou *formule de Wallis*

$$n! \sim_{+\infty} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Pour une démonstration de cette formule, voir l'exercice 4.33.

2°) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$. Que constate-t-on ?

Solution

1°) – Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et on a $f_n'(x) = \dfrac{x^{n-1}}{n!}e^{-x}(n-x)$. Donc f_n est croissante sur $[0, n]$ et décroissante sur $[n, +\infty[$. On déduit des variations de f_n que $u_n = \sup\limits_{x \in [0,+\infty[} f_n(x) = \dfrac{n^n}{n!}e^{-n}$.

– En utilisant la formule de Stirling (voir exercices 4.33 et 4.34), on a

$$u_n \sim_{+\infty} \frac{n^n e^{-n}}{\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$$

d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$. Donc la suite $(f_n)_{n \geqslant 1}$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$ vers la fonction nulle.

2°) En intégrant par parties, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{n!}e^{-x}\,dx = \left[-\frac{x^n}{n!}e^{-x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-x}\,dx$$

soit $I_n = I_{n-1}$.

Par ailleurs $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = 1$. D'où $I_n = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On constate que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = 1 \neq 0 = \int_0^{+\infty} \lim_{n \to +\infty} f_n(x)\,dx.$$

Remarque 4.7 L'exercice 4.4 montre que la convergence uniforme sur un intervalle non borné n'entraîne pas que la limite de l'intégrale est égale à l'intégrale de la limite.

4.6 INTÉGRALES IMPROPRES

Exercice 4.5

Soit $g \in \mathcal{C}([0, +\infty[, [0, +\infty[)$ une fonction périodique de période $T > 0$. Montrer que la fonction $f : t \mapsto f(t) = g(t)e^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et que

$$\int_0^{+\infty} g(t)e^{-t}\,dt = \frac{1}{1-e^{-T}} \int_0^T g(y)e^{-y}\,dy.$$

Application : calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}|\sin x|\,dx$.

Solution

– Comme g est continue et périodique, g est bornée donc il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in [0, +\infty[$,

$$0 \leqslant g(x) \leqslant M.$$

Par suite,

$$\int_0^{+\infty} g(x)e^{-x}\,dx \leqslant M \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = M.$$

L'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ est absolument convergente donc la fonction f est intégrable sur $[0, +\infty[$ d'après le théorème 4.8.

– Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a, après le changement de variable $y = x + kT$,

$$\begin{aligned}\int_0^{NT} g(y)e^{-y}\,dy &= \sum_{k=0}^{N-1} \int_{kT}^{(k+1)T} g(y)e^{-y}\,dy \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^T g(x+kT)e^{-(x+kT)}\,dx \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} e^{-kT} \int_0^T g(kT+x)e^{-x}\,dx \\ &= \frac{1-e^{-NT}}{1-e^{-T}} \int_0^T g(x)e^{-x}\,dx.\end{aligned}$$

En faisant tendre N vers l'infini, on obtient

$$\int_0^{+\infty} g(y)e^{-y}\,dy = \frac{1}{1-e^{-T}} \int_0^T g(x)e^{-x}\,dx.$$

Application : la fonction $x \mapsto |\sin x|$ est périodique de période π. Donc la formule précédente entraîne que

$$\int_0^{+\infty} |\sin x| e^{-x}\,dx = \frac{1}{1-e^{-\pi}} \int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx,$$

dont le calcul est facile soit en intégrant deux fois par parties ou soit en pensant à la représentation complexe du sinus.

Exercice 4.6 (Fonction Bêta d'Euler)

Pour quelles valeurs des paramètres réels r et s, la fonction $f : x \mapsto f(x) = x^{r-1}(1-x)^{s-1}$ est-elle intégrable sur $]0, 1[$?

Solution

La fonction $x \mapsto f(x) = x^{r-1}(1-x)^{s-1}$ est continue et positive pour $x \in]0, 1[$ (elle est même continue sur le segment $[0, 1]$ si $r \geqslant 1$ et $s \geqslant 1$). Mais, elle n'est pas bornée si $r < 1$ ou $s < 1$. Donc f est intégrable si et seulement si l'intégrale impropre $B(r, s) = \displaystyle\int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{s-1}\,dx$ converge d'après le théorème 4.8. Comme f est positive, on peut appliquer la relation de Chasles et on a

$$B(r, s) = I(r, s) + J(r, s)$$

où

$$I(r, s) = \int_0^{1/2} x^{r-1}(1-x)^{s-1}\,dx \quad \text{et} \quad J(r, s) = \int_{1/2}^1 x^{r-1}(1-x)^{s-1}\,dx.$$

L'intégrale $B(r, s)$ converge si et seulement si $I(r, s)$ et $J(r, s)$ convergent.

- Au voisinage de $0, f(x) \sim x^{r-1} = \dfrac{1}{x^{1-r}}$ donc $I(r,s)$ converge si et seulement si $1-r<1$ soit $r>0$, et pour tout $s \in \mathbb{R}$.
- Au voisinage de $1, f(x) \sim (1-x)^{s-1} = \dfrac{1}{(1-x)^{1-s}}$ donc $J(r,s)$ converge si et seulement si $1-s<1$ soit $s>0$, et pour tout $r \in \mathbb{R}$.

En définitive, $B(r,s)$ converge si et seulement si $r>0$ et $s>0$. On montrera à l'exercice 5.12 que

$$B(r,s) = \frac{\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)}$$

(voir exercice 4.33 pour la fonction Γ).

Exercice 4.7

Montrer que la fonction $x \mapsto x^r \left(\ln \dfrac{1}{x}\right)^s$ est intégrable sur $]0,1[$ si $r>-1$ et $s>-1$, puis exprimer $I(r,s) = \displaystyle\int_0^1 x^r \left(\ln \frac{1}{x}\right)^s dx$ en fonction de Γ. On rappelle que $\Gamma(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{p-1}\, dt$ pour tout $p \in]0,+\infty[$ (voir exercices 4.33 et aussi 5.12).

Solution

La fonction $x \mapsto f(x) = x^r \left(\ln \dfrac{1}{x}\right)^s$ est continue et positive sur $]0,1[$. Donc soit $I(r,s)$ est fini, soit $I(r,s) = +\infty$. Posons

$$J(r,s) = \int_0^{1/2} x^r \left(\ln \frac{1}{x}\right)^s dx \quad \text{et} \quad K(r,s) = \int_{1/2}^1 x^r \left(\ln \frac{1}{x}\right)^s dx.$$

- Étude de la convergence de $K(r,s)$.

  Au voisinage de 1, $f(x) \sim \left(\dfrac{1}{x} - 1\right)^s \sim (1-x)^s$. Or $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{(1-x)^{-s}}\, dx$ converge si et seulement si $-s<1$ soit $s>-1$. Donc $K(r,s)<+\infty$ si et seulement si $s>-1$ et $r \in \mathbb{R}$.
- Étude de la convergence de $J(r,s)$. On suppose que $s>-1$.

  Il est clair que si $r>0, f$ est prolongeable par continuité au point 0 donc f est Riemann-intégrable sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

  Si $-1<r\leqslant 0$, en prenant $\alpha = \dfrac{1-r}{2}$, on a (puisque $\dfrac{1+r}{2}>0$)

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1+r}{2}} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{s}} = 0,$$

  comme $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1-r}{2} < 1$, le critère de Riemann (théorème 4.5) entraîne que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{1/2} f(x)\, dx$ converge pour tout $s \in \mathbb{R}$.

Si $r=-1$, en effectuant le changement de variable $y = \dfrac{1}{x}$, on obtient

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x}\left(\ln \frac{1}{x}\right)^s dx = \int_2^{+\infty} \frac{1}{y}(\ln y)^s\, dy = +\infty \quad \text{puisque } s>-1.$$

Si $r<-1$, on a puisque $1+r<0$,

$$\lim_{x\to 0^+} xf(x) = \lim_{x\to 0^+} x^{1+r}\left(\ln \frac{1}{x}\right)^s = +\infty,$$

donc le critère de Riemann (théorème 4.5) entraîne que $\displaystyle\int_0^{1/2} f(x)\, dx = +\infty$.

On suppose que $(r,s) \in]-1,+\infty[^2$. Le changement de variable $\ln \dfrac{1}{x} = y$ entraîne que

$$I(r,s) = \int_0^{+\infty} e^{-(r+1)y} y^s\, dy$$

puis après le changement de variable $t = (r+1)y$, on trouve

$$I(r,s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{t^s}{(r+1)^{s+1}}\, dt = \frac{\Gamma(s+1)}{(r+1)^{s+1}}.$$

Exercice 4.8

1°) Pour quelles valeurs du paramètre positif α la fonction $t \mapsto f(t) = \dfrac{e^{it}}{t^\alpha}$ est-elle intégrable sur $[1,+\infty[$?

2°) Même question pour $g(t) = \dfrac{\sin t}{t^\alpha}$ et $h(t) = \dfrac{\cos t}{t^\alpha}$ sur $[1,+\infty[$?

3°) Même question pour $g(t) = \dfrac{\sin t}{t^\alpha}$ et $h(t) = \dfrac{\cos t}{t^\alpha}$ sur $[0,1]$?

4°) Même question pour $g(t) = \dfrac{\sin t}{t^\alpha}$ et $h(t) = \dfrac{\cos t}{t^\alpha}$ sur $[0,+\infty[$?

Solution

1°) La fonction f est continue sur $[1,+\infty[$ et $|f(t)| = \dfrac{1}{t^\alpha}$. Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\, dt < +\infty$ si et seulement si $\alpha>1$. La proposition 4.1 entraîne que f est intégrable sur $[1,+\infty[$ si $\alpha>1$. Montrons que f est semi-intégrable sur $[1,+\infty[$ pour tout $\alpha>0$.

La fonction $t \mapsto |f(t)| = \dfrac{1}{t^\alpha}$ est continue, décroissante et $\lim\limits_{t\to+\infty} |f(t)| = 0$ pour tout $\alpha>0$. De même, la fonction $t \mapsto v(t) = e^{it}$ est continue sur $[1,+\infty[$ et on a pour tout $(A,B) \in [1,+\infty[^2$ tel que $A<B$,

$$\left|\int_A^B e^{it}\, dt\right| \leqslant 2.$$

Le critère d'Abel entraîne alors que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ converge.

Remarque 4.8 On peut directement établir la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^\alpha}\,dt$ en intégrant par parties. En effet, on a pour tout $x > 1$,

$$\int_1^x \frac{e^{it}}{t^\alpha}\,dt = i\left(e^i - \frac{e^{ix}}{x^\alpha}\right) - i\alpha \int_1^x \frac{e^{it}}{t^{\alpha+1}}\,dt\,.$$

Or $\left|\frac{e^{it}}{t^{\alpha+1}}\right| = \frac{1}{t^{\alpha+1}}$ et $\alpha + 1 > 1$ donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^{\alpha+1}}\,dt$ est absolument convergente et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{ix}}{x^\alpha} = 0$ donc

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{e^{it}}{t^\alpha}\,dt = \int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^\alpha}\,dt = ie^i - i\alpha \int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^{\alpha+1}}\,dt\,.$$

2°) Comme $f = g + ih$, on déduit de la première question que les fonctions $x \mapsto \frac{\sin x}{x^\alpha}$ et $x \mapsto \frac{\cos x}{x^\alpha}$ sont intégrables sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$ et sont semi-intégrables si et seulement si $\alpha \in]0, 1]$.

3°) La fonction g est continue sur $]0, 1]$. Par ailleurs, au voisinage de 0, on a

$$\left|\frac{\sin t}{t^\alpha}\right| = \frac{\sin t}{t^\alpha} \sim \frac{t}{t^\alpha} = \frac{1}{t^{\alpha-1}}\,.$$

Donc la fonction g est intégrable sur $[0, 1]$ si et seulement si $\alpha - 1 < 1$ c'est-à-dire si $\alpha < 2$.

La fonction h est continue et positive sur $]0, 1]$ et au voisinage de 0, on a

$$\left|\frac{\cos t}{t^\alpha}\right| = \frac{\cos t}{t^\alpha} \sim \frac{1}{t^\alpha}\,.$$

Donc la fonction h est intégrable sur $[0, 1]$ si et seulement si $\alpha < 1$.

4°)
- La fonction g est intégrable sur $[0, +\infty[$ si et seulement si g est intégrable sur $[1, +\infty[$ et g est intégrable sur $[0, 1]$ donc si et seulement si $1 < \alpha < 2$ d'après les questions 2°) et 3°).
- Quel que soit $\alpha \in [0, +\infty[$, h n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$.

Exercice 4.9

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$.

Solution

La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$ et prolongeable par continuité au point 0 en posant $f(0) = 1$. On a vu dans l'exercice précédent 4.8 que f est semi-intégrable et on montre d'ailleurs que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$ (voir exercice 5.9).

D'après la relation de Chasles, on a pour tout $n > 0$,

$$\int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx\,.$$

Le changement de variable $x = y + k\pi$ entraîne que

$$\begin{aligned}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx &= \int_0^\pi \frac{|\sin(k\pi + y)|}{k\pi + y}\,dy \\ &= \int_0^\pi \frac{|\sin y|}{k\pi + y}\,dy \\ &\geqslant \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^\pi \sin y\,dy = \frac{2}{(k+1)\pi}\end{aligned}$$

donc

$$\int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geqslant \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\,,$$

d'où

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = +\infty\,.$$

Autre méthode : On peut aussi montrer que l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$ diverge et donc que l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ diverge aussi puisque $\frac{\sin^2 x}{x} \leqslant \frac{|\sin x|}{x}$ pour tout $x \in [1, +\infty[$.

Exercice 4.10 (Intégrales de Bertrand)

1°) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^\gamma (\ln x)^\beta}$ est intégrable sur $[2, +\infty[$ pour $\gamma > 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$ ou $\gamma = 1$ et $\beta > 1$.

2°) En déduire que f est intégrable sur $]0, 1/2[$ pour $\gamma < 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$ ou $\gamma = 1$ et $\beta > 1$.

Solution

1°) La fonction f est continue et positive sur $[2, +\infty[$. On note $I_{\gamma,\beta}$ la valeur de l'intégrale de f.

Premier cas : $\gamma > 1$.

Pour $\alpha \in]1, \gamma[$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = 0$ pour tout $\beta \in \mathbb{R}$. Donc le critère de Riemann (théorème 4.5 3°)) entraîne que $\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

Deuxième cas : $\gamma = 1$.

Le changement de variable $y = \ln x$ entraîne que

$$\int_2^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1}{y^\beta}\,dy\,.$$

Or cette dernière intégrale converge si $\beta > 1$ et diverge si $\beta \leqslant 1$.

Troisième cas : $\gamma < 1$.

Alors dans ce cas, $\lim_{x \to +\infty} xf(x) = +\infty$ pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, donc le critère de Riemann (théorème 4.5 3°)) entraîne que $\int_2^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$.

2°) La fonction $x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{x^\gamma |\ln x|^\beta}$ est continue et positive sur $]0, 1/2]$. En effectuant le changement de variable $x = \dfrac{1}{y}$, on obtient

$$J_{\gamma,\beta} = \int_0^{1/2} \frac{1}{x^\gamma |\ln x|^\beta}\,dx = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{2-\gamma}} \frac{1}{(\ln x)^\beta}\,dx\,.$$

Ainsi, $J_{\gamma,\beta}$ converge si et seulement si $I_{2-\gamma,\beta}$ converge, donc si et seulement si $2-\gamma > 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$ ou bien $2 - \gamma = 1$ et $\beta > 1$. En conclusion, f est intégrable sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right[$ si et seulement si $\gamma < 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$ ou $\gamma = 1$ et $\beta > 1$.

Commentaire : Le raisonnement précédent est valable dans la première question pour tout $a > 1$ comme borne inférieure de l'intégrale (au lieu de 2) et dans la deuxième question pour tout $0 < b < 1$ dans la borne supérieure (au lieu de $\dfrac{1}{2}$).

4.7 APPLICATION DU THÉORÈME D'INTÉGRATION D'UNE SÉRIE DE FONCTIONS POSITIVES

Exercice 4.11

Vérifier que la fonction $x \mapsto f(x) = \ln x \ln(1-x)$ est prolongeable par continuité aux points 0 et 1, et calculer $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Solution

Continuité

- Il est clair que f est continue sur $]0, 1[$.
- Au voisinage de 0, $f(x) \sim -x \ln x$; en outre $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$, donc $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, ainsi f est prolongeable par continuité au point 0.
- Même raisonnement au voisinage de 1, il suffit de remarquer que
$$f(x) \underset{1}{\sim} (x-1)\ln(1-x)\,.$$

Comme f est continue sur le segment $[0, 1]$, elle est Riemann-intégrable sur le segment $[0, 1]$ et le théorème 4.6 entraîne que f est intégrable sur $[0, 1]$.

Calcul de l'intégrale

On sait que pour tout $x \in]-1, 1[$, $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n}$ donc pour $x \in]0, 1[$,

$$\ln x \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{x^n \ln x}{n}\,.$$

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $x \mapsto -\dfrac{x^n \ln x}{n}$ est continue sur $[0, 1]$ et positive. Donc le théorème d'intégration d'une série de fonctions positives (théorème 3.4) est applicable et on a

$$\int_0^1 \ln x \ln(1-x)\,dx = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 x^n \ln x\,dx$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} \quad \text{car} \quad \int_0^1 x^n \ln x\,dx = \frac{-1}{(n+1)^2}\,.$$

Commentaire : Si on avait traité le même exercice dans le cadre de l'intégrale de Riemann, on aurait été obligé de vérifier que la série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n \ln x}{n}$ convergeait uniformément pour pouvoir intervertir les signes $\int$ et $\sum$.

Exercice 4.12

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_0^{+\infty} e^{-nx} \operatorname{Arctan} x\,dx$. Montrer que la série de terme général (u_n) converge et calculer sa somme sous forme de l'intégrale d'une fonction intégrable.

Solution

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f_n(x) = e^{-nx} \operatorname{Arctan} x$ est continue et positive. Donc le théorème d'intégration d'une série de fonctions positives (théorème 3.4) est applicable et on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-nx} \operatorname{Arctan} x\,dx = \int_0^{+\infty} \left(\operatorname{Arctan} x \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} \right) dx$$
$$= \int_0^{+\infty} \operatorname{Arctan} x \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}\,dx$$
$$= \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} x}{e^x - 1}\,dx\,.$$

Montrons que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \dfrac{\operatorname{Arctan} x}{e^x - 1}\,dx$ converge. En effet, $f(x) \sim_0 1$ et $f(x) \sim_{+\infty} \dfrac{\pi/2}{e^x}$. Donc le théorème 4.8 entraîne que la fonction $x \mapsto f(x) = \dfrac{\operatorname{Arctan} x}{e^x - 1}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. Ainsi, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge et a pour somme $\int_0^{+\infty} \dfrac{\operatorname{Arctan} x}{e^x - 1}\,dx$.

Commentaire : En intégrant par parties, on montre que $u_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$. Ce qui implique la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, mais ne donne pas sa somme. Alors que le théorème d'intégration d'une série de fonctions positives (théorème 3.4) donne et la convergence et la somme.

Exercice 4.13

Montrer que, pour tout a et b dans $]0,+\infty[$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+nb)^2}.$$

Solution

Tout d'abord, pour tout $x > 0$,

$$\frac{1}{1-e^{-bx}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-bx})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nbx},$$

et donc $\dfrac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} xe^{-(a+bn)x}$.

D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f_n(x) = xe^{-(a+bn)x}$ est continue et positive. Donc le théorème d'intégration d'une série de fonctions positives (théorème 3.4) est applicable et on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} xe^{-(a+nb)x}\,dx.$$

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-(a+nb)x}\,dx$ converge ; en effet, le changement de variable $y = (a+nb)x$ donne

$$\int_0^{+\infty} xe^{-(a+nb)x}\,dx = \frac{1}{(a+bn)^2}\int_0^{+\infty} ye^{-y}\,dy = \frac{1}{(a+bn)^2}$$

car en intégrant par parties, on vérifie que $\displaystyle\int_0^{+\infty} ye^{-y}\,dy = 1$. D'où

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+nb)^2}.$$

Exercice 4.14

On pose, pour tout $x \in [1,+\infty[$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx}.$$

Calculer $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$.

Solution

Pour tout $n \geqslant 1$, la fonction f_n définie sur $[1+\infty[$ par $f_n(x) = ne^{-nx}$ est continue et positive. Donc le théorème d'intégration d'une série de fonctions positives (théorème 3.4) est applicable et on a

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_1^{+\infty} ne^{-nx}\,dx.$$

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} ne^{-nx}\,dx$ converge et on a

$$\int_1^{+\infty} ne^{-nx}\,dx = \left[-e^{-nx}\right]_1^{+\infty} = e^{-n},$$

donc

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n} = e^{-1}\frac{1}{1-e^{-1}} = \frac{1}{e-1}.$$

Exercice 4.15

Établir l'identité

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}.$$

Solution

- La fonction $x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{x^x} = e^{-x\ln x}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et prolongeable par continuité au point 0 en posant $f(0) = 1$. Elle est donc intégrable sur $[0,1]$ en vertu du théorème 4.6.
- Par ailleurs, pour tout $x > 0$, $\dfrac{1}{x^x} = e^{-x\ln x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x\ln x)^n}{n!}$. En plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto f_n(x) = \dfrac{(-x\ln x)^n}{n!}$ est continue et positive sur l'intervalle $[0,1]$. Donc le théorème d'intégration d'une série de fonctions positives (théorème 3.4) est applicable et on a
$$\int_0^1 \frac{1}{x^x}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-x\ln x)^n}{n!}\,dx.$$
- Posons pour tout $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $I_{m,n} = \displaystyle\int_0^1 x^n(\ln x)^m\,dx$. En intégrant par parties, on obtient
$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln x)^m\right]_0^1 - \frac{m}{n+1}\int_0^1 x^n(\ln x)^{m-1}\,dx \\ &= 0 - \frac{m}{n+1} I_{m-1,n} \end{aligned}$$
donc par récurrence immédiate,
$$I_{m,n} = (-1)^m \frac{m!}{(n+1)^m} I_{0,n} = (-1)^m \frac{m!}{(n+1)^{m+1}}.$$
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$\int_0^1 \frac{(-x\ln x)^n}{n!}\,dx = \frac{(-1)^n}{n!} I_{n,n} = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}.$$
- D'où
$$\int_0^1 \frac{1}{x^x}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}.$$

Exercice 4.16

Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$, boréliennes, et à valeurs positives. On pose

$$A = \liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx\,,\quad A' = \int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx\,,$$
$$B = \limsup_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx\,,\quad B' = \int_{\mathbb{R}} \limsup_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx\,.$$

1°) 1.a Calculer A, A', B et B' pour la suite de fonctions de terme général

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n}\,,\\ n^2\left(\dfrac{2}{n} - x\right) & \text{si } \dfrac{1}{n} \leqslant x \leqslant \dfrac{2}{n}\,,\\ 0 & \text{sinon}\,. \end{cases}$$

1.b Même question pour la suite de fonctions de terme général

$$f_n = \mathbb{1}_{[0,\frac14]} \text{ si } n \text{ est pair et } f_n = \mathbb{1}_{[\frac14,1]} \text{ si } n \text{ est impair}\,.$$

2°) On revient au cas général.

2.a Montrer que $A' \leqslant A \leqslant B$ et $A' \leqslant B'$.

2.b Peut-on comparer B et B' ?

3°) Le lemme de Fatou (théorème 3.3) est-il vrai pour des suites de fonctions numériques boréliennes définies sur $\mathbb{R}$ de signe quelconque ?

Solution

1°) 1.a Pour tout $x \in]-\infty, 0]$, $f_n(x) = 0$, donc $\liminf_{n\to+\infty} f_n(x) = \limsup_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. Soit $x \in]0, +\infty[$, alors il existe entier naturel n assez grand tel que $\dfrac{2}{n} < x$ et donc $f_n(x) = 0$. Dans ce cas encore, $\liminf_{n\to+\infty} f_n(x) = \limsup_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. D'où $A' = B' = 0$.

D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = \int_0^{1/n} n^2 x\,dx + \int_{1/n}^{2/n} n^2\left(\frac{2}{n} - x\right)dx = 1\,.$$

D'où $A = B = 1$.

1.b On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\frac14} dx = \frac14 & \text{si } n \text{ est pair}\,,\\ \displaystyle\int_{\frac14}^{1} dx = \frac34 & \text{si } n \text{ est impair}\,, \end{cases}$$

donc $A = \liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = \dfrac14$ et $B = \limsup_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = \dfrac34$.

Si $x \in]-\infty, 0[\cup \{\frac14\} \cup]1, +\infty[$, la suite $(f_n(x))_{n\geqslant 0}$ est constante, donc

$$\liminf_{n\to+\infty} f_n(x) = \limsup_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[\,,\\ 1 & \text{si } x = \dfrac14\,. \end{cases}$$

Si $x \in \left[0, \dfrac14\right[\cup \left]\dfrac14, 1\right]$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ prend alternativement les valeurs 0 et 1. On a donc, à m fixé,

$$\sup_{n\geqslant m} f_n(x) = 1 \quad \text{et} \quad \inf_{n\geqslant m} f_n(x) = 0\,.$$

Par conséquent,

$$\limsup_{n\to+\infty} f_n(x) = \inf_{p\in\mathbb{N}}\left(\sup_{n\geqslant p} f_n(x)\right) = 1$$

et

$$\liminf_{n\to+\infty} f_n(x) = \sup_{p\in\mathbb{N}}\left(\inf_{n\geqslant p} f_n(x)\right) = 0\,.$$

D'où

$$\limsup_{n\to+\infty} f_n = \mathbb{1}_{[0,1]} \quad \text{et} \quad \liminf_{n\to+\infty} f_n = \mathbb{1}_{\{\frac14\}}\,.$$

Ainsi,

$$A' = \int_{\mathbb{R}} \left(\liminf_{n\to+\infty} f_n(x)\right) dx = 0\,,$$

et

$$B' = \int_{\mathbb{R}} \left(\limsup_{n\to+\infty} f_n(x)\right) dx = 1\,.$$

Conclusion : $A' < A < B < B'$.

2°) 2.a L'inégalité $A' \leqslant A$ est exactement le lemme de Fatou (théorème 3.3).
L'inégalité $A \leqslant B$ est évidente d'après la définition de la limsup et liminf.
L'inégalité $A' \leqslant B'$ est également évidente d'après la définition de la limsup et liminf et la croissance de l'intégrale.

2.b Les deux exemples précédents 1.a et 1.b prouvent qu'en général, on ne peut rien dire des valeurs de B et B'.

3°) Le lemme de Fatou (théorème 3.3) reste vrai pour les fonctions boréliennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de signe quelconque sous certaines conditions.

– S'il existe une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$g \leqslant f_n$$

alors on a $A' \leqslant A$. En effet, d'une part, pour toute suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et toute constante réelle C

$$\liminf_{n\to+\infty} (u_n - C) = \liminf_{n\to+\infty} u_n - C$$

et d'autre part, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\int_{\mathbb{R}} (f_n - g)(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx\,.$$

Donc, en appliquant le lemme de Fatou classique (théorème 3.3) à la suite de fonctions positives $(f_n - g)_{n\geqslant 1}$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to+\infty}(f_n - g)(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx\\ &\leqslant \liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} (f_n - g)(x)\,dx\\ &\leqslant \liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx\,.\end{aligned}$$

Comme $\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx$ est finie, on obtient le résultat.

– De la même manière, on montre que s'il existe une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable telle que

$$f_n \leqslant h \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

alors

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx \leqslant \int_{\mathbb{R}} \left(\limsup_{n\to+\infty} f_n(x)\right) dx\,.$$

Il suffit d'appliquer le lemme de Fatou classique (théorème 3.3) à la suite de fonctions boréliennes positives $(g - f_n)_{n\geqslant 1}$ et d'utiliser le fait que $\limsup_{n\to+\infty}(-u_n) = -\liminf_{n\to+\infty} u_n$.

4.8 APPLICATION DU THÉORÈME DE LA CONVERGENCE DOMINÉE DE LEBESGUE

Exercice 4.17

On considère la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par

$$f_n(x) = \frac{n^{3/2}x}{1 + n^2x^2}\,.$$

1°) 1.a Vérifier que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers 0 sur $[0, 1]$.

1.b Vérifier que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$ vers 0.

2°) 2.a Soit $x \in]0, 1[$ fixé ; montrer que la fonction h définie sur $[0, +\infty[$ par

$$h(t) = \frac{t^{3/2}x}{1 + t^2x^2}\,.$$

est majorée et déterminer sa borne supérieure.

2.b En déduire que le théorème de la convergence dominée (théorème 3.7) est applicable et que l'on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = 0\,.$$

3°) Calculer $\int_0^1 f_n(x)\,dx$ et retrouver

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 0\,.$$

Solution

1°) 1.a Il est clair que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers 0.

1.b Mais, pour tout $n > 0$, $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\sqrt{n}}{2}$. Donc $f_n\left(\frac{1}{n}\right)$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc la convergence n'est pas uniforme sur $[0, 1]$.

2°) 2.a Soit $x \in]0, 1]$ fixé. La fonction h définie sur $[0, +\infty[$ par $h(t) = \frac{t^{3/2}x}{1 + t^2x^2}$ est dérivable et on a $h'(t) = \frac{\frac{1}{2}x\sqrt{t}\left(3 - t^2x^2\right)}{\left(1 + t^2x^2\right)^2}$. Donc h atteint son maximum au point $t = t_0 = \frac{\sqrt{3}}{x}$ et $h(t_0) = \frac{3^{3/4}}{4\sqrt{x}}$.

2.b Soit la fonction g définie sur $]0, 1]$ par $g(x) = \frac{3^{3/4}}{4\sqrt{x}}$. Comme l'intégrale impropre $\int_0^1 g(x)\,dx$ converge, le théorème 4.8 entraîne que g est intégrable sur $]0, 1]$. Par ailleurs, d'après la question 2.a, g domine la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Donc le théorème de la convergence dominée (théorème 3.7) est applicable et on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = 0\,.$$

3°) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2\sqrt{n}} \int_0^1 \frac{2n^2x}{1 + n^2x^2}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{n}}\left[\ln\left(1 + n^2x^2\right)\right]_0^1 = \frac{1}{2\sqrt{n}}\ln\left(1 + n^2\right)$$

donc

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx \sim_{+\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \to 0\,.$$

Exercice 4.18

Montrer que la suite $\left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}\,dx\right)_{n\geqslant 1}$ converge et déterminer sa limite.

Solution

– Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}$ est continue et positive.
De plus, pour tout $x \in]0, +\infty]$, $|f_n(x)| \leqslant g(x) = \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$. Comme $g(x) \leqslant e^{-x}$ pour $x \geqslant 1$ et $g(x) \sim_0 \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)\,dx$ converge. Donc le théorème 4.8 entraîne que g est intégrable sur $]0, +\infty[$.

– D'autre part, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}} = 0$, donc la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $]0, +\infty[$. Le théorème de la convergence dominée (théorème 3.7) est applicable et on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}\,dx = 0\,.$$

Remarque 4.9 On peut calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}\,dx$ explicitement en utilisant la fonction Γ, (voir exercice 4.33). En effet, le changement de variable $y = nx$ donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-y}}{\sqrt{\frac{y}{n}}}\frac{dy}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}}\,dy = \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{n}}\,.$$

Exercice 4.19

Montrer que la suite $\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{Arctan}(nx)e^{-x^n}\,dx\right)_{n\geqslant 1}$ converge et déterminer sa limite.

Solution

– Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f_n(x) = \operatorname{Arctan}(nx)e^{-x^n}$ est continue donc borélienne et on a pour tout $x \in [0, +\infty[$,

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 1\,, \\ \dfrac{\pi}{2e} & \text{si } x = 1\,, \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si } 0 < x < 1\,, \\ 0 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$$

– D'autre part, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1\,, \\ \dfrac{\pi}{2}e^{-x} & \text{si } x > 1\,. \end{cases}$$

Il est clair que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)\,dx$ converge donc le théorème 4.8 entraîne que g est intégrable sur $[0, +\infty[$. Ainsi, le théorème de la convergence dominée (théorème 3.7) est applicable et on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \operatorname{Arctan}(nx)e^{-x^n}\,dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

Exercice 4.20

Soit f une fonction intégrable sur $[0, 1]$; montrer que la suite

$$\left(\int_0^1 f(x)\left|\sin\frac{\pi}{x}\right|^{1/n} dx\right)_{n\geqslant 1}$$

converge et déterminer sa limite.

Solution

– Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on considère la suite de fonctions $(g_{m,n})_{m\in\mathbb{N}^*}$ de terme général défini sur $[0, 1]$ par $g_{m,n}(x) = \left|\sin\dfrac{\pi}{x + \frac{1}{m}}\right|^{1/n}$. Par construction, la suite de fonctions $(g_{m,n})_{m\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction $x \mapsto g_n(x) = \left|\sin\dfrac{\pi}{x}\right|^{1/n}$. Comme pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, la fonction $g_{m,n}$ est continue sur $[0, 1]$, donc borélienne, la fonction g_n est aussi borélienne.

– On considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie *presque partout* sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = f(x)\left|\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)\right|^{1/n}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est borélienne car produit des fonctions boréliennes f et g_n.

– Pour tout $x \in]0, 1]$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right|^{1/n} = \left|\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right|^0 = 1$. Donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers f presque partout sur $[0, 1]$.

– Comme la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est dominée par la fonction f, le théorème de la convergence dominée (théorème 3.7) est applicable et on a

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(x)\left|\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right|^{1/n} dx &= \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f(x)\left|\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right|^{1/n} dx \\ &= \int_0^1 f(x)\,dx\,.\end{aligned}$$

Exercice 4.21

1°) Établir que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln x\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\ln x\,dx\,.$$

2°) En déduire que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\ln x\,dx = \lim_{n\to+\infty}\left(\ln n - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)\right)\,.$$

Solution

1°) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln x \mathbb{I}_{]0,n]}(x)$. La fonction f_n est continue sur $]0, +\infty[$ et donc borélienne. D'autre part :

- la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers $x \mapsto e^{-x} \ln x$;
- en vertu de l'inégalité classique $1 + y \leqslant e^y$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a pour tout $x \in]0, +\infty[$ fixé, $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = e^{n\ln(1-x/n)} \leqslant e^{n(-x/n)} = e^{-x}$, donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est dominée par $x \mapsto e^{-x}|\ln x|$.

  Montrons que la fonction $x \mapsto g(x) = e^{-x}\ln x$ est intégrable sur $]0, +\infty[$; ce qui est équivalent à montrer d'après le théorème 4.8 que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} g(x)\,dx$ converge. En effet, $e^{-x}|\ln x| \sim_0 |\ln x|$ et $\lim_{x\to 0} \sqrt{x}|\ln x| = 0$; d'autre part, pour x assez grand, $e^{-x}|\ln x| \leqslant \frac{1}{x^2}$. Donc le théorème de la convergence dominée (théorème 3.7) est applicable et on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln x\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln x \mathbb{I}_{]0,n]}(x)\,dx$$
$$= \int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x\,dx\,.$$

2°) Le changement de variable $y = 1 - \frac{x}{n}$ entraîne

$$\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln x\,dx = n\int_0^1 y^n \ln\big(n(1-y)\big)\,dy$$
$$= n\ln n \int_0^1 y^n\,dy + n\int_0^1 y^n \ln(1-y)\,dy\,.$$

Il est clair que

$$n\ln n \int_0^1 y^n\,dy = \frac{n}{n+1}\ln n\,.$$

D'autre part, en intégrant par parties et en prenant la primitive de y^n qui s'annule en 1, on obtient

$$n\int_0^1 y^n \ln(1-y)\,dy = n\left[\frac{y^{n+1}-1}{n+1}\ln(1-y)\right]_0^1 - \frac{n}{n+1}\int_0^1 \frac{1-y^{n+1}}{1-y}\,dy$$
$$= -\frac{n}{n+1}\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} y^k\,dy$$
$$= -\frac{n}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\,.$$

Donc

$$\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln x\,dx = \frac{n}{n+1}\left(\ln n - \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\right)$$
$$= \frac{n}{n+1}\left(\ln n - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) - \frac{n}{(n+1)^2}\,.$$

Sachant que $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1} = 1$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{(n+1)^2} = 0$, on a alors

$$\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln x\,dx \underset{+\infty}{\sim} \ln n - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\,.$$

Or on sait que $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ (γ étant la constante d'Euler), donc

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\ln x\,dx = \lim_{n\to+\infty}\left(\ln n - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) = -\gamma\,.$$

Exercice 4.22

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{n}\,, \\ 0 & \text{si } x > \sqrt{n}\,, \end{cases}$$

et

$$g_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^{n+1/2} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{n}\,, \\ 0 & \text{si } x > \sqrt{n}\,. \end{cases}$$

1°) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx \int_0^{+\infty} g_n(x)\,dx = \frac{n}{n+1}\,\frac{\pi}{4}\,.$$

2°) En déduire que la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,.$$

Solution

1°) Le changement de variable $\sin t = \dfrac{x}{\sqrt{n}}$ puis une intégration par parties entraînent

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx$$
$$= \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t\,dt = \sqrt{n}\frac{2.4.6\ldots(2n)}{1.3.5\ldots(2n+1)}$$

et

$$\int_0^{+\infty} g_n(x)\,dx = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^{n+1/2} dx$$
$$= \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+2} t\,dt = \sqrt{n}\frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots(2n+2)}\,\frac{\pi}{2}\,.$$

Donc

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx \int_0^{+\infty} g_n(x)\,dx = n\frac{2.4.6\ldots(2n)}{1.3.5\ldots(2n+1)}\,\frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots(2n+2)}\,\frac{\pi}{2}$$
$$= \frac{n}{n+1}\,\frac{\pi}{4}\,.$$

2°) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions f_n et g_n sont continues sur $[0, +\infty[$ donc boréliennes. Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} g_n(x) = e^{-x^2}\,.$$

Montrons que la fonction $x \mapsto h(x) = e^{-x^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et domine les suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

– D'après le théorème 4.8, h est intégrable sur $[0, +\infty[$ si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ converge. Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-x^2} = 0$ donc l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ converge.

– L'inégalité classique $1 + y \leqslant e^y$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, entraîne les inégalités de domination. Donc le théorème de la convergence dominée (théorème 3.7) est applicable et entraîne que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} g_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\,.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx \int_0^{+\infty} g_n(x)\,dx = \frac{\pi}{4} = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2,$$

d'où le résultat.

4.9 APPLICATION DU THÉORÈME D'INTÉGRATION D'UNE SÉRIE DE FONCTIONS INTÉGRABLES

Exercice 4.23

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}\,.$$

1°) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est convergente sur $]0, +\infty[$ et calculer sa somme $f(x)$.

2°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$ ainsi que f.

3°) Comparer

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx\,.$$

Expliquer ce résultat.

Solution

1°) Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $e^{-x} < 1$ et $e^{-2x} < 1$, ainsi en appliquant la formule de sommation des séries géométriques, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{1}{e^x - 1} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2nx} = \frac{e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = \frac{1}{e^{2x}-1}\,.$$

Donc, pour tout $x \in]0, +\infty[$, la série de terme général $f_n(x)$ converge et on a

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \frac{1}{e^x - 1} - \frac{2}{e^{2x}-1} = \frac{e^x + 1 - 2}{e^{2x}-1} = \frac{1}{e^x+1}\,.$$

2°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On a pour tout $x \in [0, +\infty[$, $|f_n(x)| = e^{-nx}|1 - 2e^{-nx}| \leqslant 3e^{-nx}$. Donc l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\,dx$ converge absolument ; ainsi le théorème 4.8 entraîne que la fonction f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$. Pour tout $x \in [0, +\infty[$, $0 < f(x) \leqslant e^{-x}$, donc l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge absolument ; ainsi le théorème 4.8 entraîne que la fonction f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

3°) On a d'une part,

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x+1}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx$$
$$= \left[-\ln(1+e^{-x})\right]_0^{+\infty} = \ln 2$$

et d'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \left[\frac{-1}{n}e^{-nx} + \frac{1}{n}e^{-2nx}\right]_0^{+\infty} = 0\,,$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = 0\,.$$

On constate que

$$\int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\,dx \neq \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx\,.$$

En fait le théorème d'intégration des fonctions intégrables (théorème 3.8) ne peut pas s'appliquer ici puisque

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}|f_n(x)|\,dx &= \int_0^{\frac{\ln 2}{n}}(2e^{-2nx}-e^{-nx})\,dx + \int_{\frac{\ln 2}{n}}^{+\infty}(e^{-nx}-2e^{-2nx})\,dx\\ &= \left[\frac{-1}{n}e^{-2nx}+\frac{1}{n}e^{-nx}\right]_0^{\frac{\ln 2}{n}} + \left[\frac{-1}{n}e^{-nx}+\frac{1}{n}e^{-2nx}\right]_{\ln 2/n}^{+\infty}\\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{-1}{4}+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{n}\,;\end{aligned}$$

autrement dit, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}|f_n(x)|\,dx$ est divergente.

Commentaire : Cet exercice souligne combien l'hypothèse du théorème d'intégration d'une série de fonctions intégrables 3.8 est fondamentale.

Exercice 4.24

Soit $a > 0$; vérifier que la fonction $x \mapsto f(x) = \dfrac{\sin(ax)}{e^x - 1}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et établir que

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(ax)}{e^x-1}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a}{n^2+a^2}\,.$$

Solution

– Tout d'abord, la fonction f est continue sur $]0, +\infty[$ et prolongeable par continuité au point 0 en posant $f(0) = a$, donc f est borélienne.
Vérifions que f est intégrable sur $[0, +\infty[$.
D'après le théorème 4.8, f est intégrable sur $[0, +\infty[$ si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge absolument. Or, en vertu de l'inégalité classique $|\sin y| \leqslant |y|$, on

a, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\left|\dfrac{\sin(ax)}{e^x-1}\right| \leqslant \dfrac{ax}{e^x-1}$. Il suffit de montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{ax}{e^x-1}\,dx$ converge absolument. Ce qui est le cas puisque la fonction $x \mapsto \dfrac{ax}{e^x-1}$ est prolongeable par continuité au point 0 et est dominée pour x assez grand par $\dfrac{1}{x^2}$.

– Établissons la relation $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(ax)}{e^x-1}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a}{n^2+a^2}$.
Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $e^{-x} < 1$ et donc

$$\frac{\sin(ax)}{e^x-1} = \frac{\sin(ax)e^{-x}}{1-e^{-x}} = \sin(ax)e^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-nx} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sin(ax)e^{-nx}\,.$$

Montrons que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}J_n$ converge où $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty}|\sin(ax)e^{-nx}|\,dx$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty}|\sin(ax)e^{-nx}|\,dx$ converge puisque

$$J_n = \int_0^{+\infty}|\sin(ax)e^{-nx}|\,dx \leqslant a\int_0^{+\infty}xe^{-nx}\,dx = \frac{a}{n^2}\,.$$

Comme la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}|\sin(ax)e^{-nx}|\,dx$ converge, le théorème d'intégration d'une série de fonctions intégrables (théorème 3.8) est applicable et on a

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(ax)}{e^x-1}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\sin(ax)e^{-nx}\,dx\,.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n = \int_0^{+\infty}\sin(ax)e^{-nx}\,dx = \frac{a}{n^2+a^2}\,.$$

D'où la relation demandée.
Un calcul explicite de l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty}\sin(ax)e^{-nx}\,dx$ peut se faire en intégrant par parties deux fois,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\sin(ax)e^{-nx}\,dx &= \left[\frac{-1}{n}\sin(ax)e^{-nx}\right]_0^{+\infty} + \frac{a}{n}\int_0^{+\infty}\cos(ax)e^{-nx}\,dx\\ &= \frac{a}{n}\left[\frac{-1}{n}\cos(ax)e^{-nx}\right]_0^{+\infty} + \frac{a}{n}\frac{-a}{n}\int_0^{+\infty}\sin(ax)e^{-nx}\,dx\\ &= \frac{a}{n^2} - \frac{a^2}{n^2}I_n\,.\end{aligned}$$

soit en définitive $n^2 I_n = a - a^2 I_n$, d'où $I_n = \dfrac{a}{n^2+a^2}$.

On peut aussi remarquer que I_n est la partie imaginaire de $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x(n-ia)}\,dx$.

Exercice 4.25

1°) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$I_n = \int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2}\, dt = \frac{1.3.\cdots.(2n-1)}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}.$$

2°) En déduire que, pour $z \in \mathbb{C}$, la fonction
$$t \mapsto e^{-t^2}\cos(zt)$$
est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et que
$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(zt)\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp\left(-\frac{z^2}{4}\right).$$

Solution

1°) Comme toutes les intégrales impropres sont convergentes et les fonctions sont régulières, on obtient en intégrant par parties
$$I_{n+1} = \int_0^{+\infty} t^{2(n+1)} e^{-t^2}\, dt = \int_0^{+\infty} t^{2n+1} t e^{-t^2}\, dt$$
$$= \left[-\frac{1}{2}t^{2n+1}e^{-t^2}\right]_0^{+\infty} + \frac{2n+1}{2}\int_0^{+\infty} t^{2n}e^{-t^2}\, dt = \frac{2n+1}{2} I_n.$$

Par ailleurs, $I_0 = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, d'après l'exercice 4.22. D'où
$$I_n = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots.3.1}{2^n} I_0 = \frac{1.3.\ldots.(2n-1)}{2^{n+1}}\sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

2°) Pour $z \in \mathbb{C}$ fixé, on a
$$e^{-t^2}\cos(zt) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(zt)^{2n}}{(2n)!}e^{-t^2}.$$

On considère alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur $[0,+\infty[$ par $f_n(t) = (-1)^n\dfrac{(zt)^{2n}}{(2n)!}e^{-t^2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur $[0,+\infty[$ et on a
$$\|f_n\|_1 = \int_0^{+\infty}|z|^{2n}\frac{t^{2n}}{(2n)!}e^{-t^2}\, dt = \frac{|z|^{2n}}{(2n)!}I_n = \frac{1}{n!}\left|\frac{z^2}{4}\right|^n\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Comme la série $\sum_{n=0}^{+\infty}\|f_n\|_1$ converge (vers $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{|z^2/4|}$), le théorème d'intégration d'une séries de fonctions intégrables (théorème 3.8) est applicable et on a
$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(zt)\, dt = \int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\, dt$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}I_n$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{-z^2}{4}\right)^n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-z^2/4}.$$

Exercice 4.26

Soit $T \in]0,+\infty[$ et f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$.

1°) Montrer que, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, la série
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{x}{T}+n\right)$$
est absolument convergente.

2°) Posons
$$F(x) = \begin{cases}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{x}{T}+n\right) & \text{si } \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|f\left(\frac{x}{T}+n\right)\right| < +\infty,\\ 0 & \text{sinon}.\end{cases}$$

Montrer que F est périodique de période T et est intégrable sur $[0,T]$.

Solution

1°) En appliquant le théorème d'intégration d'une série de fonctions positives 3.4 et en effectuant le changement de variable $y = \dfrac{x}{T}+n$, on obtient
$$\int_0^T\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|f\left(\frac{x}{T}+n\right)\right| dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_0^T\left|f\left(\frac{x}{T}+n\right)\right| dx$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_n^{n+1}|f(y)|T\, dy$$
$$= T\int_{-\infty}^{+\infty}|f(y)|\, dy.$$

Comme f est intégrable sur $\mathbb{R}$, la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|f\left(\frac{x}{T}+n\right)\right|$ est finie pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

2°) Montrons que F est périodique de période T.
Pour tout $(n,x) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{R}$, on a
$$f\left(\frac{x+T}{T}+n\right) = f\left(\frac{x}{T}+(n+1)\right),$$

donc les séries $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{x+T}{T}+n\right)$ et $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{x}{T}+n\right)$ convergent absolument simultanément. Ainsi,

– si $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{x}{T}+n\right)$ est absolument convergente, il en est de même de

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{x+T}{T}+n\right),$$

et alors

$$F(x+T) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{x+T}{T}+n\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{x}{T}+(n+1)\right)$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{x}{T}+n\right) = F(x),$$

– sinon, les deux séries ne convergent pas absolument, et $F(x+T) = F(x) = 0$. Donc F est T-périodique.

F est intégrable sur $[0, T]$ d'après la question 1°) puisque

$$\int_0^T |F(x)|\,dx = T\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt < +\infty\,.$$

D'autre part, comme la série $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_0^T \left|f\left(\frac{x}{T}+n\right)\right| dx$ converge, le théorème d'intégration d'une série de fonctions intégrables (théorème 3.8) entraîne que

$$\int_0^T F(x)\,dx = \int_0^T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{x}{T}+n\right) dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_0^T f\left(\frac{x}{T}+n\right) dx$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_n^{n+1} f(y)T\,dy = T\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,dy$$

soit finalement

$$\frac{1}{T}\int_0^T F(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,dy\,.$$

Exercice 4.27

Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ et α un réel strictement positif. Montrer que, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n^{-\alpha}f(nx)\right) = 0.$$

Solution

En effectuant le changement de variable $t = nx$, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |n^{-\alpha}f(nx)|\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |n^{-\alpha}f(t)|\frac{dt}{n} = \frac{1}{n^{\alpha+1}}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt\,.$$

Comme la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\alpha+1}}$ converge (puisque $\alpha+1>1$), la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |n^{-\alpha}f(nx)|\,dx$$

converge. Le théorème d'intégration d'une série de fonctions intégrables (théorème 3.8) est applicable et entraîne que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-\alpha}f(nx)$ converge pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ et donc son terme général tend vers 0 pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4.28

1°) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction borélienne, périodique de période $T > 0$ et telle que $\displaystyle\int_0^T |g(y)|\,dy < +\infty$. Montrer que, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{g(nx)}{n^2} = 0\,.$$

2°) En déduire que, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} |\cos(nx)|^{\frac{1}{n}} = 0\,.$$

Solution

1°) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction définie presque partout sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{g(nx)}{n^2}$.
En effectuant le changement de variable $y = nx$, on obtient

$$\int_0^T |f_n(x)|\,dx = \int_0^T \frac{|g(nx)|}{n^2}\,dx = \frac{1}{n^3}\int_0^{nT} |g(y)|\,dy = \frac{1}{n^2}\int_0^T |g(y)|\,dy\,.$$

Comme la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ converge, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^T |f_n(x)|\,dx$ converge. Donc le théorème d'intégration d'une série de fonctions intégrables (théorème 3.8) est applicable et entraîne que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge pour presque tout $x \in [0, T]$ et donc son terme général $\dfrac{g(nx)}{n^2}$ tend vers 0 pour presque tout $x \in [0, T]$. Par ailleurs, g est périodique de période T et $\mathbb{R} = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[nT, (n+1)T]$, donc pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{g(nx)}{n^2} = 0\,.$$

2°) On considère la fonction $x \mapsto g(x) = (\ln|\cos x|)^2$. La fonction g est périodique de période π et intégrable sur $[0, \pi]$ car au voisinage de $\dfrac{\pi}{2}$

$$g(x) \sim \left(\ln\left|x-\frac{\pi}{2}\right|\right)^2.$$

D'après la première question, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln|\cos(nx)|}{n}\right)^2 = 0.$$

On en déduit que, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty}|\cos(nx)|^{\frac{1}{n}} = 1.$$

4.10 FONCTIONS DÉFINIES PAR DES INTÉGRALES

Exercice 4.29

Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi xt}\,dt.$$

1°) Montrer que $\hat{f}$ est bien définie, continue et uniformément bornée sur $\mathbb{R}$.

2°) On suppose de plus que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que f' est intégrable sur $\mathbb{R}$. Établir que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{f'}(x) = 2i\pi x\hat{f}(x).$$

3°) On suppose que $t \mapsto tf(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\hat{f}$ est dérivable et déterminer sa dérivée.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Que peut-on dire si les fonctions $t \mapsto t^kf(t)$ sont intégrables pour tout $k \in \{1,\dots,N\}$?

Solution

1°) Montrons que $\hat{f}$ est bien définie, continue et uniformément bornée.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $t \mapsto f(t)e^{-2i\pi xt}$ est borélienne et $|f(t)e^{-2i\pi xt}| = |f(t)|$ donc $\hat{f}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.
- De plus, pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, l'application $x \mapsto f(t)e^{-2i\pi tx}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Le théorème de continuité sous le signe intégral (théorème 3.9) entraîne que $\hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|\hat{f}(x)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)e^{-2i\pi tx}|\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt,$$

d'où $\sup_{x\in\mathbb{R}}|\hat{f}(x)| \leqslant \|f\|_1$.

2°) Comme f' est intégrable et continue, on peut calculer $\widehat{f'}$ par la formule

$$\widehat{f'}(x) = \lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} e^{-2i\pi tx}f'(t)\,dt.$$

En intégrant par parties, on obtient

$$\int_{-a}^{a} e^{-2i\pi tx}f'(t)\,dt = \left[e^{-2i\pi tx}f(t)\right]_{-a}^{a} + 2i\pi x\int_{-a}^{a} e^{-2i\pi tx}f(t)\,dt. \qquad (4.3)$$

Montrons que $\lim_{a\to+\infty} f(a)$ existe. En effet,

$$f(a) = f(0) + \int_0^a f'(t)\,dt.$$

Comme f' est intégrable, $\lim_{a\to+\infty}\int_0^a f'(t)\,dt$ existe et donc $\lim_{a\to+\infty} f(a)$ existe et est finie. Comme f est intégrable, $\lim_{a\to+\infty} f(a) = 0$. On montre de la même façon que $\lim_{a\to-\infty} f(a)$ existe et vaut 0. En faisant tendre a vers l'infini dans (4.3), on obtient

$$\widehat{f'}(x) = 2i\pi x\hat{f}(x).$$

Si f est de classe $\mathcal{C}^k$ et chaque $f^{(k)}$ est intégrable pour tout $k \in \{1,\dots,N\}$, alors

$$\widehat{f^{(k)}}(x) = (2i\pi x)^k\hat{f}(x).$$

Il suffit de réitérer le raisonnement précédent.

3°) Pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto h(x) = f(x)e^{-2i\pi tx}$ est indéfiniment dérivable et on a $h^{(k)}(x) = (-2i\pi t)^kf(t)e^{-2i\pi tx}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Si $t \mapsto tf(t)$ est intégrable, alors le théorème de dérivabilité sous le signe intégral (théorème 3.10) est applicable, entraîne que $\hat{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\frac{d\hat{f}}{dx}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} -2i\pi tf(t)e^{-2i\pi tx}\,dt.$$

Ainsi, si $t \mapsto t^kf(t)$ est intégrable pour tout $k \in \{1,\dots,N\}$ alors $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^N$ et on a

$$\frac{d^k\hat{f}}{dx^k}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-2i\pi t)^kf(t)e^{-2i\pi tx}\,dt$$

pour tout $k \in \{1,\dots,N\}$.

Exercice 4.30

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(tx)}{t(1+t^2)}\,dt.$$

1°) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer F' sans le symbole $\int$.

2°) En déduire une expression simple de $F(x)$, puis calculer

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\right)^2 dt.$$

Solution

1°) On pose $f(x,t) = \dfrac{\operatorname{Arctan}(tx)}{t(1+t^2)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in]0,+\infty[$. Comme Arctan est impaire, F est impaire et il suffit d'étudier F sur $[0,+\infty[$.

– Montrons que F est bien définie sur $[0,+\infty[$.

Il suffit d'après le théorème 4.8 de montrer que pour tout $x \in [0,+\infty[$, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(tx)}{t(1+t^2)}\,dt$ converge absolument.

Au voisinage de $t = 0$, $f(x,t) \sim \dfrac{tx}{t} = x$ et au voisinage de $+\infty$, $f(x,t) \sim \dfrac{\pi/2}{t^3}$. Donc pour tout $x \in [0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et donc F est bien définie sur $[0,+\infty[$.

– Pour tout $t \in]0,+\infty[$, l'application $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{(1+t^2x^2)(1+t^2)},$$

de plus, pour tout x,

$$\left|\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right| \leqslant \frac{1}{1+t^2}.$$

Comme l'application $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, le théorème de dérivabilité sous le signe intégral (théorème 3.10) entraîne que F est dérivable sur $[0,+\infty[$ et on a

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2x^2)(1+t^2)}\,dt.$$

Pour tout $x \in [0,+\infty[$ et $x \neq 1$, on vérifie que

$$\frac{1}{(1+t^2x^2)(1+t^2)} = \frac{\frac{1}{1-x^2}}{1+t^2} + \frac{\frac{x^2}{x^2-1}}{1+t^2x^2},$$

donc

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{1-x^2}\,[\operatorname{Arctan} t]_0^{+\infty} - \frac{x}{1-x^2}\,[\operatorname{Arctan}(tx)]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{2}\,\frac{1-x}{1-x^2} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{1+x}. \end{aligned}$$

Comme F' est paire, on a alors pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$,

$$F'(x) = \frac{\pi}{2(1+|x|)}.$$

Enfin, $F'(1)$ se calcule de manière classique.

2°) On déduit de ce qui précède que

$$F(x) = \operatorname{sign}(x)\frac{\pi}{2}\ln(1+|x|) \text{ si } |x| \neq 1.$$

Mais F est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc continue sur $\mathbb{R}$, et l'application $x \mapsto \operatorname{sign}(x)\frac{\pi}{2}\ln(1+|x|)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$; donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \operatorname{sign}(x)\frac{\pi}{2}\ln(1+|x|).$$

Calculons $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\right)^2 dt.$

D'une part $F(1) = \dfrac{\pi}{2}\ln 2$. D'autre part, en intégrant par parties, on trouve

$$\begin{aligned} F(1) &= \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} t}{t(1+t^2)}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} t}{1+t^2}\,\frac{1}{t}\,dt \\ &= \left[\frac{1}{2}(\operatorname{Arctan} t)^2\frac{1}{t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\right)^2 dt. \end{aligned}$$

D'où

$$2F(1) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\right)^2 dt = \pi\ln 2.$$

Exercice 4.31

On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\,dt.$$

1°) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

2°) Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} F'(x)$.

3°) Vérifier que pour tout $x > 0$,

$$F(x) - F'(x) = \frac{I}{\sqrt{x}} \quad \text{où } I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt.$$

4°) Établir que, pour $x > 0$,

$$F(x) = e^x\left(\frac{\pi}{2} - 2I\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\,dt\right)$$

et en déduire la valeur de I.

Solution

1°) On pose pour tout $(x,t) \in [0,+\infty[^2$, $f(x,t) = \dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$. L'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$ converge donc la fonction $t \mapsto g(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

- Comme pour tout $(x,t) \in [0,+\infty[^2$, $0 \leqslant f(x,t) \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$, F est bien définie sur $[0,+\infty[$.
- De plus, pour tout $t \in [0,+\infty[$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$ donc F est continue sur $[0,+\infty[$.
- Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque qui tend vers $+\infty$. Le théorème de la convergence dominée (théorème 3.7) entraîne que

$$\lim_{x_n\to+\infty} F(x_n) = \int_0^{+\infty} \lim_{x_n\to+\infty} f(x_n,t)\,dt = 0\,.$$

2°) – Montrons que F est dérivable sur $]0,+\infty[$.

Pour tout $t \geqslant 0$, l'application $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable et

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} = \frac{-t^2e^{-xt^2}}{1+t^2}\,.$$

Soit $a \in]0,+\infty[$ fixé, on a pour tout $x \geqslant a$,

$$\left|\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right| \leqslant \frac{t^2}{1+t^2}e^{-at^2} \leqslant e^{-at^2}\,.$$

Or la fonction $t \mapsto e^{-at^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. Donc le théorème de dérivabilité sous le signe intégral (théorème 3.10) entraîne que F est dérivable sur $[a,+\infty[$. Comme a est arbitraire, F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-t^2e^{-xt^2}}{1+t^2}\,dt\,.$$

– Déterminons $\lim_{x\to0^+} F'(x)$.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs tendant vers 0, et posons $f_n(t) = \dfrac{t^2e^{-x_nt^2}}{1+t^2}$. Chaque fonction f_n est continue (donc borélienne) et positive, et la suite $(f_n)_{n\geqslant0}$ converge simplement vers la fonction $t \mapsto \dfrac{t^2}{1+t^2}$. Donc le lemme de Fatou (théorème 3.3) implique que

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt \geqslant \int_0^{+\infty} \liminf_{n\to+\infty} f_n(t)\,dt = +\infty\,,$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} -F'(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt \geqslant +\infty$$

d'où $\lim_{n\to+\infty} F'(x_n) = -\infty$.

3°) Pour tout $x > 0$, on a $F(x) - F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\,dt$. En effectuant le changement de variable $u = t\sqrt{x}$, on obtient

$$F(x) - F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du\,.$$

4°) L'équation différentielle précédente a pour solution $F(x) = e^xC(x)$ avec $C'(x) = -\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}I$, c'est-à-dire que

$$C(x) = C(0) - I\int_0^x \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du = C(0) - 2I\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\,dt\,.$$

Par ailleurs $C(0) = F(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$, d'où

$$F(x) = e^x\left(\frac{\pi}{2} - 2I\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\,dt\right)\,.$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$ d'après 1°), nécessairement $\dfrac{\pi}{2} - 2I^2 = 0$, soit $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 4.32 (Convolution)

1°) Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ et g une fonction de classe $\mathcal{C}^N$ ($N \in \mathbb{N}^*$) sur $\mathbb{R}$, bornée ainsi que toutes ses dérivées. On pose

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\,dt\,.$$

Montrer que $f * g$ est de classe $\mathcal{C}^N$ sur $\mathbb{R}$ et que $(f*g)^{(k)} = f * g^{(k)}$ pour tout $k \in \{1,\dots,N\}$.

2°) On suppose dans cette question que g est continue, positive, et nulle en dehors de l'intervalle $[-\alpha,\alpha]$ où $\alpha > 0$ donné et telle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g(t)\,dt = 1$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n(x) = ng(nx)$.

Montrer que toute fonction continue f est limite uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^N$.

On pourra remarquer que

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g_n(t)\,dt\,.$$

Solution

On notera dans la suite, pour tout $k \in \{1,\dots,N\}$, $C_k = \sup_{y\in\mathbb{R}}|g^{(k)}(y)|$.

1°) Soit $x \in \mathbb{R}$; on a, pour presque tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|f(t)g(x-t)| \leqslant |f(t)|\sup_{t\in\mathbb{R}}|g(x-t)| = C_0|f(t)|\,.$$

Comme $t \mapsto C_0|f(t)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, la fonction $f * g$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et uniformément bornée

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f*g(x)| \leqslant \|f\|_1\sup_{x\in\mathbb{R}}|g(x)|\,.$$

On suppose de plus que g est continue ; montrons que $f * g$ est continue.
Comme pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(t)g(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, le théorème de continuité sous le signe intégral (théorème 3.9) entraîne que $f*g$ est continue sur $\mathbb{R}$.
On peut aussi faire une démonstration « à la main » :
Soit $x \in \mathbb{R}$ et $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels qui converge vers x, montrons que $\left(f * g(x_n)\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers $f * g(x)$. En effet,

- la suite de fonctions $t \mapsto f(t)g(x_n - t)$ converge vers $f(t)g(x-t)$ pour presque tout t puisque g est continue ;
- on a $|f(t)g(x_n-t)| \leqslant C_0|f(t)|$.

Donc le théorème de la convergence dominée (théorème 3.7) est applicable et on a

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} f * g(x_n) &= \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} f(t)g(x_n-t)\,dt\\ &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty} f(t)g(x_n-t)\,dt\\ &= \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\,dt\\ &= f*g(x)\,.\end{aligned}$$

On suppose maintenant que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\sup_{x\in\mathbb{R}}|g'(x)| = C_1 < +\infty$. Montrons $f * g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \varphi(x) = f(t)g(x-t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $\varphi'(x) = f(t)g'(x-t)$. De plus, pour presque tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|f(t)g'(x-t)| \leqslant |f(t)|C_1\,.$$

Comme $t \mapsto |f(t)|C_1$ est intégrable, le théorème de dérivation sous le signe intégral 3.10 est applicable et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(f*g)'(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(t)g'(x-t)\,dt\\ &= f*g'(x)\,.\end{aligned}$$

On suppose désormais que g' est continue sur $\mathbb{R}$. Montrons que $f * g$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
On a montré au-dessus que $f*g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$; il reste donc à montrer que $f*g'$ est continue sur $\mathbb{R}$. Pour cela il suffit de reprendre la démonstration plus haut en remplaçant g par g' puisque g' est continue et bornée.
On suppose que $f*g$ est de classe $\mathcal{C}^{N-1}$, qu'on a $(f*g)^{(k)} = f*g^{(k)}$ pour tout $k \in \{0,\ldots,N-1\}$ et on reprend les étapes ci-dessus en remplaçant g' par $g^{(N-1)}$.

2°) Montrons que si f est continue en un point x_0 alors $\lim_{n\to+\infty} f*g_n(x_0) = f(x_0)$.

En effet, puisque $f(x_0) = f(x_0)\int_{\mathbb{R}} g_n(t)\,dt$, on a

$$\begin{aligned}|f*g_n(x_0) - f(x_0)| &\leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(x_0-t) - f(x_0)|g_n(t)\,dt\\ &= \int_{-\frac{\alpha}{n}}^{\frac{\alpha}{n}} |f(x_0-t)-f(x_0)|g_n(t)\,dt\,.\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en x_0, il existe $\eta > 0$ tel que si $|t| < \eta$ alors $|f(x_0-t) - f(x_0)| < \varepsilon$. Donc pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que si $n \geqslant n_0$ alors $|f(x_0-t)-f(x_0)| < \varepsilon$, pour tout $t \in \left[-\frac{\alpha}{n}, \frac{\alpha}{n}\right]$. Ainsi, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que si $n \geqslant n_0$, on ait

$$|f*g_n(x_0) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon \int_{-\frac{\alpha}{n}}^{\frac{\alpha}{n}} g_n(t)\,dt = \varepsilon\,.$$

Soit K un compact de $\mathbb{R}$, montrons que la suite $(f*g_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers f sur K.
Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue sur K, f est uniformément continue sur K, donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $x \in K$, on ait $|f(x-t) - f(x)| < \varepsilon$ pour tout $t \in \left[-\frac{\alpha}{n}, \frac{\alpha}{n}\right]$.
Donc pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\sup_{x\in K}|f*g_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon\,.$$

Remarque 4.10 En fait, on peut approcher une fonction continue sur un compact K par une suite de classe C^∞. On prend

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geqslant \alpha\,,\\ e^{-\frac{1}{\alpha^2-x^2}} & \text{si } |x| < \alpha\,.\end{cases}$$

$g(x) = \dfrac{h(x)}{C}$ où $C = \displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} h(x)\,dx$.
Comme g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et bornée ainsi que toutes ses dérivées, g_n l'est aussi et donc $f*g_n$ aussi d'après 1°).

Exercice 4.33 (Fonction gamma d'Euler)

Étude de la fonction Γ

1°) Montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$ converge pour tout $x > 0$. On pose alors,

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt\,.$$

2°) Montrer que Γ est continue sur $]0,+\infty[$.

3°) Déterminer $\lim_{x\to 0^+}\Gamma(x)$ et $\lim_{x\to+\infty}\Gamma(x)$.
On pourra appliquer le lemme de Fatou (théorème 3.3).

4°) Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et calculer $\Gamma^{(p)}(x)$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.

5°) Établir que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, et en déduire que

$$\Gamma(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$$

et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\Gamma(n) = (n-1)!\,.$$

6°) Allure du graphe de la fonction Γ.

Comportement asymptotique de la fonction Γ

Dans toute cette partie, x désigne un réel strictement positif.

1°) À l'aide du changement de variable $s = \dfrac{t-x}{\sqrt{x}}$, établir que

$$\Gamma(x+1) = \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{x} \int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} e^{\varphi(x,s)}\, ds$$

où

$$\varphi(x,s) = x \ln\left(1 + \frac{s}{\sqrt{x}}\right) - s\sqrt{x}.$$

2°) Soit s fixé, montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x,s) = \dfrac{-s^2}{2}$.

3°) 3.a Soit x un réel strictement positif fixé ; montrer que pour tout $s \in]-\sqrt{x}, 0]$,

$$\varphi(x,s) \leqslant \frac{-s^2}{2}.$$

➤ **Indication.** On pourra vérifier que pour tout $y \in]-1, 0]$,

$$\ln(1+y) - y \leqslant \frac{-y^2}{2}.$$

3.b Établir que $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_{-\sqrt{x}}^{0} e^{\varphi(x,s)}\, ds = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ pour tout $a > 0$.

4°) 4.a Soit x un réel strictement positif fixé. Montrer que pour tout $s \in]-\sqrt{x}, +\infty]$,

$$\frac{\partial \varphi(x,s)}{\partial x} = \Phi\left(\frac{s}{\sqrt{x}}\right) \quad \text{où} \quad \Phi(u) = \ln(1+u) - \frac{u}{2}\left(1 + \frac{1}{1+u}\right).$$

4.b Vérifier que $\Phi(u) \leqslant 0$ pour tout $u \geqslant 0$ et en déduire que $\varphi(x,s) \leqslant \varphi(1,s)$ pour tout $x \geqslant 1$.

4.c Établir que

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{\varphi(x,s)}\, ds = \int_0^{+\infty} e^{\frac{-s^2}{2}}\, ds = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

5°) En déduire ce qu'on a l'habitude d'appeler *la formule de Stirling* alors que d'autres auteurs l'appellent *formule de Wallis*

$$\Gamma(x+1) \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x}$$

et en particulier, $n! \underset{+\infty}{\sim} \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ (voir aussi exercice 4.34).

Solution

Étude de la fonction Γ

1°) Montrons que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\, dt$ converge pour tout $x > 0$.

Au voisinage de 0, $(t^{x-1}e^{-t}) \sim t^{x-1}$ et $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\, dt$ converge si et seulement si $(x-1) > -1$ *i.e.* $x > 0$.

D'autre part, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 t^{x-1}e^{-t} = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc le critère de Riemann (théorème 4.5 3°)) entraîne que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\, dt$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc $\Gamma(x)$ est bien définie pour tout $x > 0$.

2°) Montrons que la fonction Γ est continue sur $]0, +\infty[$.

– Pour tout $t \in]0, +\infty[$, l'application $x \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

– Pour tout $x \in]0, +\infty[$, il existe deux réels a et A tels que $0 < a < x < A$. Comme la fonction $y \mapsto t^y$ est croissante pour $t \geqslant 1$ et décroissante pour $t < 1$, on a

$$\begin{cases} t^{x-1}e^{-t} \leqslant t^{a-1} & \text{si } 0 < t \leqslant 1, \\ t^{x-1}e^{-t} \leqslant t^{A-1}e^{-t} & \text{si } t \geqslant 1. \end{cases}$$

D'où, pour tout $x \in]a, A[$, on a $0 < t^{x-1}e^{-t} \leqslant g(t)$ où

$$g(t) = \begin{cases} t^{a-1}e^{-t} & \text{si } t \in]0, 1], \\ t^{A-1}e^{-t} & \text{si } t \in [1, +\infty[. \end{cases}$$

Comme g est intégrable, le théorème de continuité sous le signe intégral (théorème 3.9) entraîne que Γ est continue sur $]0, +\infty[$.

3°) Déterminons $\lim\limits_{x\to0^+} \Gamma(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \Gamma(x)$.

– Soit $(a_n)_{n\geqslant1}$ une suite de réels strictement positifs qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$; on a, en vertu du lemme de Fatou (théorème 3.3),

$$\liminf_{n\to+\infty} \Gamma(a_n) \geqslant \int_0^{+\infty} \liminf_{n\to+\infty} e^{-t}t^{a_n-1}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{-1}\, dt = +\infty$$

d'où

$$\liminf_{x\to0^+} \Gamma(x) = +\infty.$$

– Soit $(b_n)_{n\geqslant1}$ une suite de réels strictement positifs qui tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$; on a en vertu du lemme de Fatou 3.3

$$\liminf_{n\to+\infty} \Gamma(b_n) \geqslant \int_0^{+\infty} \liminf_{n\to+\infty} e^{-t}t^{b_n-1}\, dt = +\infty$$

d'où

$$\liminf_{x\to+\infty} \Gamma(x) = +\infty.$$

4°) On prouve par récurrence $P(p)$: Γ est p fois dérivable et

$$\Gamma^{(p)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^p t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$

$P(0)$ est trivialement vérifiée. Supposons $P(p)$ soit vérifiée, et posons $f(x,t) = (\ln t)^p t^{x-1} e^{-t}$. L'application $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = (\ln t)^{p+1} t^{x-1} e^{-t}$. Pour $x \in]a,A[$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant g(t) = \begin{cases} |\ln t|^{p+1} t^{a-1} e^{-t} & \text{si } t \in]0,1], \\ |\ln t|^{p+1} t^{A-1} e^{-t} & \text{si } t \in [1,+\infty[. \end{cases}$$

La fonction g est intégrable sur $]0,+\infty[$, donc le théorème de dérivabilité sous le signe intégral (théorème 3.10) entraîne que $\Gamma^{(p)}$ est dérivable sur tout intervalle de la forme $]a,A[$, donc sur $]0,+\infty[$, et que

$$\Gamma^{(p+1)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^{p+1} t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$

Ainsi Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.

5°) – Montrons que pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \tag{4.4}$$

En effet, comme toutes les intégrales envisagées sont absolument convergentes et les fonctions sont régulières, on peut intégrer par parties et on obtient

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\, dt = \left[-t^x e^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt = 0 + x\Gamma(x).$$

– Comme $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = 1$, la relation (4.4) précédente donne $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$, soit $\Gamma(x) \sim_0 \frac{1}{x}$ par continuité de Γ en 1.

– Soit $n \in \mathbb{N}^*$, en appliquant la relation (4.4) $(n-1)$ fois, on obtient pour tout $x > 0$,

$$\Gamma(x+n) = (x+n-1)\dots(x+1)x\Gamma(x),$$

d'où

$$x(x+1)\dots(x+n-1) = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(1)}.$$

En particulier si $x = 1$ on a puisque $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$. Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

6°) Allure du graphe. On a

- $\Gamma''(x) > 0$, donc Γ est strictement convexe sur $]0,+\infty[$;
- puisque $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$, le théorème de Rolle entraîne qu'il existe $c \in]1,2[$ tel que $\Gamma'(c) = 0$. Comme Γ est convexe, elle admet un unique minimum $\Gamma(c)$ (numériquement, $c \equiv 1{,}4616$ et $\Gamma(c) \equiv 0{,}8856$) ;
- au voisinage de 0^+, $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$ au voisinage de 0^+ ;
- quand x est grand, Γ se « comporte » comme une factorielle, donc tend vers $+\infty$ très vite comme une factorielle (pour plus de précision, voir ci-dessous).

Comportement asymptotique de la fonction Γ

1°) Le changement de variable $s = \frac{t-x}{\sqrt{x}}$ entraîne que

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} (x+s\sqrt{x})^x e^{-x-s\sqrt{x}} \sqrt{x}\, ds \\ &= e^{-x}\sqrt{x} \int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} (x+s\sqrt{x})^x e^{-s\sqrt{x}}\, ds \\ &= x^x e^{-x}\sqrt{x} \int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} \left(1+\frac{s}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-s\sqrt{x}}\, ds \\ &= x^x e^{-x}\sqrt{x} \int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} e^{\varphi(x,s)}\, ds\end{aligned}$$

où $\varphi(x,s) = x\ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{x}}\right) - s\sqrt{x}$.

2°) Soit x un réel positif assez grand fixé, montrons que pour tout $s \in]-\sqrt{x},+\infty[$,

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x,s) = \frac{-s^2}{2}.$$

On sait qu'au voisinage de 0,

$$\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + y^2\varepsilon(y) \quad \text{où} \quad \lim_{y\to 0}\varepsilon(y) = 0,$$

donc en posant $y = \frac{s}{\sqrt{x}}$, on obtient pour x assez grand

$$\varphi(x,s) = -\frac{s^2}{2} + s^2\varepsilon\left(\frac{s}{\sqrt{x}}\right)$$

Ainsi

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x,s) = \frac{-s^2}{2}.$$

3°) 3.a Soit x un réel strictement positif fixé. Montrons que pour tout $s \in]-\sqrt{x},0]$,

$$\varphi(x,s) \leqslant \frac{-s^2}{2}.$$

La fonction h définie sur $]-1,0]$ par $h(y)=\ln(1+y)-y+\dfrac{y^2}{2}$ est dérivable sur $]-1,0]$ et on a $h'(y)=\dfrac{y^2}{1+y}$. Ainsi h est croissante sur $]-1,0]$ et donc $h(y)\leqslant h(0)=0$. Autrement dit, pour tout $y\in]-1,0]$, on a

$$\ln(1+y)-y\leqslant\frac{-y^2}{2}.$$

On en déduit que pour tout $x>0$ fixé et pour tout $s\in]-\sqrt{x},0]$,

$$\begin{aligned}\varphi(x,s)&=x\left(\ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{x}}\right)-\frac{s}{\sqrt{x}}\right)\\&\leqslant x\left(-\frac{s^2}{2x}\right)=\frac{-s^2}{2}\end{aligned}$$

3.b Comme la fonction $s\mapsto e^{\frac{-s^2}{2}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et domine $s\mapsto e^{\varphi(x,s)}$, le théorème de la convergence dominée (théorème 3.7) est applicable et on a

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{-\sqrt{x}}^{0}e^{\varphi(x,s)}\,ds=\int_{-\infty}^{0}e^{\frac{-s^2}{2}}\,ds=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

4°) 4.a Soit x un réel strictement positif fixé. Montrons que pour tout $s\in]-\sqrt{x},+\infty]$,

$$\frac{\partial\varphi(x,s)}{\partial x}=\Phi\left(\frac{s}{\sqrt{x}}\right)\quad\text{où }\Phi(u)=\ln(1+u)-\frac{u}{2}\left(1+\frac{1}{1+u}\right).$$

Pour $x\in]0,+\infty[$, et tout $s\in]-\sqrt{x},+\infty]$, l'application $x\mapsto\varphi(x,s)$ est dérivable, et on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi(x,s)}{\partial x}&=\ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{x}}\right)+x\frac{\frac{-s}{2x\sqrt{x}}}{1+\frac{s}{\sqrt{x}}}-\frac{s}{2\sqrt{x}}\\&=\ln(1+u)-\frac{u}{2}-\frac{u}{2(1+u)}=\Phi(u)\quad\text{où }u=\frac{s}{\sqrt{x}},\end{aligned}$$

4.b – Vérifions que $\Phi(u)\leqslant 0$ dès que $u\geqslant 0$.

La fonction Φ est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et on a

$$\Phi'(u)=\frac{-u^2}{2(1+u)^2}<0.$$

Donc Φ est décroissante sur $]-1,+\infty[$. Comme $\Phi(0)=0$, on a alors $\Phi(u)\leqslant 0$ dès que $u\geqslant 0$.

– On déduit de l'étude de Φ, que pour tout $s\geqslant 0$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\leqslant 0$. Ainsi, pour tout $s\geqslant 0$, l'application $x\mapsto\varphi(x,s)$ est décroissante sur $]0,+\infty[$; en particulier

$$\text{si }x>1,\ \varphi(x,s)\leqslant\varphi(1,s)=\ln(1+s)-s.$$

D'où pour tout $x\in]1,\infty[$ fixé, on a pour tout $s\in]0,+\infty[$,

$$e^{\varphi(x,s)}\leqslant e^{\varphi(1,s)}=e^{\ln(1+s)-s}=(1+s)e^{-s}.$$

4.c Comme la fonction $s\mapsto(1+s)e^{-s}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et domine $s\mapsto e^{\varphi(x,s)}$, le théorème de la convergence dominée (théorème 3.7) est applicable et on a

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty}e^{\varphi(x,s)}\,ds=\int_0^{+\infty}e^{\frac{-s^2}{2}}\,ds=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

5°) D'après les questions précédentes

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\Gamma(x+1)}{x^xe^{-x}\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\int_{-\sqrt{x}}^{+\infty}e^{\varphi(x,s)}\,ds=\sqrt{2\pi},$$

d'où

$$\Gamma(x+1)\underset{+\infty}{\sim}x^xe^{-x}\sqrt{2\pi x}.$$

Exercice 4.34 (Méthode de Laplace)

Soient $[a,b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ (borné ou non, avec $a<b\leqslant+\infty$), $\varphi:[a,b[\to\mathbb{R}$ une fonction croissante et $f:[a,b[\to\mathbb{C}$ telle que $e^{-x_0\varphi}f$ soit Lebesgue-intégrable sur $[a,b[$ pour un certain réel x_0. On suppose f continue en a et $f(a)\neq 0$.

Le but de cet exercice est la recherche d'un équivalent, lorsque $x\to+\infty$ de la fonction

$$F(x)=\int_a^b e^{-x\varphi(t)}f(t)\,dt.$$

1°) On suppose que $a=0$ et $\varphi(t)=t$, montrer que

$$F(x)\underset{+\infty}{\sim}\frac{f(0)}{x}.$$

➢ **Indication.** On pourra remarquer qu'il existe $\alpha\in]0,b[$ tel que f soit bornée sur $[0,\alpha]$ et montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}x\displaystyle\int_0^{\alpha}e^{-xt}f(t)\,dt=f(0)$.

2°) On suppose que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $\varphi'>0$ sur $[a,b[$, montrer que

$$F(x)\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{\varphi'(a)}\frac{e^{-x\varphi(a)}f(a)}{x}.$$

On pourra effectuer un changement de variable pour utiliser 1°).

3°) On suppose que $a=0$ et $\varphi(t)=t^2$, montrer que

$$F(x)\underset{+\infty}{\sim}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{f(0)}{\sqrt{x}}.$$

On pourra adapter l'indication de 1°).

4°) On suppose que φ est de classe $\mathcal{C}^2$, $\varphi' > 0$ sur $]a,b[$, $\varphi'(a) = 0$ et $\varphi''(a) > 0$, montrer que

$$F(x) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(a)}}\,\frac{e^{-x\varphi(a)}f(a)}{\sqrt{x}}.$$

On pourra effectuer un changement de variable pour utiliser 3°).

5°) On suppose que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]a,b[$ et qu'il existe $d \in]a,b[$ tel que $\varphi' > 0$ sur $]d,b[$, $\varphi'(d) = 0$, $\varphi' < 0$ sur $]b,d[$ et $\varphi''(d) > 0$. On suppose de plus que f est continue en d et que $f(d) \neq 0$. Montrer que

$$F(x) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{\varphi''(d)}}\,\frac{e^{-x\varphi(d)}f(d)}{\sqrt{x}}.$$

➢ **Indication.** On pourra vérifier qu'on peut appliquer 4°).

Application : Déterminer un équivalent, lorsque $x \to +\infty$, de

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-u}u^x\,du.$$

Commentaire : Remarquons que seules les valeurs de φ et f au point où φ atteint son minimum apparaissent dans les cinq résultats ci-dessus. Pour plus de commentaires illustrés par des dessins, voir le livre de Rouvière [36, 324–325].

Solution

Si la fonction φ est croissante, on a, pour tout $x \geqslant x_0$,

$$\begin{aligned}|e^{-x\varphi(t)}f(t)| &= e^{-(x-x_0)\varphi(t)}|e^{-x_0\varphi(t)}f(t)|\\ &\leqslant e^{-(x-x_0)\varphi(a)}|e^{-x_0\varphi(t)}f(t)|,\end{aligned}$$

et donc

$$|F(x)| \leqslant e^{-(x-x_0)\varphi(a)}\int_a^b |e^{-x_0\varphi(t)}f(t)|\,dt < +\infty.$$

Ainsi, la fonction F est bien définie sur $[x_0,+\infty[$. Remarquons que dans les questions 1°) à 4°), la fonction φ est croissante.

1°) – Comme f est continue à l'origine, elle est bornée au voisinage de 0. En effet, soit $\varepsilon > 0$ assez petit, il existe $\alpha = \alpha(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout $t \in [0,\alpha]$, on ait $|f(t) - f(0)| \leqslant \varepsilon$ et donc $|f(t)| \leqslant |f(0)| + \varepsilon = M$. Ainsi, il existe $M > 0$ et $\alpha \in]0,b[$ tels que $|f(t)| \leqslant M$ pour $0 \leqslant t \leqslant \alpha$.

– Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\int_0^\alpha e^{-xt}f(t)\,dt = f(0)$.

Le changement de variable $u = xt$ entraîne que

$$x\int_0^\alpha e^{-tx}f(t)\,dt = \int_0^{x\alpha} e^{-u}f\left(\frac{u}{x}\right)du.$$

Par ailleurs

$$\left|e^{-u}f\left(\frac{u}{x}\right)\mathbb{1}_{[0,x\alpha]}(u)\right| \leqslant Me^{-u}$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-u}f\left(\frac{u}{x}\right)\mathbb{1}_{[0,x\alpha]}(u) = f(0)e^{-u}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(u).$$

La fonction $u \mapsto e^{-u}$ étant intégrable sur $[0,+\infty]$, le théorème de la convergence dominée (théorème 3.7) entraîne le résultat.

Ainsi

$$\int_0^\alpha e^{-tx}f(t)\,dt \underset{+\infty}{\sim} \frac{f(0)}{x}.$$

– Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\int_\alpha^b e^{-xt}f(t)\,dt = 0$.

En effet, pour tout $x \geqslant x_0$,

$$\left|\int_\alpha^b e^{-tx}f(t)\,dt\right| \leqslant e^{-\alpha(x-x_0)}\int_0^b e^{-x_0t}|f(t)|\,dt.$$

Par suite,

$$\left|x\int_\alpha^b e^{-tx}f(t)\,dt\right| \leqslant xe^{-\alpha(x-x_0)}\int_0^b e^{-x_0t}|f(t)|\,dt.$$

En faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient le résultat.

– On a, d'après ce qui précède,

$$\lim_{x\to+\infty} xF(x) = \lim_{x\to+\infty} x\int_0^\alpha e^{-xt}f(t)\,dt + \lim_{x\to+\infty} x\int_\alpha^b e^{-xt}f(t)\,dt = f(0),$$

d'où l'équivalent demandé.

2°) Par hypothèse, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\varphi' > 0$, donc l'application $t \mapsto \varphi(t) - \varphi(a)$ est strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$. C'est une bijection de l'intervalle $[a,b[$ sur l'intervalle $[0,c[$ où $c = \lim\limits_{t\to b}\varphi(t) - \varphi(a)$. Soit ψ l'application réciproque. Le changement de variable $t = \psi(s)$ entraîne que

$$F(x) = e^{-x\varphi(a)}\int_0^c e^{-xs}f(\psi(s))\psi'(s)\,ds.$$

Ainsi, on est dans la situation de la question 1°), donc

$$F(x) \underset{+\infty}{\sim} e^{-x\varphi(a)}\frac{f(\psi(0))\psi'(0)}{x}.$$

Par ailleurs $\psi(0) = a$ et $\psi'(0) = 1/\varphi'(a)$, d'où l'équivalent demandé.

3°) On reprend la méthode et les notations de 1°). D'une part, en appliquant le théorème de la convergence dominée (théorème 3.7), on a

$$\sqrt{x}\int_0^{\alpha} e^{-xt^2}f(t)\,dt = \int_0^{\alpha\sqrt{x}} e^{-u^2}f\left(\frac{u}{\sqrt{x}}\right)du \tag{4.5}$$

Si x tend vers $+\infty$ dans (4.5), on trouve

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2}f(0)\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}f(0)\,\cdot$$

D'autre part, en vertu de l'inégalité

$$\left|\int_\alpha^b e^{-xt^2}f(t)\,dt\right| \leqslant e^{-(x-x_0)\alpha^2}\int_0^b e^{-x_0t^2}|f(t)|\,dt\,,$$

on a

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\int_\alpha^b e^{-xt^2}f(t)\,dt = 0\,.$$

Ainsi

$$F(x)\underset{+\infty}{\sim}\frac{\sqrt{\pi}f(0)}{2\sqrt{x}}\,\cdot$$

4°) D'après les hypothèses sur φ, l'application $t\mapsto\phi(t)=\sqrt{\varphi(t)-\varphi(a)}$ est dérivable sur $]a,b[$ et on a pour tout $t\in]a,b[$,

$$\phi'(t) = \frac{\varphi'(t)}{2\sqrt{\varphi(t)-\varphi(a)}}\,\cdot$$

De plus, lorsque $t\to a$ par valeurs supérieures, on a

$$\phi'(t) = \frac{\varphi'(t)}{2\sqrt{\varphi(t)-\varphi(a)}} \sim \frac{(t-a)\varphi''(a)}{2\sqrt{(t-a)^2\varphi''(a)/2}} = \sqrt{\frac{\varphi''(a)}{2}} > 0\,.$$

Ainsi, ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b[$ strictement croissante. C'est une bijection de l'intervalle $[a,b[$ sur l'intervalle $[0,c[$ où $c=\lim_{t\to b}\sqrt{\varphi(t)-\varphi(a)}$; soit ψ l'application réciproque. Le changement de variable $t=\psi(s)$ entraîne que

$$F(x) = e^{-x\varphi(a)}\int_0^c e^{-xs^2}f\big(\psi(s)\big)\psi'(s)\,ds\,.$$

Ainsi, on est dans la situation de la question 3°), donc

$$F(x)\underset{+\infty}{\sim} e^{-x\varphi(a)}\frac{\sqrt{\pi}f\big(\psi(0)\big)\psi'(0)}{2\sqrt{x}}\,.$$

Par ailleurs, $\psi(0)=a$ et $\psi'(0)=\sqrt{\dfrac{2}{\varphi''(a)}}$, d'où l'équivalent demandé.

5°) Dans cette question, φ est de classe $\mathcal{C}^2$ et il existe $d\in]a,b[$ tel que $\varphi'>0$ sur $]d,b[$, $\varphi'(d)=0$, $\varphi'<0$ sur $]b,d[$ et $\varphi''(d)>0$. On suppose de plus que f est continue en d et que $f(d)\neq 0$.

- Posons pour tout $x\in[x_0,+\infty[$, $G(x)=\displaystyle\int_d^b e^{-x\varphi(t)}f(t)\,dt$. Comme φ est croissante sur $[d,b[$, la fonction G est bien définie sur $[x_0,+\infty[$ d'après les préliminaires ci-dessus. En plus, φ et f vérifient toutes les hypothèses de la question 4°) sur l'intervalle $[d,b[$, d'où

$$\int_d^b e^{-x\varphi(t)}f(t)\,dt \underset{+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(d)}}\frac{e^{-x\varphi(d)}f(d)}{\sqrt{x}}\,\cdot$$

- Posons pour tout $x\in[x_0,+\infty[$, $H(x)=\displaystyle\int_a^d e^{-x\varphi(t)}f(t)\,dt$. Vérifions que H est bien définie sur $[x_0,+\infty[$. En effet, pour tout $x\geqslant x_0$, on a

$$|H(x)|\leqslant e^{-(x-x_0)\varphi(d)}\int_a^d |e^{-x_0\varphi(t)}f(t)|\,dt < +\infty\,.$$

D'autre part, le changement de variable $t=-s$ entraîne que

$$H(x) = \int_{-d}^{-a} e^{-x\varphi(-s)}f(-s)\,ds\,.$$

Les fonctions $\check{\varphi}$ et $\check{f}$ (où $\check{g}(x)=g(-x)$) vérifient toutes les hypothèses de la question 4°) sur l'intervalle $[-d,-a[$, d'où

$$H(x)\underset{+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(d)}}\frac{e^{-x\varphi(d)}f(d)}{\sqrt{x}}\,\cdot$$

Ainsi

$$F(x) = G(x)+H(x)\underset{+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{2\pi}{\varphi''(d)}}\frac{e^{-x\varphi(d)}f(d)}{\sqrt{x}}\,\cdot$$

Application : Déterminons un équivalent, lorsque $x\to+\infty$ de $\Gamma(x+1)$ où

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-u}u^x\,du\,.$$

Le changement de variable $u=xt$ entraîne que

$$\Gamma(x+1) = x^{x+1}\int_0^{+\infty} e^{-x(t-\ln t)}\,dt\,.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x(t-\ln t)}\,dt$ est du type qu'on vient d'étudier avec $]a,b[=]0,+\infty[$, $\varphi(t)=t-\ln t$ et $f(t)=1$. Il est clair que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$, $\varphi'<0$ sur $]0,1[$, $\varphi'(1)=1$, $\varphi'>0$ sur $]1,+\infty[$ et f est continue en 1 et $f(1)=1$. D'où

$$\int_0^{+\infty} e^{-x(t-\ln t)}\,dt \underset{+\infty}{\sim}\sqrt{2\pi}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,\cdot$$

Ainsi on retrouve ce qu'on trouvé dans un exercice précédent (heureusement !!) (voir exercice 4.33)

$$\Gamma(x+1)\underset{+\infty}{\sim} x^xe^{-x}\sqrt{2\pi x}\,.$$

Exercice 4.35

Définition 4.7 *Une fonction g à valeurs complexes est absolument continue sur* $\mathbb{R}$ *si pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\eta > 0$ *tel que pour tout entier* $N \in N^*$ *et toute famille disjointe d'intervalles* $]a_1, b_1[,]a_1, b_1[, \dots,]a_N, b_N[$ *de* $\mathbb{R}$ *vérifiant* $\sum_{k=1}^{N}(b_k - a_k) < \eta$, *on ait*

$$\sum_{k=1}^{N} |g(b_k) - g(a_k)| < \varepsilon .$$

La continuité absolue est plus forte que la continuité uniforme qui s'obtient en prenant $N = 1$.

Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. On pose pour $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt .$$

1°) Montrer que F est absolument continue sur $\mathbb{R}$.
On pourra utiliser l'exercice 3.12.

2°) Montrer que si f est localement intégrable sur $\mathbb{R}$, F est continue sur $\mathbb{R}$, mais pas nécessairement uniformément continue.

Solution

1°) Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et soient $2N$ réels tels que $a_1 < b_1 \leqslant a_2 < b_2 \leqslant \dots \leqslant a_N < b_N$. Il suffit d'appliquer le résultat de l'exercice 3.12 à $A = \bigcup_{k=1}^{N}[a_k, b_k]$. En effet, si $\sum_{k=1}^{N}\left(b_k - a_k\right) < \eta$, alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} |F(b_k) - F(a_k)| &= \sum_{k=1}^{N} \left| \int_{[a_k, b_k]} f(t)\,dt \right| \\ &\leqslant \int_{\bigcup_{1 \leqslant k \leqslant N} [a_k, b_k]} |f(t)|\,dt \\ &\leqslant \varepsilon\end{aligned}$$

Un tel η existe pour tout choix de $\varepsilon > 0$, la fonction F est donc absolument continue sur $\mathbb{R}$.
Voir l'exercice 6.6 où on traite le cas où f est de puissance p ème intégrable.

2°) On suppose dans cette question que f est localement intégrable sur $\mathbb{R}$.

– Montrons que F est continue sur $\mathbb{R}$. Soit a un réel strictement positif, la fonction $t \mapsto \mathbb{1}_{[-a,a]}(t) f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $x \mapsto F_a(x) = \int_0^x \mathbb{1}_{[-a,a]}(t) f(t)\,dt$ est absolument continue sur $\mathbb{R}$ d'après la première question et coïncide avec F sur $[-a, a]$. En particulier, F est continue sur $]-a, a[$. Comme a est quelconque, F est continue sur $\mathbb{R}$.

– Si f n'est que localement intégrable, F n'est pas nécessairement uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Par exemple si $f(x) = 2x$ alors $F(x) = x^2$; il est clair que F n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

– Remarquons qu'on aurait pu montrer la continuité de F directement en appliquant le théorème de continuité sous le signe intégral 3.9. En effet, soit x_0 un réel positif fixé.

(i) pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto h(t, x) = f(t)\mathbb{1}_{[0,x]}(t)$ est borélienne ;

(ii) la fonction $(x, t) \mapsto h(t, x) = f(t)\mathbb{1}_{[0,x]}(t)$ n'est pas continue, mais pour $t \neq x_0$ (donc pour presque tout $t \in \mathbb{R}$), la fonction $x \mapsto f(t)\mathbb{1}_{[0,x]}(t)$ est continue au point x_0.

(iii) enfin, on a l'inégalité de domination

$$|h(t, x)| = |f(t)\mathbb{1}_{[0,x]}(t)| \leqslant |f(t)|\mathbb{1}_{[0,x_0+1]}(t) .$$

Le cas $x_0 \in]-\infty, 0[$ est laissé au lecteur.

Commentaire : On peut prolonger la deuxième question, ainsi on peut montrer que

– si pour tout réel x, $\int_0^x f(t)\,dt = 0$, alors f est nulle presque partout (on peut utiliser le théorème du prolongement 2.4) ;

– F est dérivable presque partout sur $\mathbb{R}$ et que $F' = f$ presque partout.

– si g est une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}$ et $G(x) = \int_0^x g(x)\,dx$, on a une formule d'intégration par parties

$$\int_a^b F(x)g(x)\,dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)G(x)\,dx .$$

Voir par exemple les livres de Heurteau, Hulin, Picard et Queffelec [23, pp. 103–109], Kolmogorov et Fomine chapitre VI [26], Rudin [37, pp. 177–182]...

Chapitre 5

Intégration sur un espace produit

RAPPELS DE COURS

5.1 INTÉGRALES MULTIPLES SUR $\mathbb{R}^N$

L'intégration d'une fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^N$ par rapport à la mesure de Lebesgue est précisée par les deux théorèmes ci-dessous. Le premier traite le cas d'une fonction positive, connu sous le nom du théorème de Fubini-Tonelli ; le deuxième traite le cas d'une fonction de signe quelconque, connu sous le nom du théorème de Fubini.

Théorème 5.1 (Théorème de Fubini-Tonelli) *Soit $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ une fonction borélienne de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ dans $[0, +\infty]$. Alors :*

(i) les fonctions φ et ψ définies respectivement sur $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$ par

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f(x, y)\, dy \quad et \quad \psi(y) = \int_{\mathbb{R}^p} f(x, y)\, dx$$

sont boréliennes ;

(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} f(x, y)\, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x, y)\, dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x, y)\, dx \right) dy.$

Commentaire : Ce théorème nous permet entre autres de calculer des intégrales multiples par intégrations successives *dans l'ordre que l'on désire* avec la seule hypothèse f positive.

Remarque 5.1 Soit $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ une fonction borélienne de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ dans $[0, +\infty]$. Alors :

- pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, la fonction qui à $y \in \mathbb{R}^q$ associe $f(x, y)$ est borélienne (voir exercice 1.12) et donc l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^q} f(x, y)\, dy$ est bien définie (à valeur finie ou infinie) ;
- pour tout $y \in \mathbb{R}^q$, la fonction qui à $x \in \mathbb{R}^p$ associe $f(x, y)$ est borélienne (voir exercice 1.12) et donc l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^p} f(x, y)\, dx$ est bien définie (à valeur finie ou infinie).

Théorème 5.2 (Théorème de Fubini) *Soit $f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{C}$ une fonction borélienne.*

1°) Si f est intégrable sur $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ i.e. $\int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} |f(x, y)|\, dx\, dy < +\infty$, *alors :*

(i) pour presque tout $x \in \mathbb{R}^p$, la fonction $y \longmapsto f(x, y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^q$ et la fonction $x \longmapsto \int_{\mathbb{R}^q} f(x, y)\, dy$, qui est définie presque partout, est intégrable sur $\mathbb{R}^p$;

(ii) pour presque tout $y \in \mathbb{R}^q$, la fonction $x \longmapsto f(x, y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^p$ et la fonction $y \longmapsto \int_{\mathbb{R}^p} f(x, y)\, dx$, qui est définie presque partout, est intégrable sur $\mathbb{R}^q$;

(iii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} f(x, y)\, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x, y)\, dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x, y)\, dx \right) dy.$

2°) Si l'une des trois intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} |f(x, y)|\, dx\, dy,$$

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} |f(x, y)|\, dy \right) dx,$$

$$I_3 = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} |f(x, y)|\, dx \right) dy$$

est finie alors il en est de même pour les deux autres, f est intégrable et

$$\int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} f(x, y)\, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x, y)\, dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x, y)\, dx \right) dy.$$

Mode d'emploi : Pour prouver que f est intégrable sur $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, on applique le théorème 5.1 à $|f|$ qui affirme que I_1, I_2 et I_3 sont égales (qu'elles soient finies ou non), puis on montre que I_2 ou I_3 est finie. Souvent, l'une d'elles est facile à estimer.

Mise en garde : Bien distinguer le cas f *mesurable positive* où les trois intégrales I_1, I_2 et I_3 ont toujours un sens (valeur finie ou infinie) du cas où f est *de signe variable* pour lequel les intégrales

$$\int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x, y)\, dy \right) dx \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x, y)\, dx \right) dy$$

peuvent ne pas exister, ou bien peuvent exister avec des valeurs finies ou infinies, distinctes ou égales, sans que f soit intégrable (voir exercices 5.2 et 5.3).

Remarque 5.2 Voici un cas particulier du théorème de Fubini (théorème 5.2) qu'on rencontre dans la pratique, c'est le cas où f est de la forme $g \otimes h$ c'est-à-dire $f(x, y) = g(x)h(y)$. Si g et h sont positives ou g et h sont respectivement intégrables sur $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$ alors

$$\int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} f(x, y)\, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}^p} g(x)\, dx \int_{\mathbb{R}^q} h(y)\, dy.$$

Remarque 5.3 Dans le cas où f est intégrable sur $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, une des applications les plus fréquentes du théorème de Fubini consiste à utiliser l'égalité

$$\int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x, y)\, dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x, y)\, dx \right) dy$$

pour évaluer d'autres intégrales (voir exercices 5.6 et 5.7).

Théorème du changement de variable

Voici encore un grand théorème de la théorie de l'Intégration : *le théorème de changement de variable.* Toutefois, ce théorème a la particularité de concerner spécifiquement l'intégration sur une partie de $\mathbb{R}^N$ par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda^{(N)}$. Il n'admet pas d'extension simple dans le contexte général de l'intégrale associée à une mesure positive quelconque. Avant de donner l'énoncé de ce théorème, rappelons les deux définitions suivantes.

Définition 5.1 *Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^N$ et soit $\phi = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_N)$ une application de u dans V. On suppose que ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$* i.e. *les N^2 fonctions dérivées partielles $\dfrac{\partial \phi_i}{\partial x_j}$ existent et sont continues. On appelle :*

(i) matrice jacobienne *de ϕ au point u de U, et on note $\mathcal{J}_\phi(u)$, la matrice carrée* $\left(\dfrac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(u) \right)_{1 \leqslant i, j \leqslant N}$;

(ii) jacobien *de ϕ au point u de U et on note $J_\phi(u)$ le déterminant de la matrice jacobienne $\mathcal{J}_\phi(u)$.*

Définition 5.2 *Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^N$. On dit qu'une application ϕ de U sur V est un* difféomorphisme *si :*

(i) ϕ est bijective (d'inverse ϕ^{-1}) ;

(ii) ϕ et ϕ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$.

Théorème 5.3 (théorème du changement de variables) *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et ϕ un difféomorphisme de U sur $\phi(U) = V$.*

1°) Si $f : V \to [0,+\infty]$ est borélienne alors

$$\int_V f(v)\,dv = \int_U (f \circ \phi)(u)|J_\phi(u)|\,du.$$

2°) Soit $f : V \to \mathbb{C}$ une fonction borélienne. Alors f est intégrable sur V si et seulement si l'application $u \mapsto f \circ \phi(u)|J_\phi(u)|$ est intégrable sur U et dans ce cas on a encore la formule

$$\int_V f(v)\,dv = \int_U f \circ \phi(u)|J_\phi(u)|\,du.$$

Remarque 5.4 Il est souvent utile, pour se trouver dans les conditions d'application du théorème de changement de variables, de retirer des domaines d'intégration des ensembles de mesure nulle, ce qui ne change aucune des intégrales.

Voilà deux exemples classiques qui illustrent ce propos.

Exemple 1 : coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$. Les coordonnées polaires ne fournissent pas un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Par contre, si on retire du plan $\mathbb{R}^2$ l'origine et une demi-droite issue de l'origine, par exemple $]-\infty,0] \times \{0\}$, on obtient un difféomorphisme de l'ouvert $U =]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[$ sur l'ouvert $V = \mathbb{R}^2 \setminus]-\infty,0] \times \{0\}$ qui à tout (r,θ) associe $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, qui a pour jacobien $J(r\cos\theta, r\sin\theta) = r$. Comme $\lambda^{(2)}(]-\infty,0]\times\{0\}) = 0$ (voir l'exercice 2.9 4°)), il vient, pour f positive ou intégrable sur $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy &= \int_{\mathbb{R}^2\setminus]-\infty,0]\times\{0\}} f(x,y)\,dx\,dy\\ &= \int_{]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,dr\,d\theta.\end{aligned}$$

Exemple 2 : coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^3$. La relation $\phi(r,\theta,\varphi) = (x = r\cos\theta\cos\varphi, y = r\sin\theta\cos\varphi, z = r\sin\varphi)$ définit un difféomorphisme de l'ouvert $U =]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[\times\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ sur l'ouvert $V = \mathbb{R}^3 \setminus \Pi$ où Π est le demi plan $]-\infty,0]\times\{0\}\times\mathbb{R}$. De plus, $J_\phi(r,\theta,\varphi) = r^2\cos\varphi$. Comme Π est de mesure de Lebesgue nulle sur $\mathbb{R}^3$, il vient pour f positive ou intégrable sur $\mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz &= \int_{\mathbb{R}^3\setminus\Pi} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\\ &= \int_{]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} f(r\cos\theta\cos\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\varphi)r^2\cos\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi.\end{aligned}$$

Intégrales de fonctions radiales

On pose pour tout $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2}$ et on note V_N le volume de la boule euclidienne unité de $\mathbb{R}^N$. On montre que $V_N = \dfrac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right)}$ (voir exercices 5.13 et 5.18).

Définition 5.3 *Soit f une fonction de $\mathbb{R}^N$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On dit que f est* radiale *si il existe une fonction F de $[0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que $f(x) = F(r)$.*

Théorème 5.4 (Intégrale d'une fonction radiale) *Soit f une fonction radiale et borélienne de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{C}$.*

1°) Si f est à valeurs positives, alors la fonction $r \mapsto r^{N-1}F(r)$ est aussi borélienne, positive et on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx = NV_N \int_0^{+\infty} r^{N-1}F(r)\,dr.$$

2°) Si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$, alors f est intégrable sur $\mathbb{R}^N$ si et seulement si $r \mapsto r^{N-1}F(r)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et dans ce cas on a encore la formule

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx = NV_N \int_0^{+\infty} r^{N-1}F(r)\,dr.$$

5.2 INTÉGRATION PAR RAPPORT À UNE MESURE PRODUIT ABSTRAITE

Dans ce paragraphe, on va généraliser les théorèmes 5.1 et 5.2 à une mesure produit σ-finie.

Rappels sur les espaces mesurés produits

Soient $(E_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$ et $(E_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés et $E = E_1 \times E_2$. Au chapitre 1, nous avons défini sur E la tribu *produit tensoriel* des tribus $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ qu'on note $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$. Rappelons que $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ est la tribu engendrée sur $E_1 \times E_2$ par la famille des « pavés »

$$\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2 = \{T_1 \times T_2 : T_1 \in \mathcal{T}_1,\ T_2 \in \mathcal{T}_2\},$$

$\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ est aussi la plus petite tribu, au sens de l'inclusion, rendant mesurable chacune des projections π_i de $E_1 \times E_2$ sur E_i $(i = 1,2)$ (voir exercice 1.8).

Au chapitre 2, nous avons vu que si μ_1 et μ_2 étaient σ-finies, il existait une unique mesure μ sur l'espace mesurable $(E_1 \times E_2, \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2)$, qu'on note $\mu_1 \otimes \mu_2$, vérifiant

$$\mu(T_1 \times T_2) = \mu_1(T_1)\mu_2(T_2)$$

pour tout $T_1 \in \mathcal{T}_1$ et tout $T_2 \in \mathcal{T}_2$. De plus, μ est σ-finie sur $(E_1 \times E_2, \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2)$. L'espace mesuré $(E_1 \times E_2, \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ s'appelle *produit des espaces mesurés* $(E_i, \mathcal{T}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$.

Intégration par rapport à une mesure produit

Soient $(E_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$ et $(E_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés et soit $E = E_1 \times E_2$, $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ et $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$ avec μ_1 et μ_2 deux mesures σ-finies. L'intégration d'une fonction numérique définie sur E par rapport à μ est précisée par les deux théorèmes ci-dessous. Le premier traite le cas d'une fonction positive, connu sous le nom du théorème de Fubini-Tonelli ; le deuxième traite le cas d'une fonction de signe quelconque, connu sous le nom du théorème de Fubini.

Théorème 5.5 (Théorème de Fubini-Tonelli) *Soit $f : E_1 \times E_2 \to [0, +\infty]$ une fonction $(\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2, \mathcal{B}([0, +\infty]))$-mesurable. Alors :*

(i) pour tout $x \in E_1$ (respectivement tout $y \in E_2$), l'application $y \mapsto f(x, y)$ (respectivement $x \mapsto f(x, y)$) est $(\mathcal{T}_2, \mathcal{B}([0, +\infty]))$-mesurable (respectivement $(\mathcal{T}_1, \mathcal{B}([0, +\infty]))$-mesurable) ;

(ii) l'application $x \in E_1 \mapsto \int_{E_2} f(x, y)\, d\mu_2(y) \in [0, +\infty]$ (respectivement $y \in E_2 \mapsto \int_{E_1} f(x, y)\, d\mu_1(x) \in [0, +\infty]$) est $(\mathcal{T}_1, \mathcal{B}([0, +\infty]))$-mesurable (respectivement $(\mathcal{T}_2, \mathcal{B}([0, +\infty]))$-mesurable).

(iii) l'intégrale de f par rapport à la mesure produit $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$ est donnée par

$$\int_{E_1 \otimes E_2} f(x, y)\, d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x, y) = \int_{E_1} \left(\int_{E_2} f(x, y)\, d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) = \int_{E_2} \left(\int_{E_1} f(x, y)\, d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y).$$

Théorème 5.6 (Théorème de Fubini) *Soit $f : E_1 \times E_2 \to \bar{\mathbb{R}}$ une fonction $(\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$-mesurable.*

1°) Si f est $\mu_1 \otimes \mu_2$-intégrable, alors :

(i) pour μ_1-presque tout $x \in E_1$ (respectivement μ_2-presque tout $y \in E_2$), l'application $y \mapsto f(x, y)$ (respectivement $x \longmapsto f(x, y)$) est μ_2-intégrable (respectivement μ_1-intégrable) ;

(ii) l'application $y \in E_2 \mapsto \int_{E_1} f(x, y)\, d\mu_1(x) \in \mathbb{R}$ (respectivement $x \in E_1 \mapsto \int_{E_2} f(x, y)\, d\mu_2(y) \in \mathbb{R}$) est μ_2-presque partout définie et μ_2-intégrable sur E_2 (respectivement μ_1-presque partout définie et μ_1-intégrable sur E_1).

(iii) l'intégrale de f par rapport à la mesure produit $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$ est donnée par

$$\int_{E_1 \times E_2} f(x, y)\, d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x, y) = \int_{E_1} \left(\int_{E_2} f(x, y)\, d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) = \int_{E_2} \left(\int_{E_1} f(x, y)\, d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y).$$

2°) Si l'une des trois intégrales suivantes

$$I_1 = \int_{E_1 \times E_2} |f(x, y)|\, d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x, y),$$
$$I_2 = \int_{E_1} \left(\int_{E_2} |f(x, y)|\, d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x),$$
$$I_3 = \int_{E_2} \left(\int_{E_1} |f(x, y)|\, d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y)$$

est finie alors il en est de même pour les deux autres. La fonction f est alors $\mu_1 \otimes \mu_2$-intégrable et

$$\int_{E_1 \otimes E_2} f(x, y)\, d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x, y) = \int_{E_1} \left(\int_{E_2} f(x, y)\, d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) = \int_{E_2} \left(\int_{E_1} f(x, y)\, d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y).$$

Remarque 5.5 Bien distinguer le cas *f mesurable positive* où les trois intégrales I_1, I_2 et I_3 écrites ci-dessus ont toujours un sens (valeur finie ou infinie) du cas où f est *de signe variable* pour lequel les intégrales

$$\int_{E_1} \left(\int_{E_2} f(x, y)\, d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x)$$

et

$$\int_{E_2} \left(\int_{E_1} f(x, y)\, d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y)$$

peuvent ne pas exister, ou bien peuvent exister avec des valeurs finies ou infinies, distinctes ou égales, sans que f soit $\mu_1 \otimes \mu_2$-intégrable (voir exercices 5.2 et 5.3).

Remarque 5.6 On notera que les théorèmes de Fubini-Tonelli et Fubini cessent d'être vrais si on supprime l'hypothèse de σ-finitude d'une des mesures μ_1 et μ_2 (voir l'exercice 5.1).

EXERCICES

5.3 SUR LES HYPOTHÈSES DES THÉORÈMES DE FUBINI-TONELLI ET FUBINI

Exercice 5.1

On considère sur $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]))$ la mesure de Lebesgue λ et la mesure de dénombrement μ_d. Soit D la diagonale du carré $[0, 1]^2$ *i.e.*

$$D = \{(x, x) : x \in [0, 1]^2\}.$$

1°) Vérifier que $\mathbb{I}_D$ est borélienne.

2°) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 \mathbb{I}_D(x,y)\,dx\right) d\mu_d(y)$ et $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 \mathbb{I}_D(x,y)\,d\mu_d(y)\right) dx$. Ce résultat est-il compatible avec le théorème de Fubini ?

Solution

1°) La fonction f qui à tout $(x,y) \in [0,1]^2$ associe $f(x,y) = x - y$ est continue. La diagonale D n'est autre que $f^{-1}(\{0\})$. C'est donc un fermé de $[0,1]^2$. Par suite, D est un borélien, et $\mathbb{I}_D$ est une application borélienne.

2°) Soit $y \in [0,1]$ fixé. On a, pour tout $x \in [0,1]$, $\mathbb{I}_D(x,y) = \mathbb{I}_{\{y\}}(x)$ et donc

$$\int \mathbb{I}_D(x,y)\,dx = \lambda(\{y\}) = 0$$

d'où

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \mathbb{I}_D(x,y)\,dx\right) d\mu_d(y) = 0\,.$$

Soit $x \in [0,1]$, on a pour tout $y \in [0,1]$, $\mathbb{I}_D(x,y) = \mathbb{I}_{\{x\}}(y)$ donc

$$\int_0^1 \mathbb{I}_D(x,y)\,d\mu_d(y) = \mu_d(\{x\}) = 1\,,$$

d'où

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \mathbb{I}_D(x,y)\,d\mu_d(y)\right) dx = \int_0^1 dx = 1\,.$$

Le théorème de Fubini 5.2 n'est pas applicable ici car la mesure μ_d n'est pas σ-finie, et il n'existe pas de mesure $\mu_d \otimes \lambda$.

Exercice 5.2

Calculer les intégrales

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\right) dy\,,$$

$$J = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy\right) dx\,,$$

$$K = \int_{]0,1[^2} \frac{|x^2-y^2|}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy\,.$$

Expliquer ces résultats.

Solution

– Pour chaque $y \in]0,1[$, l'application qui à x associe $\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ est continue sur $[0,1]$ donc Riemann-intégrable sur $[0,1]$. Par conséquent, elle est Lebesgue-intégrable sur $[0,1]$. En outre,

$$\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right)$$

ainsi,

$$\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx = \left[\frac{-x}{x^2+y^2}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{y^2+1}$$

d'où

$$I = \int_0^1 \frac{1}{y^2+1}\,dy = \frac{\pi}{4}\,.$$

– Comme x et y jouent des rôles antisymétriques, $\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$, on a $J = -\dfrac{\pi}{4}$.

– Puisque I et J sont calculables et $I \neq J$, la fonction $(x,y) \mapsto \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ n'est pas intégrable sur $]0,1[^2$ et donc $K = +\infty$, ce qu'on va vérifier par le calcul. En effet, d'après le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 5.1)

$$K = \int_{]0,1[^2} \frac{|x^2-y^2|}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy = 2\int_0^1 \left(\int_0^x \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy\right) dx$$
$$= 2\int_0^1 \left[\frac{y}{x^2+y^2}\right]_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^1 \frac{dx}{x} = +\infty\,.$$

Exercice 5.3

On considère la fonction f définie sur $]-1,1[^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{sinon}\,. \end{cases}$$

1°) Vérifier que f est borélienne.

2°) Calculer

$$I = \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 f(x,y)\,dx\right) dy \quad \text{et} \quad J = \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 f(x,y)\,dy\right) dx\,.$$

3°) f est-elle intégrable sur $]-1,1[^2$?

Solution

1°) On considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f_n(x,y) = \dfrac{xy}{\left(x^2+y^2+\frac{1}{n}\right)^2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc borélienne et $\lim_{n\to+\infty} f_n(x,y) = f(x,y)$, donc f est borélienne comme limite simple de fonctions boréliennes (voir théorème 1.5).

2°) Pour tout $y \in]-1,1[\setminus\{0\}$, la fonction qui à x associe $\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}$ est continue et impaire sur le segment $[-1,1]$, elle est donc intégrable et $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x,y)\,dx = 0$. Cette intégrale est aussi nulle pour $y=0$. Il en résulte que $I=0$. Pour des raisons de symétrie, $J=0$.

3°) On a, d'après le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 5.1)

$$\begin{aligned}
\int\int_{]0,1[^2} |f(x,y)|\,dx\,dy &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\,dx\right) dy \\
&= \int_0^1 \frac{y}{2}\left(\int_0^1 \frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\,dx\right) dy \\
&= \int_0^1 \frac{y}{2}\left(\left[-\frac{1}{x^2+y^2}\right]_{x=0}^{x=1}\right) dy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 y\left(\frac{-1}{1+y^2}+\frac{1}{y^2}\right) dy \\
&= \frac{1}{2}\left(-\int_0^1 \frac{y}{1+y^2}\,dy + \int_0^1 \frac{1}{y}\,dy\right) \\
&= +\infty .
\end{aligned}$$

Comme $\displaystyle\int\int_{]-1,1[^2} |f(x,y)|\,dx\,dy \geqslant \int\int_{]0,1[^2} |f(x,y)|\,dx\,dy = +\infty$, f n'est pas intégrable sur $]-1,1[^2$ et donc on ne peut pas appliquer le théorème de Fubini 5.2 bien que $I=J$.

5.4 APPLICATION DIRECTE DES THÉORÈMES DU COURS

Exercice 5.4

À l'aide du changement de variable $(u,v,w) = (\sqrt{yz}, \sqrt{xz}, \sqrt{xy})$, calculer les volumes de

1°) $D_1 = \{(x,y,z) \in]0,+\infty[^3 : xy<1,\ xz<1,\ yz<1\}$;

2°) $D_2 = \{(x,y,z) \in]0,+\infty[^3 : xy+xz+yz<1\}$.

Solution

Remarquons tout d'abord que D_1 et D_2 sont deux ouverts de $\mathbb{R}^3$ et que l'application Ψ qui à tout (x,y,z) de $]0,+\infty[^3$ associe $(\sqrt{yz}, \sqrt{xz}, \sqrt{xy})$ est une bijection de $]0,+\infty[^3$ sur lui-même qui a pour bijection réciproque Φ, qui à tout (u,v,w) de $]0,+\infty[^3$ associe $\left(\dfrac{vw}{u}, \dfrac{uw}{v}, \dfrac{uv}{w}\right)$. Soit $(u,v,w) \in]0,+\infty[^3$, Φ a pour matrice jacobienne en tout point $(u,v,w) \in]0,+\infty[^3$

$$\mathcal{J}_\Phi(u,v,w) = \begin{pmatrix} -\dfrac{vw}{u^2} & \dfrac{w}{u} & \dfrac{v}{u} \\ \dfrac{w}{v} & -\dfrac{uw}{v^2} & \dfrac{u}{v} \\ \dfrac{v}{w} & \dfrac{u}{w} & -\dfrac{uv}{w^2} \end{pmatrix}$$

et a pour jacobien $J_\Phi(u,v,w) = 4$. Ainsi, Φ est un difféomorphisme de $]0,+\infty[^3$ sur lui-même.

1°) Il est clair que $\Phi^{-1}(D_1) =]0,1[^3$ et d'après le théorème de changement de variable (théorème 5.3),

$$\lambda^{(3)}(D_1) = \int_{D_1} dx\,dy\,dz = \int_{]0,1[^3} |J_\Phi(u,v,w)|\,du\,dv\,dw = 4 .$$

2°) Il est clair que $\Delta_2 = \Phi^{-1}(D_2) = \{(u,v,w) \in]0,+\infty[^3,\ u^2+v^2+w^2<1\}$, autrement dit Δ_2 est le huitième de la boule unité. Donc

$$\lambda^{(3)}(D_2) = \int_{D_2} dx\,dy\,dz = 4\int_{\Delta_2} du\,dv\,dw = 4\frac{1}{8}\frac{4}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi .$$

Exercice 5.5

Étudier en fonction du paramètre réel α l'intégrabilité (bien sûr au sens de Lebesgue) des fonctions suivantes

1°) $f_1 : (x,y) \mapsto \dfrac{1}{(1+x+y)^\alpha}$ sur $D_1 = [0,+\infty[^2$;

2°) $f_2 : (x,y) \mapsto \dfrac{1}{(x+y)^\alpha}$ sur $D_2 =]0,1[^2$;

3°) $f_3 : (x,y,z) \mapsto \dfrac{1}{1-xyz}$ sur $D_3 =]0,1[^3$;

4°) $f_4 : (x,y) \mapsto \dfrac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}$ sur $D_4 = \{(x,y) \in]0,+\infty[^2 : x^2+y^2<1\}$;

5°) $f_5 : (x,y) \mapsto \dfrac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}$ sur $D_5 = \{(x,y) \in]0,+\infty[^2 : x^2+y^2>1\}$.

Solution

Tout d'abord, remarquons que les 5 fonctions sont continues sur leurs domaines d'intégration respectifs (donc boréliennes) et positives. Donc le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 5.1) est applicable dans les 5 cas.

1°) On a tout d'abord

$$\int_{[0,+\infty[^2} f_1(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y+x)^\alpha}\,dx \right) dy .$$

Or, pour tout $y \geqslant 0$, $\left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x+y)^\alpha}\,dx < +\infty \right)$ si et seulement si $\alpha > 1$.

Donc, si $\alpha \leqslant 1$, $\int_{[0,+\infty[^2} f_1(x,y)\,dx\,dy = +\infty$; autrement dit, f_1 n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[^2$ dans ce cas-là.

Si $\alpha > 1$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x+y)^\alpha}\,dx = \frac{(1+y)^{1-\alpha}}{\alpha - 1} .$$

et donc

$$\int_{[0,+\infty[^2} f_1(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{\alpha - 1} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y)^{\alpha-1}}\,dy .$$

Ainsi f_1 est intégrable sur $[0,+\infty[^2$ si et seulement si la fonction $y \mapsto \frac{1}{(1+y)^{\alpha-1}}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ c'est-à-dire si $\alpha > 2$.

En conclusion, f_1 est intégrable sur $[0,+\infty[^2$ si et seulement si $\alpha > 2$ et dans ce cas $\|f_1\|_{\mathcal{L}^1([0,+\infty[^2)} = \frac{1}{(\alpha-1)(\alpha-2)}$.

2°) On a tout d'abord

$$\int_{[0,1[^2} f_2(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{1}{(x+y)^\alpha}\,dx \right) dy$$

Or, pour tout $y > 0$, si $\alpha = 1$, on a

$$\int_0^1 \frac{1}{x+y}\,dx = \ln(1+y) - \ln y$$

et si $\alpha \neq 1$, on a

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+y)^\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha-1} \left(\frac{1}{(1+y)^{\alpha-1}} - \frac{1}{y^{\alpha-1}} \right) .$$

Étudions les deux cas séparément.

Premier cas : $\alpha = 1$. Alors on a

$$\|f_2\|_{L^1(]0,1[^2)} = \int_{]0,1[^2} f_2(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \ln(1+y) - \ln y\,dy = 2\ln 2 .$$

Deuxième cas : $\alpha \neq 1$. On a d'une part $\int_0^1 \frac{1}{(1+y)^{\alpha-1}}\,dy = \frac{2^{2-\alpha}-1}{2-\alpha}$. D'autre part, $\int_0^1 \frac{1}{y^{\alpha-1}}\,dy$ converge si et seulement si $\alpha < 2$ et dans ce cas $\int_0^1 \frac{1}{y^{\alpha-1}}\,dy = \frac{1}{2-\alpha}$. Par suite, f_2 est intégrable sur $]0,1[^2$ si et seulement si $\alpha < 2$ et dans ce cas-là, on a

$$\|f_2\|_{L^1(]0,1[^2)} = \frac{2^{2-\alpha}-2}{2-\alpha} .$$

3°) Remarquons que pour tout $(x,y,z) \in]0,1[^3$, $\frac{1}{1-xyz} = \sum_{n=0}^{+\infty} (xyz)^n$. Donc

$$\int_{]0,1[^3} f_3(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{]0,1[^3} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (xyz)^n \right) dx\,dy\,dz .$$

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application définie sur $]0,1[^3$ par $(x,y,z) \longmapsto (xyz)^n$ est continue et positive. Ainsi, on peut appliquer le théorème d'intégration d'une série de fonctions positives (théorème 3.4) pour obtenir

$$\begin{aligned}
\int_{]0,1[^3} f_3(x,y,z)\,dx\,dy\,dz &= \int_{]0,1[^3} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (xyz)^n \right) dx\,dy\,dz \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_{]0,1[^3} (xyz)^n\,dx\,dy\,dz \right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 x^n\,dx \right) \left(\int_0^1 y^n\,dy \right) \left(\int_0^1 z^n\,dz \right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 x^n\,dx \right)^3 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 x^n\,dx \right)^3 \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} .
\end{aligned}$$

Donc f_3 est intégrable sur $]0,1[^3$ et $\|f_3\|_{L^1(]0,1[^3)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

4°) En appliquant le théorème du changement de variable (théorème 5.3) (coordonnées polaires) avec $\phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ et donc $\phi^{-1}(D_4) =]0,1[\times]0,\frac{\pi}{2}[$, puis le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 5.1), on obtient

$$\int_{D_4} f_4(x,y)\,dx\,dy = \int_{]0,1[\times]0,\frac{\pi}{2}[} \frac{r}{r^{2\alpha}}\,dr\,d\theta = \int_0^1 \frac{r}{r^{2\alpha}}\,dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{1}{r^{2\alpha-1}}\,dr .$$

Or, l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{r^{2\alpha-1}}\,dr$ converge si et seulement si $2\alpha - 1 < 1$ (*i.e.* $\alpha < 1$). Dans ce cas $\int_0^1 \frac{1}{r^{2\alpha-1}}\,dr = \frac{1}{2-2\alpha}$.

Donc f_4 est intégrable sur D_4 si et seulement si $\alpha < 1$ et on a $\|f_4\|_{L^1(D_4)} = \frac{\pi}{4(1-\alpha)}$.

5°) En appliquant le théorème du changement de variable (théorème 5.3) (coordonnées polaires) avec $\phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ et donc $\phi^{-1}(D_5) =]1,+\infty[\times\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, puis le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 5.1), on obtient

$$\int_{D_5} f_5(x,y)\,dx\,dy = \int_1^{+\infty}\frac{r}{r^{2\alpha}}\,dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta = \frac{\pi}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{r^{2\alpha-1}}\,dr.$$

Or, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{r^{2\alpha-1}}\,dr$ converge si et seulement si $2\alpha-1>1$ (*i.e.* $\alpha>1$), et dans ce cas $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{r^{2\alpha-1}}\,dr = \frac{1}{2\alpha-2}$. Donc f_5 est intégrable sur D_5 si et seulement si $\alpha>1$ et dans ce cas $\|f_5\|_{L^1(D_5)} = \dfrac{\pi}{4(\alpha-1)}$.

Exercice 5.6

1°) Soit $D=]0,+\infty[^2$. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_D \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}\,dx\,dy$, et en déduire la valeur de l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2-1}\,dx$.

2°) Vérifier que $\dfrac{J}{2} = \displaystyle\int_0^1\frac{\ln x}{x^2-1}\,dx$ et en déduire les sommes

$$A = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\quad\text{puis}\quad B = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Solution

1°) La fonction définie sur $[0,+\infty[^2$ par $f(x,y) = \dfrac{1}{(1+x^2y)(1+y)}$ est borélienne (car continue) et positive. Donc le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 5.1) est applicable et on a

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}\,dy\right)dx = \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+y}\left(\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2y}\,dx\right)dy.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+y}\left(\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2y}\,dx\right)dy\\
&= \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+y}\frac{\pi}{2\sqrt{y}}\,dy \quad\text{car}\quad \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2y}\,dx = \frac{\pi}{2\sqrt{y}}\quad\text{pour tout } y>0\\
&= \pi\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\,dt \quad\text{où l'on a fait le changement de variable } t^2=y\\
&= \frac{\pi^2}{2}.
\end{aligned}$$

On en déduit alors que

$$\frac{\pi^2}{2} = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}\,dy\right)dx.$$

Or, pour $x\neq1$ (donc pour presque tout $x>0$), on a

$$\frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} = \frac{1}{x^2-1}\left(\frac{x^2}{1+x^2y}-\frac{1}{1+y}\right).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}\,dy &= \frac{1}{x^2-1}\left[\ln\frac{1+x^2y}{1+y}\right]_{y=0}^{y=+\infty}\\
&= \frac{1}{x^2-1}\ln(x^2)\\
&= 2\frac{\ln x}{x^2-1}
\end{aligned}$$

et

$$J = \int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2-1}\,dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

2°) – En effectuant le changement de variable $x=\dfrac{1}{u}$, on trouve

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2-1}\,dx = \int_1^0\frac{-\ln u}{\frac{1}{u^2}-1}\left(\frac{-du}{u^2}\right) = \int_0^1\frac{\ln u}{u^2-1}\,du,$$

d'où

$$\int_0^1\frac{\ln x}{x^2-1}\,dx = \frac{J}{2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

– On a pour tout $x\in]0,1[$, $\dfrac{\ln x}{x^2-1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^{2n}\ln x)$ donc

$$\int_0^1\frac{\ln x}{x^2-1}\,dx = \int_0^1\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^{2n}\ln x)\right)dx$$

Par ailleurs, pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'application définie sur $]0,1[$ par $f_n(x) = -x^{2n}\ln x$ est borélienne (car continue) et positive. Ainsi, le théorème de convergence monotone pour les séries de fonctions à termes positifs (théorème 3.4) est applicable et on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^1\frac{\ln x}{x^2-1}\,dx &= \int_0^1\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^{2n}\ln x)\right)dx\\
&= -\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 x^{2n}\ln x\,dx\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\quad\text{car}\quad\int_0^1 x^{2n}\ln x\,dx = \frac{-1}{(2n+1)^2}.
\end{aligned}$$

D'où $A = \dfrac{\pi^2}{8}$.

Par ailleurs, $B = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} + A$.

Soit, $B = \dfrac{B}{4} + A$, d'où $B = \dfrac{4}{3}A = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Exercice 5.7

On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_D \frac{1}{(1+x^2z^2)(1+y^2z^2)}\, dx\, dy\, dz$ où $D =]0,1[^2 \times]0,+\infty[$. Calculer I et en déduire la valeur de

$$J = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\text{Arctan} z}{z}\right)^2 dz\,.$$

Solution

L'application définie sur $]0,1[^2 \times]0,+\infty[$ par

$$f(x,y,z) = \frac{1}{(1+x^2z^2)(1+y^2z^2)}$$

est borélienne (car continue) et positive. Donc le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 5.1) entraîne que I se calcule de deux façons.

- D'une part

$$I = \int_{]0,1[^2} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2z^2)(1+y^2z^2)}\, dz\right) dx\, dy$$

Or, pour tout $(x,y) \in]0,1[^2$ et $x \neq y$, donc pour presque tout $(x,y) \in]01[^2$, on a

$$\frac{1}{(1+x^2z^2)(1+y^2z^2)} = \frac{x^2}{x^2-y^2}\frac{1}{1+x^2z^2} - \frac{y^2}{x^2-y^2}\frac{1}{1+y^2z^2}\,,$$

d'où

$$\begin{aligned}
I &= \int_{]0,1[^2} \left(\frac{x}{x^2-y^2}\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2z^2}\, dz - \frac{y}{x^2-y^2}\int_0^{+\infty}\frac{y}{1+y^2z^2}\, dz\right) dx\, dy \\
&= \int_{]0,1[^2} \left(\frac{x}{x^2-y^2}\left[\text{Arctan}(xz)\right]_{z=0}^{z=+\infty} - \frac{y}{x^2-y^2}\left[\text{Arctan}(yz)\right]_{z=0}^{z=+\infty}\right) dx\, dy \\
&= \frac{\pi}{2}\int_{]0,1[^2}\left(\frac{x}{x^2-y^2} - \frac{y}{x^2-y^2}\right) dx\, dy \\
&= \frac{\pi}{2}\int_{]0,1[^2} \frac{1}{x+y}\, dx\, dy\,.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, l'application définie sur $]0,1[^2$ par $g(x,y) = \dfrac{1}{x+y}$ est borélienne (car continue) et positive ; donc le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 5.1) implique que

$$\begin{aligned}
\int_{]0,1[^2} \frac{1}{x+y}\, dx\, dy &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{1}{x+y}\, dy\right) dx = \int_0^1 \left[\ln(x+y)\right]_{y=0}^{y=1} dx \\
&= \int_0^1 \ln(x+1) - \ln x\, dx = \left[(x+1)\ln(x+1) - x\ln x\right]_0^1 \\
&= 2\ln 2\,.
\end{aligned}$$

Ainsi $I = \pi \ln 2$.

- D'autre part,

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{+\infty}\left[\int_{]0,1[^2} \frac{1}{(1+x^2z^2)(1+y^2z^2)}\, dx\, dy\right] dz \\
&= \int_0^{+\infty}\left[\left(\int_0^1 \frac{1}{1+x^2z^2}\, dx\right)\left(\int_0^1 \frac{1}{1+y^2z^2}\, dy\right)\right] dz \\
&= \int_0^{+\infty}\left[\left(\int_0^1 \frac{1}{1+x^2z^2}\, dx\right)^2\right] dz \\
&= \int_0^{+\infty}\left[\left(\frac{1}{z}\left[\text{Arctan}(xz)\right]_{x=0}^{x=1}\right)^2\right] dz \\
&= \int_0^{+\infty}\left(\frac{\text{Arctan}\, z}{z}\right)^2 dz\,.
\end{aligned}$$

D'où

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\text{Arctan}\, z}{z}\right)^2 dz = \pi \ln 2\,.$$

Exercice 5.8 (Un calcul de deux intégrales impropres)

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = e^{-x^2y}\sin x\,.$$

1°) Vérifier que la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ n'est pas intégrable au sens de Lebesgue sur $[0,+\infty[$ et en déduire que f n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[^2$.

On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (voir exercices 4.22 ou 4.31).

2°) Soit $a > 0$ fixé. Vérifier que f est intégrable sur $[0,a] \times [0,+\infty[$ et en déduire que

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^a \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx = \int_0^{+\infty} g_a(y)\, dy$$

où g_a est une fonction qu'on déterminera.

3°) Montrer que $\int_0^{+\infty} g_a(y)\,dy$ admet une limite quand a tend vers $+\infty$ et la calculer.

On vérifie que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^4}\,dy = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

4°) Déduire de ce qui précède la valeur de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$ puis celle de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,dt$.

Solution

1°) – En effectuant le changement de variable $x = y + n\pi$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{\sqrt{x}}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{\sqrt{x}}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi} \frac{|\sin(y+n\pi)|}{\sqrt{y+n\pi}}\,dy$$

d'où

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{\sqrt{x}}\,dx \geqslant \int_0^{\pi} \sin y\,dy \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(1+n)\pi}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = +\infty.$$

Ainsi la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$.

– La fonction f est borélienne car continue, donc le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 5.1) est applicable à $|f|$ et on a

$$\int_{]0,+\infty[^2} |f(x,y)|\,dx\,dy = \int_0^{+\infty} |\sin x| \left(\int_0^{+\infty} e^{-xy^2}\,dy\right) dx.$$

Par ailleurs, pour tout $x > 0$ fixé, on a, en effectuant le changement de variable $t = y\sqrt{x}$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy^2}\,dy = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

D'où

$$\int_{]0,+\infty[^2} |f(x,y)|\,dx\,dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{\sqrt{x}}\,dx = +\infty,$$

ainsi, f n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[^2$.

2°) – Montrons que f est intégrable sur $[0, a] \times [0, +\infty[$ pour tout $a > 0$.

La fonction $x \mapsto \dfrac{|\sin x|}{\sqrt{x}}$ est continue sur $[0, +\infty[$ (car prolongeable par continuité en 0) et tend vers 0 quand x tend vers l'infini donc il existe $M > 0$ tel que $\dfrac{|\sin x|}{\sqrt{x}} \leqslant M$ pour tout $x \geqslant 0$. D'où

$$\int_{[0,a]\times[0,+\infty[} |f(x,y)|\,dx\,dy = \int_0^a \frac{|\sin x|}{\sqrt{x}}\,dx \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \leqslant \frac{Ma\sqrt{\pi}}{2} < +\infty.$$

– Puisque f est intégrable sur $[0, a] \times [0, +\infty[$ le théorème de Fubini (théorème 5.2) est applicable et on a

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^a \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^a e^{-xy^2} \sin x\,dx\right) dy.$$

Par ailleurs

$$\int_0^a e^{-xy^2} \sin x\,dx = \Im\mathrm{m}\left(\int_0^a e^{-xy^2} e^{ix}\,dx\right)$$

où $\Im\mathrm{m}$ désigne la partie imaginaire, et

$$\int_0^a e^{-xy^2} e^{ix}\,dx = \frac{1}{i-y^2}\left[e^{-xy^2+ix}\right]_{x=0}^{x=a} = \frac{1}{i-y^2}(e^{-ay^2+ia} - 1),$$

d'où

$$g_a(y) = \int_0^a e^{-xy^2} \sin x\,dx = \frac{1 - e^{-ay^2}\cos a - y^2 e^{-ay^2} \sin a}{1+y^4}.$$

Ainsi

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^a \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^{+\infty} g_a(y)\,dy.$$

3°) Montrons que $\int_0^{+\infty} g_a(y)\,dy$ admet une limite quand a tend vers $+\infty$ et calculons cette limite.

Tout d'abord, pour tout $y \in [0, +\infty[$, on a

$$|g_a(y)| \leqslant \frac{1 + e^{-ay^2}|\cos a| + y^2 e^{-ay^2}|\sin a|}{1+y^4} \leqslant \frac{2+y^2}{1+y^4} \in L^1(\mathbb{R}^+)$$

et d'autre part, pour tout $y > 0$, on a

$$\lim_{a\to+\infty} g_a(y) = \frac{1}{1+y^4}.$$

Donc le théorème de la convergence dominée (théorème 3.7) est applicable et on a

$$\lim_{a\to+\infty} \int_0^{+\infty} g_a(y)\,dy = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^4}.$$

4°) – Sachant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^4}\,dy = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$, on a, en vertu de 2°) et 3°),

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \lim_{a\to+\infty} \int_0^{+\infty} g_a(y)\,dy = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

– En effectuant le changement de variable $x = t^2$, on a

$$\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Commentaire : Il y a plusieurs façons de calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^4}\,dy$. La méthode la plus simple (c'est subjectif) est de décomposer en éléments simples $\frac{1}{1+y^4}$.
On remarque tout d'abord que

$$1+y^4 = \left(1+y^2\right)^2 - 2y^2 = \left(y^2-\sqrt{2}y+1\right)\left(y^2+\sqrt{2}y+1\right)$$

puis on décompose en éléments simples, on trouve que

$$\frac{1}{1+y^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{-y+\sqrt{2}}{y^2-\sqrt{2}y+1} + \frac{y+\sqrt{2}}{y^2+\sqrt{2}y+1}\right).$$

Enfin, des calculs simples sur les primitives des fractions rationnelles permettent de conclure.

Exercice 5.9

En remarquant que $\frac{1}{x} = \int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dy$ pour tout $x > 0$ et en appliquant le théorème de Fubini (théorème 5.2), calculer l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

Solution

Sachant que $\frac{1}{x} = \int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dy$ pour tout $x > 0$, on a pour tout $a \in]0,+\infty[$,

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^a \left(\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dy\right)\sin x\,dx.$$

Soit $a > 0$ fixé. Posons pour tout $(x,y) \in]0,a[\times]0,+\infty[$, $f(x,y) = e^{-xy}\sin x$. On a d'après le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 5.1),

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^a |f(x,y)|\,dx\right)dy \leqslant \int_0^{+\infty}\left(\int_0^a e^{-xy}\,dx\right)dy = \int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-ay}}{y}\,dy.$$

Or, la fonction $y \mapsto h(y) = \frac{1-e^{-ay}}{y}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ car h est prolongeable par continuité en 0 et $\lim_{y\to+\infty} y^2 g(y) = 0$. Donc la fonction f est intégrable sur $]0,a[\times]0,+\infty[$.
Ainsi le théorème de Fubini (théorème 5.2) est applicable et entraîne

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^a e^{-xy}\sin x\,dx\right)dy.$$

Or, on vérifie sans peine que

$$\int_0^a e^{-xy}\sin x\,dx = \Im\mathrm{m}\left(\int_0^a e^{-xy}e^{ix}\,dx\right) = \frac{1}{1+y^2} - \frac{e^{-ya}}{1+y^2}(\cos a + y\sin a).$$

D'où

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^{+\infty}\frac{e^{-ya}}{1+y^2}(\cos a + y\sin a)\,dy.$$

Posons pour $y \in [0,+\infty[$, $f_a(y) = \frac{e^{-ya}}{1+y^2}(\cos a + y\sin a)$. Pour tout $y \geqslant 0$, $\lim_{a\to+\infty} f_a(y) = 0$ et il existe $a_0 > 0$ tel que $|f_a(y)| \leqslant e^{-ya_0}$, donc le théorème de la convergence dominée (théorème 3.7) entraîne que $\lim_{a\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_a(y)\,dy = 0$. Ainsi $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ converge et on a $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 5.10

Soit q une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^N$. Établir que

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-q(x_1,\dots,x_N)}\,dx_1\,dx_2\dots dx_N = \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\sqrt{\Delta}}$$

où Δ est le déterminant de la matrice associée à q, identifiée à sa matrice dans une base quelconque.

Solution

Soit $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_N)$ la base canonique de $\mathbb{R}^N$. Il existe une base orthonormale $\mathcal{B}' = (f_1,\dots,f_N)$ telle que, si $x = \sum_{k=1}^N x_k e_k = \sum_{k=1}^N u_k f_k$, alors $q(x) = \sum_{k=1}^N \alpha_k (u_k)^2$, où les valeurs propres α_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ de q sont toutes strictement positives. La matrice jacobienne $\mathcal{J}$ du changement de coordonnées $(x_1,\dots,x_N) \mapsto (u_1,\dots,u_N)$ est alors une matrice orthogonale, d'où $|J| = |\det \mathcal{J}| = 1$. Ces considérations permettent d'écrire

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} e^{-q(x_1,\dots,x_N)}\,dx_1\dots dx_N &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-q(u_1,\dots,u_N)}\,du_1\dots du_N \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\alpha_1 u_1{}^2 \dots -\alpha_N u_N{}^2}\,du_1\dots du_N \\
&= \prod_{k=1}^N \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha_k u_k{}^2}\,du_k\right) \\
&= \prod_{k=1}^N \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_k}}\right)\int_{\mathbb{R}} e^{-t_k^2}\,dt_k \quad \text{en posant } t_k = \sqrt{\alpha_k}u_k \\
&= \left(\prod_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{\alpha_k}}\right)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\,dt\right)^N \\
&= \frac{1}{\sqrt{\prod_{k=1}^n \alpha_k}}\left(\sqrt{\pi}\right)^N \\
&= \frac{\pi^{N/2}}{\sqrt{\Delta}} \quad \text{car } \prod_{k=1}^N \alpha_k = \Delta.
\end{aligned}$$

Exercice 5.11

Soit $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ une fonction intégrable telle que $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx > 0$. On pose pour tout $x \in [0,+\infty[$, $g(x) = \int_x^{+\infty} f(y)\,dy$.
La fonction g est-elle intégrable sur $[0,+\infty[$?

Solution

Posons $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = K > 0$. Si g est intégrable sur $[0,+\infty[$, on a

$$\int_0^{+\infty} g(x)\,dx = M < +\infty .$$

En appliquant le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 5.1) on a alors

$$M = \int_0^{+\infty} \int_0^{y} f(x)\,dx\,dy .$$

Or il existe $a \in]0,+\infty[$ tel que $\int_0^a f(x)\,dx \geqslant \frac{K}{2} > 0$ et donc $\int_0^y f(x)\,dx \geqslant \frac{K}{2}$ pour tout $y \geqslant a$; on en déduit que

$$M = \int_0^{+\infty} \int_0^{y} f(x)\,dx\,dy \geqslant \frac{K}{2} \int_a^{+\infty} dy = +\infty .$$

Ce qui est impossible, donc la fonction g n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$.

5.5 CALCULS D'INTÉGRALES FAISANT INTERVENIR LES FONCTIONS EULÉRIENNES

Exercice 5.12 (Fonctions gamma et beta d'Euler)

On pose pour $x > 0$ et $y > 0$,

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\,dt \quad \text{et} \quad B(x,y) = \int_0^1 (1-t)^{x-1} t^{y-1}\,dt .$$

(Voir exercices 4.6 et 4.33)

1°) Vérifier que

$$\Gamma(x) = 2\int_0^{+\infty} e^{-v^2} v^{2x-1}\,dv$$

et

$$B(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2x-1}(\sin\theta)^{2y-1}\,d\theta .$$

2°) En calculant de deux manières différentes l'intégrale

$$I = \int_{]0,+\infty[^2} e^{-(u^2+v^2)} u^{2x-1} v^{2y-1}\,du\,dv ,$$

établir que pour tout $(x,y) \in]0,+\infty[^2$,

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} ,$$

et en déduire $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ et $\Gamma\left(N+\frac{1}{2}\right)$ pour $N \in \mathbb{N}$.

3°) En faisant le changement de variable $t = \frac{v}{1+v}$, établir que

$$\int_0^1 (1-t)^{x-1} t^{y-1}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{v^{y-1}}{(1+v)^{x+y}}\,dv$$

et en déduire que, pour tout $\alpha \in]0,1[$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{v^{\alpha-1}}{1+v}\,dv = \Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha) .$$

Solution

1°) En faisant le changement de variable $t = v^2$, on obtient

$$\Gamma(x) = 2\int_0^{+\infty} e^{-v^2} v^{2x-1}\,dv .$$

De même, en faisant le changement de variable $t = (\cos\theta)^2$, on obtient

$$B(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2x-1}(\sin\theta)^{2y-1}\,d\theta .$$

2°) La fonction définie sur $]0,+\infty[^2$ par $\varphi(u,v) = e^{-(u^2+v^2)} u^{2x-1} v^{2y-1}$ est continue et positive. Ainsi, en appliquant le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 5.1) et en remarquant que $\varphi(u,v) = e^{-u^2} u^{2x-1} e^{-v^2} v^{2y-1}$, on obtient

$$\begin{aligned} I &= 2\left(\int_{]0,+\infty[} e^{-u^2} u^{2x-1}\,du\right) \times 2\left(\int_{]0,+\infty[} e^{-v^2} v^{2y-1}\,dv\right) \\ &= \Gamma(x)\Gamma(y) . \end{aligned} \tag{5.1}$$

D'autre part, en appliquant le théorème du changement de variable (théorème 5.3) avec $\phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) = (u,v)$ et donc $\phi^{-1}(]0,+\infty[^2) =]0,+\infty[\times \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, puis le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 5.1), on obtient

$$\begin{aligned}
I &= 4\int_{]0,+\infty[\times]0,\frac{\pi}{2}[} e^{-r^2} r^{2x-1}(\cos\theta)^{2x-1} r^{2y-1}(\sin\theta)^{2y-1} r\, dr\, d\theta \\
&= 4\int_{]0,+\infty[} e^{-r^2} r^{2(x+y)-1}\, dr \int_{]0,\frac{\pi}{2}[} (\cos\theta)^{2x-1}(\sin\theta)^{2y-1}\, d\theta \\
&= 2\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^{2(x+y)-1}\, dr\, 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2x-1}(\sin\theta)^{2y-1}\, d\theta \\
&= \Gamma(x+y)B(x,y)\,. \qquad (5.2)
\end{aligned}$$

D'où, en regroupant (5.1) et (5.2), on trouve

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\,.$$

En particulier si $x = y = \frac{1}{2}$, alors $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \pi$, d'où

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,.$$

Sachant que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ (voir exercice 4.33), on a alors, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(N+\frac{1}{2}\right) &= \left(N-\frac{1}{2}\right)\left(N-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{(2N-1)(2N-3)\cdots 5.3}{2^N}\sqrt{\pi} \\
&= \frac{(2N)!}{2^{2N}N!}\sqrt{\pi}\,.
\end{aligned}$$

3°) En effectuant le changement de variable $t = \frac{v}{1+v}$, on obtient

$$\begin{aligned}
B(x,y) &= \int_0^1 (1-t)^{x-1} t^{y-1}\, dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(v+1)^{x-1}} \frac{v^{y-1}}{(1+v)^{y-1}} \frac{dv}{(v+1)^2} \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{v^{y-1}}{(1+v)^{x+y}}\, dv\,.
\end{aligned}$$

En particulier pour tout $\alpha \in]0,1[$, on a

$$B(1-\alpha,\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{v^{\alpha-1}}{1+v}\, dv = \Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)\,.$$

Remarque 5.7 On montre par la méthode des résidus que pour tout $\alpha \in]0,1[$

$$\int_0^{+\infty} \frac{v^{\alpha-1}}{1+v}\, dv = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}\,.$$

Voir par exemple le livre de Tauvel [47, pp. 131–132].

Exercice 5.13 (Calcul du volume de la boule euclidienne unité)

Soient $N \geqslant 1$ et V_N le volume de la boule euclidienne unité B_N définie par

$$B_N = \{(x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N,\ x_1^2 + \cdots + x_N^2 \leqslant 1\}\,.$$

1°) Calculer V_1 et V_2.

2°) Soit $N \geqslant 3$, établir que $V_N = \frac{2\pi}{N} V_{N-2}$. On remarquera que

$$\begin{aligned}
&\left(x_1^2 + \cdots + x_N^2 \leqslant 1\right) \\
&\quad \Leftrightarrow \left(x_{N-1}^2 + x_N^2 \leqslant 1 \ \text{ et } \ x_1^2 + \cdots + x_{N-2}^2 \leqslant 1 - x_{N-1}^2 - x_N^2\right)\,.
\end{aligned}$$

3°) En déduire V_N.

Solution

1°) Calcul de V_1 et V_2.

Tout d'abord $V_1 = \int_{\{|x|\leqslant 1\}} dx = \int_{-1}^1 dx = 2$.

En passant en coordonnées polaires (théorème 5.3), on a

$$V_2 = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{[0,1]}\left(x^2+y^2\right) dx\, dy = \int_0^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} \mathbb{1}_{[0,1]}\left(r^2\right) r\, dr\, d\theta = \int_0^1 r\, dr \int_{-\pi}^{\pi} d\theta = \pi$$

(surface du disque de rayon 1).

2°) En remarquant que

$$\left(x_1^2 + \cdots + x_N^2 \leqslant 1\right) \Leftrightarrow \left(x_{N-1}^2 + x_N^2 \leqslant 1 \quad \text{et} \quad x_1^2 + \cdots + x_{N-2}^2 \leqslant 1 - x_{N-1}^2 - x_N^2\right),$$

on a

$$\begin{aligned}
V_N &= \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_{[0,1]}\left(x_1^2 + \cdots + x_N^2\right) dx_1 \ldots dx_N \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_{[0,1]}\left(x_{N-1}^2 + x_N^2\right) \mathbb{1}_{\left[0,1-x_{N-1}^2-x_N^2\right]}\left(x_1^2 + \cdots + x_{N-2}^2\right) dx_1 \ldots dx_N\,.
\end{aligned}$$

D'après le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 5.1), il vient

$$V_N = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{[0,1]}\left(x_{N-1}^2 + x_N^2\right) \psi(x_{N-1}, x_N)\, dx_{N-1}\, dx_N$$

où

$$\psi(x_{N-1}, x_N) = \int_{\mathbb{R}^{N-2}} \mathbb{1}_{\left[0,1-x_{N-1}^2-x_N^2\right]}\left(x_1^2 + \cdots + x_{N-2}^2\right) dx_1 \ldots dx_{N-2}\,.$$

Calculons $\psi(x_{N-1}, x_N)$ suivant les cas.

Si $x_{N-1}^2 + x_N^2 = 1$, alors $\psi(x_{N-1}, x_N) = \lambda^{(N-2)}(\{0_{\mathbb{R}^{N-2}}\}) = 0$.

Si $x_{N-1}^2 + x_N^2 < 1$, on fait le changement de variable $x_i = u_i\sqrt{1-(x_{N-1}^2+x_N^2)}$ $1 \leqslant i \leqslant N-2$. Cela définit clairement une application linéaire bijective de $\mathbb{R}^{N-2}$ sur $\mathbb{R}^{N-2}$ ayant pour jacobien $\left(1-(x_{N-1}^2+x_N^2)\right)^{\frac{N-2}{2}}$. Donc en appliquant la formule du changement de variable (théorème 5.3), on obtient

$$\begin{aligned}\psi(x_{N-1},x_N) &= \int_{\mathbb{R}^{N-2}} \mathbb{1}_{[0,1]}(u_1^2+\cdots+u_{N-2}^2)\left(1-(x_{N-1}^2+x_N^2)\right)^{\frac{N-2}{2}} du_1\dots du_{N-2}\\ &= \left(1-(x_{N-1}^2+x_N^2)\right)^{\frac{N-2}{2}} V_{N-2}\,.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}V_N &= V_{N-2}\int_{\mathbb{R}^2}\mathbb{1}_{[0,1]}\left(x_{N-1}^2+x_N^2\right)\left(1-(x_{N-1}^2+x_N^2)\right)^{\frac{N-2}{2}} dx_{N-1}\,dx_N\\ &= V_{N-2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{+\infty}(1-r^2)^{\frac{N-2}{2}}\mathbb{1}_{[0,1]}(r)\,r\,dr\,d\theta\\ &= V_{N-2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 r\,(1-r^2)^{\frac{N-2}{2}}\,dr\,d\theta\\ &= 2\pi V_{N-2}\int_0^1(1-r^2)^{\frac{N-2}{2}}\,r\,dr\\ &= \frac{2\pi}{N}V_{N-2}\left[-(1-r^2)^{\frac{N}{2}}\right]_{r=0}^{r=1}\\ &= \frac{2\pi}{N}V_{N-2}\,.\end{aligned}$$

3°) On déduit des deux questions précédentes que,
si $N=2p$, $V_{2p} = \dfrac{(2\pi)^p}{2.4.6.\cdots\times(2p)} = \dfrac{\pi^p}{p!}$,
et si $N = 2p+1$, $V_{2p+1} = 2\dfrac{(2\pi)^p}{3.5.7.\cdots.(2p+1)} = \dfrac{2^{2p+1}p!}{(2p+1)!}\pi^p$.
On peut aussi utiliser la fonction gamma d'Euler (voir exercices 4.33 et 5.12) pour synthétiser la formule en

$$V_N = \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{N}{2}+1\right)}\,.$$

Exercice 5.14

Soit $(p,q,r,s) \in]-1,+\infty[^4$ et soit $D = \{(x,y,z) \in]0,+\infty[^3 : x+y+z < 1\}$. Calculer l'intégrale

$$I = \int_D x^p y^q z^r (1-x-y-z)^s\,dx\,dy\,dz$$

en utilisant le changement de variable suivant

$$u = x+y+z,\quad v = \frac{y+z}{x+y+z}\quad \text{et}\quad w = \frac{z}{y+z}\,.$$

Solution

- Soit ψ l'application qui à tout $(x,y,z) \in]0,+\infty[^3$ associe

$$\psi(x,y,z) = \left(x+y+z, \frac{y+z}{x+y+z}, \frac{z}{y+z}\right).$$

Il est clair que ψ est injective et $\psi(D) \subset]0,1[^3$. Montrons qu'en fait $\psi(D) =]0,1[^3$. Soit $(u,v,w) \in]0,1[^3$, $\psi(x,y,z) = (u,v,w)$ est équivalent à

$$\begin{cases} u = x+y+z\,,\\ v = \dfrac{y+z}{x+y+z}\,,\\ w = \dfrac{z}{y+z}\,,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u &= x+y+z\,,\\ uv &= y+z\,,\\ uvw &= z\,,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = u(1-v)\,,\\ y = uv(1-w)\,,\\ z = uvw\,.\end{cases}$$

Ainsi, ψ est une bijection de $]0,1[^3$ sur D et qui a pour bijection réciproque l'application ϕ qui à tout point (u,v,w) de $]0,1[^3$ associe $\phi(u,v,w) = \big(u(1-v), uv(1-w), uvw\big)$.

- Calculons le jacobien de ϕ. La matrice jacobienne de ϕ en tout point (u,v,w) de $]0,1[^3$ est

$$\mathcal{J}_\phi(u,v,w) = \begin{pmatrix} 1-v & -u & 0\\ v(1-w) & u(1-w) & -uv\\ vw & uw & uv\end{pmatrix}.$$

Donc ϕ a pour jacobien

$$J_\phi(u,v,w) = u^2v(1-v)(1-w) + u^2v^2w + u^2vw(1-v) + u^2v^2(1-w) = u^2v\,.$$

- L'application f définie sur D par $f(x,y,z) = x^py^qz^r(1-x-y-z)^s$ est borélienne (car continue) et positive. En appliquant le théorème du changement de variable (théorème 5.3), on obtient

$$I = \int_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{\phi^{-1}(D)} f\left(\phi(u,v,w)\right)|J_\phi(u,v,w)|\,du\,dv\,dw$$

où $f\left(\phi(u,v,w)\right)|J_\phi(u,v,w)| = (1-u)^s u^{p+q+r+2}(1-v)^p v^{q+r+1}(1-w)^q w^r$. En remarquant que l'application $(u,v,w) \mapsto f\left(\phi(u,v,w)\right)$ est à variables séparées et en appliquant la formule $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^{a-1}t^{b-1}\,dt = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = B(a,b)$ démontrée dans l'exercice 5.12, on obtient

$$\begin{aligned} I &= B(s+1,p+q+r+3)B(p+1,q+r+2)B(q+1,r+1)\\ &= \frac{\Gamma(s+1)\Gamma(p+q+r+3)}{\Gamma(p+q+r+s+4)}\,\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+r+2)}{\Gamma(p+q+r+3)}\,\frac{\Gamma(q+1)\Gamma(r+1)}{\Gamma(q+r+2)}\\ &= \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)}\,.\end{aligned}$$

Exercice 5.15

Le but de cet exercice est de déterminer les paramètres réels α, β et γ pour lesquels l'intégrale

$$I = \int_{]0,+\infty[^3} \frac{1}{1+x^\alpha+y^\beta+z^\gamma}\, dx\, dy\, dz$$

est finie puis de la calculer.

1°) Vérifier que si $\alpha \leqslant 1$ ou $\beta \leqslant 1$ ou $\gamma \leqslant 1$, I est infinie. On suppose dans la suite que cette condition n'est pas réalisée.

2°) En effectuant le changement de variables $(x = u^{\frac{2}{\alpha}}, y = v^{\frac{2}{\beta}}, z = w^{\frac{2}{\gamma}})$, établir que $I = \dfrac{8}{\alpha\beta\gamma} J$ où $J = \displaystyle\int_{]0,+\infty[^3} \frac{u^{\frac{2}{\alpha}-1} v^{\frac{2}{\beta}-1} w^{\frac{2}{\gamma}-1}}{1+u^2+v^2+w^2}\, du\, dv\, dw$.

3°) En passant en coordonnées sphériques (théorème 5.3), calculer J et en déduire I.

➤ **Indication.** On pourra utiliser l'exercice 5.12.

Solution

1°) Tout d'abord, l'application f définie sur l'ouvert $]0,+\infty[^3$ par

$$f(x,y,z) = \frac{1}{1+x^\alpha+y^\beta+z^\gamma}$$

est borélienne (car continue) et positive. Par ailleurs, les variables x, y et z jouent le même rôle. Ainsi, pour $y > 0$ et $z > 0$ fixés, $f(x,y,z) \sim_{+\infty} \dfrac{1}{x^\alpha}$, donc la fonction $x \mapsto f(x,y,z)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$. Ainsi une condition nécessaire pour que I soit finie est que $\alpha > 1$, $\beta > 1$ et $\gamma > 1$.
On suppose désormais que $(\alpha,\beta,\gamma) \in]1,+\infty[^3$.

2°) L'application $\phi_1 : (u,v,w) \mapsto \left(u^{\frac{2}{\alpha}}, v^{\frac{2}{\beta}}, w^{\frac{2}{\gamma}}\right) = (x,y,z)$ est un difféomorphisme de l'ouvert $]0,+\infty[^3$ sur lui-même et a pour jacobien en tout point (u,v,w) de $]0,+\infty[^3$

$$|J_{\phi(u,v,w)}| = \frac{8}{\alpha\beta\gamma} u^{\frac{2}{\alpha}-1} v^{\frac{2}{\beta}-1} w^{\frac{2}{\gamma}-1}.$$

Donc, d'après la formule du changement de variable (théorème 5.3), on a

$$I = \int_{]0,+\infty[^3} \frac{1}{1+x^\alpha+y^\beta+z^\gamma}\, dx\, dy\, dz = \frac{8}{\alpha\beta\gamma} \int_{]0,+\infty[^3} \frac{u^{\frac{2}{\alpha}-1} v^{\frac{2}{\beta}-1} w^{\frac{2}{\gamma}-1}}{1+u^2+v^2+w^2}\, du\, dv\, dw.$$

3°) Calcul de J et I.

– Tout d'abord l'application g définie sur l'ouvert $]0,+\infty[^3$ par

$$g(u,v,w) = \frac{u^{\frac{2}{\alpha}-1} v^{\frac{2}{\beta}-1} w^{\frac{2}{\gamma}-1}}{1+u^2+v^2+w^2}$$

est borélienne (car continue) et positive. D'autre part, l'application

$$\phi_2 : (r,\theta,\varphi) \mapsto (u = r\cos\theta\cos\varphi, v = r\sin\theta\cos\varphi, w = r\sin\varphi)$$

est un difféomorphisme de l'ouvert $]0,+\infty[\times\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\times\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur l'ouvert $]0,+\infty[^3$ et a pour jacobien $r^2\cos\varphi$ en tout point (r,θ,φ) appartenant à $]0,+\infty[\times\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\times\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.
En appliquant le théorème du changement de variable (théorème 5.3), on obtient

$$\begin{aligned} J &= \int_{]0,+\infty[^3} g(u,v,w)\, du\, dv\, dw \\ &= \int_{]0,+\infty[\times]0,\frac{\pi}{2}[^2} g\big(\phi_2(r, r\cos\theta\cos\varphi, r\sin\varphi)\big) r^2\cos\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi. \end{aligned}$$

Or, pour tout $(r,\theta,\varphi) \in]0,+\infty[\times\left]0,\frac{\pi}{2}\right[^2$, on a

$$g\big(\phi_2(r, r\cos\theta\cos\varphi, r\sin\varphi)\big) r^2\cos\varphi = h(r)k(\theta)l(\varphi)$$

où

$$h(r) = \frac{r^{2\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)-1}}{1+r^2}, \quad k(\theta) = (\cos\theta)^{\frac{2}{\alpha}-1}(\sin\theta)^{\frac{2}{\beta}-1}$$

$$\text{et} \quad l(\varphi) = (\cos\varphi)^{2\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)-1}(\sin\varphi)^{\frac{2}{\gamma}-1}.$$

Donc, d'après le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 5.1), on a

$$J = \int_0^{+\infty} h(r)\, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} k(\theta)\, d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} l(\varphi)\, d\varphi.$$

En outre d'après l'exercice 5.12,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} k(\theta)\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{\frac{2}{\alpha}-1}(\sin\theta)^{\frac{2}{\beta}-1}\, d\theta = \frac{1}{2}B\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l(\varphi)\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi)^{2\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)-1}(\sin\varphi)^{\frac{2}{\gamma}-1}\, d\varphi = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)},$$

et en effectuant le changement de variable $s = r^2$, on a

$$\int_0^{+\infty} h(r)\, dr = \int_0^{+\infty} \frac{r^{2\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)-1}}{1+r^2}\, dr = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{s^{\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)-1}}{1+s}\, ds$$

qui converge si $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma} < 1$ et vaut dans ce cas

$$\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\Gamma\left(1-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\right).$$

Ainsi, si $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma} < 1$,

$$J = \frac{1}{8}\Gamma\left(1-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\right)\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}\right).$$

– En conclusion, on a :
si $\alpha \leqslant 1$ ou $\beta \leqslant 1$ ou $\gamma \leqslant 1$, alors $I = +\infty$;
si $\alpha > 1$ et $\beta > 1$ et $\gamma > 1$, alors

$$\begin{cases} I = +\infty & \text{si } \dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma} \geqslant 1 \\ I = \dfrac{1}{\alpha\beta\gamma}\Gamma\left(1-\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}\right)\right)\Gamma\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(\dfrac{1}{\beta}\right)\Gamma\left(\dfrac{1}{\gamma}\right) & \text{si } \dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma} < 1 . \end{cases}$$

Exercice 5.16 (Calcul de l'intégrale de Dirichlet)

Soient $a \in]0,+\infty[$, $N \in \mathbb{N}^*$, $\Delta_N(a) = \{(x_1,\dots,x_N) \in]0,+\infty[^N,\ x_1 + \dots + x_N < a\}$ et $(\alpha_1,\dots,\alpha_N) \in]0,+\infty[^N$. On appelle intégrale de Dirichlet l'intégrale suivante

$$I_N(a) = \int_{\Delta_N(a)} x_1^{\alpha_1-1}\dots x_N^{\alpha_N-1}\,dx_1\dots dx_N .$$

1°) Vérifier que $I_N(a) = a^{\alpha_1+\dots+\alpha_N} I_N(1)$.

2°) Établir pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ que $I_N(1) = I_{N-1}(1)B(\alpha_1+\dots+\alpha_{N-1}+1,\alpha_N)$.

3°) En déduire la valeur de $I_N(a)$.

Solution

1°) Tout d'abord la fonction f définie sur l'ouvert $\Delta_N(a)$ par $f(x_1,\dots,x_N) = x_1^{\alpha_1-1}\dots x_N^{\alpha_N-1}$ est borélienne (car continue) et positive. D'autre part, les relations $x_k = at_k$ pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant N$, définissent un difféomorphisme de l'ouvert $\Delta_N(1)$ sur l'ouvert $\Delta_N(a)$ qui a pour jacobien a^N. Donc, en appliquant le théorème du changement de variable (théorème 5.3), on obtient

$$\begin{aligned} I_N(a) &= \int_{\Delta_N(a)} x_1^{\alpha_1-1}\dots x_N^{\alpha_N-1}\,dx_1\dots dx_N \\ &= \int_{\Delta_N(1)} a^{(\alpha_1+\dots\alpha_N)-N} t_1^{\alpha_1-1}\dots t_N^{\alpha_N-1} a^N\,dt_1\dots dt_N \\ &= a^{\alpha_1+\dots+\alpha_N} I_N(1) . \end{aligned}$$

2°) En remarquant que

$$(t_1+\dots+t_N<1) \Leftrightarrow (t_N < 1 \text{ et } t_1+\dots+t_{N-1} < 1-t_N) ,$$

on a, d'après le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 5.1) et la première question,

$$\begin{aligned} I_N(1) &= \int_{\Delta_N(1)} t_1^{\alpha_1-1}\dots t_N^{\alpha_N-1}\,dt_1\dots dt_N \\ &= \int_0^1 t_N^{\alpha_N-1} I_{N-1}(1-t_N)\,dt_N \\ &= \int_0^1 t_N^{\alpha_N-1} I_{N-1}(1)(1-t_N)^{\alpha_1+\dots+\alpha_{N-1}}\,dt_N \\ &= I_{N-1}(1)B(\alpha_1+\dots+\alpha_{N-1}+1,\alpha_N) \\ &= I_{N-1}(1)\frac{\Gamma(\alpha_1+\dots+\alpha_{N-1}+1)\Gamma(\alpha_N)}{\Gamma(\alpha_1+\dots+\alpha_{N-1}+\alpha_N+1)} . \end{aligned}$$

3°) En effectuant les produits successifs et en simplifiant, on obtient

$$\begin{aligned} I_N(1) &= I_{N-1}(1)\frac{\Gamma(\alpha_1+\dots+\alpha_{N-1}+1)\Gamma(\alpha_N)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{N-1}+\alpha_N+1)} \\ &= I_{N-2}(1)\frac{\Gamma(\alpha_1+\dots+\alpha_{N-2}+1)\Gamma(\alpha_{N-1})\Gamma(\alpha_N)}{\Gamma(\alpha_1+\dots+\alpha_N+1)} \\ &= \cdots \\ &= I_1(1)\frac{\Gamma(\alpha_1+1)\Gamma(\alpha_2)\dots\Gamma(\alpha_{N-1})\Gamma(\alpha_N)}{\Gamma(\alpha_1+\dots+\alpha_{N-1}+\alpha_N+1)} . \end{aligned}$$

Or $I_1(1) = \int_0^1 x_1^{\alpha_1-1}\,dx_1 = \dfrac{1}{\alpha_1}$ et $\Gamma(\alpha_1+1) = \alpha_1\Gamma(\alpha_1)$. D'où

$$I_N(a) = a^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_N}\frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\dots\Gamma(\alpha_{N-1})\Gamma(\alpha_N)}{\Gamma(\alpha_1+\dots+\alpha_N+1)} .$$

Exercice 5.17 (Convolution et transformée de Fourier dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$)

1°) Soient f et g deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}^N$. On considère la fonction h définie presque partout sur $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ par $h(x,y) = f(x-y)g(y)$. *Rappelons qu'on a montré dans l'exercice 1.9 que h est borélienne.*

1.a Montrer que h est intégrable sur $\mathbb{R}^{2N}$ et que

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} |h(x,y)|\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|\,dx \int_{\mathbb{R}^N} |g(y)|\,dy .$$

1.b En déduire que la fonction qui, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$ associe $\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^N} h(x,y)\,dy$, est intégrable sur $\mathbb{R}^N$. La fonction φ est appelée *produit de convolution* (ou la *convolée*) de f et g et on la notera désormais $f * g$.

1.c Vérifier que $f * g$ est intégrable sur $\mathbb{R}^N$ et que

$$\|f*g\|_1 \leqslant \|f\|_1\|g\|_1 .$$

2°) On a déjà vu à l'exercice 4.29 que les fonctions $\mathcal{F}(f)$ (qu'on note aussi $\hat{f}$) et $\bar{\mathcal{F}}(f)$ sont bien définies, continues et uniformément bornées sur $\mathbb{R}$. Soit $(f,g) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \times \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Montrer que :

2.a $\mathcal{F}(f*g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$;

2.b $\bar{\mathcal{F}}(f*g) = \bar{\mathcal{F}}(f)\bar{\mathcal{F}}(g)$;

2.c $f\hat{g}$ et $\hat{f}g$ appartiennent à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et qu'on a

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\hat{g}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)g(y)\,dy .$$

Solution

1°) Soit $(f,g) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$.

1.a En appliquant le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 5.1) à $|h|$ et sachant que $\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|\,dx$ pour tout $y \in \mathbb{R}^N$, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{2N}} |h(x,y)|\,dx\,dy &= \int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} |f(x-y)||g(y)|\,dx\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |g(y)| \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\,dx\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |g(y)| \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|\,dx\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|\,dx \int_{\mathbb{R}^N} |g(y)|\,dy .\end{aligned}$$

Ainsi, h est intégrable sur $\mathbb{R}^{2N}$ et on a

$$\|h\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1 .$$

1.b Le théorème de Fubini (théorème 5.2 1°) (i)) entraîne que pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$, la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^N$. Ainsi, la fonction $x \mapsto \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\,dy$ est définie presque partout sur $\mathbb{R}^N$.

1.c Le théorème de Fubini (théorème 5.2 1°) (ii)) entraîne que la fonction

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\,dy$$

est intégrable sur $\mathbb{R}^N$, c'est-à-dire que $f * g$ est intégrable sur $\mathbb{R}^N$. D'autre part,

$$\begin{aligned}\|f*g\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^N} \left| \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\,dy \right| dx \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)g(y)|\,dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|\,dx \int_{\mathbb{R}^N} |g(y)|\,dy \\ &= \|f\|_1 \|g\|_1 .\end{aligned}$$

2°) Soit $(f,g) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \times \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

2.a Puisque $f*g$ est intégrable d'après la première question, $\mathcal{F}(f*g)$ est bien définie. D'autre part, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, l'application ϕ définie presque partout sur $\mathbb{R}^2$ par $\phi(x,y) = e^{-2i\pi\xi x} f(y) g(x-y)$ appartient à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$; en effet,

$$\|\phi\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1 .$$

En vertu du théorème de Fubini (théorème 5.2), on a, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f*g)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi x} f*g(x)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi x} \left(\int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\,dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi x} g(x-y)\,dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y)\hat{g}(\xi) e^{-2i\pi\xi y}\,dy \\ &= \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi) .\end{aligned}$$

2.b Il suffit de changer $-i$ en i dans 2.a.

2.c Comme $\hat{g}$ est bornée (voir exercice 4.29), on a $f\hat{g} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $\|f\hat{g}\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|\hat{g}\|_\infty$. De même $g\hat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Par ailleurs, l'application ψ définie presque partout sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ par $\psi(y,\xi) = e^{-2i\pi\xi y} f(y) g(\xi)$ appartient à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$, car

$$\|\psi\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1 .$$

En vertu du théorème de Fubini (théorème 5.2), on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} g(\xi)\hat{f}(\xi)\,d\xi &= \int_{\mathbb{R}} g(\xi) \left(\int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2i\pi y\xi}\,dy \right) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}} g(\xi) e^{-2i\pi y\xi}\,d\xi \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y)\hat{g}(y)\,dy .\end{aligned}$$

Exercice 5.18 (Image de la mesure de Lebesgue par une norme)

Soit $\mathcal{N}$ une norme sur $\mathbb{R}^N$ ($N \geqslant 1$) et soit $B = \{x \in \mathbb{R}^N : \mathcal{N}(x) < 1\}$ la boule unité ouverte associée à $\mathcal{N}$. On note μ la mesure image de la mesure de Lebesgue $\lambda^{(N)}$ par la norme $\mathcal{N}$ (voir exercices 2.2 et 3.5).

1°) En remarquant que $\{x \in \mathbb{R}^N : \mathcal{N}(x) < r\} = rB$, établir que pour tout $r > 0$, $\mu([0,r[) = r^N \lambda^{(N)}(B)$ et en déduire que μ admet une densité qu'on déterminera par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur $[0,+\infty[$.

2°) Soit g une application borélienne de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{C}$. Montrer que $g \circ \mathcal{N}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^N$ si et seulement si l'application $r \mapsto r^{N-1}g(r)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et dans ce cas

$$\int_{\mathbb{R}^N} g\circ\mathcal{N}(x)\,dx = N\lambda^{(N)}(B) \int_0^{+\infty} r^{N-1} g(r)\,dr .$$

3°) Dans cette question, $\mathcal{N}$ est la norme euclidienne. Déduire de ce qui précède le volume de la boule euclidienne unité de $\mathbb{R}^N$ et comparer ce résultat avec celui de l'exercice 5.13.

Solution

1°) Pour tout $r > 0$, on a $\{\mathcal{N} < r\} = rB$; en effet,

$$(\mathcal{N}(x) < r) \Leftrightarrow \left(\mathcal{N}\left(\frac{x}{r}\right) < 1\right) \Leftrightarrow \left(\frac{x}{r} \in B\right) \Leftrightarrow (x \in rB) \; .$$

Donc

$$\begin{aligned}\mu([0,r[) &= \lambda^{(N)}\left(\mathcal{N}^{-1}([0,r[)\right)\\ &= \lambda^{(N)}\left(\{x \in \mathbb{R}^N : \mathcal{N}(x) < r\}\right)\\ &= \lambda^{(N)}(rB)\,.\end{aligned}$$

Par ailleurs, $\lambda^{(N)}(rB) = r^N\lambda^{(N)}(B)$, d'où $\mu([0,r[) = r^N\lambda^{(N)}(B)$. Ainsi μ admet pour fonction de répartition la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(t) = \begin{cases} t^N\lambda^{(N)}(B) & \text{si } t \geqslant 0\,,\\ 0 & \text{sinon}\,.\end{cases}$$

On en déduit que $\mu = N\lambda^{(N)}(B)t^{N-1}\mathbb{I}_{]0,+\infty[}(t)\,dt$.

2°) D'après l'exercice 3.5, si g est une application borélienne de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{C}$ alors $g \circ \mathcal{N}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^N$ si et seulement si l'application $r \mapsto r^{N-1}g(r)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et dans ce cas

$$\int_{\mathbb{R}^N} g \circ \mathcal{N}(x)\,dx = N\lambda^{(N)}(B)\int_0^{+\infty} r^{N-1}g(r)\,dr\,. \tag{5.3}$$

3°) Calcul du volume de la boule unité euclidienne.

Si $g(r) = e^{-r^2}$ et $\mathcal{N}$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^N$, on obtient, d'après la formule (5.3),

$$\int_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-\sum_{k=1}^N x_k^2\right) dx = N\lambda^{(N)}(B)\int_0^{+\infty} r^{N-1}e^{-r^2}\,dr\,.$$

Par ailleurs,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-\sum_{k=1}^N x_k^2\right) dx = \prod_{k=1}^N \int_{\mathbb{R}} e^{-x_k^2}\,dx_k = (\sqrt{\pi})^N = \pi^{\frac{N}{2}}$$

et le changement de variable $r^2 = s$ conduit à

$$\int_0^{+\infty} e^{-r^2}r^{N-1}\,dr = \int_0^{+\infty} e^{-r^2}(r^2)^{\frac{N-1}{2}}\,dr = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-s}s^{\frac{N}{2}-1}\,ds = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)\cdot$$

D'où

$$\lambda^{(N)}(B) = \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\frac{N}{2}\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} = \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right)}\cdot$$

5.6 ESPACES PRODUITS ABSTRAITS

Exercice 5.19

Soient $(E_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$ et $(E_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés σ-finis, et soient deux fonctions positives $f_1 \in \mathcal{L}^1(E_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$ et $f_2 \in \mathcal{L}^1(E_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$.

Démontrer que la mesure produit $(f_1 \cdot \mu_1) \otimes (f_2 \cdot \mu_2)$ des mesures à densité $f_1 \cdot \mu_1$ et $f_2 \cdot \mu_2$ est la mesure admettant la fonction $f_1 \otimes f_2$ pour densité par rapport à $\mu_1 \otimes \mu_2$, où $f_1 \otimes f_2$ désigne l'application définie sur $E_1 \times E_2$ par $(f_1 \otimes f_2)(x,y) = f_1(x)f_2(y)$.

Solution

La fonction f_1 est μ_1-intégrable sur E_1, donc la mesure à densité $f_1 \cdot \mu_1$ est finie car $(f_1 \cdot \mu_1)(E_1) = \int_{E_1} f_1\,d\mu_1$. De même, la fonction f_2 est μ_2-intégrable sur E_2, donc la mesure à densité $f_2 \cdot \mu_2$ est finie car $(f_2 \cdot \mu_2)(E_2) = \int_{E_2} f_2\,d\mu_2$. Ainsi, la mesure produit $(f_1 \cdot \mu_1) \otimes (f_2 \cdot \mu_2)$ est bien définie sur la tribu $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ et elle est finie (voir théorème 2.2).

Soient $A \in \mathcal{T}_1$ et $B \in \mathcal{T}_2$, alors $A \times B \in \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ et donc $\mathbb{I}_{A\times B}$ est $(\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable et positive. Ainsi, on peut appliquer le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 5.5) à la fonction $\mathbb{I}_{A\times B}$ avec la mesure produit $(f_1 \cdot \mu_1) \otimes (f_2 \cdot \mu_2)$ et on obtient

$$\begin{aligned}(f_1 \cdot \mu_1) \otimes (f_2 \cdot \mu_2)(A \times B) &= \int_{E_1\times E_2} \mathbb{I}_{A\times B}(x,y)\,d\big((f_1 \cdot \mu_1) \otimes (f_2 \cdot \mu_2)\big)(x,y)\\ &= \int_{E_1}\left(\int_{E_2} \mathbb{I}_{A\times B}(x,y)\,d(f_2 \cdot \mu_2)(y)\right) d(f_1 \cdot \mu_1)(x)\\ &= \int_{E_1}\left(\int_{E_2} \mathbb{I}_{A\times B}(x,y)f_2(y)\,d\mu_2(y)\right) f_1(x)\,d\mu_1(x)\\ &= \int_{E_1}\left(\int_{E_2} \mathbb{I}_{A\times B}(x,y)f_2(y)f_1(x)\,d\mu_2(y)\right) d\mu_1(x)\\ &= \int_{E_1}\left(\int_{E_2} \mathbb{I}_{A\times B}(x,y)f_1(x)f_2(y)\,d\mu_2(y)\right) d\mu_1(x)\,.\end{aligned}$$

Par ailleurs, la fonction

$$(x,y) \mapsto \mathbb{I}_{A\times B}(x,y)f_1(x)f_2(y)$$

est $(\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable et positive (comme produit d'applications mesurables et positives), donc on peut lui appliquer le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 5.5 avec la mesure produit $\mu_1 \otimes \mu_2$ et on obtient

$$\begin{aligned}&\int_{E_1}\left(\int_{E_2} \mathbb{I}_{A\times B}(x,y)f_1(x)f_2(y)\,d\mu_2(y)\right) d\mu_1(x)\\ &\quad= \int_{E_1\times E_2} \mathbb{I}_{A\times B}(x,y)f_1(x)f_2(y)\,d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x,y)\\ &\quad= \int_{E_1\times E_2} \mathbb{I}_{A\times B}(x,y)\,d\big((f_1(x)f_2(y))(\mu_1 \otimes \mu_2)\big)(x,y)\,.\end{aligned}$$

D'où, pour tout $A \in \mathcal{T}_1$ et tout $B \in \mathcal{T}_2$, on a

$$(f_1 \cdot \mu_1) \otimes (f_2 \cdot \mu_2)(A \times B) = \big((f_1 f_2)\mu_1 \otimes \mu_2\big)(A \times B)\,.$$

Comme « $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$ » engendre la tribu $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$, on a d'après le théorème de prolongement (théorème 2.4) (voir aussi le théorème 2.2)

$$(f_1 \cdot \mu_1) \otimes (f_2 \cdot \mu_2) = (f_1 \otimes f_2)(\mu_1 \otimes \mu_2)\,.$$

Exercice 5.20

Soient $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini, $\mathcal{B}$ la tribu des boréliens de $\mathbb{R}^+$ et $f : E \to \mathbb{R}^+$ une application $(\mathcal{T}, \mathcal{B})$-mesurable. On pose

$$G(f) = \{(x,y) \in E \times \mathbb{R}^+ : f(x) = y\}\,,$$
$$\text{Épi}(f) = \{(x,y) \in E \times \mathbb{R}^+ : 0 \leqslant f(x) < y\}\,.$$

On a montré à l'exercice 1.11 que $G(f)$ et Épi(f) sont éléments de $\mathcal{T} \otimes \mathcal{B}$.

1°) Soit $(x,y) \in E \times [0,+\infty[$, vérifier que $\mathbb{1}_{G_f}(x,y) = \mathbb{1}_{\{f(x)\}}(y)$ et en déduire $\mu \otimes \lambda\big(G(f)\big)$.

2°) 2.a Vérifier que pour tout $(x,y) \in E \times [0,+\infty[$, $\mathbb{1}_{H(f)}(x,y) = \mathbb{1}_{[0,f(x)[}(y)$ et en déduire que $\mu \otimes \lambda\big(\text{Épi}(f)\big) = \int_E f(x)\,d\mu(x)$.

2.b Vérifier que pour tout $(x,y) \in E \times [0,+\infty[$, $\mathbb{1}_{H(f)}(x,y) = \mathbb{1}_{]y,+\infty[}\big(f(x)\big)$ et en déduire $\mu \otimes \lambda\big(\text{Épi}(f)\big) = \int_{\mathbb{R}^+} \mu\{f > y\}\,dy$.

2.c Établir que $\int_E f(x)\,d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^+} \mu\big(\{f > y\}\big)\,dy$.

Solution

1°) Soit $(x,y) \in E \times [0,+\infty[$. On a

$$\mathbb{1}_{G(f)}(x,y) = 1 \Leftrightarrow (x,y) \in G(f) \Leftrightarrow f(x) = y\,,$$

d'où $\mathbb{1}_{G(f)}(x,y) = \mathbb{1}_{\{f(x)\}}(y)$. Ainsi, une application du théorème de Fubini-Tonelli (théorème 5.5) donne

$$\begin{aligned}\mu \otimes \lambda\big(G(f)\big) &= \int_{E\times[0,+\infty[} \mathbb{1}_{G_f}(x,y)\,d(\mu\otimes\lambda)(x,y)\\ &= \int_E \left(\int_{[0,+\infty[} \mathbb{1}_{\{f(x)\}}(y)\,d\lambda(y)\right) d\mu(x)\\ &= 0 \quad \text{car} \quad \lambda(\{f(x)\}) = 0\,.\end{aligned}$$

2°) 2.a Soit $(x,y) \in E \times [0,+\infty[$, on a

$$\mathbb{1}_{\text{Épi}(f)}(x,y) = 1 \Leftrightarrow (x,y) \in \text{Épi}(f) \Leftrightarrow 0 \leqslant y < f(x) \Leftrightarrow y \in [0,f(x)[\,,$$

d'où $\mathbb{1}_{\text{Épi}(f)}(x,y) = \mathbb{1}_{[0,f(x)[}(y)$. Ainsi

$$\begin{aligned}\mu \otimes \lambda\big(\text{Épi}(f)\big) &= \int_{E\times[0,+\infty[} \mathbb{1}_{\text{Épi}(f)}(x,y)\,d(\mu\otimes\lambda)(x,y)\\ &= \int_E \left(\int_{[0,+\infty[} \mathbb{1}_{\text{Épi}(f)}(x,y)\,dy\right) d\mu(x)\\ &= \int_E \left(\int_{[0,+\infty[} \mathbb{1}_{[0,f(x)[}\,dy\right) d\mu(x)\\ &= \int_E f(x)\,d\mu(x)\,.\end{aligned}$$

2.b Soit $(x,y) \in E \times [0,+\infty[$. On a

$$\mathbb{1}_{\text{Épi}(f)}(x,y) = 1 \Leftrightarrow (x,y) \in \text{Épi}(f) \Leftrightarrow 0 \leqslant y < f(x) \Leftrightarrow f(x) \in]y,+\infty[\,,$$

soit $\mathbb{1}_{\text{Épi}(f)}(x,y) = \mathbb{1}_{]y,+\infty[}\big(f(x)\big)$; d'où

$$\begin{aligned}\mu \otimes \lambda\big(\text{Épi}(f)\big) &= \int_{E\times[0,+\infty[} \mathbb{1}_{\text{Épi}(f)}(x,y)\,d(\mu\otimes\lambda)(x,y)\\ &= \int_E \left(\int_{[0,+\infty[} \mathbb{1}_{\text{Épi}(f)}(x,y)\,dy\right) d\mu(x)\\ &= \int_{[0,+\infty[} \left(\int_E \mathbb{1}_{]y,+\infty[}\big(f(x)\big)\,d\mu(x)\right) dy\\ &= \int_{[0,+\infty[} \mu\big(\{f > y\}\big)\,dy\,.\end{aligned}$$

2.c On déduit de 2.a et de 2.b que

$$\int_E f(x)\,d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^+} \mu\{f > y\}\,dy\,.$$

Exercice 5.21 (Convolution de mesures finies sur $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$)

Dans tout cet exercice, μ et ν désignent deux *mesures finies* sur $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$.

Définition 5.4 *On appelle* convolée de μ et ν *et on note* $\mu * \nu$ *la mesure image de la mesure produit* $\mu \otimes \nu$ *par l'application* $S : (x,y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \mapsto x+y$.

Rappelons que la notion de mesure image a été définie dans l'exercice 2.2 et que l'intégrale par rapport à une mesure image a été définie dans l'exercice 3.5. Ainsi, pour toute fonction borélienne et positive f sur $\mathbb{R}^N$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} f\,d(\mu * \nu) = \int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} f(x+y)\,d(\mu\otimes\nu)(x,y)\,,$$

et d'après le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 5.5), cette intégrale peut encore s'écrire

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(x+y)\,d\mu(x)\right) \nu(y) \quad \text{ou} \quad \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(x+y)\,d\nu(y)\right) d\mu(x)\,.$$

1°) 1.a Vérifier que la convolée des mesures μ et ν est une mesure finie et que $\mu * \nu = \nu * \mu$.

1.b Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$. Déterminer $\delta_a * \delta_b$ où δ_a et δ_b désignent les mesures de Dirac aux points a et b.

1.c Déterminer $\delta_a * \mu$. En déduire $\delta_0 * \mu$.

2°) Soient f et g deux fonctions positives et $\lambda^{(N)}$-intégrables sur $\mathbb{R}^N$.

2.a Montrer que $\left(f \cdot \lambda^{(N)}\right) * \nu$ est une mesure à densité que l'on déterminera.

2.b En déduire que $\left(f \cdot \lambda^{(N)}\right) * \left(g \cdot \lambda^{(N)}\right) = (f * g) \cdot \lambda^{(N)}$.

3°) Soit $s \in]0,+\infty[$ fixé. On considère pour tout $a \in]0,+\infty[$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\gamma_a(x) = \dfrac{s^a}{\Gamma(a)} e^{-sx} x^{a-1} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$.

3.a Vérifier que, pour tout $a > 0$, la mesure $\mu_a = \gamma_a \cdot \lambda$ est une probabilité.

3.b Soit $(a,b) \in]0,+\infty[^2$. Expliciter la fonction $\gamma_a * \gamma_b$ et en déduire la mesure $\mu_a * \mu_b$.

Solution

1°) 1.a Vérifions que $\mu * \nu$ est finie. En effet

$$\begin{aligned}\mu * \nu(\mathbb{R}^N) &= (\mu \otimes \nu)\left(S^{-1}(\mathbb{R}^N)\right) \\ &= (\mu \otimes \nu)(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N) \\ &= \mu(\mathbb{R}^N)\nu(\mathbb{R}^N) \\ &< +\infty .\end{aligned}$$

Remarque 5.8 On vient de montrer que $*$ est une loi de composition interne sur l'ensemble des mesures bornées $\mathcal{M}_b(\mathbb{R}^N)$. En fait, on vérifie sans peine que la loi $*$ est aussi commutative, associative et distributive par rapport à l'addition.

1.b Vérifions que $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$. En effet, on a, pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$,

$$\begin{aligned}(\delta_a * \delta_b)(B) &= \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \mathbb{1}_B(x+y)\, d(\delta_a \otimes \delta_b)(x,y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_B(x+y)\, d\delta_a(x) \right) d\delta_b(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_B(a+y)\, d\delta_b(y) \\ &= \mathbb{1}_B(a+b) \\ &= \delta_{a+b}(B) .\end{aligned}$$

1.c On a, pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, où l'on a posé $t_a(y) = y + a$ pour tout $y \in \mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned}(\delta_a * \mu)(B) &= \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \mathbb{1}_B(x+y)\, d(\delta_a * \mu)(x,y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_B(x+y)\, d\delta_a(x) \right) d\mu(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_B(a+y)\, d\mu(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_B\left(t_a(y)\right) d\mu(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (\mathbb{1}_B \circ t_a)(y)\, d\mu(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_B\, d\left(t_a(\mu)\right) \\ &= \left(t_a(\mu)\right)(B) .\end{aligned}$$

Donc $\delta_a * \mu$ est la mesure image de μ par la translation t_a de vecteur a. En particulier $\delta_0 * \mu = \mu$, autrement dit, la loi $*$ admet δ_0 pour élément neutre.

2°) 2.a En appliquant le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 5.5), on a, pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$,

$$\begin{aligned}\left(f \cdot \lambda^{(N)}\right) * \nu(B) &= \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \mathbb{1}_B(u+y)\, d\left(f \cdot \lambda^{(N)} \otimes \nu\right)(u,y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_B(u+y)\, d\left(f \cdot \lambda^{(N)}\right)(u) \right) d\nu(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_B(u+y) f(u)\, d\lambda^{(N)}(u) \right) d\nu(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_B(x) f(x-y)\, d\lambda^{(N)}(x) \right) d\nu(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_B(x) \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)\, d\nu(y) \right) d\lambda^{(N)}(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_B(x) h(x)\, d\lambda^{(N)}(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_B\, d\left(h \cdot \lambda^{(N)}\right) \\ &= \left(h \cdot \lambda^{(N)}\right)(B) ,\end{aligned}$$

où h est la fonction définie pour $\lambda^{(N)}$-presque tout x dans $\mathbb{R}^N$ par

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)\, d\nu(y) .$$

Ainsi, $\left(f \cdot \lambda^{(N)}\right) * \nu$ est la mesure ayant h pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda^{(N)}$.

2.b On déduit de 2.a que, si $\nu = g \cdot \lambda^{(N)}$ pour $\lambda^{(N)}$ presque tout x dans $\mathbb{R}^N$, alors

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)\, d\left(g \cdot \lambda^{(N)}\right)(y) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y) g(y)\, d\lambda^{(N)}(y) = f * g(x) .$$

Ainsi,
$$\left(f\cdot\lambda^{(N)}\right)*\left(g\cdot\lambda^{(N)}\right)=(f*g)\cdot\lambda^{(N)}\,.$$

3°) Un exemple sur $\mathbb{R}$.

3.a Pour prouver que μ_a est une probabilité, il suffit de vérifier que $\mu_a(\mathbb{R})=1$. En utilisant le changement de variable $y=sx$, on a
$$\begin{aligned}\mu_a(\mathbb{R})&=\int_{\mathbb{R}}\frac{s^a}{\Gamma(a)}e^{-sx}x^{a-1}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)\,d\lambda(x)=\frac{s^a}{\Gamma(a)}\int_0^{+\infty}e^{-sx}x^{a-1}\,dx\\&=\frac{s^a}{\Gamma(a)}\int_0^{+\infty}e^{-y}\left(\frac{y}{s}\right)^{a-1}\frac{dy}{s}=\frac{s^a}{\Gamma(a)}\frac{\Gamma(a)}{s^a}=1\,.\end{aligned}$$

3.b Si $x\leqslant 0$, il est clair que $\gamma_a*\gamma_b(x)=0$. Si $x>0$, alors
$$\begin{aligned}\gamma_a*\gamma_b(x)&=\frac{s^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int_{\mathbb{R}}e^{-s(x-y)}(x-y)^{a-1}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x-y)e^{-sy}y^{b-1}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y)\,dy\\&=\frac{s^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)}e^{-sx}\int_0^x(x-y)^{a-1}y^{b-1}\,dy\,,\end{aligned}$$
par ailleurs, en effectuant le changement de variable $t=\dfrac{y}{x}$, on trouve
$$\begin{aligned}\int_0^x(x-y)^{a-1}y^{b-1}\,dy&=x^{a+b-1}\int_0^x\left(1-\frac{y}{x}\right)^{a-1}\left(\frac{y}{x}\right)^{b-1}\frac{dy}{x}\\&=x^{a+b-1}\int_0^1(1-t)^{a-1}t^{b-1}\,dt\\&=x^{a+b-1}B(a,b)=x^{a+b-1}\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\,,\end{aligned}$$
d'où
$$\gamma_a*\gamma_b(x)=\frac{s^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)}e^{-sx}x^{a+b-1}\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}=\gamma_{a+b}(x)\,.$$

En conclusion
$$\gamma_a*\gamma_b=\gamma_{a+b}\quad\text{et}\quad\mu_a*\mu_b=\mu_{a+b}\,.$$

Chapitre **6**

Espaces $\mathcal{L}^p$ et L^p

RAPPELS DE COURS

Dans tout ce chapitre, on se donne une fois pour toutes un espace mesuré $(E,\mathcal{T},\mu)$.

6.1 INÉGALITÉS CLASSIQUES

Définition 6.1 *Soient p et p' deux réels appartenant à $]1,+\infty[$. On dit que p et p' sont* conjugués *si* $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$.

Par extension, on dit que 1 et $+\infty$ sont conjugués.

Théorème 6.1 (Inégalité de Hölder) *Soient $f,g:E\to\mathbb{C}$ $(\mathcal{T},\mathcal{B}(\mathbb{C}))$-mesurables ; on a, pour tout $p\in]1,+\infty[$ et p' son conjugué,*
$$\int_E|fg|\,d\mu\leqslant\left(\int_E|f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_E|g|^{p'}\,d\mu\right)^{\frac{1}{p'}}\,.$$

Remarque 6.1 Lorsque $p=p'=2$, l'inégalité de Hölder est dans ce cas connue sous le nom d'*inégalité de Cauchy-Schwarz* ou encore d'*inégalité de Schwarz*.

Théorème 6.2 (Inégalité de Minkowski) *Soient $f,g:E\to\mathbb{C}$ $(\mathcal{T},\mathcal{B}(\mathbb{C}))$-mesurables ; on a, pour tout $p\in[1,+\infty[$,*
$$\left(\int_E|f+g|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\int_E|f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_E|g|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\,.$$

6.2 ESPACES $\mathcal{L}^p$, $p \in [1,+\infty[$

Définition 6.2 *Pour $p \in [1,+\infty[$, on désigne par $\mathcal{L}^p(E,\mathcal{T},\mu)$ l'ensemble des applications f de E dans $\mathbb{C}$ $(\mathcal{T},\mathcal{B}(\mathbb{C}))$-mesurables telles que $\int_E |f|^p\,d\mu < +\infty$.*

Pour $f \in \mathcal{L}^p(E,\mathcal{T},\mu)$, on pose

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Lorsqu'aucune confusion n'est à craindre, on écrira $\mathcal{L}^p$ ou $\mathcal{L}^p(\mu)$ au lieu de $\mathcal{L}^p(E,\mathcal{T},\mu)$. On notera que $\mathcal{L}^1(\mu)$ n'est autre que l'ensemble des fonctions μ-intégrables qu'on a vu au chapitre 3 ; les éléments de $\mathcal{L}^p(\mu)$ sont aussi appelés *fonctions de puissance p μ-intégrables.*

Proposition 6.1

(i) Pour tout $p \in [1,+\infty[$, l'ensemble $\mathcal{L}^p(E,\mathcal{T},\mu)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

(ii) L'application $f \mapsto \|f\|_p$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^p(E,\mathcal{T},\mu)$.

6.3 CONVERGENCE DANS LES ESPACES $\mathcal{L}^p$

Définition 6.3 *Soient $p \in [1,+\infty[$, $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}^p$ et $f \in \mathcal{L}^p$. On dit que la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$* converge dans $\mathcal{L}^p$ *vers f ou que la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$* converge en moyenne d'ordre p *vers f si*

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

Théorème 6.3 (Extension du théorème de convergence dominée) *Soient $p \in [1,+\infty[$, $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}^p$ et $g : E \to [0,+\infty]$ un élément de $\mathcal{L}^p$ tels que*

(i) $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ μ-presque partout ;

(ii) $|f_n| \leqslant g$ μ-presque partout.

Alors $f \in \mathcal{L}^p$ et $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_p = 0$.

Corollaire 6.1 *Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}^p(\mu)$ telle que*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n\|_p < +\infty.$$

Alors la série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge absolument pour μ-presque tout x. De plus, la fonction $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ (définie μ-presque partout) appartient à $\mathcal{L}^p(\mu)$ et

$$\lim_{N\to+\infty} \left\| \sum_{n=1}^{N} f_n - f \right\|_p = 0.$$

6.4 ESPACE $\mathcal{L}^\infty$

Définition 6.4 *Un élément M de $[0,+\infty]$ est un* majorant μ-essentiel *de la fonction f si*

$$\mu(\{|f| > M\}) = 0.$$

La fonction f est dite μ-essentiellement bornée *si f admet un majorant μ-essentiel fini.*

Remarque 6.2 Si M est un majorant μ-essentiel de f et si $M' > M$ alors M' est aussi un majorant μ-essentiel de f. D'où la définition suivante.

Définition 6.5 *Soit f une fonction μ-essentiellement bornée. On appelle* borne supérieure μ-essentielle *de f et on note $\|f\|_{\mathcal{L}^\infty(\mu)}$ ou $\|f\|_\infty$ quand il n'y a pas de confusion possible, la borne inférieure des majorants μ-essentiels de f. Autrement dit*

$$\|f\|_\infty = \inf\{M : \mu(\{|f| > M\}) = 0\}.$$

Proposition 6.2 *Soit f une fonction μ-essentiellement bornée (i.e. $\|f\|_\infty < +\infty$), alors $\|f\|_\infty$ est le* plus petit *majorant μ-essentiel de f. Plus précisément pour tout $M \geqslant \|f\|_\infty$, $\mu(\{|f| > M\}) = 0$ et pour tout $M \leqslant \|f\|_\infty$, $\mu(\{|f| > M\}) > 0$.*

Remarque 6.3

1°) Posons $A = \{x \in E : |f(x)| > \|f\|_\infty\}$. Alors

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in A^c\} \leqslant \sup\{|f(x)| : x \in E\} = \|f\|_u$$

et la valeur de $\|f\|_\infty$ dépend de la mesure considérée.

2°) Si $f = g$ μ-p.p., alors $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty$.

Définition 6.6 *On désigne par $\mathcal{L}^\infty(E,\mathcal{T},\mu)$ (ou $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ quand il n'y a pas de risque de confusion) l'ensemble des fonctions $f : E \to \mathbb{C}$ $(\mathcal{T},\mathcal{B}(\mathbb{C}))$-mesurables telles que $\|f\|_\infty < +\infty$.*

Proposition 6.3 *$\mathcal{L}^\infty(\mu)$ est un espace vectoriel et l'application $f \mapsto \|f\|_\infty$ est une semi-norme.*

Proposition 6.4 (Inégalité de Hölder généralisée) *Soient $p \in [1,+\infty]$ et p' son conjugué (où l'on convient que $p = 1$ et $p' = +\infty$ sont conjugués), $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $g \in \mathcal{L}^{p'}(\mu)$. Alors fg est μ-intégrable et on a*

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

6.5 ESPACES L^p

Soit $p \in [1,+\infty]$. Sur l'espace $\mathcal{L}^p(E,\mathcal{T},\mu)$, la relation ($f = g$ μ-p.p.) est une relation d'équivalence. La réflexivité et la symétrie sont triviales ; la transitivité résulte du fait que la réunion de deux ensembles négligeables est négligeable.

Pour $f \in \mathcal{L}^p$, la classe d'équivalence de f est notée

$$\dot{f} = \{g \in \mathcal{L}^p, f = g\ \mu - p.p.\}.$$

On désigne par $L^p(E,\mathcal{T},\mu)$ l'ensemble des classes d'équivalence. Cela signifie que dans L^p, on ne distingue pas deux éléments égaux μ-presque partout. Ainsi L^p est un espace vectoriel normé. En effet, soit $\dot{f} \in L^p$ et soient f et g deux éléments de $\mathcal{L}^p$ appartenant à $\dot{f}$. On a $f = g$ μ–p.p., donc

$$\text{si } p \text{ est fini,} \quad \int_E |f|^p \, d\mu = \int_E |g|^p \, d\mu ,$$
$$\text{si } p \text{ est infini,} \quad \|f\|_\infty = \|g\|_\infty .$$

On peut donc poser $\|\dot{f}\|_p = \|f\|_p$ et l'application qui à $\dot{f} \in L^p$ associe $\|\dot{f}\|_p$ est bien une norme, car

$$\|\dot{f}\|_p = 0 \Leftrightarrow \dot{f} = \dot{0} .$$

La convergence dans L^p est naturellement la convergence pour la norme $\|\cdot\|_p$.

Dans la suite de ce cours, nous noterons *abusivement* par le même symbole f l'élément de $\mathcal{L}^p$ et sa classe dans L^p.

6.6 PROPRIÉTÉS DES ESPACES L^p

Théorème 6.4 (Théorème de Riesz-Fisher) *Pour tout $p \in [1,+\infty]$, $L^p(\mu)$ est un espace de Banach (espace vectoriel normé complet).*

Le cas $p = 2$ est un cas particulièrement important, tant du point de vue théorique que du point de vue des applications.

Théorème 6.5 *L'espace $L^2(\mu)$ est un espace de* Hilbert *pour le produit scalaire*

$$(f,g) \mapsto (f|g) = \int_E f\bar{g}\, d\mu .$$

Commentaire : On rencontre ici, dès 1907, la première justification de l'intérêt apporté par le nouvel outil qu'est l'intégrale de Lebesgue qui, contrairement à l'intégrale de Riemann, amène à la considération d'espaces complets. C'est ainsi que l'espace $L^2(\mu)$ a fourni le premier exemple « fonctionnel » d'espace de Hilbert, prolongeant le cas de l'espace $l^2(\mathbb{N})$ des suites de carré sommable. Il est ainsi directement à l'origine de la *géométrisation de l'Analyse*, de la création des espaces fonctionnels, de l'apparition de la notion de norme et des problèmes de convergence associés.

Théorème 6.6 *Soient $p \in [1,+\infty]$, $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de $L^p(\mu)$ et $f \in L^p(\mu)$ tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_p = 0$. Alors il existe une suite extraite $(f_{n_k})_{k\geqslant 1}$ et une fonction $h \in L^p(\mu)$ telles que*

(i) $f_{n_k}(x) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$ μ-p.p. sur E ;

(ii) pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $|f_{n_k}(x)| \leqslant h(x)$ μ-p.p. sur E.

Remarque 6.4 Il peut arriver que la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge dans $L^p(\mu)$ vers f sans que la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers f μ-presque partout (voir l'exercice 6.24).

6.7 THÉORÈMES DE DENSITÉ

Il n'est pas toujours commode de raisonner avec des fonctions de puissance p^e μ-intégrable et la tentation ou la nécessité se fait souvent sentir de ne travailler qu'avec de « bons » sous-espaces de $L^p(\mu)$. On entend par de « bons » sous-espaces principalement des sous-espaces partout denses. Ils sont de deux sortes : construits à partir des fonctions étagées dans le cadre général abstrait d'un espace mesuré $(E,\mathcal{T},\mu)$, ou bien à partir de fonctions continues dans le cadre d'une mesure borélienne sur $\mathbb{R}^N$ ($\mu(K) < +\infty$, pour tout compact K de $\mathbb{R}^N$).

Théorème 6.7 *L'ensemble $\mathcal{E}_1$ des fonctions étagées μ-intégrables est dense dans $L^p(\mu)$ pour tout $p \in [1,+\infty[$.*

On peut même diminuer l'espace $\mathcal{E}_1$ en le remplaçant par l'espace $\mathcal{E}_2$ des fonctions étagées sur n'importe quel demi-anneau $\mathcal{A}$ (voir définition 2.4) qui engendre la tribu $\mathcal{T}$, pourvu que la mesure μ soit σ-finie sur $\mathcal{A}$.

Théorème 6.8 *Soit $\mathcal{A}$ un demi-anneau tel que :*

(i) $\sigma_E(\mathcal{A}) = \mathcal{T}$;

(ii) $E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$ où $A_n \in \mathcal{A}$;

(iii) si $A \in \mathcal{A}$ alors $\mu(A) < +\infty$.

Alors $\left\{\sum\limits_{i=1}^{N} a_i \mathbb{I}_{A_i}, A_i \in \mathcal{A}, a_i \in \mathbb{C}\right\}$ est dense dans $L^p(\mu)$ pour $p \in [1,+\infty[$.

On déduit des deux théorèmes précédents des résultats relatifs à l'espace $\mathbb{R}^N$ muni d'une mesure borélienne.

Théorème 6.9 *Soit μ une mesure borélienne sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Alors*

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{I}_{P_i} : P_i \text{ pavé borné de } \mathbb{R}^N, \alpha_i \in \mathbb{C} \text{ pour tout } i \in \{1,\dots,n\}\right\}$$

est dense dans $L^p(\mu)$ pour tout $p \in [1,+\infty[$.

Définition 6.7 *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ une fonction continue ; on appelle* support *de f la fermeture (ou l'adhérence) de l'ouvert $\{x \in \mathbb{R}^N : f(x) \neq 0\}$.*

Notation : On note $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}^N$ à support compact.

Théorème 6.10 *Soit μ une mesure borélienne sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Alors $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \mu)$ pour tout $p \in [1,+\infty[$.*

EXERCICES

6.8 ESPACES $L^p(\mathbb{R}^N)$ MUNIS DE LA MESURE DE LEBESGUE

Exercice 6.1

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x(1+|\ln x|)^2}$.

1°) Montrer que f appartient à $L^1(0,1)$ et que f n'appartient pas à $L^p(0,1)$ pour tout $p > 1$.

2°) Montrer que f appartient à $L^p(1,+\infty)$ pour tout $p \in [1,+\infty]$.

Solution

1°) – Montrons que $f \in L^1(0,1)$. Le changement de variable $y = \dfrac{1}{x}$ conduit immédiatement à

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1 \frac{1}{x(1-\ln x)^2}\,dx \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{y(1+\ln y)^2}\,dy \\ &= \left[-\frac{1}{1+\ln y}\right]_1^{+\infty} = 1\,.\end{aligned}$$

Par suite, $f \in L^1(0,1)$ et $\|f\|_{L^1(0,1)} = 1$.

– Montrons que $f \notin L^p(0,1)$, pour tout $p > 1$. Comme $x|f(x)|^p \sim \dfrac{1}{x^{p-1}(\ln x)^{2p}}$, quand x tend vers 0,

$$\lim_{x\to 0^+} x|f(x)|^p = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{p-1}(\ln x)^{2p}} = +\infty\,.$$

Donc il existe une constante réelle $c > 0$ telle que $|f(x)|^p \geqslant \dfrac{c}{x}$ pour tout $x \in]0,a[$ avec $a \in]0,1]$. Par suite,

$$\int_0^1 |f(x)|^p\,dx \geqslant c\int_0^a \frac{1}{x}\,dx = +\infty\,.$$

2°) On a $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+\ln x)^2}\,dx = \left[-\frac{1}{1+\ln x}\right]_1^{+\infty} = 1$, donc $f \in L^1(1,+\infty)$ et $\|f\|_{L^1(1,+\infty)} = 1$. D'autre part, si $p \in]1,+\infty[$, on a

$$|f(x)|^p = \frac{1}{x^p(1+\ln x)^{2p}} \leqslant \frac{1}{x^p}$$

pour tout $x \in [1,+\infty[$. Comme $x \mapsto \dfrac{1}{x^p}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, $x \mapsto |f(x)|^p$ l'est aussi. Enfin, f est une fonction continue sur $[1,+\infty[$, positive et strictement décroissante, donc f est uniformément bornée par $f(1) = 1$; la fonction f est un élément de $L^\infty(1,+\infty)$.

Exercice 6.2

Soit B un borélien de $\mathbb{R}^N$ de mesure de Lebesgue — qu'on note comme d'habitude $\lambda^{(N)}(B)$ ou simplement $\mathrm{mes}(B)$ — *finie*.

1°) Montrer que si p et q sont deux réels de $[1,+\infty[$ tels que $p < q$, alors

$$L^\infty(B) \subset L^q(B) \subset L^p(B) \subset L^1(B) \tag{6.1}$$

et que pour tout $f \in L^q(B)$

$$\|f\|_p \leqslant \|f\|_q\big(\mathrm{mes}(B)\big)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\,.$$

2°) Montrer sur des exemples que l'hypothèse $\mathrm{mes}(B) < +\infty$ est nécessaire et qu'en général,

$$\bigcup_{p\in]1,+\infty[} L^p(B) \neq L^1(B)\,.$$

Solution

1°) Distinguons deux cas : q infini et q fini.

Premier cas : $q = +\infty$, $p < +\infty$.

Soit $f \in L^\infty(B)$, posons $\|f\|_\infty = M$. On a $|f| \leqslant M$ p.p., donc $|f|^p \leqslant M^p$ p.p. et $\displaystyle\int_B |f(x)|^p dx \leqslant M^p\,\mathrm{mes}(B)$, soit $\|f\|_p \leqslant \|f\|_\infty(\mathrm{mes}(B))^{\frac{1}{p}}$.

Comme $\mathrm{mes}(B)$ est finie, $\displaystyle\int_B |f(x)|^p\,dx$ est finie et donc $f \in L^p(B)$.

Deuxième cas : $1 \leqslant p < q < +\infty$.

Soit $f \in L^q(B)$, on a donc $\displaystyle\int_B |f(x)|^q\,dx < +\infty$. Nous allons utiliser l'inégalité de Hölder généralisée (théorème 6.4). Posons $r = \dfrac{q}{p}$, $(r > 1)$ et r' tel que $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{r'} = 1$. Autrement dit, $r' = \dfrac{r}{r-1} = \dfrac{q}{q-p}$. On a

$$\int_B |f(x)|^p\,dx = \int_B |f(x)|^p\,\mathbb{1}_B(x)\,dx \leqslant \left(\int_B (|f(x)|^p)^r\,dx\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_B \mathbb{1}_B(x)\,dx\right)^{\frac{1}{r'}},$$

soit

$$\int_B |f(x)|^p\,dx \leqslant \mathrm{mes}(B)^{\frac{q-p}{q}}\left(\int_B |f(x)|^q\,dx\right)^{\frac{p}{q}}.$$

Par conséquent, on a

$$\|f\|_p \leqslant \mathrm{mes}(B)^{\frac{q-p}{qp}}\|f\|_q\,.$$

Par conséquent, si $f \in L^q(B)$ et $\mathrm{mes}(B) < +\infty$ alors $f \in L^p(B)$. Plus précisément, on vient de montrer que l'injection

$$i : L^q(B) \to L^p(B)$$

est continue et que la topologie définie par la norme $\|\cdot\|_q$ est plus fine que la topologie définie par la norme $\|\cdot\|_p$.

Commentaire : Il est possible de montrer les inclusions (6.1) de la manière suivante. En posant $A = \{x \in B : |f(x)| < 1\}$, on a

$$\begin{aligned}\int_B |f(x)|^p dx &= \int_A |f(x)|^p\,dx + \int_{A^c} |f(x)|^p\,dx \\ &\leqslant \int_A dx + \int_{A^c} |f(x)|^p\,dx \\ &= \operatorname{mes}(A) + \int_B \mathbb{I}_{A^c}|f(x)|^p\,dx\,.\end{aligned}$$

D'autre part, si $x \in A^c$, $|f(x)| \geqslant 1$, donc $|f(x)|^p \leqslant |f(x)|^q$ et $\mathbb{I}_{A^c}|f|^p \leqslant |f|^q$. D'où

$$\int_B |f(x)|^p\,dx \leqslant \operatorname{mes}(B) + \int_B |f(x)|^q\,dx < +\infty$$

donc $f \in L^p(B)$. Mais on n'a pas la continuité.

2°) Montrons sur des exemples que l'hypothèse $\operatorname{mes}(B) < +\infty$ est nécessaire.

- On prend par exemple $B =]0, +\infty[$. Il est clair que $\operatorname{mes}(B) = +\infty$.
- Soient p et q deux réels tels que $1 \leqslant p < q$. Exhibons une fonction appartenant à $L^q(0, +\infty)$ et n'appartenant à aucun $L^p(0, +\infty)$. Soient $a, b \in]0, +\infty[$ tels que $pa < qa < 1$ et $p(a+b) < 1 < q(a+b)$, alors la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^a(1+x^b)}$ appartient à $L^q(0, +\infty)$ et n'appartient pas à $L^p(0, +\infty)$ pour tout $q \in]p, +\infty[$.
- Exhibons une fonction appartenant à $L^\infty(0, +\infty)$ et n'appartenant à aucun $L^p(0, +\infty)$ pour tout $p \in [1, +\infty[$. Par exemple $f = \mathbb{I}_{]0,+\infty[}$. La fonction f appartient à $L^\infty(0, +\infty)$ mais n'appartient pas à $L^p(]0, +\infty[)$, pour tout $p \in [1, +\infty[$.
- Montrons sur un exemple qu'en général $\bigcup_{p \in]1,+\infty[} L^p(B) \neq L^1(B)$.

  On prend $B =]0, 1[$. Il est clair que $\operatorname{mes}(]0, 1[) = 1$. Considérons la fonction g définie sur $]0, 1[$ par $g(x) = \dfrac{1}{x(1-(\ln x)^2)}$. On a vu à l'exercice 6.1 que $g \in L^1(]0, 1[)$ mais $g \notin L^p(]0, 1[)$ pour tout $p \in]1, +\infty[$.

Commentaire : Les résultats de la première question sont valables pour tout espace mesuré $(E, \mathcal{T}, \mu)$ tel que $\mu(E) < +\infty$. Il suffit de remplacer dx par $d\mu$ et $\operatorname{mes}(B)$ par $\mu(E)$ (voir exercice 6.10).

Exercice 6.3

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. On suppose que f et f'' appartiennent à $L^2(\mathbb{R})$.

1°) Montrer que ff'' appartient à $L^1(\mathbb{R})$.

2°) En déduire que $f' \in L^2(\mathbb{R})$ et établir l'inégalité

$$\|f'\|_2^2 \leqslant \|f\|_2\|f''\|_2\,.$$

Solution

1°) On déduit de l'inégalité élémentaire $|ab| \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ valable pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ que $|f(x)f''(x)| \leqslant \frac{1}{2}\left((f(x))^2 + (f''(x))^2\right)$ et donc

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)f''(x)|\,dx \leqslant \frac{1}{2}(\|f\|_2^2 + \|f''\|_2^2)\,.$$

2°) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < 0 < b$. En intégrant par parties, on obtient

$$\int_a^b f(x)f''(x)\,dx = f(b)f'(b) - f(a)f'(a) - \int_a^b (f'(x))^2\,dx\,.$$

Si $\int_a^{+\infty} (f'(x))^2\,dx = +\infty$, on aurait alors $\lim_{b\to+\infty} f(b)f'(b) = +\infty$. Donc il existerait $x_0 > 0$ tel que pour tout $x \geqslant x_0$, $f(x)f'(x) > 1$. On aurait alors d'après le théorème des accroissements finis, pour tout $x > x_0$,

$$(f(x))^2 \geqslant 2(x - x_0) + (f(x_0))^2\,,$$

en particulier $\lim_{x\to+\infty} (f(x))^2 = +\infty$ et $\int_{x_0}^{+\infty} (f(x))^2\,dx = +\infty$, ce qui contredit l'hypothèse $f \in L^2(\mathbb{R})$. Donc $\int_a^{+\infty} (f'(x))^2\,dx < +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)f'(x) = l < +\infty$. Supposons que l soit différent de 0. Alors posons $\varepsilon = \frac{|l|}{2}$, il existe $x_0 > 0$ tel que pour tout $x \geqslant x_0$ on ait

$$|f'(x)f(x) - l| \leqslant \frac{|l|}{2}\,.$$

Donc pour tout $x \geqslant x_0$,

$$|f'(x)f(x)| \geqslant \frac{|l|}{2}$$

et alors $\int_{x_0}^{+\infty} |f'(x)f(x)|\,dx = +\infty$. Ce qui contredit la première question donc $\lim_{b\to+\infty} f(b)f'(b) = 0$.

Pour b fixé et a tendant vers $-\infty$, on justifie de la même façon la convergence de $\int_{-\infty}^b (f'(x))^2\,dx$ et $\lim_{a\to-\infty} f(a)f'(a) = 0$. Donc $f' \in L^2(\mathbb{R})$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)^2\,dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)f''(x)\,dx$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz (remarque 6.1), on obtient

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} (f'(x))^2\,dx &= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f''(x)\,dx\right| \\ &\leqslant \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x))^2\,dx}\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (f''(x))^2\,dx}\,,\end{aligned}$$

soit

$$\|f'\|_2^2 \leqslant \|f\|_2\|f''\|_2\,.$$

L'inégalité précédente devient égalité si et seulement si f est identiquement nulle.

Exercice 6.4

Soient $p \in [1, +\infty[$, $N \in \mathbb{N}^*$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Pour tout $a \in \mathbb{R}^N$, on considère la fonction qu'on note $\tau_a f$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ par $\tau_a f(x) = f(x-a)$.

1°) Vérifier que $\tau_a f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et que $\|\tau_a f\|_p = \|f\|_p$.

2°) Montrer que

$$\lim_{a \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-a) - f(x)|^p \, dx = 0 .$$

On commencera par le cas où f est continue et à support compact.

3°) En déduire que l'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi_f : & \mathbb{R}^N & \to & L^p(\mathbb{R}^N) \\ & a & \mapsto & \tau_a f \end{array}$$

est uniformément continue.

4°) Montrer sur un exemple que le résultat ci-dessus est en général faux dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Solution

1°) Soit $a \in \mathbb{R}^N$. En effectuant le changement de variable linéaire Φ de $\mathbb{R}^N$ sur lui-même (voir théorème 5.3), défini par $\Phi(x) = x - a$ de jacobien 1, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\tau_a f(x)|^p \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-a)|^p \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |f(y)|^p \, dy ,$$

d'où $\|\tau_a f\|_p = \|f\|_p$.

2°) *Premier cas :* Soit $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ une fonction continue à support compact K. Soit $\varepsilon > 0$ un réel fixé. Montrons qu'il existe $\eta = \eta(\varepsilon)$ tel que pour tout $a \in \mathbb{R}^N$ vérifiant $\|a\| < \eta$, on ait,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |g(x-a) - g(x)|^p \, dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \cdot$$

Comme la fonction g est continue et à support compact, elle est uniformément continue, donc il existe $\eta = \eta(\varepsilon)$ tel que pour tout $a \in \mathbb{R}^N$ vérifiant $\|a\| < \eta$, on ait, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$,

$$|g(x-a) - g(x)| \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{2\lambda^{(N)}(K)} \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Par ailleurs, $\tau_a g - g$ est nulle en dehors du compact $(a + K) \cup K$, donc

$$\int_{\mathbb{R}^N} |g(x-a) - g(x)|^p \, dx = \int_{(K+a) \cup K} |g(x-a) - g(x)|^p \, dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \cdot$$

Deuxième cas : Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$. En vertu de la densité de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ (voir théorème 6.10), il existe $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ telle que

$$\|f - g\|_p \leqslant \frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{4} \cdot$$

Par ailleurs on a, pour $a \in \mathbb{R}^N$,

$$\|\tau_a f - f\|_p \leqslant \|\tau_a f - \tau_a g\|_p + \|\tau_a g - g\|_p + \|g - f\|_p .$$

Or $\|\tau_a f - \tau_a g\|_p = \|f - g\|_p$ et d'après le premier cas, il existe $\eta = \eta(\varepsilon)$ tel que pour tout $a \in \mathbb{R}^N$ vérifiant $\|a\| < \eta$, on ait

$$\|\tau_a g - g\|_p \leqslant \frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{2} \cdot$$

Par conséquent, pour tout $a \in \mathbb{R}^N$ tel que $\|a\| \leqslant \eta$, on a

$$\|\tau_a f - f\|_p^p \leqslant \varepsilon .$$

3°) Remarquons que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$,

$$\|\tau_a f - \tau_b f\|_p = \|\tau_{a-b} f - f\|_p .$$

Donc pour montrer que Φ_f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^N$, il suffit de le montrer au voisinage de 0, ce qui découle de la deuxième question.

4°) Le résultat montré en 2°) est en général faux pour $p = +\infty$. En effet, soit $N = 1$ et $f = \mathbb{1}_{]c,d[}$ où c et d sont deux réels tels que $c < d$. Alors, pour tout réel a tel que $0 < a < d - c$, on a $\|\tau_a f - f\|_\infty = 1$.

Exercice 6.5

1°) Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ où $p \in]1, +\infty[$.

1.a Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^N$. On note alors $f * g$ la fonction définie pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$ par

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y) g(y) \, dy .$$

1.b Montrer que $f * g$ appartient à $L^p(\mathbb{R}^N)$ et

$$\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_1 \|g\|_p .$$

2°) Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$ où $p \in [1, +\infty[$ et p' son conjugué.

2.a Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, la fonction

$$y \mapsto f(x-y) g(y)$$

est intégrable sur $\mathbb{R}^N$. On pose alors pour tout $x \in \mathbb{R}^N$

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y) g(y) \, dy .$$

2.b Montrer que $f * g$ est uniformément bornée, plus précisément

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} |f * g(x)| \leqslant \|f\|_p \|g\|_{p'} .$$

2.c Montrer que $f*g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^N$. On appliquera les résultats de l'exercice 6.4.

2.d On suppose que $p \in]1,+\infty[$ (et donc p' aussi). Montrer que

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} f*g(x)=0\,.$$

Montrer sur des exemples que si $p=1$, $f*g(x)$ peut ne pas tendre vers 0 ou n'a pas de limite quand $\|x\|$ tend vers l'infini.

Solution

1°) Soit p' le conjugué de p.

1.a Montrons que pour presque tout $x\in\mathbb{R}^N$, la fonction $k: y\mapsto k(y)=f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^N$. Remarquons tout d'abord que pour tout $x\in\mathbb{R}^N$, la fonction $y\mapsto h(y)=|f(x-y)|^{\frac{1}{p'}}$ appartient à $L^{p'}(\mathbb{R}^N)$; en effet

$$\|h\|_{p'}^{p'}=\int_{\mathbb{R}^N}|f(x-y)|\,dy=\|f\|_1\,.$$

D'autre part, les deux fonctions $x\mapsto|f(x)|$ et $x\mapsto|g(x)|^p$ appartiennent à $L^1(\mathbb{R}^N)$, donc l'exercice 5.17 entraîne que pour presque tout $x\in\mathbb{R}^N$, la fonction $y\mapsto l(y)=|f(x-y)||g(y)|^p$ est intégrable sur $\mathbb{R}^N$. Autrement dit, la fonction $y\mapsto l(y)$ $|f(x-y)|^{\frac{1}{p}}|g(y)|$ appartient à $L^p(\mathbb{R}^N)$. Soit $x\in\mathbb{R}^N$ fixé tel que la fonction $y\mapsto l(y)$ appartienne à $L^p(\mathbb{R}^N)$. En remarquant que pour presque tout $y\in\mathbb{R}^N$, on a

$$|k(y)|=|f(x-y)|^{\frac{1}{p}}|g(y)||f(x-y)|^{\frac{1}{p'}}=h(y)l(y)$$

et en appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\|k\|_1\leqslant\|h\|_{p'}\|l\|_p\,. \tag{6.2}$$

Comme $h\in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$ et pour presque tout $x\in\mathbb{R}^N$, la fonction l appartient à $L^p(\mathbb{R}^N)$, la fonction $y\mapsto f(x-y)g(y)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^N)$ pour presque tout $x\in\mathbb{R}^N$.

1.b L'inégalité (6.2) s'écrit

$$\int_{\mathbb{R}^N}|f(x-y)||g(y)|\,dy\leqslant\|f\|_1^{\frac{1}{p'}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|f(x-y)||g(y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}}$$

et par suite en élevant cette quantité à la puissance p et en intégrant par rapport à x, on obtient la majoration

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|f(x-y)||g(y)|\,dy\right)^p dx&\leqslant\|f\|_1^{\frac{p}{p'}}\||f|*|g|^p\|_1\\&\leqslant\|f\|_1^{\frac{p}{p'}}\|f\|_1\||g|^p\|_1\\&=\|f\|_1^{1+\frac{p}{p'}}\|g\|_p^p\quad\text{car}\ \||g|^p\|_1=\|g\|_p^p.\end{aligned}$$

Cela montre que l'inégalité de gauche est finie et que par conséquent $|f*g|$ appartient bien à $L^p(\mathbb{R}^N)$. De plus, on a la majoration (puisque $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$)

$$\|f*g\|_p\leqslant\|f\|_1\|g\|_p\,. \tag{6.3}$$

2°) 2.a et 2.b Distinguons le cas $p=1$ des cas $p>1$.

Premier cas : $f\in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $g\in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$ où $p\in]1,+\infty[$ et p' son conjugué. Comme pour tout $x\in\mathbb{R}^N$, la fonction $y\mapsto f(x-y)$ appartient à $L^p(\mathbb{R}^N)$ et

$$\int_{\mathbb{R}^N}|f(x-y)|^p\,dy=\|f\|_p^p\,,$$

l'inégalité de Hölder (théorème 6.1) entraîne que la fonction $y\mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^N$ et qu'on a

$$\int_{\mathbb{R}^N}|f(x-y)g(y)|\,dy\leqslant\|f\|_p\|g\|_{p'}\,.$$

Donc, la fonction $x\mapsto f*g(x)$ est bien définie sur $\mathbb{R}^N$ et uniformément bornée par $\|f\|_p\|g\|_{p'}$.

Deuxième cas : $f\in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $g\in L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}^N$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N}|f(x-y)g(y)|\,dy\leqslant\int_{\mathbb{R}^N}|f(x-y)|\|g\|_\infty\,dy\leqslant\|f\|_1\|g\|_\infty\,,$$

par conséquent $y\mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable pour tout $x\in\mathbb{R}^N$ et donc $f*g(x)$ est bien définie pour tout $x\in\mathbb{R}^N$. De plus, $f*g$ est uniformément bornée et on a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N}|f*g(x)|\leqslant\|f\|_1\|g\|_\infty\,.$$

2.c Montrons que $f*g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^N$. Soit $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N$, on a

$$\begin{aligned}|(f*g)(x_1)-(f*g)(x_2)|&\leqslant\int_{\mathbb{R}^N}|f(x_1-y)-f(x_2-y)||g(y)|\,dy\\&\leqslant\|\tau_{x_1}f-\tau_{x_2}f\|_p\|g\|_{p'}\,.\end{aligned} \tag{6.4}$$

Par ailleurs, l'application

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^N&\to L^p(\mathbb{R}^N)\\x&\mapsto\tau_xf\end{aligned}$$

est uniformément continue d'après l'exercice 6.4 et donc $f*g$ est uniformément continue.

2.d – Si $p\in]1,+\infty[$, montrons que $\lim_{\|x\|\to+\infty}f*g(x)=0$. Si f et g sont continues à support compact, alors $f*g$ est aussi à support compact et le résultat est trivial dans ce cas (voir l'exercice 7.12). Sinon, il existe deux suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues à supports compacts convergeant respectivement vers f dans L^p et vers g dans $L^{p'}(\mathbb{R}^N)$. Fixons $k\in\mathbb{N}^*$. La suite $(f_n*g_k)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers $f*g_k$. En effet,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N}|f_n*g_k(x)-f*g_k(x)|\leqslant\|f_n-f\|_p\|g_k\|_{p'}\,.$$

Comme $x\mapsto f_n*g_k(x)$ est une fonction continue tendant vers 0 à l'infini, il en est de même de la limite $f*g_k$. Le même raisonnement montre que la suite $(f*g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f*g$. Par conséquent, comme les fonctions $x\mapsto f*g_k(x)$ sont continues tendant vers 0 à l'infini, il en est de même pour la limite.

– Si $p = 1$ et $p' = +\infty$, $f * g(x)$ ne tend pas nécessairement vers 0 ou peut ne pas avoir de limite quand $\|x\|$ tend vers $+\infty$ comme le montrent les deux exemples suivants. Si $f(x) = \mathbb{1}_{[-1,0]}(x)$ et $g(x) = 1$ alors $f * g(x) = 1$. D'autre part, si $f(x) = e^{-|x|}$ et $g(x) = \sin x$ alors $f * g(x) = \sin x$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|y|} \sin(x-y)\, dy \\ &= \sin x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|y|} \cos y\, dy - \cos x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|y|} \sin y\, dy . \end{aligned}$$

Or la fonction $y \mapsto e^{-|y|} \sin y$ est impaire donc $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|y|} \sin y\, dy = 0$; d'autre part

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|y|} \cos y\, dy = 2 \int_0^{+\infty} e^{-y} \cos y\, dy = 2\,\Re\mathrm{e}\left(\frac{1}{1-i}\right) = 1 ,$$

où $\Re\mathrm{e}$ est la partie réelle. D'où $f * g = g$.

Exercice 6.6

Soient $p \in]1, +\infty]$ et p' son conjugué. Soit $f \in L^p(]0, +\infty[)$. On pose, pour $x \in]0, +\infty[$,

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt .$$

1°) 1.a Montrer que F est bien définie sur $]0, +\infty[$.

1.b Montrer que F est höldérienne si $p \in]1, +\infty[$, c'est-à-dire qu'il existe $\gamma \in]0, 1[$ tel que

$$\sup_{\substack{x_1, x_2 \in]0,+\infty[\\ x_1 \neq x_2}} \frac{|F(x_1) - F(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\gamma} < +\infty ,$$

et lipschitzienne ($\gamma = 1$ dans la relation précédente) si $p = +\infty$.

2°) On suppose que $p \in]1, +\infty[$; montrer que

2.a $\lim_{x \to 0^+} x^{\frac{-1}{p'}} F(x) = 0$;

2.b $\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{-1}{p'}} F(x) = 0$.

Le cas $p = 1$ a été traité dans l'exercice 4.35.

Solution

1°) 1.a Montrons que F est bien définie sur $]0, +\infty[$. Soit $x \in]0, +\infty[$, on a, d'après l'inégalité de Hölder (théorème 6.1),

$$\int_0^x |f(t)|\, dt = \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{]0,x[}(t) |f(t)|\, dt \leqslant x^{\frac{1}{p'}} \|f\|_p .$$

Donc F est bien définie sur $]0, +\infty[$.

1.b Soit $(x_1, x_2) \in]0, +\infty[^2$ tel que $x_1 < x_2$.

– Si $p \in]1, +\infty[$, on a, d'après l'inégalité de Hölder (théorème 6.1),

$$|F(x_1) - F(x_2)| = \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{[x_1;x_2]}(t) |f(t)|\, dt \leqslant (x_2 - x_1)^{\frac{1}{p'}} \|f\|_p .$$

Donc F est höldérienne.

– Si $p = +\infty$, alors,

$$|F(x_1) - F(x_2)| \leqslant (x_2 - x_1) \|f\|_\infty ,$$

et F est lipschitzienne.

2°) Soit $p \in]1, +\infty[$.

2.a Montrons que

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\frac{-1}{p'}} F(x) = 0 .$$

Pour cela, il suffit de raffiner l'inégalité obtenue à la question 1.a et de passer à la limite. En effet,

$$\int_0^x |f(t)|\, dt = \int_0^x \mathbb{1}_{]0,x[}(t) |f(t)|\, dt \leqslant x^{\frac{1}{p'}} \left(\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{]0,x[}(t) |f(t)|^p\, dt \right)^{\frac{1}{p}} ,$$

soit

$$x^{\frac{-1}{p'}} |F(x)| \leqslant \left(\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{]0,x[}(t) |f(t)|^p\, dt \right)^{\frac{1}{p}} .$$

En outre, $\lim_{x \to 0^+} \mathbb{1}_{]0,x[}(t) |f(t)|^p = 0$ et $\mathbb{1}_{]0,x[}(t) |f(t)|^p \leqslant |f(t)|^p$, donc le théorème de la convergence dominée (théorème 3.7) s'applique et entraîne

$$\lim_{x \to 0^+} \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{]0,x[}(t) |f(t)|^p\, dt = 0 .$$

D'où

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\frac{-1}{p'}} F(x) = 0 .$$

2.b Montrons que

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{-1}{p'}} F(x) = 0 .$$

Soit A un réel strictement positif, on a, d'après l'inégalité de Hölder (théorème 6.1), pour tout $x \geqslant A$,

$$\begin{aligned} |F(x) - F(A)| &\leqslant (x - A)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_A^x |f(t)|^p\, dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leqslant x^{\frac{1}{p'}} \left(\int_A^{+\infty} |f(t)|^p\, dt \right)^{\frac{1}{p}} , \end{aligned}$$

d'où,

$$|F(x)| \leqslant |F(A)| + x^{\frac{1}{p'}} \left(\int_A^{+\infty} |f(t)|^p\, dt \right)^{\frac{1}{p}} ,$$

soit

$$x^{\frac{-1}{p'}} |F(x)| \leqslant x^{\frac{-1}{p'}} |F(A)| + \left(\int_A^{+\infty} |f(t)|^p\, dt \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Or, d'après le théorème de la convergence dominée (théorème 3.7), on a

$$\lim_{A\to+\infty}\left(\int_A^{+\infty}|f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}=0,$$

donc pour $\varepsilon>0$ donné, il existe $A_1>0$ tel que pour tout $A>A_1$, on ait

$$\left(\int_A^{+\infty}|f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi pour $x>A>A_1$, on a

$$x^{\frac{-1}{p'}}|F(x)|\leqslant x^{\frac{-1}{p'}}|F(A)|+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Par ailleurs,

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{-1}{p'}}|F(A)|=0,$$

donc, il existe $B>A>A_1$ tel que pour tout $x>B$, on ait

$$x^{\frac{-1}{p'}}|F(A)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi, pour tout $x>B$, on a

$$x^{\frac{-1}{p'}}|F(x)|<\varepsilon,$$

soit

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{-1}{p'}}F(x)=0.$$

Exercice 6.7

Soit $p\in]1,+\infty[$. Pour tout $f\in L^p$, on pose pour tout $x\in]0,+\infty[$

$$F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt.$$

1°) On suppose que f est positive, continue sur $[0,+\infty[$ et à support compact dans $]0,+\infty[$.

1.a Montrer que F est bien définie et appartient à L^p.

1.b Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$$xF'(x)+F(x)=f(x).$$

1.c Déduire des questions précédentes et d'une intégration par parties, que

$$\int_0^{+\infty}F(x)^p\,dx=\frac{p}{p-1}\int_0^{+\infty}F(x)^{p-1}f(x)\,dx.$$

1.d Établir alors *l'inégalité de Hardy* (voir exercice 6.8)

$$\|F\|_p\leqslant\frac{p}{p-1}\|f\|_p.$$

2°) Étendre l'inégalité de Hardy au cas où f est une fonction de $L^p(]0,+\infty[)$.

3°) Soit l'application Φ qui à tout f de $L^p(]0,+\infty[)$ associe $\Phi(f)=F$.

3.a Vérifier que Φ est une application linéaire continue et que

$$\|\Phi\|\leqslant\frac{p}{p-1}.$$

3.b Montrer que $\|\Phi\|=\dfrac{p}{p-1}$.

On pourra considérer la suite de fonctions sur $[0,+\infty[$ définie par

$$f_n(x)=t^{-\frac{1}{p}}\mathbb{1}_{[1,n]}(x).$$

Solution

1°) On suppose que f est positive, continue sur $[0,+\infty[$ et nulle en dehors de $[a,A]$ où $0<a<A$.

1.a Montrons que F est bien définie sur $]0,+\infty[$.

En effet, il est clair que F est nulle sur l'intervalle $[0,a]$; d'autre part, sur l'intervalle $[a,+\infty[$, on a

$$F(x)\leqslant\frac{1}{x}\int_a^A f(x)\,dx<+\infty.$$

Montrons que $F\in L^p(]0,+\infty[)$. En effet, d'après ce qui précède, F est nulle sur l'intervalle $[0,a]$ et pour tout $x\in[a,+\infty[$, $F(x)\leqslant\dfrac{C}{x}$ où l'on a posé $C=\displaystyle\int_a^A f(x)\,dx$, donc

$$\int_0^{+\infty}(F(x))^p\,dx\leqslant C^p\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,dx<+\infty\quad\text{car } p>1.$$

1.b Montrons que F est dérivable sur $]0,+\infty[$. Comme f est continue sur $[0,+\infty[$, l'application $x\mapsto\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ est dérivable sur $[0,+\infty[$. Par suite, l'application $x\mapsto xF(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ est dérivable sur $[0,+\infty[$. Par conséquent, F est dérivable sur $]0,+\infty[$ car $F(x)=\dfrac{1}{x}(xF(x))$. En dérivant l'expression donnant $xF(x)$, il vient, pour tout $x>0$,

$$xF'(x)+F(x)=f(x).\tag{6.5}$$

1.c Pour tout $B\geqslant A$, en utilisant (6.5), on a

$$\begin{aligned}\int_0^B(F(x))^p\,dx&=\int_a^B(F(x))^p\,dx\\&=\int_a^B(F(x))^{p-1}F(x)\,dx\\&=\int_a^B(F(x))^{p-1}f(x)\,dx-\int_a^B x(F(x))^{p-1}F'(x)\,dx\\&=\int_a^A(F(x))^{p-1}f(x)\,dx-\int_a^B x(F(x))^{p-1}F'(x)\,dx.\end{aligned}$$

En intégrant par parties la dernière intégrale, on obtient

$$\int_a^B x\big(F(x)\big)^{p-1}F'(x)\,dx = \frac{B\big(F(B)\big)^p}{p} - \frac{1}{p}\int_a^B \big(F(x)\big)^p\,dx.$$

D'où

$$\frac{p-1}{p}\int_a^B \big(F(x)\big)^p\,dx = \int_a^A \big(F(x)\big)^{p-1}f(x)\,dx - \frac{B\big(F(B)\big)^p}{p}.$$

Par ailleurs, on a vu en 1.a que $F(B) \leqslant \dfrac{C}{B}$ et donc

$$\lim_{B\to+\infty} B\big(F(B)\big)^p = 0,$$

et d'autre part, comme F est un élément de $L^p(]0,+\infty[)$, $F^p \in L^1(]0,+\infty[)$ donc $\displaystyle\lim_{B\to+\infty}\int_0^B \big(F(x)\big)^p\,dx = \int_0^{+\infty}\big(F(x)\big)^p\,dx$. Ainsi, on obtient l'égalité demandée

$$\frac{p-1}{p}\int_0^{+\infty} F(x)^p\,dx = \int_0^{+\infty} f(x)F(x)^{p-1}\,dx. \tag{6.6}$$

1.d L'inégalité de Hölder (théorème 6.1), appliquée à la seconde intégrale donne

$$\|F\|_p^p \leqslant \frac{p}{p-1}\|f\|_p\left(\int_0^{+\infty}\big(F(x)\big)^p\,dx\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

d'où

$$\|F\|_p^p \leqslant \frac{p}{p-1}\|f\|_p\|F\|_p^{p-1}.$$

Comme $\|F\|_p < +\infty$ d'après 1.a, il vient

$$\|F\|_p \leqslant \frac{p}{p-1}\|f\|_p. \tag{6.7}$$

2°) 2.a Si f est continue, à support compact contenu dans $]0,+\infty[$ et à valeurs complexes, alors $|f|$ vérifie les hypothèses de 1°) et donc

$$\|G\|_p \leqslant \frac{p}{p-1}\||f|\|_p = \frac{p}{p-1}\|f\|_p,$$

où l'on a posé $G(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x |f(t)|\,dt$ pour tout $x > 0$. Mais $|F| \leqslant G$ donc $\|F\|_p \leqslant \|G\|_p$ d'où

$$\|F\|_p \leqslant \frac{p}{p-1}\|f\|_p.$$

2.b Enfin, si f est quelconque dans $L^p(0,+\infty)$, tout d'abord, F est bien définie sur $]0,+\infty[$. En effet, pour tout $x \in]0,+\infty[$ (voir théorème 6.10), on a d'après l'inégalité de Hölder (théorème 6.1),

$$|F(x)| \leqslant x^{-1/p}\|f\|_p.$$

D'autre part, comme l'ensemble des fonctions continues à support compact dans $]0,+\infty[$ est dense dans $L^p(0,+\infty)$, il existe une suite $(f_n)_{n\geqslant1}$ de fonctions continues et à support compact contenu dans $]0,+\infty[$ telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\|f-f_n\|_p = 0$. Remarquons que pour tout $n > 0$, $\big|\|f_n\|_p - \|f\|_p\big| \leqslant \|f-f_n\|_p$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\|f_n\|_p = \|f\|_p$. Maintenant, on considère pour tout $n > 0$, la fonction F_n définie sur $]0,+\infty[$ par

$$F_n(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f_n(t)\,dt.$$

Alors la suite $(F_n)_{n\geqslant1}$ converge simplement vers F sur $]0,+\infty[$; en effet, pour tout réel $x > 0$, on a d'après l'inégalité de Hölder (théorème 6.1),

$$|F_n(x) - F(x)| \leqslant \frac{1}{x}\|f_n - f\|_p x^{\frac{p-1}{p}} = \frac{1}{x^{1/p}}\|f_n - f\|_p.$$

En vertu du lemme de Fatou (théorème 3.3), on a

$$\int_0^{+\infty}|F(x)|^p\,dx = \int_0^{+\infty}\lim_{n\to+\infty}|F_n(x)|^p\,dx \leqslant \liminf_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}|F_n(x)|^p\,dx.$$

Or, d'après 2.a, on a, pour tout $n > 0$,

$$\int_0^{+\infty}|F_n(x)|^p\,dx \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p\int_0^{+\infty}|f_n(x)|^p\,dx$$

donc

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}|F_n(x)|^p\,dx &\leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}|f_n(x)|^p\,dx\\ &= \left(\frac{p}{p-1}\right)^p\|f\|_p^p,\end{aligned}$$

d'où

$$\int_0^{+\infty}|F(x)|^p\,dx \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p\|f\|_p^p.$$

La dernière inégalité montre que $F \in L^p(0,+\infty)$ et

$$\|F\|_p \leqslant \frac{p}{p-1}\|f\|_p.$$

3°) 3.a Il est clair que Φ est une application linéaire de $L^p(0,+\infty)$ dans lui-même, qu'elle est continue d'après 2°) et que

$$\|\Phi\| \leqslant \frac{p}{p-1}.$$

3.b Montrons que $\|\Phi\| = \dfrac{p}{p-1}$.

On considère, pour tout entier $n > 0$, la fonction f_n définie par $f_n(x) = x^{-1/p}\,\mathbb{1}_{[1,n]}(x)$.

Alors, en posant $p' = \dfrac{p}{p-1}$ le conjugué de p, on vérifie que

$$\|f_n\|_p = (\ln n)^{1/p}\,,$$
$$F_n(x) = p'x^{-1}(x^{1/p'} - 1)\mathbb{I}_{[1,n]} + p'(n^{1/p'} - 1)x^{-1}\mathbb{I}_{[n,+\infty[}\,,$$
$$\|F_n\|_p = p'\left(\int_1^n x^{-p}(x^{1/p'} - 1)^p\,dx + \frac{1}{p-1}\frac{(n^{1/p'}-1)^p}{n^{p-1}}\right)^{1/p}.$$

Comme $x^{-p}(x^{1/p'} - 1)^p \sim_{+\infty} x^{p/p'-p} = x^{-1}$, on a

$$\int_1^n x^{-p}(x^{1/p'} - 1)^p\,dx \sim_{+\infty} \ln n$$

et par suite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\|F_n\|_p}{\|f_n\|_p} = p' = \frac{p}{p-1}$.

Remarque 6.5 Si $p = 1$ et $f \in L^1(0,+\infty)$, F n'appartient pas nécessairement à $L^1(0,+\infty)$. En effet, si $f \geqslant 0$, on a d'après le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 5.1),

$$\int_0^{+\infty} F(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)dx = \int_0^{+\infty} f(t)\left(\int_t^{+\infty}\frac{dx}{x}\right)dt = +\infty\,.$$

6.9 ESPACES $L^p(E,\mathcal{T},\mu)$

Exercice 6.8

1°) Soient $(X,\mathcal{T}_X,\mu)$ et $(Y,\mathcal{T}_Y,\nu)$ deux espaces mesurés, où μ et ν sont σ-finies, $p \in [1,+\infty[$ et $g \in L^1(X\times Y, \mu\otimes\nu)$. On considère la fonction définie pour μ-presque tout $x \in X$ par

$$F(x) = \int_Y g(x,y)\,d\nu(y)\,.$$

Montrer l'*inégalité de Minkoswki généralisée*

$$\|F\|_{L^p(X,\mu)} \leqslant \int_Y \|g(\cdot,y)\|_{L^p(X,\mu)}\,d\nu(y)\,. \tag{6.8}$$

2°) Soit $p \in]1,+\infty[$, $L^p = L^p(]0,+\infty[;\mathcal{B}(]0,+\infty[),\lambda)$. À tout $f \in L^p$, on associe l'application F définie sur $]0,+\infty[$ par

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\,.$$

En appliquant l'inégalité de Minkowski généralisée (6.8), établir que

$$\|F\|_p \leqslant \frac{p}{p-1}\|f\|_p\,.$$

Solution

1°) Si $p = 1$, on applique le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 5.1) et on obtient le résultat immédiatement, on a même l'égalité.

Supposons $p > 1$. La mesure μ est σ-finie donc $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} X_n$ où $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{T}_X$ telle que $\mu(X_n) < +\infty$. Considérons la suite de fonctions $F_n = |F|\mathbb{I}_{\{1/n\leqslant|F|\leqslant n\}\cap X_n}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\int_X |F_n(x)|^p\,d\mu(x) &= \int_X F_n(x)\big(F_n(x)\big)^{p-1}\,d\mu(x)\\ &\leqslant \int_X\left(\int_Y |g(x,y)|\,d\nu(y)\right)\big(F_n(x)\big)^{p-1}\,d\mu(x)\\ &\leqslant \int_Y\left(\int_X |g(x,y)|\big(F_n(x)\big)^{p-1}\,d\mu(x)\right)d\nu(y)\,.\end{aligned}$$

Par ailleurs, en vertu de l'inégalité de Hölder (théorème 6.1), pour presque tout $y \in Y$, on a

$$\int_X |g(x,y)|\big(F_n(x)\big)^{p-1}\,d\mu(x) \leqslant \|g(\cdot,y)\|_{L^p(X,\mu)}\left(\int_X \big(F_n(x)\big)^p\,d\mu(x)\right)^{1/p'}$$

d'où

$$\int_X \big(F_n(x)\big)^p\,d\mu(x) \leqslant \left(\int_X \big(F_n(x)\big)^p\,d\mu(x)\right)^{1/p'}\int_Y \|g(\cdot,y)\|_{L^p(X,\mu)}\,d\nu(y)\,.$$

Comme $\int_X \big(F_n(x)\big)^p\,d\mu(x) < +\infty$, on en déduit

$$\left(\int_X F_n^p(x)\,d\mu(x)\right)^{1/p} \leqslant \int_Y \|g(\cdot,y)\|_{L^p(X,\mu)}\,d\nu(y)\,.$$

D'autre part, $(F_n)_{n\geqslant 1}$ est, par construction, une suite croissante de fonctions positives qui converge simplement vers F, donc le théorème de la convergence monotone (théorème 3.2) conduit à

$$\lim_{n\to+\infty}\int_X F_n^p(x)\,d\mu(x) = \int_X F^p(x)\,d\mu(x)\,,$$

d'où

$$\|F\|_{L^p(X,\mu)} \leqslant \int_Y \|(f(\cdot,y)\|_{L^p(X,\mu)}\,d\nu(y)\,.$$

2°) Posons $X =]0,+\infty[$, $Y =]0,1[$, $g(x,y) = f(xy)$ et $F(x) = \displaystyle\int_0^1 g(x,y)\,dy$.

Alors, on a d'une part, en effectuant le changement de variable $xy = t$, $F(x) = \displaystyle\int_0^1 f(xy)\,dy = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$ et d'autre part, avec le même changement de variable,

$$\begin{aligned}\|g(\cdot,y)\|_{L^p(]0,+\infty[)} &= \left(\int_0^{+\infty}|g(x,y)|^p\,dx\right)^{1/p} = \left(\int_0^{+\infty}|f(xy)|^p\,dx\right)^{1/p}\\ &= \left(\frac{1}{y}\int_0^{+\infty}|f(t)|^p\,dt\right)^{1/p} = y^{-1/p}\|f\|_p\,.\end{aligned}$$

Donc l'inégalité de Minkowski généralisée (6.8) entraîne que

$$\|F\|_p \leqslant \int_0^1 \|g(\cdot,y)\|_p\,dy = \int_0^1 y^{-1/p}\|f\|_p\,dy \leqslant \frac{p}{p-1}\|f\|_p .$$

Exercice 6.9

Soit $(E,\mathcal{T},\mu)$ un espace mesuré et soient deux fonctions $f,g : E \to [0,+\infty]$ mesurables telles que $fg \geqslant 1$.

1°) Établir que

$$\mu^2(E) \leqslant \int_E f\,d\mu \int_E g\,d\mu .$$

2°) Vérifier que s'il existe $f : E \to]0,+\infty[$ telle que f et $\frac{1}{f}$ soient μ-intégrables alors $\mu(E) < +\infty$.

3°) Soit $f : E \to]0,+\infty[$. Montrer que si $\mu(E) = +\infty$, alors f et $\frac{1}{f}$ ne peuvent être μ-intégrables simultanément.

Solution

1°) En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz (remarque 6.1) à $\sqrt{f}$ et à $\sqrt{g}$, on obtient l'inégalité désirée.

2°) S'il existe $f : E \to]0,+\infty[$ telle que f et $\frac{1}{f}$ soient μ-intégrables on déduit de 1°) que $\mu(E)$ est fini.

3°) Si $\mu(E) = +\infty$, alors $\int_E f\,d\mu = +\infty$ ou $\int_E \frac{1}{f}\,d\mu = +\infty$.

Exercice 6.10

Soit $(E,\mathcal{T},\mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E)$ est finie.

1°) Montrer que si p et q sont deux réels de $[1,+\infty[$ tels que $p < q$, alors

$$L^\infty(\mu) \subset L^q(\mu) \subset L^p(\mu) \subset L^1(\mu) \quad \text{et} \quad \|f\|_p \leqslant \|f\|_q\big(\mu(E)\big)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} .$$

2°) Montrer par un exemple que l'hypothèse $\mu(E) < +\infty$ est nécessaire.
Montrer par des exemples qu'en général

$$\bigcap_{p\in[1,+\infty[} L^p(\mu) \neq L^\infty(\mu) \quad \text{et que} \quad \bigcup_{p\in]1,+\infty[} L^p(\mu) \neq L^1(\mu) .$$

Solution

Reprendre le corrigé de l'exercice 6.2 et remplacer B par E et dx par $d\mu$.
Montrons sur un exemple qu'en général

$$\bigcap_{p\in[1,+\infty[} L^p(\mu) \neq L^\infty(\mu) .$$

Sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ considérons la mesure μ de densité $e^{-x}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$ par rapport à la mesure de Lebesgue λ. Tout d'abord, $\mu(\mathbb{R})$ est finie, en effet

$$\mu(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} d\mu = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1 .$$

D'autre part, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$ est continue, n'appartient pas à $L^\infty(\mathbb{R},\mu)$, alors que $f \in L^p(\mathbb{R},\mu)$ pour tout $p \in [1,+\infty[$. En effet,

$$\|f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} |f|^p d\mu = \int_0^{+\infty} x^p e^{-x}\,dx = \Gamma(p+1) .$$

Ainsi $f \in \bigcap_{p\in[1,+\infty[} L^p(\mu)$ et $f \notin L^\infty(\mu)$.

Commentaire : Alfonso Vilani a caractérisé les espaces $(E,\mathcal{T},\mu)$ pour lesquels on a

$$L^\infty(\mu) \subset L^q(\mu) \subset L^p(\mu) \quad \text{pour tout } 0 < p \leqslant q < +\infty$$

par

$$\sup_{A\in\mathcal{T},\mu(A)>0} \mu(A) < +\infty .$$

Voir le livre de Rudin [37, pp. 146–147]. On notera que $L^p(\mu)$ n'est pas un espace normé lorsque $p \in]0,1[$.

Exercice 6.11

Pour $p \in [1,+\infty[$, on note $l^p(\mathbb{N})$ l'ensemble

$$\left\{ u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} : \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^p < +\infty \right\}$$

et on pose pour tout $u \in l^p(\mathbb{N})$, $\|u\|_p = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^p\right)^{1/p}$. Autrement dit $l^p(\mathbb{N}) = \big(\mathcal{L}^p(\mathbb{N}),\mathcal{P}(\mathbb{N}),\mu_d\big)$.
Soit $(p,q) \in]1,+\infty[^2$ tel que $p < q$. Montrer que

$$l^1(\mathbb{N}) \subset l^p(\mathbb{N}) \subset l^q(\mathbb{N}) \subset C_0(\mathbb{C}) \subset l^\infty(\mathbb{N}) ,$$

où l'on désigne par $C_0(\mathbb{C})$ l'ensemble des suites complexes qui tendent vers 0 quand n tend vers l'infini.

Solution

Il est évident que si $u \in l^q(\mathbb{N})$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ donc $u \in \mathcal{C}_0(\mathbb{C})$. De même, toute suite convergente est bornée donc $\mathcal{C}_0(\mathbb{C}) \subset l^\infty(\mathbb{N})$. Soient p et q deux réels tels que $1 \leqslant p < q$. Soit $u \in l^p(\mathbb{N})$ tel que $\|u\|_p = 1$, alors $|u_n| \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $|u_n|^q \leqslant |u_n|^p$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où

$$\|u\|_q \leqslant 1 .$$

Soit maintenant $u \in l^p(\mathbb{N})$ quelconque, alors $\left\| \dfrac{u}{\|u\|_p} \right\|_p = 1$. On déduit de ce qui précède que $\left\| \dfrac{u}{\|u\|_p} \right\|_q \leqslant 1$ soit $\|u\|_q \leqslant \|u\|_p$. Ainsi, $l^p(\mathbb{N}) \subset l^q(\mathbb{N})$, avec injection continue.

Commentaire : De même, Alfonso Vilani a caractérisé les espaces $(E, \mathcal{T}, \mu)$ tels que

$$L^p(\mu) \subset L^q(\mu) \subset L^\infty(\mu) \quad \text{pour tout } 0 < p \leqslant q < +\infty$$

par

$$\inf_{A\in\mathcal{T}, \mu(A)>0} \mu(A) > 0 .$$

Même référence que 6.10.

Exercice 6.12

Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et soit $f : E \to \mathbb{C}$ une application mesurable.

1°) Montrer que

$$\liminf_{p\to+\infty} \|f\|_p \geqslant \|f\|_\infty .$$

Soit $(E, \mathcal{T}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, donner un exemple où $\|f\|_p = +\infty$ pour tout $p \in [1, +\infty[$ et $\|f\|_\infty < +\infty$.

2°) On suppose qu'il existe $q \in [1, +\infty[$ tel que $f \in L^q(E, \mathcal{T}, \mu)$.

2.a Montrer que f est finie μ-presque partout.

2.b On suppose que $0 < \|f\|_\infty < +\infty$. Montrer que si $p \in]q, +\infty[$ alors

$$\|f\|_p \leqslant \|f\|_\infty^{1-\frac{q}{p}} \|f\|_q^{\frac{q}{p}} ,$$

et en déduire que

$$\limsup_{p\to+\infty} \|f\|_p \leqslant \|f\|_\infty .$$

2.c Conclure.

Solution

1°) Si $\|f\|_\infty = 0$ alors $f = 0$ μ-p.p. et donc $\|f\|_p = 0$ pour tout $p > 0$. On suppose alors que $\|f\|_\infty > 0$. Comme pour tout réel $a > 0$,

$$a\mathbb{1}_{\{|f|\geqslant a\}} \leqslant |f| ,$$

on a, en vertu de la croissance de l'intégrale (voir proposition 3.2)

$$a\big(\mu(\{|f| \geqslant a\})\big)^{\frac{1}{p}} \leqslant \|f\|_p .$$

Il y a deux cas possibles :

- soit il existe $a_0 \in]0, \|f\|_\infty[$ tel que $\mu(\{|f| \geqslant a_0\}) = +\infty$, donc $\|f\|_p = +\infty$ pour tout $p > 0$ et ainsi $\|f\|_\infty = +\infty = \liminf\limits_{p\to+\infty} \|f\|_p$.
- soit, pour tout $a \in]0, \|f\|_\infty[$, $\mu(\{|f| \geqslant a\})$ est finie. Comme $0 < \mu(\{|f| \geqslant a\}) < +\infty$, $\lim\limits_{p\to+\infty} \big(\mu(\{|f| \geqslant a\})\big)^{\frac{1}{p}} = 1$ et donc

$$\liminf_{p\to+\infty} \|f\|_p \geqslant a .$$

Or, a est arbitraire, donc

$$\liminf_{p\to+\infty} \|f\|_p \geqslant \|f\|_\infty .$$

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1$ est un élément de $L^\infty(\mathbb{R})$ puisque $\|f\|_\infty = 1$ mais n'appartient pas à $L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \in [1, +\infty[$.

2°) Soit $f \in L^q(\mu)$.

2.a Puisque la fonction f appartient à $L^q(\mu)$, alors $\int_E |f|^q \, d\mu < +\infty$, donc $|f|^q < +\infty$ μ-p.p. d'où $|f| < +\infty$ μ-p.p.

2.b Pour tout $p \in]q, +\infty[$, on a

$$\int_E |f|^p \, d\mu = \int_E |f|^q |f|^{p-q} \, d\mu \leqslant \|f\|_\infty^{p-q} \int_E |f|^q \, d\mu ,$$

donc

$$\|f\|_p \leqslant \|f\|_\infty^{1-\frac{q}{p}} \|f\|_q^{\frac{q}{p}} .$$

D'où

$$\limsup_{p\to+\infty} \|f\|_p \leqslant \|f\|_\infty .$$

2.c En combinant 1°) avec 2.a et 2.b, on trouve

$$\|f\|_\infty = \lim_{p\to+\infty} \|f\|_p .$$

Exercice 6.13

Cet exercice utilise le résultat de l'exercice précédent 6.12.

Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré de *mesure finie* et $f \in L^\infty(\mu)$ tel que $\|f\|_\infty > 0$. Si l'on pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_E |f|^n \, d\mu$, on se propose de démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = \|f\|_\infty .$$

1°) Vérifier que $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant \|f\|_\infty$.

2°) En appliquant l'inégalité de Hölder (théorème 6.1), établir que

$$I_n \leqslant (I_{n+1})^{\frac{n}{n+1}} \left(\mu(E)\right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

3°) En déduire que

$$\frac{(I_n)^{\frac{1}{n}}}{\left(\mu(E)\right)^{\frac{1}{n}}} \leqslant \frac{I_{n+1}}{I_n}.$$

4°) Conclure en appliquant le résultat de l'exercice précédent 6.12.

Solution

1°) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_{n+1} = \int_E |f|^{n+1}\, d\mu \leqslant \|f\|_\infty \int_E |f|^n\, d\mu = \|f\|_\infty I_n,$$

d'où

$$\frac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant \|f\|_\infty.$$

2°) En appliquant l'inégalité de Hölder (théorème 6.1) avec $p = \dfrac{n+1}{n}$ et $p' = n+1$ aux fonctions $g = |f|^n$ et $h = 1$, on obtient

$$I_n = \int_E |f|^n 1\, d\mu \leqslant \left(\int_E |f|^{n+1}\, d\mu\right)^{\frac{n}{n+1}} \left(\int_E 1\, d\mu\right)^{\frac{1}{n+1}},$$

soit

$$I_n \leqslant (I_{n+1})^{\frac{n}{n+1}} \mu(E)^{\frac{1}{n+1}}.$$

On en déduit que

$$\frac{(I_n)^{\frac{1}{n}}}{\left(\mu(E)\right)^{\frac{1}{n}}} \leqslant \frac{I_{n+1}}{I_n}.$$

3°) Sachant d'après l'exercice précédent 6.12 que $\lim\limits_{n\to+\infty} (I_n)^{\frac{1}{n}} = \|f\|_\infty$, on déduit de 1°) et 2°) que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{I_{n+1}}{I_n} = \|f\|_\infty$.

Exercice 6.14

Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et soit $f : E \to [0, +\infty[$ mesurable non μ-presque partout nulle. On note $I_f = \{p \in [1, +\infty] : \|f\|_p < +\infty\}$.

1°) Montrer que I_f est un intervalle *i.e.* si $(r, s) \in I_f \times I_f$ tel que $r \leqslant s$ alors $[r, s] \subset I_f$.

2°) On suppose dans cette question que $(E, \mathcal{T}, \mu) = \left(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda\right)$. Montrer qu'on peut choisir f pour que I_f soit n'importe quel intervalle de $[1, +\infty]$.

➢ **Indication.** On pourra utiliser les fonctions suivantes :

$f_a(x) = x^{-\frac{1}{a}} \mathbb{I}_{]0,1[}(x)$, $g_a(x) = x^{-\frac{1}{a}} \mathbb{I}_{]1,+\infty[}(x)$, $h_a(x) = \dfrac{1}{x^{\frac{1}{a}} (\ln x)^{\frac{2}{a}}} \mathbb{I}_{]0,\frac{1}{2}[}(x)$,

$l_a(x) = \dfrac{1}{x^{\frac{1}{a}} (\ln x)^{\frac{2}{a}}} \mathbb{I}_{]2,+\infty[}(x)$, où $a \in [1, +\infty[$.

Pour l'étude des intégrales de Bertrand, on pourra consulter l'exercice 4.10.

3°) On suppose que I_f n'est pas vide.

3.a Soit $(r, s) \in I_f \times I_f$ tel que $1 \leqslant r \leqslant s < +\infty$ et soit $p = \alpha r + (1-\alpha)s$ où $\alpha \in]0, 1[$. Établir que

$$\|f\|_p^p \leqslant \|f\|_r^{\alpha r} \|f\|_s^{(1-\alpha)s}.$$

3.b En déduire que l'application $p \mapsto \varphi(p) = \ln \|f\|_p^p$ est convexe sur $I_f \setminus \{+\infty\}$ et que $p \mapsto \|f\|_p$ est continue sur l'intérieur de I_f.
On pourra utiliser le résultat classique suivant : toute fonction convexe sur un intervalle J est continue sur l'intérieur de J (voir par exemple Ramis, Deschamps et Odoux [34, p. 135]).

3.c Montrer que si r est une extrémité de I_f, alors $\|f\|_p \to \|f\|_r$ lorsque $p \in I_f$ et $p \to r$, que $\|f\|_r$ soit fini ou non. On pourra utiliser l'exercice 6.12 pour un des cas.

4°) Déduire de ce qui précède que pour tout $(r, s) \in I_f \times I_f$ tel que $1 \leqslant r < p < s \leqslant +\infty$, on a

$$\|f\|_p \leqslant \max(\|f\|_r, \|f\|_s).$$

En conclure que

$$L^r(\mu) \cap L^s(\mu) \subset \bigcap_{p \in]r,s[} L^p(\mu).$$

Solution

Dans tout cet exercice, on note $A = \{f \geqslant 1\}$.

1°) Soit $p \in]r, s[$ où $r \in I_f$ et $s \in I_f$.
Si $s < +\infty$, alors $f^p \leqslant f^s$ sur A et $f^p \leqslant f^r$ sur $E \setminus A$, ce qui prouve que f^p est μ-intégrable sur E et donc que $p \in I_f$.
Si $s = +\infty$, on a toujours $f^p \leqslant f^r$ sur $E \setminus A$ et par ailleurs $f^p \leqslant \|f\|_\infty^p$. Or $\mu(A) < +\infty$, car f^r est intégrable, on en déduit encore que f^p est intégrable.

2°) On suppose que $(E, \mathcal{T}, \mu) = \left(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda\right)$. Montrons qu'on peut choisir f pour que I_f soit n'importe quel intervalle de $[1, +\infty]$.
Soit $(a, b) \in [1, +\infty[^2$ tel que $a \leqslant b$.

- Si $f = l_a + h_b$ alors $I_f = [a, b]$;
- si $f = g_a + h_b$ alors $I_f =]a, b]$;

- si $f = g_a + f_b$ alors $I_f =]a, b[$;
- si $f = l_a + f_b$ alors $I_f = [a, b[$;
- si $f = l_a$ alors $I_f = [a, +\infty]$;
- si $f = g_a$ alors $I_f =]a, +\infty]$.

Enfin,

- si $f = \sum_{n=1}^{+\infty} n \mathbb{1}_{[n,n+2^{-n}]}$ alors $I_f = [1, +\infty[$;
- si $f(x) = x$ alors $I_f = \emptyset$;
- si $f = 1$ alors $I_f = \{+\infty\}$.

3°) On suppose que I_f est non vide.

3.a Soit $(r, s) \in I_f \times I_f$ tel que $1 \leqslant r \leqslant s < +\infty$ et soit $p = \alpha r + (1-\alpha)s$ où $\alpha \in]0, 1[$.
Montrons que
$$\|f\|_p^p \leqslant \|f\|_r^{\alpha r} \|f\|_s^{(1-\alpha)s}. \tag{6.9}$$

Il suffit d'appliquer l'inégalité de Hölder (théorème 6.1) aux fonctions $f^{\alpha r}$ et $f^{(1-\alpha)s}$ avec $p = \dfrac{1}{\alpha}$ et $p' = \dfrac{1}{1-\alpha}$, d'où
$$\int_E f^p \, d\mu = \int_E f^{\alpha r} f^{(1-\alpha)s} \, d\mu \leqslant \left(\int_E f^r \, d\mu\right)^{\alpha} \left(\int_E f^s \, d\mu\right)^{(1-\alpha)}.$$

3.b La fonction ln est définie et croissante sur $]0, +\infty[$, donc la formule (6.9) entraîne que pour tout $1 \leqslant r \leqslant s < +\infty$ et tout $\alpha \in]0, 1[$
$$\varphi\big(\alpha r + (1-\alpha)s\big) \leqslant \alpha\varphi(r) + (1-\alpha)\varphi(s).$$

Autrement dit φ est convexe sur $I_f \setminus \{+\infty\}$.
D'après le rappel, il en résulte que $p \mapsto p \ln \|f\|_p$ est continue à l'intérieur de son intervalle de définition et par suite que $p \mapsto \|f\|_p$ est continue à l'intérieur de I_f.

3.c Pour montrer la continuité de $p \mapsto p \ln \|f\|_p$ sur I_f, il reste à prouver que si $p \in I_f$ et tend vers une extrémité r de I_f, finie ou non, alors $\|f\|_p \to \|f\|_r$, que $\|f\|_r$ soit fini ou non.

Supposons tout d'abord que r soit fini. Comme la fonction $t \mapsto a^t$ est croissante si $a \geqslant 1$ et décroissante si $a \leqslant 1$, la fonction $p \mapsto f^p \mathbb{1}_A$ est croissante et la fonction $p \mapsto f^p \mathbb{1}_{E \setminus A}$ est décroissante. Donc le théorème de la convergence monotone (théorème 3.2) entraîne que
$$\lim_{p \to r} \int_A f^p \, d\mu = \int_A f^r \, d\mu \quad \text{et} \quad \lim_{p \to r} \int_{E \setminus A} f^p \, d\mu = \int_{E \setminus A} f^r \, d\mu.$$

(On notera que comme la fonction f^p est intégrable, on peut utiliser ce théorème dans le cas d'une suite décroissante de fonctions (voir exercice 3.8)). D'où
$$\lim_{p \to r} \int_E f^p \, d\mu = \int_E f^r \, d\mu.$$

Cela prouve le résultat dans ce cas.
Si $r = +\infty$, le résultat a été démontré dans l'exercice 6.12.

4°) Soit $(r, s) \in I_f \times I_f$, montrons que pour tout $1 \leqslant r < p < s \leqslant +\infty$, $\|f\|_p \leqslant \mathrm{Max}(\|f\|_r, \|f\|_s)$. L'inégalité est évidente si $\|f\|_r = +\infty$ ou $\|f\|_s = +\infty$. Supposons donc que ces deux nombres sont finis et posons $M = \mathrm{Max}(\|f\|_r, \|f\|_s)$.

Si s est fini, on a d'après l'inégalité (6.9)
$$\|f\|_p \leqslant \|f\|_r^{\frac{\alpha r}{p}} \|f\|_s^{\frac{(1-\alpha)s}{p}} \leqslant M^{\frac{\alpha r}{p} + \frac{(1-\alpha)s}{p}} = M.$$

Si s est infini, on a d'après ce qui précède, pour $q \in]p, +\infty[$
$$\|f\|_p \leqslant \mathrm{Max}(\|f\|_r, \|f\|_q)$$

et en faisant tendre q vers $+\infty$, on obtient l'inégalité cherchée en vertu de la question 3.c.
Il est clair alors que pour tout $p \in [r, s]$, $L^r(\mu) \cap L^s(\mu) \subset L^p(\mu)$ et que l'injection canonique est continue.

Exercice 6.15

Soient $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, $p \in [1, +\infty[$ et p' son conjugué. Étant donnée une fonction $g \in L^{p'}(\mu)$, on pose pour tout $f \in L^p(\mu)$, $\Phi(f) = \int_E fg \, d\mu$. Montrer que Φ est une forme linéaire continue de $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ dans $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ et que
$$|||\Phi||| = \begin{cases} \|g\|_{p'} & \text{si } p \in]1, +\infty[, \\ \|g\|_\infty & \text{si } p = 1 \text{ et } \mu \text{ est } \sigma\text{-finie}. \end{cases}$$

Rappelons que par définition
$$|||\Phi||| = \sup\{|\Phi(f)| : f \in L^p(\mu)\}.$$

Solution

- Il est clair que Φ est linéaire par linéarité de l'intégrale.
- Comme Φ est linéaire, il suffit de montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que
$$|\Phi(f)| \leqslant C\|f\|_p \quad \text{pour tout } f \in L^p(\mu).$$

Or, d'après l'inégalité de Hölder (théorème 6.1), on a
$$|\Phi(f)| = \left|\int_E fg \, d\mu\right| \leqslant \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Donc Φ est continue et $|||\Phi||| \leqslant \|g\|_{p'}$.
- Il reste à montrer que $|||\Phi||| \geqslant \|g\|_{p'}$. Pour cela, distinguons deux cas.

Premier cas : $p > 1$. On considère la fonction $f_0 = \mathbb{I}_{\{g\neq 0\}}\frac{\bar{g}}{|g|}|g|^{p'-1}$. Alors $f_0 \in L^p(\mu)$ et $\|f_0\|_p = \|g\|_{p'}^{p'-1}$. En effet,

$$\int_E |f_0|^p \, d\mu = \int_E |g|^{(p'-1)p} \, d\mu = \int_E |g|^{p'} \, d\mu < +\infty$$

et puisque $\dfrac{p'}{p} = p' - 1$

$$\|f_0\|_p = \|g\|_{p'}^{p'/p} = \|g\|_{p'}^{p'-1}.$$

Donc,

$$\Phi(f_0) = \int_E f_0 g \, d\mu = \int_E |g|^{p'} \, d\mu = \|g\|_{p'}^{p'} = \|g\|_{p'}^{p'-1}\|g\|_{p'} = \|f_0\|_p \|g\|_{p'}.$$

Ainsi

$$\|f_0\|_p \|g\|_{p'} = \Phi(f_0) \leqslant |||\Phi||| \|f_0\|_p$$

d'où

$$|||\Phi||| \geqslant \|g\|_{p'},$$

Deuxième cas : $p = 1$ et μ est σ-finie. On suppose $\|g\|_\infty > 0$. Pour $\varepsilon > 0$, on considère l'ensemble $A = \{x \in E : \|g\|_\infty - \varepsilon \leqslant |g(x)|\}$. Il est clair que A appartient à $\mathcal{T}$ et $\mu(A) > 0$ par définition de $\|g\|_\infty$. Comme μ est σ-finie, il existe $B \in \mathcal{T}$ tel que $B \subset A$ et $0 < \mu(B) < +\infty$. En effet, il existe une suite $(B_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de $\mathcal{T}$, deux à deux disjoints telle que $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} B_n$ et $\mu(B_n) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Donc $\mu(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A \cap B_n)$. Par ailleurs, $\mu(A) > 0$ donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mu(A \cap B_{n_0}) > 0$ et de plus on a $\mu(A \cap B_{n_0}) \leqslant \mu(B_{n_0}) < +\infty$. Posons $C = A \cap B_{n_0}$ et $f_0 = \dfrac{\bar{g}}{|g|}\dfrac{\mathbb{I}_{C\cap\{g\neq 0\}}}{\mu(C)}$. Alors $f_0 \in L^1(\mu)$ et $\|f_0\|_1 = \int_E |f_0| \, d\mu \leqslant \int_E \dfrac{\mathbb{I}_C}{\mu(C)} \, d\mu = 1$.

D'autre part,

$$\Phi(f_0) = \int_E f_0 g \, d\mu = \int_E |g| \frac{\mathbb{I}_C}{\mu(C)} \, d\mu = \frac{1}{\mu(C)} \int_C |g| \, d\mu$$

d'où

$$\Phi(f_0) \geqslant \|g\|_\infty - \varepsilon.$$

Ainsi,

$$\|g\|_\infty - \varepsilon \leqslant |\Phi(f_0)| \leqslant |||\Phi||| \|f_0\|_1 \leqslant |||\Phi||| \quad \text{puisque } \|f_0\|_1 \leqslant 1.$$

On vient de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$

$$\|g\|_\infty - \varepsilon \leqslant |||\Phi|||,$$

donc

$$\|g\|_\infty \leqslant |||\Phi|||.$$

Commentaire : Si on note $\mathcal{FL}_c(L^p(\mu))$ l'ensemble des formes linéaires continues sur $L^p(\mu)$, on vient de montrer que l'application de $L^{p'}(\mu)$ dans $\mathcal{FL}_c(L^p(\mu))$ qui à tout g associe Φg est une isométrie. On montre que cette isométrie est surjective si $p \in]1, +\infty[$, ce qu'on exprime en disant que le dual (topologique) de $L^p(\mu)$ est $L^{p'}(\mu)$. Mais la démonstration est difficile et nécessite une étude préliminaire (voir par exemple [8, pp. 172–173] ou encore [13, pp. 60–64]), sauf si $p = 2$ auquel cas la preuve est plus simple grâce à la structure hilbertienne de $L^2(\mu)$.

Exercice 6.16

Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré.

1°) Soient n un entier supérieur à 2, $(p_1, p_2, \ldots, p_n) \in [1, +\infty]^n$ et q tels que $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} + \cdots + \dfrac{1}{p_n} \leqslant 1$ où l'on convient que $\dfrac{1}{+\infty} = 0$.

Soient n fonctions mesurables et positives $h_1, h_2, \ldots, h_n$. Établir, par récurrence, ce qu'on appelle *l'inégalité de Hölder généralisée*

$$\left\| \prod_{i=1}^n h_i \right\|_p \leqslant \|h_1\|_{p_1} \|h_2\|_{p_2} \ldots \|h_n\|_{p_n}.$$

2°) Soit $(p, q, r) \in [1, +\infty[^3$ tel que $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - 1$. Montrer que si $f \in L^p(\mu)$ et $g \in L^q(\mu)$, alors

$$\int_E |fg| \, d\mu \leqslant \|f\|_p^{1-\frac{p}{r}} \|g\|_q^{1-\frac{q}{r}} \left(\int_E |f|^p |g|^q \right)^{\frac{1}{r}}:$$

On distinguera les cas $p = q = r = 1$, $p > 1$ et $q = 1$ puis $p > 1$ et $q > 1$.

3°) Dans cette question $(E, \mathcal{T}, \mu) = (\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda^{(N)})$. Soit $(f, g) \in L^p(\mathbb{R}^N) \times L^q(\mathbb{R}^N)$ où $(p, q) \in [1, +\infty]^2$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - 1 \geqslant 0$.

Montrer que pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$, l'application $y \mapsto f(x)g(x-y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^N$ et que la fonction $h : x \mapsto h(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)g(x-y) \, dy$ vérifie l'*inégalité de Young* suivante

$$\|h\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$$

où $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - 1$.

Solution

1°) Soit $I = \{i : p_i < +\infty\}$, il est clair que

$$\|h_1 \ldots h_n\|_q \leqslant \left\| \prod_{i\in I} h_i \right\|_q \times \prod_{i \notin I} \|h_i\|_\infty$$

et

$$\frac{1}{q} = \sum_{i\in I} \frac{1}{p_i}.$$

On peut donc supposer que p_i est fini pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Examinons tout d'abord le cas où $n = 2$. On a

$$1 = \frac{q}{p_1} + \frac{q}{p_2} \cdot$$

En appliquant l'inégalité de Hölder (théorème 6.1) pour $p = p_1/q$, $p' = p_2/q$, aux fonctions $|h_1|^q$, $|h_2|^q$, il vient

$$\int_E |h_1 h_2|^q \, d\mu \leqslant \left(\int |h_1|^{p_1} \, d\mu \right)^{q/p_1} \left(\int_E |h_2|^{p_2} \right)^{q/p_2}$$

ce qui donne la formule dans ce cas. Lorsque $n > 2$ on procède par récurrence ; en effet, si

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n},$$

on a

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{r},$$

d'où

$$\begin{aligned}\|h_1 h_2 \dots h_n\|_{p_0} &\leqslant \|h_1\|_{p_1} \|h_2 \dots h_n\|_r \\ &\leqslant \|h_1\|_{p_1} \|h_2\|_{p_2} \cdots \|h_n\|_{p_n} \quad \text{par hypothèse de récurrence}.\end{aligned}$$

2°) – Si $p = q = r = 1$, il n'y a rien à démontrer.

– Si $p > 1$ et $q = 1$ alors nécessairement $p = r$ et il s'agit de prouver que

$$\int_E |fg| \, d\mu \leqslant \left(\int_E |g| \, d\mu \right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_E |f|^p |g| \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ce qui n'est autre que l'inégalité de Hölder (théorème 6.1) appliquée pour p et son conjugué $p' = \dfrac{p}{p-1}$ aux fonctions $(|f|^p|g|)^{\frac{1}{p}}$ et $|g|^{1-\frac{1}{p}}$, puisque

$$(|f|^p|g|)^{\frac{1}{p}} |g|^{1-\frac{1}{p}} = |fg|.$$

– Si $p > 1$ et $q > 1$, alors $r > p$ et $r > q$. Ainsi, en remarquant que

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r} \right) + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = 1$$

et en posant

$$p_1 = \frac{pr}{r-p}, \; p_2 = \frac{qr}{r-q}, \; p_3 = r.$$

D'où

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r} = 1$$

de sorte que si h_1, h_2, h_3 sont trois fonctions mesurables positives, on a d'après 1°)

$$\int_E h_1 h_2 h_3 \, d\mu \leqslant \left(\int_E h_1^{p_1} \, d\mu \right)^{1/p_1} \left(\int_E h_2^{p_2} \, d\mu \right)^{1/p_2} \left(\int_E h_3^{p_3} \, d\mu \right)^{1/p_3}.$$

Si

$$h_1^{p_1} = |f|^p, h_2^{p_2} = |g|^q \quad \text{et} \quad h_3^{p_3} = |f|^p |g|^q$$

c'est-à-dire si

$$h_1 = |f|^{1-\frac{p}{r}}, \; h_2 = |f|^{1-\frac{q}{r}}, \; h_3 = |f|^{\frac{p}{r}} |g|^{\frac{q}{r}},$$

on obtient la formule désirée.

3°) Le cas $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ a été étudié à l'exercice 6.5. Il reste à étudier le cas $(p, q) \in [1, +\infty[^2$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - 1 > 0$. Soit le réel $r \in [1, +\infty[$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - 1 = \dfrac{1}{r}$. En notant que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |g(x-y)|^q \, dy = \|g\|_q^q,$$

et en appliquant 2°), on a alors

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(y) g(x-y)| \, dy \right)^r \leqslant \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q} \int_{\mathbb{R}^N} |f(y)|^p |g(x-y)|^q \, dy < +\infty.$$

Il en résulte que, pour presque tout x,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(y) g(x-y)| \, dy < +\infty$$

ce qui assure que la fonction h est définie presque partout. D'autre part, d'après le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 5.1)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |h(x)|^r \, dx &\leqslant \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(y) g(x-y)| \, dr \right)^r dx \\ &\leqslant \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int |f(y)|^p |g(x-y)|^q \, dy \right) dx \\ &= \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q} \int_{\mathbb{R}^N} |f(y)|^p \, dy \int_{\mathbb{R}^N} |g(x-y)|^q \, dx \\ &= \|f\|_p^r \|g\|_q^r.\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration.

6.10 DIFFÉRENTS MODES DE CONVERGENCES DES SUITES DE FONCTIONS

Exercice 6.17

Soient $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, $p \in [1, +\infty[$ et p' son conjugué. Soit $(f_n)_{n \geqslant 1}$ (resp. $(g_n)_{n \geqslant 1}$) une suite d'éléments de $L^p(\mu)$ (resp. $L^{p'}(\mu)$) convergeant vers f (resp. g) dans $L^p(\mu)$ (resp. $L^{p'}(\mu)$).
Montrer que la suite $(f_n g_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers fg dans $L^1(\mu)$.

Solution

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_ng_n - fg = f_ng_n - fg_n + fg_n - fg$; d'où

$$|f_ng_n - fg| \leqslant |f_n - f||g_n| + |f||g_n - g|.$$

Ainsi, l'inégalité de Hölder (théorème 6.1) appliquée deux fois entraîne

$$\|f_ng_n - fg\|_1 \leqslant \|f_n - f\|_p\|g_n\|_{p'} + \|f\|_p\|g_n - g\|_{p'}.$$

Par ailleurs, toute suite convergente est bornée. Il existe donc $M > 0$ tel que $\|g_n\|_{p'} \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. D'où

$$\|f_ng_n - fg\|_1 \leqslant \|f_n - f\|_pM + \|f\|_p\|g_n - g\|_{p'}.$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_ng_n - fg\|_1 = 0$. En particulier, si $p = p' = 2$, on retrouve la continuité du produit scalaire de L^2.

Exercice 6.18

Soient $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, $p \in [1, +\infty[$ et $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'éléments de $L^p(\mu)$ qui converge μ-presque partout vers une application $f : E \to \mathbb{C}$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(A_1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_p = 0$;

(A_2) $f \in L^p(\mu)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p$.

➢ **Indication.** Pour l'implication $(A_2)\to(A_1)$, appliquer le lemme de Fatou (théorème 3.3) à la suite $(g_n)_{n\geqslant 1}$ où $g_n = 2^{p-1}(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p$.

Solution

$(A_1) \to (A_2)$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_p = 0$ alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $n \geqslant n_0$ on ait $\|f_n - f\|_p < \varepsilon$. Ainsi, $f_{n_0} - f \in L^p(\mu)$ et donc $f = (f - f_{n_0}) + f_{n_0}$ appartient à $L^p(\mu)$ comme différence de deux fonctions de $L^p(\mu)$. D'autre part, en vertu de l'inégalité

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\|$$

valable dans tout espace vectoriel normé, on a

$$\big|\|f_n\|_p - \|f\|_p\big| \leqslant \|f_n - f\|_p$$

ainsi, la suite numérique $(\|f_n\|_p)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\|f\|_p$.

$(A_2) \to (A_1)$

Si $p = 1$, la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est évidemment positive. Si $p > 1$, on sait que la fonction $x \mapsto x^p$ est convexe sur $\mathbb{R}^+$ et donc pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^p \leqslant \frac{x^p + y^p}{2},$$

autrement dit

$$(x + y)^p \leqslant 2^{p-1}(x^p + y^p),$$

d'où

$$|f_n - f|^p \leqslant (|f_n| + |f|)^p \leqslant 2^{p-1}(|f_n|^p + |f|^p).$$

Ainsi pour tout $p \geqslant 1$, la fonction $g_n \geqslant 0$. Donc on peut appliquer le lemme de Fatou (théorème 3.3) pour obtenir

$$\int_E \liminf_{n\to+\infty} g_n\, d\mu \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \int_E g_n\, d\mu. \tag{6.10}$$

Comme $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge μ-presque partout vers f, alors (6.10) devient

$$\int_E 2^p|f|^p \leqslant \liminf_{n\to+\infty}\left(-\int_E |f_n - f|^p\, d\mu\right) + \int_E 2^p|f|^p\, d\mu$$

soit

$$0 \leqslant -\limsup_{n\to+\infty} \int_E |f_n - f|^p\, d\mu$$

ou bien

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_E |f_n - f|^p d\mu \leqslant 0. \tag{6.11}$$

Or $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant 0$ et $u_n \geqslant 0$ entraîne que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge et a pour limite 0. On déduit de (6.11) que

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_p^p = 0,$$

et ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_p = 0$.

Exercice 6.19

Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Soient $p \in [1, +\infty]$, f, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des éléments de $L^p(\mu)$ tels que la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers f dans $L^p(\mu)$. On suppose qu'il existe $M \in]0, +\infty[$ tel que

$$|f_n| \leqslant M\ \mu\text{-presque partout}.$$

Montrer alors que

$$|f| \leqslant M\ \mu\text{-presque partout}.$$

Solution

D'après le théorème 6.6 (i), il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k\geqslant 0}$ convergeant vers f μ-p.p. Il existe donc $A \in \mathcal{T}$ de complémentaire μ-négligeable tel que pour tout $x \in A$, on ait

$$|f_{n_k}(x)| \leqslant M.$$

En faisant tendre k vers l'infini, on a

$$|f(x)| \leqslant M,$$

c'est-à-dire $|f| \leqslant M$ μ-presque partout.

Exercice 6.20

Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E)$ soit fini, et soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions qui converge uniformément vers f.

1°) Montrer que pour tout $p \in 1, +\infty[$,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E |f_n - f|^p \, d\mu = 0 .$$

2°) Montrer sur un contre-exemple que la réciproque est fausse.

Solution

1°) Soit $\varepsilon > 0$, il s'agit de montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $n \geqslant n_0$, on ait

$$\int_E |f_n - f|^p \, d\mu \leqslant \varepsilon .$$

Comme la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers f, il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $n \geqslant n_0$, on ait

$$\sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{\mu(E)}\right)^{\frac{1}{p}} .$$

Donc pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\int_E |f_n - f|^p \, d\mu \leqslant \varepsilon .$$

2°) Pour le contre-exemple, prenons $(E, \mathcal{T}, \mu) = \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda\big)$ et $f_n = \dfrac{1}{n} \mathbb{1}_{[n,+\infty[}$. Comme $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \dfrac{1}{n}$, la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$ mais

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n|^p \, d\lambda = \frac{1}{n^p} \lambda([n, +\infty[) = +\infty .$$

Autrement dit, la suite de fonctions $(f_n)_{n\leqslant 1}$ ne converge pas vers la fonction nulle pour la norme $\|\cdot\|_p$.

Exercice 6.21

Soient $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions numériques mesurables, et $f : E \to \mathbb{C}$ mesurable. On dit que la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers f en mesure μ si pour tout réel $\alpha > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(|f_n - f| > \alpha) = 0 .$$

1°) 1.a Montrer que si la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers f dans $L^p(\mu)$, alors la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers f en mesure μ.

1.b Montrer sur un exemple que la réciproque est fausse.

2°) 2.a Montrer que si $\mu(E)$ est finie alors la convergence μ-presque partout implique la convergence en mesure μ.

2.b Montrer sur un exemple que cela n'est plus vrai si $\mu(E)$ n'est pas finie.

3°) Montrer que si $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur E vers f, alors elle converge en mesure μ vers f que $\mu(E)$ soit finie ou non.

Solution

1°) 1.a Pour tout réel $\alpha > 0$, on a

$$\alpha\mu(\{|f_n - f| > \alpha\}) \leqslant \int_E |f_n - f|^p \, d\mu .$$

Or la suite $(f)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers f dans $L^p(\mu)$, donc pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on ait

$$\|f_n - f\|_p \leqslant \alpha^{\frac{1}{p}} \varepsilon^{\frac{1}{p}} .$$

D'où pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\mu(\{|f_n - f| > \alpha\}) \leqslant \frac{1}{\alpha} \|f_n - f\|_p^p \leqslant \frac{\alpha\varepsilon}{\alpha} = \varepsilon .$$

1.b On considère $(E, \mathcal{T}, \mu) = \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda\big)$ et $f_n = n\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}[}$.

- Montrons que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas dans $L^p(\mu)$ pour tout $p \in [1, +\infty[$. Pour tout réel $x > 0$, il existe $n_0 = n_0(x) \in \mathbb{N}^*$ tel que $xn_0 > 1$ si bien que pour tout entier n tel que $n \geqslant n_0$, $f_n(x) = 0$ et donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. Ainsi, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque partout vers la fonction nulle. Soit $p \in [1, +\infty[$. Si la suite convergeait dans $L^p(\mu)$, on aurait $\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_p = 0$. Or, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|f_n\|_p = 1$ donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas dans $L^p(\mu)$.
- Montrons que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge pourtant en mesure λ vers la fonction nulle. En effet, pour tout réel $\alpha > 0$ donné et pour tout entier naturel n assez grand, on a $\{|f_n| > \alpha\} = \left[0, \dfrac{1}{n}\right[$ et donc $\lambda(\{|f_n| > \alpha\}) \leqslant \dfrac{1}{n}$. D'où

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda(\{|f_n| > \alpha\}) = 0 .$$

2°) 2.a Supposons $\mu(E) < +\infty$. Il s'agit de montrer que pour tout $\alpha > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(\{|f_n - f| > \alpha\}) = 0 .$$

Or $\mu(\{|f_n - f| > \alpha\}) = \int_E \mathbb{1}_{\{|f_n - f| > \alpha\}}(x) \, d\mu(x)$. Comme $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers f μ-presque partout, $(\mathbb{1}_{\{|f_n - f| > \alpha\}})_{n\geqslant 1}$ converge vers 0 μ-p.p. D'autre part, $\mu(E)$ est finie, donc la fonction $x \mapsto 1$ est μ-intégrable sur E. Le théorème de la convergence dominée (théorème 3.7) appliqué à la suite $(\{\mathbb{1}_{\{|f_n - f| > \alpha\}})_{n\geqslant 1}$ donne le résultat.

2.b On considère $(E, \mathcal{T}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $f_n = \mathbb{1}_{[n,n+1[}$.
- La suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $n_0 > x$ si bien que pour $n \geqslant n_0$, $f_n(x) = 0$ et donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.
- Mais la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas vers 0 en mesure λ puisque pour tout réel $\alpha \in]0,1[$, on a, pour $n \geqslant 1$,

$$\lambda(\{|f_n| > \alpha\}) = 1\,.$$

3°) Soit un réel $\alpha > 0$ donné. Comme $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur E vers f, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, on ait

$$\sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\alpha}{2}\,.$$

Par conséquent $\mu(\{|f_n - f| > \alpha\}) = \mu(\emptyset) = 0$. D'où pour tout $\alpha \in]0, +\infty[$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(\{|f_n - f| > \alpha\}) = 0\,.$$

Exercice 6.22

On considère la suite de fonctions de terme général

$$\begin{array}{rcl} f_n : [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = n\mathbb{1}_{\left]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right[}(x)\,. \end{array}$$

1°) Étudier les convergences presque partout, dans $L^p([0,1])$ pour $p \in [1,+\infty]$ et en mesure — la mesure de Lebesgue λ bien sûr — de la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$.

2°) La fonction $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ appartient-elle à $L^p([0,1])$?

Solution

1°) Étude des convergences.

Convergence presque partout.

Soit $x \in]0,1[$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $x > \dfrac{1}{n_0}$, par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n > n_0$, $f_n(x) = 0$. Ainsi la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge presque partout vers la fonction nulle sur $[0,1]$, qu'on note désormais θ.

Convergence dans $L^p([0,1])$ où $p \in [1,+\infty]$.

Soit $p \in [1,+\infty[$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\|f_n\|_p = \left(\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} n^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{n}{(n(n+1))^{\frac{1}{p}}}\,.$$

Donc $\|f_n\|_p \sim_{+\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{2}{p}-1}}$. D'où

- si $p \in [1,2[$, $\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_p = 0$;
- si $p = 2$, $\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_2 = 1$;
- si $p > 2$, $\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_p = +\infty$;
- si $p = +\infty$ $\|f_n\|_\infty = n$, donc $\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty = +\infty$.

En conclusion, la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge dans $L^p(]0,1[)$ vers θ si $p \in [1,2[$.

Convergence en mesure.

La suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers θ dans $L^1(]0,1[)$ donc converge en mesure vers θ d'après l'exercice 6.21.

2°) Comme $\lambda([0,1]) = 1$, d'après l'exercice 6.2, $L^\infty([0,1]) \subset L^p([0,1]) \subset L^1([0,1])$, pour tout $p \in]1,+\infty[$. Donc, si $f \in L^p(]0,1[)$, alors $f \in L^1(]0,1[)$. Or

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right) dx \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \quad \text{car } f_n \geqslant 0 \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} = +\infty\,.\end{aligned}$$

Donc la fonction f n'appartient pas à $L^p([0,1])$ pour tout $p \in [1,+\infty]$.

Exercice 6.23

On considère la suite d'applications de terme général

$$\begin{array}{rcl} f_n : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (\sin x)^n\,. \end{array}$$

Pour chacune des mesures suivantes $\mu_1 = \mathbb{1}_{]0,\frac{\pi}{2}[}(x)\cdot\lambda$, $\mu_2 = \lambda$, étudier les convergences presque partout, dans $L^p(\mu_i)$ où $p \in [1,+\infty]$ $(i = 1,2)$ et en mesure de la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$.

Solution

- $\mu_1 = \mathbb{1}_{]0,\frac{\pi}{2}[}.\lambda$.

Comme la mesure μ_1 est concentrée sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers 0 sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge μ_1-presque partout vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

Par ailleurs, $\mu_1(\mathbb{R}) = \dfrac{\pi}{2} < +\infty$, donc la convergence μ_1-presque partout entraîne la convergence en mesure μ_1 d'après l'exercice 6.21 question 2.a.

Étudions la convergence dans $L^p(\mu_1)$ pour $p \in [1, +\infty[$. Comme $\mu_1(\mathbb{R}) = \frac{\pi}{2} < +\infty$, la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1$ appartient à $L^p(\mu_1)$ et on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n|^p \leqslant g$. Donc la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge dans $L^p(\mu_1)$ vers la fonction nulle d'après le théorème de la convergence dominée (théorème 3.7).

Si $p = +\infty$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\|f_n\|_\infty = 1$. Ainsi la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas dans $L^\infty(\mathbb{R}, \mu_1)$ (s'il y avait convergence, elle serait nécessairement vers 0).

– $\mu_2 = \lambda$.

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right\}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. Comme l'ensemble $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right\}$ est dénombrable, $\lambda\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right) = 0$ (voir exercice 2.7) et la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge λ-presque partout vers la fonction nulle.

Soit $\alpha \in]0, 1[$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\{|f_n| > \alpha\} = \left\{|\sin| > \alpha^{\frac{1}{n}}\right\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (k\pi + I_n)$$

où

$$I_n = \left]\arcsin\left(\alpha^{\frac{1}{n}}\right), \pi - \arcsin\left(\alpha^{\frac{1}{n}}\right)\right[.$$

Mais

$$\lambda(\{|f_n| > \alpha\}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda(I_n) = +\infty .$$

Donc la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas en mesure ; par suite, elle ne peut converger dans $L^p(\lambda)$ pour tout $p \in [1, +\infty]$ d'après l'exercice 6.21 question 1.a.

Exercice 6.24

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction définie sur $[0, 1[$ par

$$f_n = \mathbb{1}_{\left[\frac{n}{2^m} - 1, \frac{n+1}{2^m} - 1\right[}$$

où m est l'unique entier tel que $2^m \leqslant n < 2^{m+1}$.

1°) Montrer que pour tout $p \in [1, +\infty[$, la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge dans $L^p([0, 1[)$ vers la fonction nulle.

2°) Montrer que la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ ne converge en aucun point de $[0, 1[$.

➢ **Indication.** On remarquera que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\left\{\left[\frac{n}{2^m} - 1, \frac{n+1}{2^m} - 1\right[: 2^m \leqslant n < 2^{m+1}\right\}$$

constitue une partition de $[0, 1[$.

Solution

1°) Soit $p \in [1, +\infty[$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\|f_n\|_p = \left(\int_0^1 |f_n(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{1}{2^m}\right)^{\frac{1}{p}} < \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{p}} .$$

Donc la suite converge dans $L^p([0, 1[)$ vers la fonction nulle.

2°) On vérifie aisément que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\left\{\left[\frac{n}{2^m} - 1, \frac{n+1}{2^m} - 1\right[: 2^m \leqslant n < 2^{m+1}\right\}$$

constitue une partition de $[0, 1[$ en $2^m \geqslant 2$ intervalles. Donc, pour tout $x \in [0, 1[$ il existe deux entiers n_1 et n_2 appartenant à $\{2^m, \ldots, 2^{m+1} - 1\}$ tels que $f_{n_1}(x) = 0$ et $f_{n_2}(x) = 1$. On en déduit que, pour tout $x \in [0, 1[$,

$$\liminf_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to+\infty} f_n(x) = 1$$

et donc la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ ne converge en aucun point de $[0, 1[$.

Chapitre 7

Produit de convolution et applications

RAPPELS DE COURS

Dans tout ce chapitre, f et g désignent deux fonctions de $\mathbb{R}^N$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et toutes les intégrales sont des intégrales de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

7.1 PRODUIT DE CONVOLUTION

Définition 7.1 *On dit que f et g sont* convolables *si, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^N$.*

Si f et g sont convolables, on définit alors le produit de convolution *(ou la* convolée*) de f et g par*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\,dy. \tag{7.1}$$

Propriétés immédiates

- Évidemment, si f et g sont convolables alors g et f le sont et on a dans ce cas $f * g = g * f$.
- Par ailleurs, si f est convolable avec chacune des fonctions g et h, alors f est convolable avec $\alpha g + \beta h$ $\left((\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2\right)$ et on a

$$f * (\alpha g + \beta h) = \alpha(f * g) + \beta(f * h).$$

Supports dans la convolution

La notion de support d'une fonction continue sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$ à valeurs réelles est bien connue (voir définition 6.7) : c'est le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel f est nulle, ou ce qui revient au même, l'adhérence de $\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$. Quand on travaille avec des fonctions mesurables, il faut être plus prudent puisque ces fonctions sont seulement définies presque partout et la définition précédente ne convient plus (on pourra s'en convaincre en considérant $\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}$). La définition appropriée est la suivante.

Proposition 7.1 (et définition du support) *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et soit f une fonction définie sur Ω. On considère la famille des ouverts $(\omega_i)_{i\in I}$, $\omega_i \subset \Omega$ tels que pour chaque $i \in I$, $f = 0$ presque partout sur ω_i. On pose $\omega = \bigcup_{i\in I} \omega_i$. Alors $f = 0$ presque partout sur ω. Par définition, $\operatorname{supp} f = \Omega \setminus \omega$.*

Pour la démonstration de cette proposition, voir Brézis [7, p. 68].

Remarque 7.1

1°) Si f_1 et f_2 sont deux fonctions telles que $f_1 = f_2$ presque partout sur Ω, alors $\operatorname{supp} f_1 = \operatorname{supp} f_2$. On peut donc parler du support d'une fonction $f \in L^p(\Omega)$ (sans préciser quel représentant on choisit dans la classe d'équivalence).

2°) Si f est continue sur Ω, on vérifie aisément que cette définition coïncide avec la définition usuelle.

Voici un résultat concernant le support de la convolution.

Proposition 7.2 *Soient f et g deux fonctions convolables. Alors :*

(i) $\operatorname{supp}(f * g) \subset \overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g}$;

(ii) si $\operatorname{supp} f$ *(ou* $\operatorname{supp} g$*) est compact,* $\operatorname{supp}(f * g) \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$;

(iii) si f et g sont à supports compacts, alors $(f * g)$ l'est aussi.

Convolution et espaces fonctionnels

Comme le souligne la définition 7.1, le produit de convolution de deux fonctions n'est pas toujours défini. Nous allons énoncer ci-dessous des critères d'existence du produit de convolution.

Théorème 7.1 (Convolution dans $L^1(\mathbb{R}^N)$) *Soit $(f, g, h) \in L^1(\mathbb{R}^N) \times L^1(\mathbb{R}^N) \times L^1(\mathbb{R}^N)$. Alors*

1°) $f * g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et on a $\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1$;

2°) $(f * g) * h = f * (g * h)$;

3°) si $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ et $g_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g$ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$, alors $f_n * g_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f * g$ dans $L^1(\mathbb{R})$.

Remarque 7.2 L'espace $(L^1(\mathbb{R}^N), +, \cdot, *)$ est une algèbre commutative *sans élément neutre* (voir exercice 7.11). Autrement dit, il n'existe pas de $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ telle que pour tout $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$,

$$f * g = g * f = g\,.$$

Si l'une des fonctions f ou g est intégrable, f par exemple, le produit de convolution $f * g$ existe pour une classe importante de fonctions g.

Théorème 7.2 (Convolution par un élément de $L^1(\mathbb{R}^N)$) *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$.*

1°) Si $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leqslant p < +\infty$, alors $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et on a $\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_1 \|g\|_p$.

2°) Si $g \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, alors

(i) $f * g \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ et on a $\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_1 \|g\|_\infty$;

(ii) $f * g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^N$.

Théorème 7.3 (Convolution dans les espaces $L^p(\mathbb{R}^N)$, $p \in]1, +\infty[$) *Soit $p \in]1, +\infty[$ et $p' = \dfrac{p}{p-1}$ son conjugué. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$ alors*

(i) $f * g(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}^N$;

(ii) $f * g$ est uniformément bornée sur $\mathbb{R}^N$ et on a

$$\|f * g\|_u = \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |f * g(x)| \leqslant \|f\|_p \|g\|_{p'}\,;$$

(iii) $f * g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N)$ où

$$\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N) = \{f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C} \ \text{continue} \ \lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) = 0\}\,.$$

Convolution et dérivation

Commençons ce sous-paragraphe en fixant quelques notations.

– Soit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$, on note $|\alpha| = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i$ et, pour une fonction régulière g, on note $D^\alpha g$ la fonction

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_N} g}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_N^{\alpha_N}}\,.$$

Pour tout entier naturel $k \geqslant 1$, on désigne par

– $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^N)$ l'ensemble des fonctions k fois continûment dérivables sur $\mathbb{R}^N$ *i.e.* l'ensemble des fonctions g définies sur $\mathbb{R}^N$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ pour lesquelles $D^\beta g$ existe et est continue pour tout $\beta \in \mathbb{N}^N$ vérifiant $|\beta| \leqslant k$;
– $\mathcal{C}^k_c(\mathbb{R}^N)$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^N)$ dont le support est compact ;
– $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ désigne l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}^N$.
– $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ désigne l'ensemble des fonctions de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ dont le support est compact.

Théorème 7.4 *Soit k entier naturel. Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ et $g \in \mathcal{C}^k_c(\mathbb{R}^N)$ où f est à support compact et $g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^N)$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$ et $|\alpha| \leqslant k$, on a*

$$f * g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^N) \quad \text{et} \quad D^\alpha(f * g) = f * D^\alpha g\,.$$

7.2 QUELQUES APPLICATIONS DU PRODUIT DE CONVOLUTION

Unité approchée ou approximation de l'unité

Nous avons vu que l'algèbre $\left(L^1(\mathbb{R}^N), +, \cdot, *\right)$ n'a pas d'élément unité. C'est ce qui explique l'introduction de la notion d'unité approchée. D'où la définition suivante :

Définition 7.2 *Soit $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions positives et intégrables sur $\mathbb{R}^N$. On dit que la suite $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ est* unité approchée *ou* approximation de l'unité *si*

(i) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_n(x)\,dx = 1$ *pour tout $n \in \mathbb{N}^*$;*

(ii) pour tout réel strictement positif a, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\{\|x\|>a\}} \varphi_n(x)\,dx = 0\,.$$

L'unité approchée $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ est dite compacte *si toutes les fonctions φ_n s'annulent en dehors d'un compact de $\mathbb{R}^N$.*

Suites régularisantes

Définition 7.3 *Soit $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ une unité approchée. Si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \quad et \quad \operatorname{supp}\varphi_n \subset B\left(0;\frac{1}{n}\right),$$

la suite $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ est appelée suite régularisante *(*mollifiers *en anglais). C'est évidemment une unité approchée compacte.*

Un exemple de suite régularisante

Soit une fonction φ de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ telle que $\operatorname{supp}\varphi \subset B(0;1)$, $\varphi \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}^N$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)\,dx > 0$, par exemple la fonction définie sur $\mathbb{R}^N$ par

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{r^2-1}} & \text{si } |r| < 1\,, \\ 0 & \text{si } |r| \geqslant 1\,, \end{cases}$$

où $r^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$. Alors la suite $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ de terme général

$$\varphi_n(x) = cn^N\varphi(nx) \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)\,dx}$$

est une suite régularisante.

Pour des exemples d'unité approchée, on pourra consulter les exercices 7.9 et 7.10.

Quelques applications de la convolution

Le théorème qui suit justifie la dénomination d'approximation de l'unité.

Théorème 7.5 *Soit $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ une approximation de l'unité. Alors, pour toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ où $p \in [1, +\infty[$, $\varphi_n * f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\varphi_n * f - f\|_p = 0$.*

Remarquons que si $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite régularisante alors $\varphi_n * f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ et tend vers 0 quand $|x|$ tend vers $+\infty$. Autrement dit, on peut approcher toute fonction de $L^p(\mathbb{R}^N)$ par une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ qui tend vers 0 à l'infini. En fait, on peut approcher toute fonction de $L^p(\mathbb{R}^N)$ par une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.

Corollaire 7.1 *Soit Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^N$. Alors, $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour tout $p \in [1, +\infty[$.*

Corollaire 7.2 (lemme du calcul des variations) *Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Si*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\varphi(x)dx = 0 \quad \text{pour tout} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)\,,$$

alors f est nulle presque partout.

EXERCICES

Exercice 7.1

Soient f et g deux fonctions convolables sur $\mathbb{R}$. Montrer que $f * g$ est paire si f et g sont toutes les deux paires ou toutes les deux impaires, et impaire si l'une est paire et l'autre est impaire.

Solution

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le changement de variable $-u = y$ conduit immédiatement à

$$\begin{aligned} f * g(-x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(-x-u)g(u)\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-x+y)g(-y)\,dy \\ &= \begin{cases} f * g(x) & \text{si } f \text{ et } g \text{ sont simultanément paires ou impaires}\,, \\ -(f*g)(x) & \text{si l'une est paire et l'autre est impaire}\,. \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 7.2

Soit la fonction $f = \mathbb{1}_{[0,1]}$.

1°) Montrer que la fonction $f * f$ qu'on notera f^{*2} appartient à $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, puis déterminer explicitement f^{*2}.

2°) Même question pour $f * f * f$ qu'on notera f^{*3}.

Solution

1°) La fonction f est à support compact donc $f \in L^2(\mathbb{R})$ par exemple ; ainsi le théorème 7.3 entraîne que $f * f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f^{*2}(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x-y)f(y)\,dy \\ &= \int_0^1 f(x-y)\,dy \\ &= \int_0^1 \mathbb{I}_{[x-1,x]\cap[0,1]}\,dt \end{aligned}$$

or

$$[x-1,x]\cap[0,1] = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x<0 \text{ ou } x>2, \\ [0,x] & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ [x-1,1] & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 2, \end{cases}$$

d'où

$$f^{*2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant 2, \\ x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2-x & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

2°) Les fonctions f et f^{*2} sont à supports compacts donc appartiennent à $L^2(\mathbb{R})$ par exemple ; ainsi le théorème 7.3 entraîne que $f^{*3} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. D'autre part, on vérifie comme dans la première question que

$$f^{*3}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant 3, \\ \dfrac{x^2}{2} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{2}\left(-2x^2+6x-3\right) & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ \dfrac{(3-x)^2}{2} & \text{si } 2 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$$

Remarque 7.3 La fonction f est seulement continue par morceaux alors que f^{*2} est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux et que f^{*3} est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C}^2$ par morceaux (figures 7.1 et 7.2, page ci-contre).

Commentaire : Pour tout $n \geqslant 2$, on vérifie que $\operatorname{supp}(f^{*n}) = [0,n]$, que la restriction de f^{*n} à chaque intervalle $[k,k+1]$ où $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ est une fonction polynômiale de degré $(n-1)$. Plus précisément

$$f^{*n}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_n^k(x-k)\,\mathbb{I}_{[0,1]}(x-k)$$

$$\text{où } \alpha_n^k(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_n(k,j)\frac{x^k}{j!} \quad \text{avec } a_n(k,j) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i C_n^i \frac{(k-i)^{n-(j+1)}}{(n-(j+1))!}$$

voir le livre de J.P. Aubin [3, pp. 160–164]. Enfin, f^{*n} est de classe $\mathcal{C}^{n-2}$ et $\mathcal{C}^{n-1}$ par morceaux.

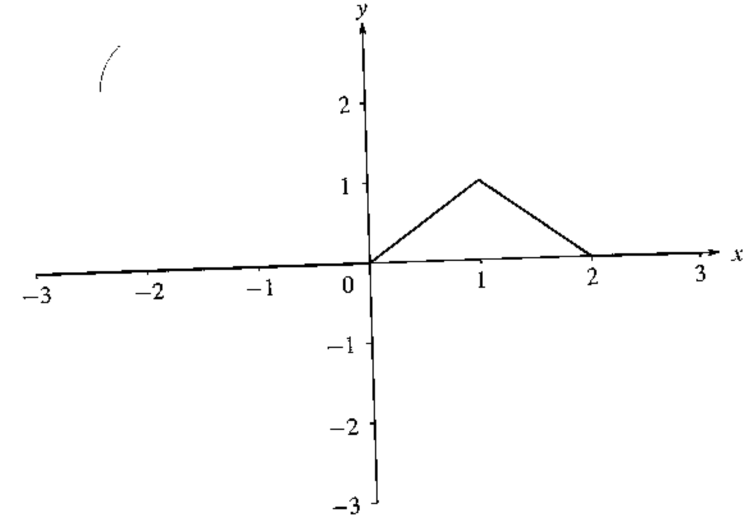


Figure 7.1. Courbe de $f * f$.

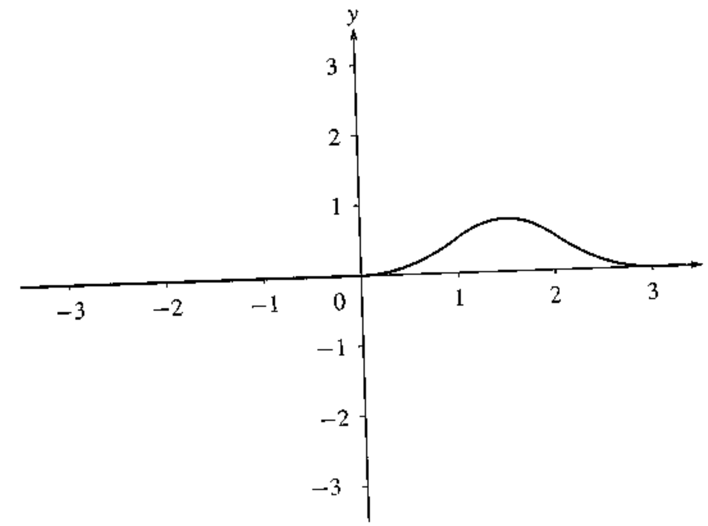


Figure 7.2. Courbe de $f * f * f$.

Exercice 7.3

Soit $(a,b) \in]0,+\infty[^2$, on considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_a(x) = \mathbb{I}_{[-a,a]}(x)\,, \quad g_a(x) = e^{-a|x|} \quad \text{et} \quad h_a(x) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2a^2}}\,.$$

1°) Sans aucun calcul, montrer que $f_a * f_b \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Puis déterminer explicitement $f_a * f_b$, on distinguera les cas $a < b$ et $a = b$.

2°) Sans aucun calcul, montrer que $g_a * g_b \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}) \bigcap \bigcap_{p\in[1,+\infty]} L^p(\mathbb{R})$. Puis déterminer explicitement $g_a * g_b$.

3°) Mêmes questions pour $h_a * h_b$. On rappelle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du = \sqrt{2\pi}$.

Commentaire : Voir exercice 8.8 où on calcule $g_a * g_b$ ou $h_a * h_b$ *via* la transformée de Fourier.

Solution

1°) Étude de $f_a * f_b$.

- Pour tout $(a, b) \in]0, +\infty[^2$, les fonctions f_a et f_b sont à support compact. En particulier f_a et f_b appartiennent à $L^2(\mathbb{R})$, donc le théorème 7.3 entraîne que $f_a * f_b \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.
- Déterminons explicitement $f_a * f_b$. Comme f_a et f_b sont paires, $f_a * f_b$ l'est aussi d'après l'exercice 7.1, donc il suffit de faire le calcul pour $x \geqslant 0$.

Premier cas : $a < b$. On a pour tout $x \geqslant 0$

$$f_a * f_b(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_a(x-y) f_b(y)\, dy = \int_{x-a}^{x+a} f_b(y)\, dy$$
$$= \begin{cases} \displaystyle\int_{x-a}^{x+a} dy = 2a & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant b-a, \\ \displaystyle\int_{x-a}^{b} dy = b+a-x & \text{si } b-a \leqslant x \leqslant b+a, \\ 0 & \text{si } b+a < x, \end{cases}$$

car

$$[x-a, x+a] \cap [-b, b] = \begin{cases} [x-a, x+a] & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant b-a, \\ [x-a, b] & \text{si } b-a \leqslant x \leqslant b+a, \\ \emptyset & \text{si } b+a < x. \end{cases}$$

Comme $f_a * f_b$ est paire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f_a * f_b(x) = \begin{cases} 2a & \text{si } 0 \leqslant |x| \leqslant b-a, \\ b+a-|x| & \text{si } b-a \leqslant |x| \leqslant b+a, \\ 0 & \text{si } b+a \leqslant |x|. \end{cases}$$

Les fonctions f_a et f_b sont seulement continues par morceaux alors que $f_a * f_b$ est continue sur $\mathbb{R}$ et est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Deuxième cas : $a = b$. On a, pour tout $x \geqslant 0$,

$$[x-a, x+a] \cap [-a, a] = \begin{cases} [x-a, a] & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 2a, \\ \emptyset & \text{si } 2a < x. \end{cases}$$

Ainsi,

$$(f_a * f_a)(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{x-a}^{a} du = 2a - x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 2a, \\ 0 & \text{si } x \geqslant 2a. \end{cases}$$

Par conséquent

$$f_a * f_a(x) = \begin{cases} 2a - |x| & \text{si } 0 \leqslant |x| \leqslant 2a, \\ 0 & \text{si } |x| \geqslant 2a. \end{cases}$$

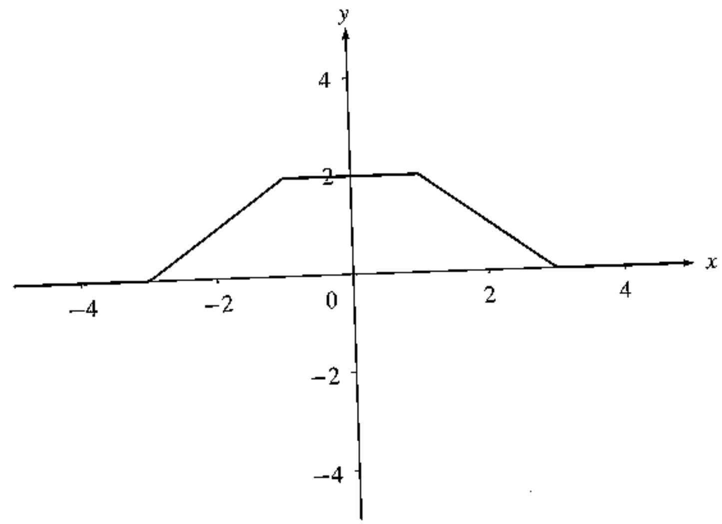


Figure 7.3. Courbe de $f_2 * f_1$.

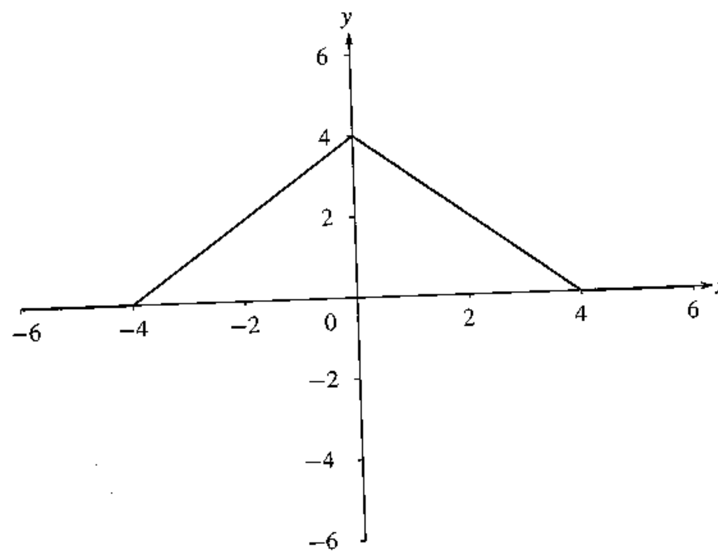


Figure 7.4. Courbe de $f_2 * f_2$.

2°) Étude de $g_a * g_b$.

– Pour tout $a > 0$, $g_a \in \bigcap_{p\in[1,+\infty]} L^p(\mathbb{R})$. Donc

  – le théorème 7.1 entraîne que $g_a * g_b \in L^1(\mathbb{R})$ car g_a et $g_b \in L^1(\mathbb{R})$;
  – le théorème 7.2 entraîne que $g_a * g_b \in L^p(\mathbb{R})$ car $g_a \in L^1(\mathbb{R})$ et $g_b \in L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \in [1, +\infty]$;
  – le théorème 7.3 entraîne que $g_a * g_b \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ car par exemple g_a et g_b appartiennent à $L^2(\mathbb{R})$.

– Comme les fonctions g_a et g_b sont paires, $g_a * g_b$ l'est aussi. Par conséquent, il suffit de faire le calcul pour $x \geqslant 0$. Soit $x \geqslant 0$ fixé, on a

$$\begin{aligned}
g_a * g_b(x) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-a|x-y|}e^{-b|y|}\,dy\\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{-a|x-y|}e^{-b|y|}\,dy + \int_{0}^{x} e^{-a|x-y|}e^{-b|y|}\,dy + \int_{x}^{+\infty} e^{-a|x-y|}e^{-b|y|}\,dy\\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{-a(x-y)}e^{by}\,dy + \int_{0}^{x} e^{-a(x-y)}e^{-by}\,dy + \int_{x}^{+\infty} e^{-a(y-x)}e^{-by}\,dy\\
&= e^{-ax}\int_{-\infty}^{0} e^{(a+b)y}\,dy + e^{-ax}\int_{0}^{x} e^{(a-b)y}\,dy + e^{ax}\int_{x}^{+\infty} e^{-(a+b)y}\,dy\,.
\end{aligned}$$

D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g_a * g_b(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{a^2-b^2}\left(ae^{-b|x|} - be^{-a|x|}\right) & \text{si } a \neq b\,,\\[2mm] e^{-a|x|}\left(\dfrac{1}{a} + |x|\right) & \text{si } a = b\,. \end{cases}$$

3°) On montre, en raisonnant comme précédemment, que

$$h_a * h_b \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}) \bigcap \bigcap_{p\in[1,+\infty]} L^p(\mathbb{R})\,.$$

On a

$$\begin{aligned}
h_a * h_b(x) &= \frac{1}{2\pi ab}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2a^2} - \frac{y^2}{2b^2}\right)dy\\
&= \frac{1}{2\pi ab}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2} + \frac{xy}{a^2} - \frac{y^2}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\right)dy\\
&= \frac{1}{2\pi ab}\exp\left(-\frac{x^2}{2(a^2+b^2)}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}\left(y - \frac{b^2}{a^2+b^2}x\right)^2\right)dy\,.
\end{aligned}$$

En faisant le changement de variable $u = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\left(y - \dfrac{b^2}{a^2+b^2}x\right)$, on a alors

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}\left(y - \frac{b^2}{a^2+b^2}x\right)^2\right)dy &= \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du\\
&= \sqrt{2\pi}\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}
\end{aligned}$$

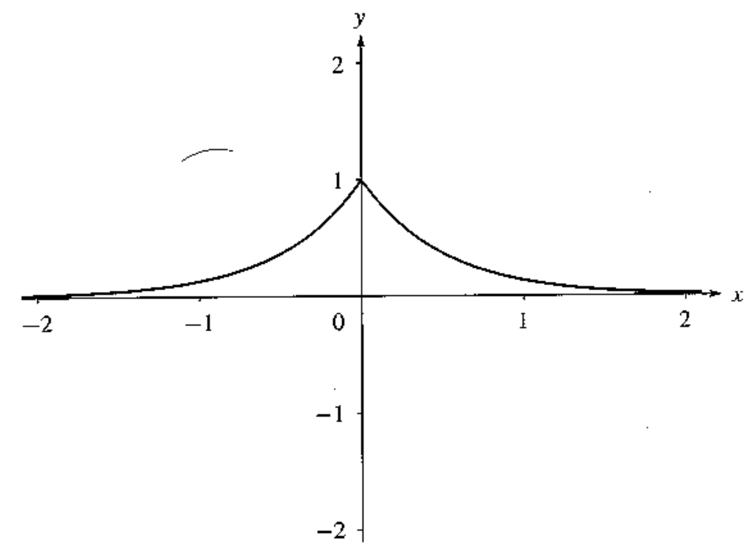


Figure 7.5. Courbe de g_2.

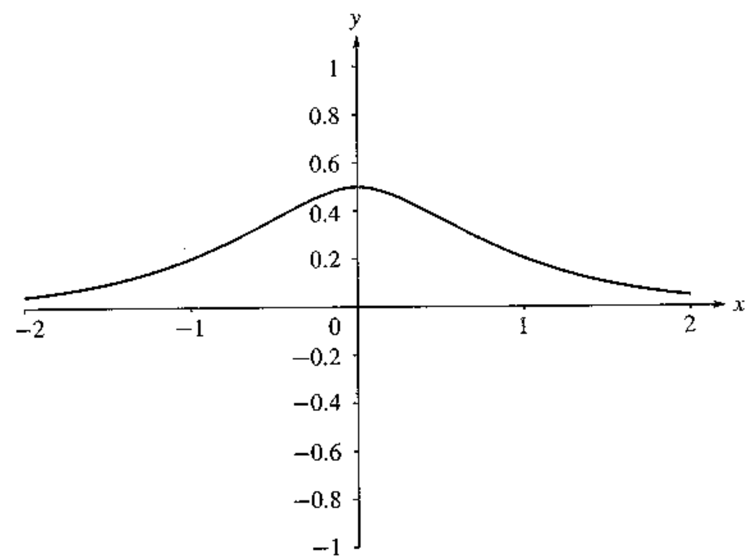


Figure 7.6. Courbe de $g_2 * g_2$.

d'où

$$h_a * h_b = h_{\sqrt{a^2+b^2}}\,.$$

On constate que $h_a * h_b$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et est à décroissance rapide (voir définition 10.1) ainsi que toutes ses dérivées.

Exercice 7.4

Soit $a > 0$. On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par
$$f_a(x) = \frac{1}{x - ia} \quad \text{et} \quad g_a(x) = \frac{1}{\pi}\frac{a}{x^2 + a^2}.$$

1°) Vérifier que $f_a \in L^2(\mathbb{R})$ et en déduire que $f_a * f_b \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ pour tout $(a, b) \in]0, +\infty[^2$. Puis déterminer explicitement $f_a * f_b$.

2°) Montrer que $g_a * g_b \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}) \bigcap \bigcap_{p\in[1,+\infty]} L^p(\mathbb{R})$. Puis, en utilisant le calcul de $f_a * f_b$, montrer que $g_a * g_b = g_{a+b}$.

Commentaire : Voir exercice 8.8 où on calcule $g_a * g_b$ *via* la transformée de Fourier.

Solution

1°) – La fonction f_a est continue sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f_a(x)|^2 = \dfrac{1}{x^2 + a^2}$. Donc, $|f_a|^2 \in L^1(\mathbb{R})$ et par conséquent, $f_a \in L^2(\mathbb{R})$. Ainsi, le théorème 7.3 entraîne que $f_a * f_b$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, uniformément bornée par $\|f_a\|_2\|f_b\|_2$ et enfin que $f_a * f_b \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

– Soit $(a, b) \in]0, +\infty[^2$, déterminons explicitement $f_a * f_b$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f_a * f_b(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(y - ia)(x - y - ib)}\, dy.$$

Par ailleurs, en décomposant en éléments simples, on a
$$\frac{1}{(y - ia)(x - y - ib)} = \frac{1}{x - i(a + b)}\left(\frac{1}{y - ia} + \frac{1}{x - y - ib}\right),$$
d'où
$$\int \frac{dy}{(y - ia)(x - y - ib)} = \frac{1}{x - i(a + b)}\left(\int \frac{dy}{y - ia} + \int \frac{dy}{x - y - ib}\right).$$
Or,
$$\int \frac{dy}{y - ia} = \frac{1}{2}\ln\left(y^2 + a^2\right) + i \operatorname{Arctan}\frac{y}{a}$$
et
$$\int \frac{dy}{x - y - ib} = -\frac{1}{2}\ln\left((y - x)^2 + b^2\right) + i \operatorname{Arctan}\frac{y - x}{b},$$
d'où
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} &\frac{dy}{(y - ia)(x - y - ib)} \\ &= \frac{1}{x - i(a + b)}\left[\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{y^2 + a^2}{(y - x)^2 + b^2}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty}\right. \\ &\quad \left. + \left[i\left(\operatorname{Arctan}\frac{y}{a} + \operatorname{Arctan}\frac{y - x}{b}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty}\right] = \frac{2i\pi}{x - i(a + b)}.\end{aligned}$$

Ainsi
$$f_a * f_b(x) = \frac{2i\pi}{x - i(a + b)} = 2\pi i f_{a+b}(x).$$

2°) Étude de $g_a * g_b$ $(a, b > 0)$.

Il est clair que pour tout $a > 0$, $g_a \in \bigcap_{p\in[1,+\infty]} L^p(\mathbb{R})$. Donc

– le théorème 7.2 entraîne que $g_a * g_b \in L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \in [1, +\infty]$ car par exemple $g_a \in L^1(\mathbb{R})$ et $g_b \in L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \in [1, +\infty]$;

– le théorème 7.3 entraîne que $g_a * g_b \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ car par exemple g_a et $g_b \in L^2(\mathbb{R})$.

Par ailleurs, on vérifie aisément que pour tout $a > 0$, $g_a = \dfrac{1}{2i\pi}(f_a - f_{-a})$ où f_{-a} est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_{-a}(x) = \dfrac{1}{x + ia}$. D'où
$$\begin{aligned} g_a * g_b &= -\frac{1}{4\pi^2}(f_a - f_{-a}) * (f_b - f_{-b}) \\ &= -\frac{1}{4\pi^2}(f_a * f_b - f_a * f_{-b} - f_{-a} * f_b + f_{-a} * f_{-b}).\end{aligned}$$

Or le calcul ci-dessus de $f_a * f_b$ montre que
$$f_a * f_{-b} = f_{-a} * f_b = 0\, f_{-a} * f_{-b} = -2i\pi f_{-(a+b)}.$$

Par suite, on a
$$\begin{aligned} g_a * g_b &= -\frac{1}{4\pi^2}(f_a * f_b + f_{-a} * f_{-b}) \\ &= -\frac{1}{4\pi^2}\left(2i\pi f_{a+b} - 2i\pi f_{-(a+b)}\right) \\ &= g_{a+b}.\end{aligned}$$

Exercice 7.5

Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$ où $p \in [1, +\infty]$. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$F(x) = \int_x^{x+1} f(y)\, dy.$$

1°) Montrer que si $p \in]1, +\infty[$ alors $F \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$.

2°) Montrer que si $p = 1$ alors $F \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}) \cap \bigcap_{q\in[1,+\infty[} L^q(\mathbb{R})$.

3°) Que peut-on dire sur F lorsque $p = +\infty$?
On pourra vérifier que $F = f * g$ où g est une fonction qu'on déterminera.

Solution

Il est clair que $F = f * g$ où $g = \mathbb{1}_{[-1,0]}$. En effet, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[x,x+1]}(y)f(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-1,0]}(x-y)f(y)\,dy = \mathbb{1}_{[-1,0]} * f(x)\,.$$

1°) Comme $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^{p'}(\mathbb{R})$ où $p' = \dfrac{p}{p-1}$, le théorème 7.3 implique $F \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ et est uniformément bornée par $\|f\|_p$ car $\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R})} = 1$. D'autre part, comme $g \in L^1(\mathbb{R})$, le théorème 7.2 1°) entraîne que $F \in L^p(\mathbb{R})$ et $\|F\|_{L^p(\mathbb{R})} \leqslant \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$ car $\|g\|_{L^1(\mathbb{R})} = 1$.

2°) Montrons que $F \in \bigcap_{q\in[1,+\infty[} L^q(\mathbb{R})$. En effet, comme la fonction $g \in \bigcap_{q\in[1,+\infty[} L^q(\mathbb{R})$, le théorème 7.2 1°) implique $F \in \bigcap_{q\in[1,+\infty[} L^q(\mathbb{R})$ et que $\|F\|_{L^q(\mathbb{R})} \leqslant \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$ car $\|g\|_{L^q(\mathbb{R})} = 1$. Par ailleurs, la fonction $g \in L^\infty(\mathbb{R})$, donc le théorème 7.2 2°) entraîne que F est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et $\|F\|_\infty \leqslant \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$ car $\|g\|_\infty = 1$.
Montrons que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$. Pour cela, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels qui tend vers $+\infty$. On a d'une part $|f(y)g(x_n - y)| \leqslant |f(y)|$ car $\|g\|_\infty = 1$; et d'autre part pour presque tout $y \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} f(y)g(x_n - y) = 0$ car $\lim_{|x|\to+\infty} g(x) = 0$. Ainsi, le théorème de la convergence dominée (théorème 3.7) entraîne que $\lim_{x_n\to+\infty} F(x_n) = 0$. La démonstration pour le cas x tend vers $-\infty$ est la même, il suffit de changer $+\infty$ en $-\infty$.

3°) Si $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ alors puisque $g \in L^1(\mathbb{R})$, le théorème 7.2 2°) entraîne que F est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et $\|F\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$ car $\|g\|_{L^1(\mathbb{R})} = 1$. De plus, si $\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = 0$ alors $\lim_{|x|\to+\infty} F(x) = 0$. Mais, si $f(x)$ n'a pas de limite ou ne tend pas vers 0 quand $|x|$ tend vers $+\infty$, $F(x)$ ne tend pas nécessairement vers 0 ; par exemple si $f(x) = 2$ partout alors $F(x) = 2$ partout.

Commentaire : L'interprétation de cet exercice à l'aide de la convolution a beaucoup simplifié les choses.

Exercice 7.6

1°) Montrer sur un contre-exemple qu'on ne peut convoler deux fonctions quelconques de $L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

2°) Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et soit $g \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que si $\operatorname{supp} g$ est compact alors $f * g$ existe presque partout et appartient à $L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Solution

1°) Si $f = g = 1$, f et g ne sont pas convolables.

2°) Soit $a > 0$ tel que g s'annule en dehors de l'intervalle $[-a, a]$ et soit $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ tel que $c < d$. Montrons que $f*g$ est définie presque partout sur $[c, d]$ et appartient à $L^1([c, d])$. En effet, pour tout $(x, y) \in [c, d] \times [-a, a]$, on a $f(x-y)g(y) = f(x-y)\mathbb{1}_{[c-a,d+a]}(x-y)g(y)$ et donc

$$f * g(x) = f\mathbb{1}_{[c-a,d+a]} * g(x)\,.$$

Ainsi, $f * g$ coïncide sur $[c, d]$ avec $\mathbb{1}_{[c-a,d+a]}f * g$. Or, $f\mathbb{1}_{[c-a,d+a]} * g$ est définie presque partout et est intégrable d'après le théorème 7.1 1°). Donc $f * g$ l'est aussi.

Exercice 7.7

Soit $g = \mathbb{1}_{[-a,a]}$ où $a \in]0, +\infty[$. Montrer que si f est continue sur $\mathbb{R}$ alors $h = f * g$ appartient à $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et exprimer h' en fonction de f.

Solution

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-a,a]}(x-y)f(y)\,dy = \int_{x-a}^{x+a} f(y)\,dy = F(x+a) - F(x-a)$$

où F est une primitive de f. Ainsi, h est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$h'(x) = f(x+a) - f(x-a)\,.$$

Exercice 7.8

1°) Soient f et g deux fonctions de $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ ayant leurs supports contenus dans $[0, +\infty[$. Montrer que $f*g$ est définie presque partout, localement intégrable, à support contenu dans $[0, +\infty[$ et que, pour presque tout $x \in [0, +\infty[$, on a

$$f * g(x) = \int_0^x f(x-y)g(y)\,dy\,.$$

2°) Déterminer $f * g$ dans les deux cas suivants.

2.a $f = e^{-ax}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}$ et $g = e^{-bx}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}$ où $0 < a \leqslant b$.

2.b $f = e^{x^2}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}$ et $g = e^{-x^2}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}$.

3°) Soit g_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g_a(x) = \dfrac{1}{\Gamma(a)}x^{a-1}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$ où $a > 0$ et soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ nulle sur $]-\infty, 0]$.

3.a Établir que pour tout $(a, b) \in]0, +\infty[^2$, $g_a * g_b = g_{a+b}$.

3.b En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction $F_n = g_n * f$ est la primitive d'ordre n de f qui s'annule en 0 ainsi que ses $n-1$ premières dérivées *i.e.* $F_n^{(n)} = f$ et $F_n^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$.

Solution

1°) Il est clair que si $f * g$ est définie en un point x, alors nécessairement $x \in [0, +\infty[$ et

$$f * g(x) = \int_0^x f(y)g(x-y)\,dy.$$

Soit a un réel strictement positif, on a d'après la croissance de l'intégrale (proposition 3.2) et le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 5.1)

$$\begin{aligned}\int_0^a \left|\int_0^x f(y)g(x-y)\,dy\right| dx &\leqslant \int_0^a \left(\int_0^x |f(y)g(x-y)|\,dy\right) dx\\ &\leqslant \int_0^a \left(\int_y^a |f(y)g(x-y)|\,dx\right) dy\\ &\leqslant \int_0^a |f(y)|\,dy \int_y^a |g(x-y)|\,dx\\ &\leqslant \int_0^a |f(y)|\,dy \int_0^{a-y} |g(s)|\,ds\\ &\leqslant \int_0^a |f(y)|\,dy \int_0^a |g(s)|\,ds < +\infty\,.\end{aligned}$$

Donc $f * g$ est définie pour presque tout $x \in [0, +\infty[$ et $f * g \in L^1_{loc}([0, +\infty[)$.

2°) 2.a Pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a

$$f * g(x) = \int_0^x e^{-ay} e^{-b(x-y)}\,dy = e^{-bx}\int_0^x e^{(b-a)y}\,dy = \begin{cases} \dfrac{e^{-ax} - e^{-bx}}{a-b} & \text{si } a \neq b\,,\\ xe^{-ax} & \text{si } a = b\,.\end{cases}$$

2.b Pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a

$$f * g(x) = \int_0^x e^{y^2} e^{-(x-y)^2}\,dy = e^{-x^2}\int_0^x e^{2xy}\,dy = \frac{e^{-x^2}}{2x}\left(e^{2x^2} - 1\right) = \frac{\operatorname{sh} x^2}{x}\,.$$

D'où $f * g = \dfrac{\operatorname{sh} x^2}{x}\,\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$.

3°) On a montré dans l'exercice 5.21 3.b que $g_a * g_b = g_{a+b}$.

Première méthode : par récurrence

- Si $n = 1$, alors pour tout $x > 0$, $g_1 * f(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$. Donc $g_1 * f$ est bien la primitive de f qui s'annule en 0.
- Si $n = 2$, alors pour tout $x > 0$,
$$F_2(x) = g_2 * f(x) = g_1 * g_1 * f(x) = g_1 * (g_1 * f)(x) = g_1 * F_1(x) = \int_0^x F_1(t)\,dt\,.$$
On a bien $F_2' = F_1$ et $F_2'' = F_1' = f$; autrement dit F_2 est bien la primitive d'ordre 2 de f qui s'annule en 0.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$; supposons que F_n est la primitive d'ordre n et $F_n^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, et montrons que F_{n+1} est la primitive d'ordre $n+1$ et $F_{n+1}^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n+1\}$.
En effet, on a pour tout $x > 0$,
$$F_{n+1}(x) = g_{n+1} * f(x) = g_1 * g_n * f(x) = g_1 * (g_n * f)(x) = g_1 * F_n(x) = \int_0^x F_n(t)\,dt$$
et donc $F_{n+1}' = F_n$. D'où le résultat.

Commentaire : La démonstration précédente est valable parce que la convolution des fonctions dont le support est borné à gauche (ou à droite d'ailleurs) est associative. Cependant, la convolution n'est pas en général associative comme le montre l'exemple suivant. Soient les trois fonctions

$$f = \mathbb{1}_{[0,+\infty[}\,,\quad g = \mathbb{1}_{[-1,0]} - \mathbb{1}_{[0,1]} \quad\text{et}\quad h = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}\,.$$

On vérifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f * g) * h(x) = 1$ et $f * (g * h)(x) = 0$.

Deuxième méthode : Elle repose sur un calcul et des arguments élémentaires.
Sachant que pour tout $x > 0$,

$$F_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{(x-y)^n}{n!} f(y)\,dy = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k x^{n-k}\int_0^x y^k f(y)\,dy\,,$$

il est clair que F_{n+1} est dérivable et on vérifie sans peine que $F_{n+1}' = F_n$.

Exercice 7.9 (Exemples « historiques » d'approximation de l'unité)

Soit φ une fonction positive et intégrable sur $\mathbb{R}^N$ et telle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\varphi(x)\,dx = 1$.
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_n(x) = n^N\varphi(nx)$. Montrer que la suite $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ est une approximation de l'unité.

Solution

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, en effectuant le changement de variable linéaire de $\mathbb{R}^N$ dans lui-même (voir théorème 5.3), qui à tout $x = (x_1, \ldots, x_N)$ associe $y = (nx_1, \ldots, nx_N)$, on a d'une part

$$\int_{\mathbb{R}^N}\varphi_n(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} n^N\varphi(nx)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N}\varphi(y)\,dy = 1$$

et d'autre part, pour tout réel $a > 0$

$$\begin{aligned}\int_{\{\|x\|>a\}}\varphi_n(x)\,dx = \int_{\{\|x\|>a\}} n^N\varphi(nx)\,dx &= \int_{\{\|y\|>na\}}\varphi(y)\,dy\\ &= \int_{\mathbb{R}^N}\varphi(y)\,\mathbb{1}_{\{\|y\|>na\}}(y)\,dy\,.\end{aligned}$$

Comme φ est intégrable sur $\mathbb{R}^N$, la suite $\left(\varphi\mathbb{1}_{\{\|y\|>na\}}\right)_{n\geqslant 1}$ converge presque partout vers la fonction nulle et est dominée par φ, donc le théorème de la convergence dominée (théorème 3.7) entraîne que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\{\|x\|>a\}}\varphi_n(x)\,dx = 0\,.$$

Exemples d'unités approchées « historiques » sur $\mathbb{R}$

$$\varphi_n(x) = \frac{n}{2}e^{-n|x|}\,,\quad \varphi_n(x) = \frac{n}{\pi(n^2x^2+1)} \quad \text{et} \quad \varphi_n(x) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-n^2x^2}{2}}\,.$$

Il arrive que pour les besoins des applications, on remplace n par $\frac{1}{t}$ et on obtient ce qu'on appelle :

Noyau de Laplace sur $\mathbb{R}$: $(\varphi_t)_{t>0}$ où $\varphi_t(x) = \frac{1}{2t}e^{\frac{-|x|}{t}}$;

Noyau de Cauchy sur $\mathbb{R}$: $(\varphi_t)_{t>0}$ où $\varphi_t(x) = \frac{t}{\pi(t^2+x^2)}$;

Noyau de Gauss sur $\mathbb{R}^N$: $(\varphi_t)_{t>0}$ où $\varphi_t(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}t)^N}e^{-\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{2t^2}}$.

Exercice 7.10

1°) On considère les noyaux de Cauchy et de Laplace (voir exercice 7.9) $(f_n)_{n\geqslant 1}$ et $(g_n)_{n\geqslant 1}$ où

$$f_n(x) = \frac{n}{\pi(n^2x^2+1)} \quad \text{et} \quad g_n(x) = \frac{n}{2}e^{-n|x|}\,.$$

1.a Vérifier par le calcul que pour tout $a>0$,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\{|x|>a\}} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_{\{|x|>a\}} g_n(x)\,dx = 0\,.$$

1.b Montrer que les suites $(f_n)_{n\geqslant 1}$ et $(g_n)_{n\geqslant 1}$ convergent vers la fonction nulle presque partout et qu'aucune des deux suites de fonctions ne converge dans $L^1(\mathbb{R})$.

2°) On revient au cas où $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ est une unité approchée quelconque. Montrer que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne, bornée et continue en 0, on a

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x)f(x)\,dx = f(0)\,.$$

Solution

1°) 1.a Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $a \in]0,+\infty[$. Le changement de variable $y = nx$ conduit à

$$\int_{\{|x|>a\}} f_n(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_a^{+\infty}\frac{n\,dx}{(nx)^2+1} = \frac{2}{\pi}\int_{na}^{+\infty}\frac{dy}{y^2+1} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}(na)\right),$$

d'où $\lim_{n\to+\infty}\int_{\{|x|>a\}} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}(na)\right) = 0.$

De même

$$\int_{\{|x|>a\}} g_n(x)\,dx = n\int_a^{+\infty} e^{-nx}\,dx = n\left[-\frac{1}{n}e^{-nx}\right]_a^{+\infty} = e^{-na}$$

d'où $\lim_{n\to+\infty}\int_{\{|x|>a\}} g_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} e^{-na} = 0.$

1.b La suite $(f_n)_{n>0}$ converge vers la fonction nulle presque partout. En effet, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\pi} = +\infty.$

En revanche, la suite $(f_n)_{n>0}$ ne converge pas dans $L^1(\mathbb{R})$. Sinon, elle convergerait nécessairement en vertu de l'exercice 3.14 vers la fonction nulle et on aurait donc $\lim_{n\to+\infty}\|f_n\|_1 = 0$; ce qui n'est pas possible puisque $\|f_n\|_1 = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Même raisonnement pour la suite $(g_n)_{n>0}$.

2°) Montrons que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on ait

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx - f(0)\right| < \varepsilon\,.$$

Posons $M = \sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$ et fixons $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en 0, il existe $\eta = \eta(\varepsilon)$ tel que pour tout $|x| \leqslant \eta$,

$$|f(x) - f(0)| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}}\varphi_n(x)\big(f(x)-f(0)\big)\,dx\right| &\leqslant \int_{\mathbb{R}}\varphi_n(x)|f(x)-f(0)|\,dx\\ &\leqslant \int_{\{|x|>\eta\}}\varphi_n(x)|f(x)-f(0)|\,dx + \int_{\{|x|\leqslant\eta\}}\varphi_n(x)|f(x)-f(0)|\,dx\\ &\leqslant 2M\int_{\{|x|>\eta\}}\varphi_n(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}\,.\end{aligned}$$

Par ailleurs, $\lim_{n\to\infty}\int_{\{|x|>\eta\}}\varphi_n(x)\,dx = 0$ donc il existe $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$2M\int_{\{|x|>\eta\}}\varphi_n(x)\,dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

D'où le résultat.

Commentaire : On dit que l'unité approchée $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge au sens des distributions vers la mesure de Dirac δ_0.

Exercice 7.11

Montrer qu'il n'existe pas de $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tel que $f * g = g * f = g$ pour tout $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Autrement dit, l'algèbre $\big(L^1(\mathbb{R}^N), +, \cdot, *\big)$ n'a pas d'élément unité (voir remarque 7.2).

Commentaire : Voir exercice 8.7 où on résout cet exercice *via* la transformée de Fourier.

Solution

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ était telle que $f * g = g$ pour tout $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$, alors il existerait $\alpha > 0$ tel que

$$\int_{\{\|y\|\leqslant\alpha\}} |f(y)|\, dy < 1\,.$$

Soit φ la fonction caractéristique de la boule fermée de centre 0 et de rayon $\alpha/2$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ tel que $\|x\| \leqslant \alpha/2$, on aurait,

$$\begin{aligned}1 = f * \varphi(x) = |f * \varphi(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(y) f(x-y)\, dy\right| \\ &= \left|\int_{\{\|y\|\leqslant\alpha/2\}} f(x-y)\, dy\right| \\ &\leqslant \int_{\{\|y\|\leqslant\alpha/2\}} |f(x-y)|\, dy \\ &\leqslant \int_{\{\|z\|\leqslant\alpha\}} |f(z)|\, dz < 1\,,\end{aligned}$$

ce qui est absurde.

Exercice 7.12 (Démonstration de la proposition 7.2)

Soient f et g deux fonctions convolables sur $\mathbb{R}^N$. Montrer que :

1°) $\operatorname{supp}(f * g) \subset \overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g}$;

2°) si $\operatorname{supp} f$ ou $\operatorname{supp} g$ est compact alors $\operatorname{supp}(f * g) \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$;

3°) si f et g sont à supports compacts, alors $(f * g)$ est à support compact.

Solution

1°) Soit $x \in \mathbb{R}^N$ fixé tel que la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^N$; on a alors

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\, dy = \int_{(x-\operatorname{supp} f)\cap \operatorname{supp} g} f(x-y)g(y)\, dy\,.$$

Si $x \notin \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$ alors $(x - \operatorname{supp} f) \cap \operatorname{supp} g = \emptyset$ et $f * g(x) = 0$. Il en résulte que $f * g(x) = 0$ pour presque tout x appartenant au complémentaire de $\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$ et en particulier à l'intérieur du complémentaire de $\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$. Or, le support d'une fonction étant le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel elle s'annule presque partout, on en déduit que l'intérieur du complémentaire de $\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$ est inclus dans le complémentaire de $\operatorname{supp}(f * g)$. D'où $\operatorname{supp}(f * g) \subset \overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g}$.

2°) Si $\operatorname{supp} f$ ou $\operatorname{supp} g$ est compact alors $\operatorname{supp}(f*g) \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$. Si $\operatorname{supp} f$ est compact alors comme le support d'une fonction est toujours fermé, $\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$ est fermé car la somme d'un compact et d'un fermé est un fermé (voir par exemple Gostiaux [21, p. 224]) et donc $\overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g} = \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$, d'où $\operatorname{supp}(f * g) \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$.

3°) Si $\operatorname{supp} f$ et $\operatorname{supp} g$ sont à supports compacts, alors $\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$ est un compact car la somme de deux compacts est un compact. Comme $\operatorname{supp}(f * g)$ est un fermé et inclus dans un compact, c'est un compact.

Exercice 7.13

Soient A et B deux boréliens de $\mathbb{R}$ tels que $0 < \lambda(A), \lambda(B) < +\infty$.

1°) Montrer que $f = \mathbb{1}_A * \mathbb{1}_B$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, continue et non identiquement nulle.

2°) Montrer que $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\} \subset A + B$ (voir exercice 7.12 1°)).

3°) Montrer que $A + B$ est d'intérieur non vide. (On rappelle qu'il existe des boréliens de mesure de Lebesgue strictement positive et d'intérieur vide, par exemple $[0, 1] \cap \mathbb{Q}^c$).

Solution

1°) Comme les fonctions $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$ sont des éléments de $\bigcap_{p\in[0,+\infty]} L^p(\mathbb{R})$, le théorème 7.3 entraîne que $f = \mathbb{1}_A * \mathbb{1}_B$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et appartient à $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. D'autre part, puisque $f \geqslant 0$, on a en vertu du théorème de Fubini-Tonelli (théorème 5.1)

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A\, dx \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_B\, dx = \lambda(A)\lambda(B) > 0\,.$$

Donc f ne peut être identiquement nulle.

2°) Puisque $\mathbb{1}_A$ est nulle en dehors de A et $\mathbb{1}_B$ est nulle en dehors de B, alors d'après l'exercice 7.12, la fonction $\mathbb{1}_A * \mathbb{1}_B$ est nulle en dehors de $A+B$. Ainsi, $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\} \subset A + B$.

3°) Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$ est un ouvert et comme $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\} \subset A + B$, alors $A + B$ est d'intérieur non vide.

Exercice 7.14 (Démonstration du corollaire 7.2)

Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\varphi(x)\, dx = 0 \quad \text{pour tout} \quad \varphi \in \mathcal{D}\,(\mathbb{R}^N)\,.$$

Soit $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite régularisante.

1°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\rho_n * f$ est nulle.

2°) Soit K un compact de $\mathbb{R}^N$ et $K_r = \{x \in \mathbb{R}^N : d(x, K) \leqslant r\}$ où r un réel strictement positif. Montrer que pour tout $x \in K$ et tout $n \geqslant \dfrac{1}{r}$

$$\rho_n * f(x) = \rho_n * (f\mathbb{1}_{K_r})(x) = 0\,.$$

3°) En déduire que

$$\int_K |f(x)|\, dx \leqslant \int_{\mathbb{R}} \left|f(x)\mathbb{1}_{K_r}(x) - \rho_n * (f\mathbb{1}_{K_r})(x)\right|\, dx$$

et donc que $f(x) = 0$ pour presque tout $x \in K$.

4°) Conclure que f est nulle presque partout sur $\mathbb{R}$.

Solution

1°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$; montrons que $\rho_n * f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.
Tout d'abord, $\rho_n * f$ est bien définie sur $\mathbb{R}^N$ et appartient à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ d'après le théorème 7.4.
D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, l'application $y \mapsto \rho_n(x-y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ donc

$$\rho_n * f(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(y)\rho_n(x-y)\,dy = 0 \quad \text{pour tout } \; x \in \mathbb{R}^N .$$

2°) On a pour $x \in K$

$$\begin{aligned}\rho_n * f(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} f(y)\rho_n(x-y)\,dy \\ &= \int_{K_r} f(y)\rho_n(x-y)\,dy \quad \text{dès que } \; n \geqslant \frac{1}{r} \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} f\,\mathbb{1}_{K_r}(y)\rho_n(x-y)\,dy \\ &= \rho_n * f\,\mathbb{1}_{K_r}(x) .\end{aligned}$$

3°) Montrons que $\displaystyle\int_K |f(x)|\,dx \leqslant \|f\,\mathbb{1}_{K_r} - \rho_n * \mathbb{1}_{K_r} f\|_1$. En effet,

$$\begin{aligned}\int_K |f(x)|\,dx &= \int_K |f(x)|\,\mathbb{1}_{K_r}(x)\,dx \\ &= \int_K |f(x)\mathbb{1}_{K_r}(x) - (\rho_n * \mathbb{1}_{K_r} f)(x)|\,dx \quad \text{car } \; \rho_n * \mathbb{1}_{K_r} f = 0 \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)\mathbb{1}_{K_r}(x) - (\rho_n * \mathbb{1}_{K_r} f)(x)|\,dx \\ &= \|f\,\mathbb{1}_{K_r} - \rho_n * \mathbb{1}_{K_r} f\|_1\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{1}_{K_r} f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, le théorème 7.5 entraîne que

$$\lim_{n \to +\infty} \|\rho_n * \mathbb{1}_{K_r} f - \mathbb{1}_{K_r} f\|_1 = 0 .$$

Par conséquent,

$$\int_K |f(x)|\,dx = 0 ,$$

d'où $f = 0$ presque partout sur K ; autrement dit $\lambda^{(N)}\big(K \cap \{f \neq 0\}\big) = 0$.

4°) Montrons que $f = 0$ presque partout sur $\mathbb{R}^N$.
Comme $\mathbb{R}^N$ est réunion d'une suite de compacts $(K_m)_{m \geqslant 1}$, on a

$$\{f \neq 0\} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}^*} (\{f \neq 0\} \cap K_m) .$$

Or, d'après la troisième question, $\lambda^{(N)}\big(K_m \cap \{f \neq 0\}\big) = 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$. Donc $\lambda^{(N)}(\{f \neq 0\}) = 0$, autrement dit f est nulle presque partout.

Chapitre **8**

Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

RAPPELS DE COURS

Dans ce chapitre, sauf mention du contraire, toutes les intégrales sont des intégrales de Lebesgue.

8.1 DÉFINITION, EXEMPLES USUELS ET PROPRIÉTÉS IMMÉDIATES

Définition 8.1 *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On appelle :*

(i) transformée de Fourier *de f, l'application qu'on note $\hat{f}$ ou $\mathcal{F}(f)$, définie pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ par*

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2i\pi x\xi}\,dx ; \tag{8.1}$$

(ii) transformée de Fourier conjuguée *de f, l'application qu'on note $\bar{\mathcal{F}}(f)$, définie pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ par*

$$\bar{\mathcal{F}}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{2i\pi x\xi}\,dx . \tag{8.2}$$

Commentaire : Il existe des variantes dans la définition de la transformation de Fourier. La nôtre consiste à choisir la fréquence au lieu de la pulsation comme variable. Ses avantages (comme on va le voir) sont :

- $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$ et $\bar{\mathcal{F}}(f * g) = \bar{\mathcal{F}}(f)\bar{\mathcal{F}}(g)$ (théorème 8.2) ;
- « $\mathcal{F}^{-1}$ » $= \bar{\mathcal{F}}$ (théorème 8.5) ;
- $\mathcal{F}$ est une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ et $\|\mathcal{F}\| = 1$ (cf. chapitre 9).

L'inconvénient est que le facteur 2π réapparaît lorsqu'on écrit la transformée de Fourier d'une dérivée. On rencontre aussi les définitions suivantes

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}\,dx \quad \text{ou} \quad \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}\,dx.$$

Il est important, en lisant un ouvrage ou une table de transformées de Fourier de s'assurer de la définition utilisée. Il est bien sûr très facile de passer de l'une à l'autre des définitions. Enfin, ces nuances n'affectent en rien la nature profonde de la transformation de Fourier.

Propriétés de régularité

L'effet régularisant et « lissant » sur les (éventuelles) grandes valeurs de la fonction est précisé par le théorème suivant.

Théorème 8.1

1°) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors :

(i) $\hat{f}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et est uniformément continue ;

(ii) $\hat{f}$ est uniformément bornée et on a

$$\|f\|_u = \sup_{\xi\in\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)| \leqslant \|f\|_1 = \mathcal{F}(|f|)(0)\,;$$

(iii) $\lim_{|\xi|\to+\infty} \hat{f}(\xi) = 0$ (théorème de Riemann-Lebesgue).

2°) Pour tout $(f,g) \in \left(L^1(\mathbb{R})\right)^2$ et tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathcal{F}(f) + \beta\mathcal{F}(g)\,.$$

Autrement dit, la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est une application linéaire continue de $(L^1(\mathbb{R}); \|\cdot\|_1)$ dans $(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}); \|\cdot\|_u)$.

Remarque 8.1 On montre que :

- $\mathcal{F}\left(L^1(\mathbb{R})\right)$ est *strictement inclus* dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ (voir exercice 8.14) et donc que $\mathcal{F}$ n'est pas surjective ;
- $\mathcal{F}\left(L^1(\mathbb{R})\right)$ est *dense* dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ (voir exercice 8.18).

Exemples usuels

Soient $a > 0$ fixé, c et d deux réels tels que $c < d$.

Calcul direct : En appliquant la formule (8.1) on a pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

(i) $$\mathcal{F}\left(\mathbb{1}_{[c,d]}\right)(\xi) = \begin{cases} d-c & \text{si } \xi = 0,\\ \dfrac{\sin\pi(d-c)\xi}{\pi\xi}e^{-i\pi(c+d)\xi} & \text{si } \xi \neq 0,\end{cases}$$

en particulier $\mathcal{F}\left(\mathbb{1}_{[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}]}\right)(\xi) = \dfrac{\sin\pi a\xi}{\pi\xi}$;

(ii) $$\mathcal{F}\left(\left(1 - \frac{2|x|}{a}\right)\mathbb{1}_{[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}]}\right)(\xi) = 2\frac{\sin^2\left(\frac{\pi a\xi}{2}\right)}{\pi^2 a\xi^2}\,;$$

(iii) $$\mathcal{F}\left(e^{-ax}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}\right)(\xi) = \frac{1}{a+2i\pi\xi}\,;$$

(iv) $$\mathcal{F}\left(e^{ax}\mathbb{1}_{]-\infty,0[}\right)(\xi) = \frac{1}{a-2i\pi\xi}\,;$$

(v) $$\mathcal{F}\left(e^{-a|x|}\right)(\xi) = \frac{2a}{a^2+4\pi^2\xi^2}\,;$$

(vi) $$\mathcal{F}\left(\mathrm{sign}(x)e^{-a|x|}\right)(\xi) = \frac{-4i\pi\xi}{a^2+4\pi^2\xi^2}.$$

Intégration dans le champ complexe : lorsqu'un calcul direct n'aboutit pas, on peut utiliser une intégration dans le plan complexe *via* la méthode des résidus (on pourra consulter son livre préféré d'analyse complexe [15], [37], ...) Ainsi, on montre que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

(vii) $$\mathcal{F}\left(e^{-ax^2}\right)(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\left(-\frac{\pi^2\xi^2}{a}\right);$$

(viii) $$\mathcal{F}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}\,ax}\right)(\xi) = \frac{1}{\mathrm{ch}\left(\frac{\pi^2\xi}{a}\right)}\,;$$

(ix) $$\mathcal{F}\left(\frac{1}{a^2+x^2}\right)(\xi) = \frac{\pi}{a}e^{-2\pi a|\xi|}.$$

Effet d'une translation, modulation et homothétie

Proposition 8.1 *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et soit $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$; alors, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,*

(i) $\mathcal{F}(\tau_a f)(\xi) = e^{-2i\pi a\xi}\hat{f}(\xi)$ où $(\tau_a f)(x) = f(x-a)$;

(ii) $\mathcal{F}\left(e^{2i\pi ax}f(x)\right)(\xi) = \hat{f}(\xi - a)$;

(iii) $\mathcal{F}(f(ax)) = \dfrac{1}{|a|}\hat{f}\left(\dfrac{\xi}{a}\right)$.

8.2 TRANSFORMATION DE FOURIER DANS $L^1(\mathbb{R})$ ET CONVOLUTION

Le théorème qui suit fait le lien entre la transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ et la convolution. Comme nous le verrons, ce résultat permet de ramener la résolution des équations de convolution (et donc des équations aux dérivées partielles à coefficients constants sur $\mathbb{R}$) à des problèmes de division (voir exercices 8.10, 8.11 ou 8.12).

Théorème 8.2 *Soit $(f,g) \in L^1(\mathbb{R}) \times L^1(\mathbb{R})$. Alors :*

1°) $\mathcal{F}(f*g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$;

2°) $\bar{\mathcal{F}}(f*g) = \bar{\mathcal{F}}(f)\bar{\mathcal{F}}(g)$;

3°) si de plus $\hat{f}$ et $\hat{g}$ appartiennent à $L^1(\mathbb{R})$, alors $fg \in L^1(\mathbb{R})$ et on a aussi

$$\mathcal{F}(fg) = \hat{f} * \hat{g}.$$

8.3 TRANSFORMATION DE FOURIER DANS $L^1(\mathbb{R})$ ET DÉRIVABILITÉ

La dérivation donne lieu à deux théorèmes (selon que l'on dérive avant ou après la transformation de Fourier). En remplaçant certains opérateurs différentiels linéaires par une multiplication par un polynôme, la transformation de Fourier permet notamment une résolution de type algébrique de problèmes relevant du calcul différentiel.

Transformée de Fourier d'une dérivée

Théorème 8.3 *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Si f est continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et telle que $f' \in L^1(\mathbb{R})$, alors pour tout $\xi \in \mathbb{R}$*

$$\mathcal{F}(f')(\xi) = 2i\pi\xi\mathcal{F}(\xi).$$

Si de plus f est de classe $\mathcal{C}^m$ par morceaux où $m \in \mathbb{N}^*$ et telle que les dérivées $f^{(k)}$ jusqu'à l'ordre m inclus appartiennent à $L^1(\mathbb{R})$, alors pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ et pour tout $1 \leqslant k \leqslant m$, on a

$$\mathcal{F}\left(f^{(k)}\right)(\xi) = (2i\pi\xi)^k\mathcal{F}(f)(\xi).$$

Mise en garde : L'hypothèse *f continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux* est essentielle (voir exercice 8.2).

Le théorème 8.3 permet de préciser le comportement à l'infini de $\hat{f}$ dès que f est dérivable.

Corollaire 8.1 *Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Si f est de classe $\mathcal{C}^m$ par morceaux, alors pour tout $\xi \in \mathbb{R}^*$*

$$|\hat{f}(\xi)| \leqslant \frac{\|f^{(k)}\|_1}{(2\pi)^k|\xi|^k}.$$

Autrement dit, plus f est dérivable avec des dérivées intégrables, plus $\hat{f}$ tend vite vers 0 quand $|\xi|$ tend vers l'infini.

Dérivée d'une transformée de Fourier

Théorème 8.4 *Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Si $x \mapsto x^k f(x)$ est intégrable pour tout $0 \leqslant k \leqslant m$, alors $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^m$ et on a pour tout $\xi \in \mathbb{R}$*

$$\frac{d^k}{d\xi^k}\hat{f}(\xi) = (-2i\pi)^k\mathcal{F}\left(x^k f(x)\right)(\xi), \quad \text{pour tout } 0 \leqslant k \leqslant m.$$

Corollaire 8.2 *Sous les hypothèses du théorème 8.4, on a*

$$\left\|\frac{d^m\hat{f}}{d\xi^m}\right\|_u = \sup_{\xi\in\mathbb{R}}\left|\frac{d^m\hat{f}(\xi)}{d\xi^m}\right| \leqslant \|(2\pi x)^m f\|_1.$$

Autrement dit, plus f décroît à l'infini, plus $\hat{f}$ est dérivable avec des dérivées uniformément bornées.

8.4 THÉORÈME D'INVERSION DE FOURIER ET CONSÉQUENCES

Nous venons de voir que beaucoup d'opérations se transposent agréablement par la transformation de Fourier. La formule d'inversion est d'autant plus utile et digne d'intérêt puisqu'elle permet de passer de $\hat{f}$ à f *sous certaines conditions sur $\hat{f}$.*

Théorème 8.5 (Théorème d'inversion de Fourier) *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Si $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{2i\pi x\xi}\,d\xi$$

appartient à $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ et $f(x) = \varphi(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

Remarque 8.2 *A posteriori*, on voit que les hypothèses du théorème d'inversion de Fourier ne peuvent être remplies que si f est égale presque partout à une fonction continue tendant vers 0 à l'infini. Cela écarte malheureusement des fonctions d'un usage tout à fait courant en mathématiques comme en physique.

La nécessité de sortir du cadre des fonctions intégrables est apparue très tôt. Les grandes étapes en sont la définition de la transformée de Fourier des fonctions de carré intégrable par Plancherel (voir chapitre 9), et l'extension par L. Schwartz aux distributions tempérées (voir par exemple [39] ou [44]).

Le théorème d'inversion de Fourier est souvent utilisé sous l'une des versions suivantes.

Corollaire 8.3 *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$\mathcal{F}\left(\mathcal{F}(f)\right)(x) = f(-x).$$

Autrement dit, $\mathcal{F}\left(\mathcal{F}(f)\right) = \check{f}$-p.p.

Corollaire 8.4 *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Si f est continue en un point x_0, alors*

$$f(x_0) = \bar{\mathcal{F}}\big(\mathcal{F}(f)\big)(x_0).$$

Corollaire 8.5 *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Si f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$*

$$\bar{\mathcal{F}}\big(\mathcal{F}(f)\big)(x) = \frac{1}{2}\left(f(x^+) + f(x^-)\right).$$

Terminons ce paragraphe par ce qu'on appelle le théorème d'unicité.

Théorème 8.6 *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} = 0$, alors $f = 0$ p.p.. En d'autres termes, $\mathcal{F}$ est* injective *de $L^1(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.*

On montrera dans l'exercice 8.14 que $\mathcal{F}$ n'est pas surjective de $L^1(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

EXERCICES

Exercice 8.1

Soit $a \in]0, +\infty[$. On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_a(x) = e^{-ax}\mathbb{I}_{]0,+\infty[}(x)$$

et

$$\varphi_k(x) = \frac{x^k}{k!}f_a(x),$$

pour $k \in \mathbb{N}$.

1°) Calculer $\mathcal{F}(f_a)$ et en déduire $\mathcal{F}(\varphi_k)$, $\mathcal{F}(\check{f}_a)$ et $\mathcal{F}(\check{\varphi}_k)$.

2°) Soit la fonction g_a définie par $g_a(x) = f_a(x) + f_a(-x)$. Déterminer $\mathcal{F}(g_a)$ et en déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\omega x)}{1+x^2}\,dx$$

où $\omega \in \mathbb{R}$.

3°) Soit la fonction h_a définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h_a(x) = f_a(x) - f_a(-x).$$

Déterminer $\mathcal{F}(h_a)$.

Solution

1°) Comme $f_a \in L^1(\mathbb{R})$, on a pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(f_a)(\xi) = \int_0^{+\infty} e^{-ax}e^{-2i\pi\xi x}\,dx = \frac{1}{a+2i\pi\xi}.$$

D'autre part, il est clair que $\varphi_k \in L^1(\mathbb{R})$ pour tout entier naturel k, donc on peut appliquer le théorème 8.4 et on a

$$\mathcal{F}(\varphi_k)(\xi) = \frac{1}{(-2i\pi)^k}\frac{d^k}{d\xi^k}\hat{f}_a(\xi),$$

d'où

$$\mathcal{F}(\varphi_k)(\xi) = \frac{1}{(a+2i\pi\xi)^{k+1}}.$$

De même

$$\mathcal{F}(\check{f}_a)(\xi) = \mathcal{F}(f_a)(-\xi) = \frac{1}{a-2i\pi\xi}$$

et

$$\mathcal{F}(\check{\varphi}_k)(\xi) = \frac{1}{(a-2i\pi\xi)^{k+1}}.$$

2°) On a, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(g_a)(\xi) = \mathcal{F}(f_a)(\xi) + \mathcal{F}(\check{f}_a)(-\xi) = \frac{2a}{a^2+4\pi^2\xi^2}.$$

Comme $\mathcal{F}(g_a) \in L^1(\mathbb{R})$ et que g_a est continue, on a d'après le théorème d'inversion de Fourier (corollaire 8.4)

$$\bar{\mathcal{F}}\big(\mathcal{F}(g_a)\big)(x) = e^{-a|x|} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Par ailleurs $\mathcal{F}(g_a)$ est paire, donc

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{F}}\big(\mathcal{F}(g_a)\big)(x) &= 2\int_0^{+\infty} \mathcal{F}(g_a)(\xi)\cos(2\pi\xi x)\,d\xi \\ &= 2\int_0^{+\infty} \frac{2a}{a^2+4\pi^2\xi^2}\cos(2\pi\xi x)\,d\xi.\end{aligned}$$

Soit

$$4a\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2\pi\xi x)}{a^2+4\pi^2\xi^2}\,d\xi = e^{-a|x|}.$$

En choisissant $a = 2\pi$ et en posant $\omega = 2\pi x$ on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\omega\xi)}{1+\xi^2}\,d\xi = \frac{\pi}{2}e^{-|\omega|}.$$

3°) On a, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(h_a)(\xi) = \mathcal{F}(f_a)(\xi) - \mathcal{F}(\check{f}_a)(\xi) = \frac{-4i\pi\xi}{a^2+4\pi^2\xi^2}.$$

Remarquons que $\mathcal{F}(h_a)$ n'appartient pas à $L^1(\mathbb{R})$ voir exercice 9.1.

Exercice 8.2

Le théorème 8.3 est-il applicable à la fonction $f = \mathbb{I}_{[-1,1]}$?

Solution

La fonction $f = \mathbb{I}_{[-1,1]}$ est continue et dérivable sauf aux points 1 et -1 ; en outre, $f' = 0$ p.p. donc $\widehat{f'}(\xi) = 0$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. Or

$$2i\pi\xi\hat{f}(\xi) = 2i\sin(2\pi\xi)\,.$$

Ainsi, $\widehat{f'}(\xi) \neq 2i\pi\xi\hat{f}(\xi)$. Donc le théorème 8.3 n'est pas applicable à f.

Exercice 8.3

Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et α un réel non nul donné.

1°) Montrer que la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(\xi) = \hat{f}(\xi)\cos(2\pi\alpha\xi)$ est la transformée de Fourier d'une fonction de $L^1(\mathbb{R})$ qu'on exprimera en fonction de f et α.

2°) Montrer que la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi(\xi) = \hat{f}(\xi)\sin(2\pi\alpha\xi)$ est la transformée de Fourier d'une fonction de $L^1(\mathbb{R})$ qu'on exprimera en fonction de f et α.

Solution

Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a, d'après la proposition 8.1,

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi)\cos 2\pi\alpha\xi &= \frac{1}{2}\left(\hat{f}(\xi)e^{2i\pi\alpha\xi} + \hat{f}(\xi)e^{-2i\pi\alpha\xi}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\mathcal{F}(\tau_{-\alpha}f)(\xi) + \mathcal{F}(\tau_{\alpha}f)(\xi)\right)\\ &= \mathcal{F}\left(\frac{1}{2}(\tau_{-\alpha}f + \tau_{\alpha}f)\right)(\xi)\,,\end{aligned}$$

ainsi φ est la transformée de Fourier de la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{2}\left(f(x+\alpha) + f(x-\alpha)\right).$$

De même ψ est la transformée de Fourier de la fonction

$$x \mapsto -\frac{i}{2}\left(f(x+\alpha) - f(x-\alpha)\right).$$

Exercice 8.4

1°) Soit $a > 0$ et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-ax^2}$.

1.a Vérifier que f est solution de l'équation différentielle

$$f' + 2axf = 0\,. \qquad (E)$$

1.b En appliquant la transformée de Fourier à (E), montrer que $\hat{f}$ est solution d'une équation différentielle $(\hat{E})$ du premier ordre qu'on déterminera.

1.c Résoudre $(\hat{E})$ et déterminer $\hat{f}$.

2°) Déduire de ce qui précède que les fonctions $x \mapsto e^{-\pi x^2}$ et $x \mapsto \pi x e^{-\pi x^2}$ sont des vecteurs propres de l'opérateur linéaire $\mathcal{F}$.

Solution

1°) 1.a Il est évident que f vérifie (E).

1.b Comme $x \mapsto xf(x)$ — qu'on notera désormais xf — est aussi dans $L^1(\mathbb{R})$, on a $\mathcal{F}\left(f' + 2axf\right) = 0$. On déduit de la linéarité de la transformée de Fourier et des théorèmes 8.3 et 8.4 que $\hat{f}$ est solution de l'équation différentielle $(\hat{E})$

$$2\pi^2\xi\hat{f} + a\frac{d}{d\xi}\hat{f} = 0\,.$$

1.c Il est clair que $\hat{f}(\xi) = Ce^{\frac{-\pi^2\xi^2}{a}}$ et $C = \hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

Ainsi, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$

$$\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{-\pi^2\xi^2}{a}}\,.$$

2°) Si $a = \pi$, on a pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(\xi) = f(\xi)$. D'autre part, la fonction $x \mapsto \pi x e^{-\pi x^2} \in L^1(\mathbb{R})$ et on a de plus $\pi x e^{-\pi x^2} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(e^{-\pi x^2}\right)$. D'où, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a grâce au théorème 8.3,

$$\mathcal{F}(\pi x e^{-\pi x^2})(\xi) = -\frac{1}{2}\mathcal{F}\left(\frac{d}{dx}\left(e^{-\pi x^2}\right)\right)(\xi) = -\frac{1}{2}2i\pi\xi\mathcal{F}\left(e^{-\pi x^2}\right)(\xi) = -i\pi\xi e^{-\pi\xi^2}\,.$$

On remarque que les fonctions $x \mapsto e^{-\pi x^2}$ et $x \mapsto \pi x e^{-\pi x^2}$ sont des vecteurs propres de $\mathcal{F}$ associés respectivement aux valeurs propres 1 et $-i$.

Exercice 8.5

On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}\,,\quad g(x) = \frac{1}{2-2x+x^2} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}\,.$$

Sachant que $\hat{f}(\xi) = \pi e^{-2\pi|\xi|}$, déterminer $\hat{g}$ et $\hat{h}$.

Solution

– On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$ soit $g = \tau_1 f$. Donc, en appliquant la proposition 8.1, on a, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{x^2-2x+2}\right)(\xi) = e^{-2i\pi\xi}\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)(\xi) = e^{-2i\pi\xi}\pi e^{-2\pi|\xi|}\,.$$

– D'autre part, en remarquant que $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$ et en utilisant le théorème 8.4, on a alors

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(\frac{x}{(1+x^2)^2}\right)(\xi) &= -\frac{1}{2}\mathcal{F}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\right)(\xi)\\ &= -\frac{1}{2}2i\pi\xi\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)(\xi)\\ &= -i\pi^2\xi e^{-2\pi|\xi|}\,.\end{aligned}$$

Exercice 8.6

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que la fonction $\xi \mapsto \xi\hat{f}(\xi) \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que f coïncide presque partout avec une fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ qu'on déterminera.

Solution

– Montrons que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. En effet, comme $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}$ est bornée et $\|\hat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1$. D'où

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|\,d\xi &= \int_{\{|\xi|<1\}} |\hat{f}(\xi)|\,d\xi + \int_{\{|\xi|\geqslant 1\}} |\hat{f}(\xi)|\,d\xi \\ &\leqslant 2\|\hat{f}\|_\infty + \int_{\{|\xi|\geqslant 1\}} |\xi\hat{f}(\xi)|\,d\xi \\ &\leqslant 2\|f\|_1 + \|\xi\hat{f}\|_1 \quad \text{car par hypothèse } \xi \mapsto \xi\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}).\end{aligned}$$

– Puisque $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, le théorème de continuité sous le signe intégral (théorème 3.9) entraîne que la fonction g, qui à tout $x \in \mathbb{R}$ associe $g(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi x\xi}\hat{f}(\xi)\,d\xi$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$. Donc, d'après le théorème d'inversion de Fourier (théorème 8.5), g est égale presque partout à f sur $\mathbb{R}$. D'autre part, la fonction $\xi \mapsto \xi\hat{f}(\xi) \in L^1(\mathbb{R})$ par hypothèse, donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après le théorème de dérivation sous le signe intégral (théorème 3.10) et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = 2i\pi \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi x\xi}\xi\hat{f}(\xi)\,d\xi .$$

En outre, d'après le théorème de continuité sous le signe intégral (théorème 3.9), g' est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et coïncide presque partout avec f.

Exercice 8.7

En utilisant la transformée de Fourier, montrer qu'il n'existe aucun élément $g \in L^1(\mathbb{R})$ tel que, pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g * f = f$; puis résoudre dans $L^1(\mathbb{R})$ l'équation de convolution suivante

$$f * f = f . \qquad (E)$$

Solution

– S'il existait $g \in L^1(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$,

$$g * f = f ,$$

on aurait d'après le théorème 8.2 1°), pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\hat{g}\hat{f} = \hat{f} ,$$

donc $\hat{g} = 1$; ce qui est absurde puisque $\hat{g}$ doit tendre vers 0 quand $|\xi| \to +\infty$ d'après le théorème de Riemann-Lebesgue (théorème 8.1 (iii)).

– En appliquant la transformée de Fourier à (E), on obtient $(\hat{f})^2 = \hat{f}$. Donc

$$(\hat{f})^2 = \hat{f} \Leftrightarrow \hat{f}(\xi)(\hat{f}(\xi) - 1) = 0 \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R} .$$

Or, $\hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et les seules fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\hat{f}(\xi)(\hat{f}(\xi) - 1) = 0$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, sont la fonction constante égale à 0 et la fonction constante égale à 1. Mais la solution $\hat{f} = 1$ est impossible car la transformée de Fourier d'une fonction intégrable doit tendre vers 0 à l'infini d'après le théorème de Riemann-Lebesgue (théorème 8.1 (iii)). Donc $f = 0$ p.p.

Exercice 8.8

Soit $(a, b) \in (]0, +\infty[)^2$. On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_a(x) = \frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2 + x^2} , \quad g_a(x) = e^{-a|x|} , \quad \text{et} \quad h_a(x) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2a^2}} .$$

En utilisant la transformation de Fourier, déterminer $f_a * f_b$, $g_a * g_b$ et $h_a * h_b$.

Solution

Tout d'abord, pour tout $a > 0$, f_a, g_a et h_a sont dans $L^1(\mathbb{R})$, donc $f_a * f_b$, $g_a * g_b$ et $h_a * h_b$ sont aussi dans $L^1(\mathbb{R})$ d'après le théorème 7.1 et on peut appliquer le théorème 8.2 1°).

– Calcul de $f_a * f_b$. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f_a * f_b)(\xi) &= \mathcal{F}(f_a)(\xi)\mathcal{F}(f_b)(\xi) \\ &= e^{-2\pi a|\xi|}e^{-2\pi b|\xi|} \\ &= e^{-2\pi(a+b)|\xi|} \\ &= \mathcal{F}\left(\frac{1}{\pi}\frac{a+b}{x^2 + (a+b)^2}\right)(\xi) \\ &= \mathcal{F}(f_{a+b})(\xi) .\end{aligned}$$

Comme $\mathcal{F}$ est injective (théorème 8.6), on obtient

$$f_a * f_b = f_{a+b} .$$

– Calcul de $g_a * g_b$. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(g_a * g_b)(\xi) &= \mathcal{F}(g_a)(\xi)\mathcal{F}(g_b)(\xi) \\ &= \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2\xi^2}\frac{2b}{b^2 + 4\pi^2\xi^2} \\ &= 4ab\frac{1}{(a^2 + 4\pi^2\xi^2)(b^2 + 4\pi^2\xi^2)} .\end{aligned}$$

Si $b \neq a$, on a alors

$$\begin{aligned}4ab\frac{1}{(a^2+4\pi^2\xi^2)(b^2+4\pi^2\xi^2)} &= \frac{4ab}{b^2-a^2}\left(\frac{1}{a^2+4\pi^2\xi^2}-\frac{1}{b^2+4\pi^2\xi^2}\right)\\ &= \frac{2}{b^2-a^2}\left(b\frac{2a}{a^2+4\pi^2\xi^2}-a\frac{2b}{b^2+4\pi^2\xi^2}\right)\\ &= \frac{2}{b^2-a^2}\left(b\mathcal{F}(g_a)(\xi)-a\mathcal{F}(g_b)(\xi)\right)\\ &= \mathcal{F}\left(\frac{2}{b^2-a^2}(bg_a-ag_b)\right)(\xi).\end{aligned}$$

D'où

$$\mathcal{F}(g_a * g_b) = \mathcal{F}\left(\frac{2}{b^2-a^2}(bg_a-ag_b)\right) ptf$$

Comme $\mathcal{F}$ est injective (théorème 8.6), on obtient

$$g_a * g_b = \frac{2}{b^2-a^2}(bg_a-ag_b).$$

Le cas $a = b$ est laissé au lecteur (voir aussi exercice 7.3).

- Calcul de $h_a * h_b$. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(h_a * h_b)(\xi) &= \mathcal{F}(h_a)(\xi)\mathcal{F}(h_b)(\xi)\\ &= e^{-2a^2\pi^2\xi^2}e^{-2b^2\pi^2\xi^2}\\ &= e^{-2(\sqrt{a^2+b^2})^2\pi^2\xi^2}\\ &= \mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{a^2+b^2}}\exp\left(-\frac{x^2}{2(\sqrt{a^2+b^2})^2}\right)\right)\\ &= \mathcal{F}\left(h_{\sqrt{a^2+b^2}}\right)(\xi).\end{aligned}$$

Comme $\mathcal{F}$ est injective (théorème 8.6), on obtient

$$h_a * h_b = h_{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Exercice 8.9

Montrer que si $\beta \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, l'équation intégrale

$$u(x) = e^{-|x|} + \beta\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-s|}u(s)\,ds \qquad (E)$$

a une solution intégrable et une seule que l'on déterminera.

Solution

En notant $f(x) = e^{-|x|}$, l'équation de convolution (E) s'écrit

$$u = f + \beta f * u.$$

Unicité : Supposons que (E) admette deux solutions intégrables u_1 et u_2, on aurait alors

$$u_1 - u_2 = \beta f * (u_1 - u_2).$$

Posons $v = u_1 - u_2$. La fonction v est intégrable comme différence de deux fonctions intégrables, et donc $f * v$ est intégrable (théorème 7.1). Ainsi, on peut appliquer le théorème 8.2 1°) pour obtenir

$$\hat{v} = \beta\hat{f}\hat{v}.$$

D'où, si $\hat{v} \neq 0, \hat{f} = \frac{1}{\beta}$ ce qui est absurde puisque $\hat{f}(\xi) = \frac{2}{1+4\pi^2\xi^2}$ (dans ce raisonnement, on n'a pas besoin de connaître la forme explicite de $\hat{f}$, le théorème de Riemann-Lebesgue (théorème 8.1) permet de conclure). Par conséquent, v est presque partout nulle et donc (E) admet au plus une solution intégrable.

Existence : En appliquant la transformée de Fourier à (E), on obtient

$$\begin{aligned}(\hat{E}) &\Leftrightarrow \hat{u} = \hat{f} + \beta\hat{f}\hat{u}\\ (\hat{E}) &\Leftrightarrow \hat{u}(1-\beta\hat{f}) = \hat{f}\\ (\hat{E}) &\Leftrightarrow \hat{u} = \frac{\hat{f}}{1-\beta\hat{f}} \quad \text{car } \beta\hat{f} \neq 1.\end{aligned}$$

D'où

$$\hat{u}(\xi) = \frac{2}{(1-2\beta)+4\pi^2\xi^2}.$$

- Si $2\beta \geqslant 1$ $\left(\Leftrightarrow \beta \geqslant \frac{1}{2}\right)$, la fonction

$$\xi \mapsto \frac{2}{(1-2\beta)+4\pi^2\xi^2}$$

n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ donc ne peut être la transformée de Fourier d'une fonction intégrable, par conséquent (E) n'a pas de solution.

- Si $2\beta < 1$, on remarque que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\hat{u}(\xi) &= \frac{2}{(1-2\beta)+4\pi^2\xi^2}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-2\beta}}\frac{2\sqrt{1-2\beta}}{(\sqrt{1-2\beta})^2+4\pi^2\xi^2}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-2\beta}}\mathcal{F}(e^{-\sqrt{1-2\beta}|x|})(\xi).\end{aligned}$$

La transformée de Fourier est injective sur $L^1(\mathbb{R})$ (théorème 8.6), donc

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2\beta}}e^{-\sqrt{1-2\beta}|x|}.$$

Exercice 8.10 (Équation de la chaleur)

Soit une tige homogène « très mince » et de « longueur infinie », isolée de l'extérieur. On se donne à l'instant $t = 0$ la répartition $u_0(x) = u(0,x)$ de la température en chaque point de la tige ($x \in \mathbb{R}$) et on cherche à déterminer son évolution $u(t,x)$ sachant qu'elle vérifie ce qu'on appelle *l'équation de la chaleur*

$$(C) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & (t,x) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

On suppose que $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$ et on cherche une fonction u qui à tout $(t,x) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ associe le réel $u(t,x)$, appartenant à $\mathcal{C}^{1,2}(]0,+\infty[\times\mathbb{R})$ (*i.e.* de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à la variable temps t et de classe $\mathcal{C}^2$ par rapport à la variable espace x).

$u(0,x) = u_0(x)$ signifie que $\lim\limits_{t\to 0} u(t,x) = u_0(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

1°) On suppose que pour $t > 0$ fixé, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t,x)|\,dx < +\infty, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right| dx < +\infty,$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)\right| dx < +\infty,$$

de sorte que les fonctions $x \mapsto u(t,x)$, $x \mapsto \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)$, et $x \mapsto \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$ ont pour chaque valeur de $t > 0$ fixée une transformée de Fourier par rapport à la variable d'espace x.

On suppose de plus que pour tout $t > 0$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) e^{-2i\pi x\xi}\,dx = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{\mathbb{R}} u(t,x)e^{-2i\pi x\xi}\,dx\right).$$

On pose pour $t \geqslant 0$ fixé

$$\hat{u}(t,\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(t,x)e^{-2i\pi x\xi}\,dx.$$

1.a Montrer que $\hat{u}$ est solution d'une équation différentielle du 1^er ordre en t qu'on résoudra.

1.b En déduire la solution u.

2°) Vérifier que la solution trouvée u satisfait toutes les hypothèses de la première question.

Solution

1°) 1.a En appliquant la transformée de Fourier par rapport à la variable d'espace x, on obtient, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) &= \mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial t} e^{-2i\pi x\xi}\,dx - (2i\pi\xi)^2\hat{u} \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{\mathbb{R}} u(t,x)e^{-2i\pi x\xi}\,dx\right) + 4\pi^2\xi^2\hat{u} \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\hat{u} + 4\pi^2\xi^2\hat{u}.\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ fixé, $\hat{u}$ est solution de l'équation différentielle par rapport au temps t suivante

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + 4\pi^2\xi^2\hat{u} = 0.$$

Par ailleurs $\hat{u}(0,\xi) = \hat{u_0}(\xi)$, d'où

$$\hat{u}(t,\xi) = \hat{u}_0(\xi)e^{-4\pi^2\xi^2 t}.$$

1.b On sait que pour tout $t > 0$ fixé,

$$e^{-4\pi^2\xi^2 t} = \mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)\right)(\xi)$$

et

$$\xi \mapsto \hat{u}_0(\xi)e^{-4\pi^2\xi^2 t} \in L^1(\mathbb{R}),$$

donc

$$\hat{u}(t,\xi) = \mathcal{F}\left(u_0(x) * \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)\right).$$

Comme $\mathcal{F}$ est injective sur $L^1(\mathbb{R})$ (théorème 8.6),

$$\begin{aligned}u(t,x) &= u_0(x) * \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right)u_0(y)\,dy.\end{aligned}$$

2°) Pour tout $t > 0$, on considère la fonction g_t définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}},$$

appelé *noyau de Gauss* ou *noyau de la chaleur*.

Remarquons que $(g_t)_{t>0}$ est une approximation de l'unité, il suffit de remplacer n par $\frac{1}{t}$ dans l'exercice 7.9. Donc la fonction $u(t,\cdot) = g_t * u_0$ est intégrable comme convolée de deux fonctions intégrables et on a

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leqslant \|g_t\|_{L^1(\mathbb{R})}\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R})} = \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

En outre, en vertu du théorème 7.5, on a

$$\lim_{t\to 0} \|u(t,\cdot) - u_0(\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} = 0.$$

D'autre part, comme g_t est indéfiniment dérivable et que toutes ses fonctions dérivées sont intégrables et bornées, on peut appliquer les résultats de l'exercice 4.29. Ainsi, pour tout $t > 0$ fixé, on a

- la fonction $u(t,\cdot)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $\frac{\partial u}{\partial x}(t,\cdot) = g_t' * u_0$. Ainsi la fonction $\frac{\partial u}{\partial x}(t,\cdot)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{L^1(\mathbb{R})} \leqslant \|g_t'\|_{L^1(\mathbb{R})}\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R})};$$

- la fonction $\frac{\partial u}{\partial x}(t,\cdot)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,\cdot) = g_t'' * u_0$. Ainsi, la fonction $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,\cdot)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|_{L^1(\mathbb{R})} \leqslant \|g_t''\|_{L^1(\mathbb{R})}\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R})};$$

- enfin, puisque $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, on a alors

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot)\right\|_{L^1(\mathbb{R})} = \left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Remarque 8.3 On considère l'équation de la chaleur avec second membre h (c'est-à-dire qu'il y a une source de chaleur)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + h(t,x) & (t,x) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Si la fonction $x \mapsto h(t,x) \in L^1(\mathbb{R})$ pour tout $t > 0$, on procède de la même façon que précédemment on montre que l'équation de la chaleur avec second membre a pour solution

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) u_0(y)\,dy + \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{s}}\left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4s}\right) h(t-s,y)\,dy\right) ds.$$

Exercice 8.11 (Équation des cordes vibrantes)

On considère *l'équation des cordes vibrantes*

$$(C.V.)\quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & (t,x) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}, \\ u(0,x) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

On suppose que $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ est telle que $f', f'' \in L^1(\mathbb{R})$ et que $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ est telle que $g' \in L^1(\mathbb{R})$.
Déterminer $u \in \mathcal{C}^2(]0,+\infty[\times\mathbb{R})$ solution de $(C.V.)$ telle que pour chaque $t > 0$ fixé, les fonctions

$$x \mapsto u(t,x),\quad x \mapsto \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\quad x \mapsto \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x)\quad x \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\quad x \mapsto \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)$$

appartiennent à $L^1(\mathbb{R})$ et que

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\int_{\mathbb{R}} u(t,x)e^{-2i\pi x\xi}\,dx\right) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x)e^{-2i\pi x\xi}\,dx.$$

Solution

En appliquant la transformée de Fourier par rapport à la variable d'espace x, on obtient

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right](\xi) = \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} - a^2(2i\pi\xi)^2\hat{u} = 0,$$

soit

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} + 4a^2\pi^2\xi^2\hat{u} = 0.$$

Ainsi, on obtient une équation différentielle du second ordre en temps, qui a pour solution générale

$$\hat{u}(t,\xi) = A(\xi)\cos(2a\pi\xi t) + B(\xi)\sin(2a\pi\xi t).$$

En tenant compte des conditions initiales

$$\hat{u}(t,\xi) = \hat{f}(\xi)\cos(2a\pi\xi t) + \frac{\hat{g}(\xi)}{2a\pi\xi}\sin(2a\pi\xi t).$$

Par ailleurs, on a vu dans l'exercice 8.3 que pour tout réel ξ,

$$\cos(2a\pi\xi t)\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2}\left(\hat{f}(\xi)e^{2ia\pi\xi t} + \hat{f}(\xi)e^{-2ia\pi\xi t}\right) = \frac{1}{2}\mathcal{F}\big(f(x+at) + f(x-at)\big)(\xi)$$

et, d'après l'exemple (i) du cours (page 253) et le théorème 8.2, on a

$$\begin{aligned}\frac{\hat{g}(\xi)}{2a\pi\xi}\sin(2a\pi\xi t) &= \frac{1}{2a}\hat{g}(\xi)\frac{\sin(2at\pi\xi)}{\pi\xi}\\ &= \frac{1}{2a}\hat{g}(\xi)\mathcal{F}\left(\mathbb{I}_{[-at,at]}\right)(\xi)\\ &= \frac{1}{2a}\mathcal{F}\left(g * \mathbb{I}_{[-at,at]}\right)(\xi).\end{aligned}$$

En outre, pour tout réel x, on a

$$\begin{aligned}g * \mathbb{I}_{[-at,at]}(x) &= \int_{\mathbb{R}} g(x-y)\mathbb{I}_{[-at,at]}(y)\,dy\\ &= \int_{-at}^{at} g(x-y)\,dy\\ &= \int_{x-at}^{x+at} g(s)\,ds.\end{aligned}$$

D'où

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\big(f(x-at)+f(x+at)\big) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(s)\,ds.$$

On vérifie facilement que u satisfait toutes les hypothèses ci-dessus.

Exercice 8.12 (Problème de Dirichlet dans le demi-plan supérieur)

On appelle *problème de Dirichlet* dans le demi-plan supérieur, le problème suivant.

Déterminer $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}\times]0,+\infty[)$ vérifiant :

$$(D)\quad \begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & (x,y) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[,\\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R},\\ \sup\limits_{y\geqslant 0}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x,y)|\,dx = 0, & \end{cases}$$

où $f \in L^1(\mathbb{R})$ est une fonction donnée. La condition $u(x,0) = f(x)$ signifie que $\lim\limits_{y\to 0} u(x,y) = f(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

On suppose que pour tout $y > 0$ les fonctions $x \mapsto u(x,y)$, $x \mapsto \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y)$, $x \mapsto \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)$, $x \mapsto \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)$ soient intégrables sur $\mathbb{R}$.

Solution

On pose, pour $y \in]0,+\infty[$,

$$\hat{u}(\xi,y) = \int_{\mathbb{R}} u(x,y)e^{-2i\pi x\xi}\,dx,$$

En appliquant la transformation de Fourier par rapport à la variable x à (D), on obtient

$$(E)\quad \begin{cases}-4\pi^2\xi^2\hat{u}(\xi,y) + \dfrac{\partial^2\hat{u}}{\partial y^2}(\xi,y) = 0,\\ \hat{u}(\xi,0) = \hat{f}(\xi)\,.\,|\hat{u}(\xi,y)| \leqslant \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |u(x,y)e^{-2i\pi x\xi}|\,dx < +\infty\end{cases}$$

Pour ξ fixé, l'équation différentielle en y

$$-4\pi^2\xi^2\hat{u}(\xi,y) + \frac{\partial^2\hat{u}}{\partial y^2}(\xi,y) = 0$$

a pour solution générale

$$\hat{u}(\xi,y) = A(\xi)e^{-2\pi\xi y} + B(\xi)e^{2\pi\xi y}.$$

En tenant compte du fait que

$$\hat{u}(\xi,0) = \hat{f}(\xi),$$

on obtient alors $A(\xi) + B(\xi) = \hat{f}(\xi)$.

De plus, si $\xi > 0$,

$$\lim_{y\to+\infty} e^{-2\pi\xi y} = 0 \quad\text{et}\quad \lim_{y\to+\infty} e^{2\pi\xi y} = +\infty,$$

donc la condition $\sup\limits_{y\geqslant 0}|\hat{u}(\xi,y)| < +\infty$ implique $B(\xi) = 0$ si $\xi > 0$.

De même, $A(\xi) = 0$ si $\xi < 0$.

Ainsi, le problème (E) a pour solution

$$\hat{u}(\xi,y) = \hat{f}(\xi)\mathbb{I}_{[0,+\infty[}(\xi)e^{-2\pi\xi y} + \hat{f}(\xi)\mathbb{I}_{]-\infty,0]}(\xi)e^{2\pi\xi y} = \hat{f}(\xi)e^{-2\pi|\xi|y}.$$

Mais pour tout $y > 0$ fixé, la fonction $\xi \mapsto \hat{u}(\xi,y) \in L^1(\mathbb{R})$. Donc, le théorème d'inversion de Fourier (théorème 8.5) est applicable et on a

$$u(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\xi,y)e^{2i\pi\xi x}\,d\xi.$$

Or, on sait d'après les exemples usuels du chapitre 8 exemple (ix) (page 253) que $\mathcal{F}\left(\dfrac{1}{\pi}\dfrac{y}{x^2+y^2}\right) = e^{-2\pi|\xi|y}$, d'où

$$\hat{u}(\xi,y) = \mathcal{F}(f * g_y) \quad\text{où}\quad g_y(x) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Comme $\mathcal{F}$ est injective sur $L^1(\mathbb{R})$, on alors

$$\begin{aligned}u(x,y) &= (f * g_y)(x)\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\frac{y}{\pi\left(y^2+(x-s)^2\right)}\,ds\end{aligned}$$

Par ailleurs, $(g_y)_{y>0}$ est une unité approchée (voir exercice 7.9), on en déduit que u vérifie toutes les hypothèses ci-dessus.

Exercice 8.13

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Établir que pour tout réel ξ non nul,

$$2\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \left(f(x) - f\left(x - \frac{1}{2\xi}\right)\right) e^{-2i\pi x\xi}\, dx.$$

En déduire que $\lim_{\xi \to \pm\infty} \hat{f}(\xi) = 0$. On utilisera le fait que pour tout $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ où $p \in [1, +\infty[$, $\lim_{\|a\| \to 0} \|g - \tau_a g\|_p = 0$ (voir exercice 6.4).

Solution

Établissons que pour $\xi \in \mathbb{R}_*^*$,

$$-\int_{\mathbb{R}} f\left(x - \frac{1}{2\xi}\right) e^{-2i\pi\xi x}\, dx = \hat{f}(\xi).$$

En posant $y = x - \dfrac{1}{2\xi}$, on a $x = y + \dfrac{1}{2\xi}$. Il s'ensuit que

$$e^{-2i\pi\xi x} = e^{-2i\pi\xi\left(y + \frac{1}{2\xi}\right)} = e^{-2i\pi\xi y} e^{-i\pi} = -e^{-2i\pi\xi y},$$

d'où

$$-\int_{\mathbb{R}} f\left(x - \frac{1}{2\xi}\right) e^{-2i\pi\xi x}\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2i\pi\xi y}\, dy = \hat{f}(\xi).$$

Ainsi,

$$2\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \left(f(x) - f\left(x - \frac{1}{2\xi}\right)\right) e^{-2i\pi\xi x}\, dx.$$

Par ailleurs,

$$2|\hat{f}(\xi)| \leqslant \int_{\mathbb{R}} \left|f(x) - f\left(x - \frac{1}{2\xi}\right)\right| dx = \|f - \tau_{\frac{1}{2\xi}} f\|_1.$$

Or, $\lim_{|\xi| \to +\infty} \|f - \tau_{\frac{1}{2\xi}} f\|_1 = 0$, d'après l'exercice 6.4 ; d'où

$$\lim_{|\xi| \to +\infty} \hat{f}(\xi) = 0.$$

Exercice 8.14

Dans cet exercice on va montrer que $\mathcal{F}\left(L^1(\mathbb{R})\right) \subsetneq \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et tendant vers 0 à l'infini. On suppose que g est impaire et que $\displaystyle\int_1^X \frac{g(x)}{x}\, dx$ tend vers $\pm\infty$ ou n'a pas de limite quand X tend vers $+\infty$.

On se propose de montrer qu'une telle fonction g n'est la transformée de Fourier d'aucune fonction intégrable sur $\mathbb{R}$.

1°) On suppose qu'il existe une fonction f intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que $\hat{f} = g$ et on pose $F(x) = -i\big(f(x) - f(-x)\big)$.

1.a Établir que $g(\xi) = \displaystyle\int_0^{+\infty} F(x) \sin(2\pi x\xi)\, dx$.

1.b En déduire que

$$\int_1^X \frac{g(x)}{x}\, dx = \int_1^X \left(\int_0^{+\infty} F(t) \frac{\sin(2\pi xt)}{x}\, dt\right) dx.$$

1.c En faisant tendre X vers $+\infty$, aboutir à une contradiction.

2°) Donner un exemple d'une telle fonction g.

3°) Déduire de ce qui précède que l'application linéaire $\mathcal{F}$ de $L^1(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ n'est pas surjective.

Solution

1°) Supposons qu'il existe $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $g(\xi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi x} f(x)\, dx$.

1.a La fonction g est impaire par hypothèse, donc pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$g(\xi) = -g(-\xi) = -\int_{\mathbb{R}} e^{+2i\pi\xi x} f(x)\, dx.$$

D'où

$$2g(\xi) = g(\xi) - g(-\xi) = -2i \int_{\mathbb{R}} \sin(2\pi x\xi) f(x)\, dx.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} g(\xi) &= -i \int_{-\infty}^{0} \sin(2\pi x\xi) f(x)\, dx - i \int_0^{+\infty} \sin(2\pi x\xi) f(x)\, dx \\ &= i \int_0^{+\infty} \sin(2\pi x\xi) f(-x)\, dx - i \int_0^{+\infty} \sin(2\pi x\xi) f(x)\, dx \\ &= \int_0^{+\infty} -i\big(f(x) - f(-x)\big) \sin(2\pi x\xi) f(x)\, dx \\ &= \int_0^{+\infty} F(x) \sin(2\pi x\xi)\, dx. \end{aligned}$$

1.b D'après 1.a

$$\int_1^X \frac{g(\xi)}{\xi}\, d\xi = \int_1^X \left(\int_0^{+\infty} F(x) \frac{\sin(2\pi\xi x)}{\xi}\, dx\right) d\xi.$$

1.c La fonction F est intégrable sur $\mathbb{R}$ car combinaison linéaire de fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction

$$(\xi, x) \mapsto \frac{F(x)\sin(2\pi\xi x)}{\xi}$$

est intégrable sur $[1, X] \times [0, +\infty[$. En effet

$$\int_1^X \left(\int_0^{+\infty} \left|\frac{F(x)\sin(2\pi\xi x)}{\xi}\right| dx\right) d\xi \leqslant \ln X \int_0^{+\infty} |F(x)|\, dx < +\infty .$$

Ainsi, en vertu du théorème de Fubini (théorème 5.2), on a

$$\begin{aligned}\int_1^X \frac{g(\xi)}{\xi}\, d\xi &= \int_0^{+\infty} F(x)\left(\int_1^X \frac{\sin(2\pi\xi x)}{\xi}\, d\xi\right) dx \\ &= \int_0^{+\infty} F(x)\left(\int_{2\pi x}^{2\pi xX} \frac{\sin u}{u}\, du\right) dx .\end{aligned}$$

Par ailleurs, on sait que l'intégrale *impropre* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, du$ converge (voir exercices 4.8 ou 5.9) ; donc il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\left|\int_a^b \frac{\sin u}{u}\, du\right| < C .$$

D'où

$$\left|F(x)\int_{2\pi x}^{2\pi xX} \frac{\sin u}{u}\, du\right| \leqslant C|F(x)| ;$$

en outre, pour presque tout $x \in [0, +\infty[$,

$$\lim_{X\to+\infty} F(x)\int_{2\pi x}^{2\pi xX} \frac{\sin u}{u}\, du = F(x)\int_{2\pi x}^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, du = h(x) .$$

Or la fonction $h \in L^1(0, +\infty)$; en effet

$$\int_0^{+\infty} |h(x)|\, dx \leqslant C\int_0^{+\infty} |F(x)|\, dx \leqslant 2C\int_0^{+\infty} |f(x)|\, dx \leqslant 2C\|f\|_1 .$$

Ainsi, le théorème de la convergence dominée (théorème 3.7) est applicable et on a

$$\lim_{X\to+\infty} \int_1^X \frac{g(\xi)}{\xi}\, d\xi = \int_0^{+\infty} h(x)\, dx .$$

Autrement dit, $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \int_1^X \frac{g(x)}{x}\, dx$ existe et est finie ; ce qui contredit l'hypothèse de départ $\displaystyle\int_1^X \frac{g(x)}{x}\, dx$ tend vers $\pm\infty$ ou n'a pas de limite quand X tend vers $+\infty$.

2°) La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}\ln(x^2+1)}$ vérifie toutes les conditions requises ci-dessus.

3°) On en déduit que l'application linéaire $\mathcal{F}$ de $L^1(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ n'est pas surjective.

Commentaire : Cette démonstration a l'avantage d'être élémentaire. Il y en a une autre qui repose sur le théorème de l'application ouverte de Banach, voir par exemple le livre de Wagschal [50, pp. 109–110].

Exercice 8.15 (Une démonstration du théorème d'inversion de Fourier)

On va démontrer dans cet exercice que si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ alors, presque partout,

$$f = \bar{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f)) .$$

On considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction h_n définie sur $\mathbb{R}$ par $h_n(x) = e^{\frac{-2\pi|x|}{n}}$. On sait que $h_n \in L^1(\mathbb{R})$ et a pour transformée de Fourier la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\hat{h}_n(\xi) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{n}{1+n^2\xi^2}$.

1°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$; établir que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)h_n(\xi)e^{2i\pi x\xi}\, d\xi = f * \hat{h}_n(x) .$$

2°) En appliquant le théorème de la convergence dominée (théorème 3.7), établir que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)h_n(\xi)e^{2ix\pi\xi}\, d\xi = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{2ix\pi\xi}\, d\xi .$$

3°) Montrer qu'il existe une sous-suite $(f * \hat{h}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ qui converge simplement vers f pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

4°) Déduire de ce qui précède que pour presque tout x appartenant à $\mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{2ix\pi\xi}\, d\xi = f(x) .$$

5°) Montrer que si f est continue en un point x_0 alors

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{2ix_0\pi\xi}\, d\xi = f(x_0) .$$

Solution

1°) Soit x un réel ; en appliquant le théorème de Fubini (théorème 5.2) et en remarquant que $\hat{h}_n$ est paire, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)h_n(\xi)e^{2i\pi\xi x}\, d\xi = \int_{\mathbb{R}} f(y)\hat{h}_n(x-y)\, dy .$$

2°) Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to+\infty} \hat{f}(\xi)h_n(\xi)e^{2ix\pi\xi} = \hat{f}(\xi)e^{2ix\pi\xi}$$

et

$$|\hat{f}(\xi)h_n(\xi)e^{2ix\pi\xi}| \leqslant |\hat{f}(\xi)| .$$

Comme par hypothèse, $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, le théorème de la convergence dominée (théorème 3.7) entraîne que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)h_n(\xi)e^{2ix\pi\xi}\, d\xi = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{2ix\pi\xi}\, d\xi .$$

3°) La suite $(\hat{h}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une approximation de l'unité d'après l'exercice 7.9, donc la suite $(f * \hat{h}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers f dans $L^1(\mathbb{R})$ d'après le théorème 7.5. Par conséquent, il existe une sous-suite $(f * \hat{h}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ qui converge simplement vers f presque partout, c'est-à-dire

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(y)\hat{h}_{n_k}(x-y)\,dy = f(x) \text{ p.p.}$$

4°) On déduit de 2°) et de 3°) que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\bar{\mathcal{F}}\mathcal{F}f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{2ix\pi\xi}\,d\xi = f(x)\,.$$

5°) Si f est continue en un point x_0, alors $f - \bar{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f))$ l'est aussi.
Donc si $\left(f - \bar{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f))\right)(x_0) \neq 0$, il existe un réel $r > 0$ tel que $f - \bar{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f))$ ne s'annule pas sur $]x_0 - r, x_0 + r[$. Ce qui contredit 4°) puisque $\lambda(]x_0 + r, x_0 + r[) = 2r > 0$.

Commentaire : Notons tout d'abord que la fonction φ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{2i\pi x\xi}\,d\xi$$

peut s'écrire sous la forme

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-2i\pi y\xi}\,dy\right) e^{2i\pi x\xi}\,d\xi\,.$$

Mais il est impossible d'appliquer le théorème de Fubini (théorème 5.2), car la fonction définie presque partout sur $\mathbb{R}^2$ par $(y,\xi) \mapsto e^{-2i\pi(y-x)\xi}f(y)$ n'appartient pas à $L^1(\mathbb{R}^2)$. Sinon on obtient

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi(y-x)\xi}\,d\xi\right)dy\,.$$

Or l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi(y-x)\xi}\,d\xi$ n'a pas de sens. Ainsi, même sous l'hypothèse forte de l'appartenance de $\hat{f}$ à l'espace $L^1(\mathbb{R})$, on est obligé d'utiliser une voie détournée pour démontrer la formule d'inversion de Fourier, à savoir l'utilisation d'une approximation de l'unité.

Exercice 8.16

> Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que si $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ et $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$. On pourra commencer par montrer que si $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ alors $f \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Solution

- Puisque $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors d'après le théorème d'inversion de Fourier $f = \bar{\mathcal{F}}(\hat{f})$ p.p. On en déduit que $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $\|f\|_\infty \leqslant \|\hat{f}\|_1$.
- Ensuite, montrer que $f \in L^2(\mathbb{R})$ est équivalent à montrer que $|f|^2 \in L^1(\mathbb{R})$. Or,

$$|f|^2 = f\bar{f} \leqslant |f|\|f\|_\infty \leqslant |f|\|\hat{f}\|_1\,.$$

Ainsi $\int |f(x)|^2\,dx \leqslant \|f\|_1\|\hat{f}\|_1 < +\infty$, et donc $f \in L^2(\mathbb{R})$.

- Pour montrer que $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ et $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$, il suffit d'établir $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$. Soit $g \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$. On a d'après le théorème d'inversion de Fourier (théorème 8.5), pour presque tout $x \in \mathbb{R}$

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\xi)e^{+2i\pi\xi x}\,d\xi$$

et donc

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\bar{g}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\left(\int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\xi)e^{2i\pi\xi x}\,d\xi\right)}\,dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}} f(x)\left(\int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{g}(\xi)}e^{-2i\pi\xi x}\,d\xi\right)dx\,.$$

Or, la fonction Φ définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$(x,\xi) \mapsto \Phi(x,\xi) = f(x)\overline{\hat{g}(\xi)}e^{-2i\pi\xi x}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}^2$ et on a

$$\|\Phi\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leqslant \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}\|\hat{g}\|_{L^1(\mathbb{R})}\,.$$

Donc le théorème de Fubini (théorème 5.2) est applicable et par conséquent

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{g}(\xi)}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2i\pi\xi x}\,dx\right)d\xi$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{g}(\xi)}\hat{f}(\xi)\,d\xi\,.$$

En particulier, si $f = g$, on obtient l'égalité souhaitée

$$\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2\,.$$

Ainsi, $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ et $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$.

Exercice 8.17

> Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et de classe $\mathcal{C}^2$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Montrer que si f, f' et f'' sont dans $L^1(\mathbb{R})$ alors $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

Solution

Tout d'abord, comme f appartient à $L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}$ est continue et est bornée par $\|f\|_1$; de même f'' appartient à $L^1(\mathbb{R})$ donc $\widehat{f''}$ est bornée par $\|f''\|_1$. D'autre part, puisque f, f' et f'' sont dans $L^1(\mathbb{R})$, le théorème 8.3 est applicable et on a pour tout $\xi \in \mathbb{R}$

$$\widehat{f''}(\xi) = (2i\pi\xi)^2\hat{f}(\xi)\,.$$

On en déduit, puisque $\widehat{f''}$ est bornée par $\|f''\|_1$, que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^*$,

$$|\hat{f}(\xi)| = \frac{1}{4\pi^2}\frac{|\widehat{f''}(\xi)|}{|\xi|^2} \leqslant \frac{\|f''\|_1}{4\pi^2}\frac{1}{|\xi|^2}\,.$$

D'où

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|\,d\xi = \int_{[-1,1]} |\hat{f}(\xi)|\,d\xi + \int_{\{|\xi|\geqslant 1\}} |\hat{f}(\xi)|\,d\xi$$
$$\leqslant 2\|f\|_1^2 + \frac{\|f''\|_1}{4\pi^2}\int_{\{|\xi|\geqslant 1\}} \frac{1}{|\xi|^2}\,d\xi = 2\|f\|_1^2 + \frac{\|f''\|_1}{2\pi^2}\,.$$

Donc $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

Commentaire : L'exercice 8.17 fournit un critère pour savoir si $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, sans la calculer, à partir d'informations sur f uniquement.

Exercice 8.18

Dans cet exercice, on va étudier les propriétés de l'espace de Wiener $\mathcal{W} = L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{F}\left(L^1(\mathbb{R})\right)$.

1°) Montrer que si $f \in \mathcal{W}$ alors $f \in L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \in [1, +\infty]$.

2°) Montrer que $f \in \mathcal{W}$ si et seulement si $\hat{f} \in \mathcal{W}$.

3°) Montrer que si $(f, g) \in \mathcal{W}^2$ alors $f * g$ et $fg \in \mathcal{W}$.

4°) Vérifier que l'application $\mathcal{N}$ définie sur $\mathcal{W}$ par $\mathcal{N}(f) = \|f\|_1 + \|\hat{f}\|_1$ est une norme sur $\mathcal{W}$.

5°) Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de Cauchy dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{W}; \mathcal{N})$.

5.a Montrer qu'il existe $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$ et qu'il existe $g \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\hat{f}_n - g\|_1 = 0$.

5.b Montrer que $\hat{f} = g$ presque partout.

5.c Montrer que la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge dans $\mathcal{W}$ et qu'ainsi $(\mathcal{W}; \mathcal{N})$ est un espace de Banach.

6°) On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^{-\pi x^2}$ et l'unité approchée $\left(h_n(x)\right)_{n\geqslant 1}$ où $h_n(x) = nh\left(\dfrac{x}{n}\right)$.(Voir exercice 7.9).

6.a Vérifier que si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $f * h_n$ est continue pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

6.b Vérifier que si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $f * h_n \in \mathcal{W}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

7°) On pose pour tout $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, $\|f\|_u = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$.

7.a Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f * h_n - f\|_u = 0$.

7.b Déduire de 7.a que $\mathcal{W}$ est dense dans l'espace vectoriel normé $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme.

8°) 8.a Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f * h_n - f\|_p = 0$.

8.b Déduire de 8.a que $\mathcal{W}$ est dense dans $(L^p(\mathbb{R}); \|\cdot\|_p)$ pour tout $p \in [1, +\infty[$.

Solution

1°) – Comme $\mathcal{F}\left(L^1(\mathbb{R})\right) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, tout élément de $\mathcal{W}$ appartient à $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ et comme $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$, tout élément de $\mathcal{W}$ est borné.

– Montrons maintenant que si $f \in \mathcal{W}$ alors $f \in L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \in]1, +\infty[$.

Comme $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x)|^p = |f(x)|^{p-1}|f(x)| \leqslant \|f\|_\infty^{p-1}|f(x)|$$

donc $f \in L^p(\mathbb{R})$ et on a

$$\|f\|_p \leqslant \|f\|_\infty^{\frac{p-1}{p}} \|f\|_1^{\frac{1}{p}}.$$

2°) Montrons que $f \in \mathcal{W}$ est équivalent à $\hat{f} \in \mathcal{W}$.

2.a Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{F}\left(L^1(\mathbb{R})\right)$. Alors, il existe $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $f = \hat{\varphi}$. De plus, $\hat{\varphi} = f \in L^1(\mathbb{R})$ donc le théorème d'inversion de Fourier (théorème 8.5) est applicable à φ c'est-à-dire

$$\hat{\hat{\varphi}} = \check{\varphi}.$$

Par conséquent, l'égalité $\hat{f} = \check{\varphi}$ montre que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ et l'égalité $\hat{f} = \hat{\hat{\varphi}}$ montre que $\hat{f} = \mathcal{F}\left(\hat{\varphi}\right)$, donc $\hat{f} \in \mathcal{W}$.

2.b Réciproquement, si $\hat{f} \in \mathcal{W}$ alors $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ et donc pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) = \hat{\hat{f}}(-x) &= \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi x u}\hat{f}(u)\,du \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi x}\hat{f}(-\xi)\,d\xi \end{aligned}$$

autrement dit

$$f = \hat{g}$$

où g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(\xi) = \hat{f}(-\xi)$.

3°) 3.a Soit $(f, g) \in \mathcal{W} \times \mathcal{W}$, montrons que $f * g \in \mathcal{W}$.

Puisque f et g appartiennent à $L^1(\mathbb{R})$, $f * g$ appartient aussi à $L^1(\mathbb{R})$ d'après le théorème 7.1. D'autre part, d'après le théorème 8.2 1°), $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$. Comme $\hat{f}$ est bornée et $\hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$ par hypothèse alors $\hat{f}\hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$; ainsi

$$\widehat{f * g} \in L^1(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \|\widehat{f * g}\|_1 \leqslant \|\hat{f}\|_\infty \|\hat{g}\|_1.$$

Quant à la continuité de $f * g$, elle résulte du fait que f est continue et bornée par hypothèse et $g \in L^1(\mathbb{R})$ (voir 4.32 1°)).

3.b Soit $(f, g) \in \mathcal{W} \times \mathcal{W}$, montrons $fg \in \mathcal{W}$.

Tout d'abord $fg \in L^1(\mathbb{R})$ car $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$. D'autre part, il existe $(\varphi, \psi) \in L^1(\mathbb{R}) \times L^1(\mathbb{R})$ tel que $f = \hat{\varphi}$ et $g = \hat{\psi}$, donc $fg = \widehat{\varphi * \psi} \in \mathcal{F}\left(L^1(\mathbb{R})\right)$.

4°) Il est évident que $\mathcal{N}$ est une norme sur $\mathcal{W}$.

5°) 5.a L'existence de f et g dans $\mathcal{W}$ telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\hat{f}_n - g\|_1 = 0$ résulte de la complétude de l'espace $L^1(\mathbb{R})$ dans lequel les suites $(f_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\hat{f}_n)_{n\geqslant 1}$ sont des suites de Cauchy.

5.b Rappelons que pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ on a l'inégalité $\|\hat{f}\|_u \leqslant \|f\|_1$.

Donc si $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\hat{f}_n - \hat{f}\|_u = 0$. Par ailleurs, d'après 5.a, il existe $g \in L^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \|\hat{f}_n - g\|_1 = 0.$$

D'après l'unicité de la limite, $\hat{f} = g$ p.p.

5.c Les fonctions f et $\hat{f}$ appartiennent à $L^1(\mathbb{R})$ et d'après le théorème d'inversion de Fourier (théorème 8.5) $\hat{\hat{f}} = \check{f}$, ce qui prouve que f coïncide presque partout avec une fonction continue h.

En résumé, h est continue, $h \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{h} = \hat{f} = g \in L^1(\mathbb{R})$. Donc $h \in \mathcal{W}$.

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - h\|_1 = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \|\hat{f}_n - \hat{h}\|_1$, il en résulte que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathcal{N}(f_n - h) = 0.$$

Ainsi la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{W}; \mathcal{N})$ et donc $(\mathcal{W}; \mathcal{N})$ est un espace de Banach.

6°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

6.a La fonction h_n est continue et bornée sur $\mathbb{R}$, donc $f * h_n$ est bornée et continue sur $\mathbb{R}$ d'après le théorème de continuité sous le signe intégral (théorème 3.9). D'ailleurs, puisque $h_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et puisque toutes ses dérivées sont bornées, $f * h_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Enfin, puisque $\lim\limits_{|x|\to+\infty} h_n(x) = 0$, le théorème de la convergence dominée (théorème 3.7) entraîne que $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f * h_n(x) = 0$.

6.b Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$; montrons que $f * h_n \in \mathcal{W}$.

Tout d'abord, $f * h_n$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ comme convolée de deux fonctions intégrables (théorème 7.1). D'autre part, $\bar{\mathcal{F}}(f * h_n)$ est intégrable, car produit d'une fonction bornée $\bar{\mathcal{F}}(f)$ et d'une fonction intégrable $\bar{\mathcal{F}}(h_n)$. Ainsi, en vertu du théorème d'inversion de Fourier (théorème 8.5), on a $f * h_n = \mathcal{F}\big(\bar{\mathcal{F}}(f * h_n)\big)$. D'où, $f * h_n \in \mathcal{W}$.

7°) Montrons que $\mathcal{W}$ est dense dans $(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_u)$ où $\|f\|_u = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$.

7.a Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$; montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f * h_n - f\|_u = 0$.

Puisque $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} h_n(x)\,dx = 1$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f * h_n(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}} \big(f(x-y) - f(x)\big) h_n(y)\,dy,$$

puis

$$\|f * h_n - f\|_u \leqslant \int_{\mathbb{R}} w_f(y) h_n(y)\,dy$$

où

$$w_f(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|.$$

Comme $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, d'où $\lim\limits_{y\to 0} w_f(y) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha_1 > 0$ tel que pour $y \in [-\alpha_1, \alpha_1]$, $w_f(y) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. Par conséquent $\|f * h_n - f\|_u \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} + 2\|f\|_u \displaystyle\int_{\{|x|>\alpha_1\}} h_n(y)\,dy$.

Comme $(h_n)_{n\geqslant 1}$ est une approximation de l'unité, il existe $\alpha_2 > 0$ tel que

$$2\|f\|_u \int_{\{|x|>\alpha_2\}} h_n(y)\,dy \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc

$$\|f * h_n - f\|_u \leqslant \varepsilon.$$

7.b On vient de montrer à la question 7.a que $\mathcal{W}$ est dense dans $\big(L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_u\big)$ et comme $L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est dense dans $\big(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_u\big)$ (car $L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ contient $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues à support compact), $\mathcal{W}$ est dense dans $\big(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_u\big)$.

8°) Montrons que $\mathcal{W}$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \in [1, +\infty[$.

8.a Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On a pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f * h_n \in L^p(\mathbb{R})$ d'après le théorème 7.2 et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f * h_n - f\|_p = 0$, d'après le théorème 7.5.

8.b Si $p = 1$, alors d'après 6.b, $f * h_n \in \mathcal{W}$ et d'après 8.a, $\mathcal{W}$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$.

Si $p \in]1, +\infty[$. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ alors, d'après 6.b, $f * h_n \in \mathcal{W}$ et donc, d'après 8.a, $\mathcal{W}$ est dense dans $\big(L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p\big)$.

D'autre part, $L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$ (car, $L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ contient par exemple $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ lequel est dense dans $L^p(\mathbb{R})$ (théorème 6.10)). Ainsi $\mathcal{W}$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$.

Chapitre **9**

Transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

RAPPELS DE COURS

On a vu au chapitre précédent que les hypothèses du théorème d'inversion de Fourier ne peuvent être remplies que si f est égale presque partout à une fonction continue tendant vers zéro à l'infini. Cela écarte malheureusement des fonctions d'un usage tout à fait courant en Mathématiques comme en Physique.

La nécessité de sortir du cadre des fonctions intégrables est en fait apparue très tôt. Ainsi, Plancherel a étendu en 1910 la transformation de Fourier définie dans $L^1(\mathbb{R})$ à l'espace $L^2(\mathbb{R})$ des fonctions de carré intégrable, espace présentant l'avantage par rapport à $L^1(\mathbb{R})$ d'être un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(f|g) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\bar{g}(x)\,dx\,.$$

La théorie au sens $L^2(\mathbb{R})$ qui en résulte est beaucoup plus symétrique que la théorie au sens $L^1(\mathbb{R})$, puisque dans $L^2(\mathbb{R})$, les fonctions f et $\hat{f}$ jouent le même rôle.

9.1 EXTENSION DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER AUX FONCTIONS DE CARRÉ INTÉGRABLE

La définition de la transformée de Fourier donnée par la formule (8.1) n'est pas directement applicable à une fonction quelconque de $L^2(\mathbb{R})$. Toutefois, cette définition convient lorsque $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et on démontre que $\hat{f}$ appartient aussi à $L^2(\mathbb{R})$ et

$\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$. Cette isométrie de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ s'étend en une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ sur $L^2(\mathbb{R})$ et cette extension permet de définir la transformée de Fourier (on peut aussi l'appeler la transformée de Fourier-Plancherel) pour toute fonction f de $L^2(\mathbb{R})$. Les résultats les plus importants sont le théorème de Plancherel et le théorème de Plancherel-Riesz.

Théorème 9.1 (théorème de Plancherel) *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Alors $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ et on a $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$.*

L'extension de la transformation de Fourier à $L^2(\mathbb{R})$ se fait en utilisant la densité de $\left(L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}); \|\cdot\|_2\right)$ dans $L^2(\mathbb{R})$ et la complétion de $L^2(\mathbb{R})$. C'est une application du résultat de topologie suivant.

Lemme 9.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels normés, F complet, et G un sous-espace vectoriel dense dans E. Si u est une application linéaire continue de G dans F, alors il existe un prolongement unique $\tilde{u}$ linéaire continue de E dans F et la norme de $\tilde{u}$ est égale à la norme de u.*

D'après le théorème de Plancherel (théorème 9.1), $\mathcal{F}$ est une isométrie de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$. En appliquant le lemme ci-dessus avec $E = F = L^2(\mathbb{R})$ et $G = L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, on obtient le théorème suivant.

Théorème 9.2 (théorème de Plancherel-Riesz) *Il existe un automorphisme unique, qu'on note aussi $\mathcal{F}$, de $L^2(\mathbb{R})$ qui prolonge canoniquement l'isométrie*

$$\begin{array}{rcl} L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) & \to & L^2(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \hat{f}. \end{array}$$

De plus, pour tout $(f, g) \in L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$, on a

1°) $\mathcal{F}\left(\bar{\mathcal{F}}(f)\right) = \bar{\mathcal{F}}\left(\mathcal{F}(f)\right) = f$ p.p. ;

2°) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\bar{g}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(\xi)\overline{\mathcal{F}g(\xi)}\,d\xi$ relation de Plancherel-Parseval ;

3°) $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \|\varphi_A - \mathcal{F}(f)\|_2 = 0$ où $\varphi_A(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi x} f(x)\mathbb{1}_{[-A,A]}(x)\,dx$.

4°) $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \|\psi_A - f\|_2 = 0$ où $\psi_A(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{+2i\pi\xi x}\mathcal{F}(f)(\xi)\mathbb{1}_{[-A,A]}(\xi)\,d\xi$.

Remarque 9.1 Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, alors pour tout $A \in]0, +\infty[$, la fonction $f_A = f\mathbb{1}_{[-A,A]} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \|f_A - f\|_2 = 0$ d'après l'extention du théorème de la convergence dominée (théorème 6.3). En plus, d'après le théorème 9.1 $\varphi_A \in L^2(\mathbb{R})$.

Notation : Désormais, on notera *abusivement* $\mathcal{F}(f)$ ou $\hat{f}$ la transformée de Fourier de f pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$. D'où les deux remarques importantes suivantes.

Remarque 9.2 Il faut prendre garde au fait que désormais $\mathcal{F}$ désigne deux applications *distinctes* : d'une part celle de $L^1(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, d'autre part celle de $L^2(\mathbb{R})$ sur lui-même, et que ces deux applications ne coïncident que sur $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

En effet, $\hat{f}(\xi)$ est bien définie *en tout point* ξ de $\mathbb{R}$ lorsque f appartient à $L^1(\mathbb{R})$; tandis que lorsque f appartient à $L^2(\mathbb{R})$, $\hat{f}$ est définie comme un élément de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$, mais en tant que fonction ponctuelle de ξ, on ne dispose que d'une fonction définie *pour presque tout* $\xi \in \mathbb{R}$. Il y a là une première différence importante entre $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$ pour la transformée de Fourier. Pour voir une deuxième différence importante, il suffit de comparer les exercices 8.7 et 9.5.

Remarque 9.3 Lorsque $f \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$, la fonction $x \mapsto e^{-2i\pi x\xi} f(x)$ n'est pas intégrable pour aucune valeur ξ. Il est donc hors de question d'utiliser la formule intégrale (8.1) dans ce cas.

Le 3°) du théorème 9.2 affirme (en termes de suites) que $\hat{f}$ est *la limite dans $L^2(\mathbb{R})$* de la suite $(\widehat{f_n})_{n>0}$.

Mais *attention*, il n'y a pas, en général, de convergence presque partout de $\widehat{f_n}$ vers $\hat{f}$ (on peut seulement l'affirmer pour une suite extraite).

9.2 DEUX THÉORÈMES UTILES DANS LA PRATIQUE

Comme on vient de le voir dans la remarque précédente, lorsque $f \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}(f)$ est donnée par une limite dans $L^2(\mathbb{R})$, donc le calcul se fait par approximation.

Toutefois, on peut souvent se ramener à un calcul d'intégrales semi-convergentes ; c'est l'objet du théorème suivant.

Théorème 9.3 *Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Si pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$, l'intégrale*

$$\int_{-A}^{A} e^{-2i\pi\xi x} f(x)\,dx$$

converge vers une limite finie qu'on note $g(\xi)$, lorsque A tend vers $+\infty$, alors $\mathcal{F}(f) = g$ p.p.

Donnons un autre cas particulier intéressant.

Théorème 9.4 *Soit $f \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$. S'il existe $g \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\bar{\mathcal{F}}(g) = f$ alors $\mathcal{F}(f) = g$.*

9.3 PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES DE $\mathcal{F}$ SUR $L^2(\mathbb{R})$

Toutes les propriétés de translation, modulation et homothétie vues pour les fonctions de $L^1(\mathbb{R})$ dans la proposition 8.1 sont encore valables dans $L^2(\mathbb{R})$ telles quelles. On les obtient par passage à la limite en utilisant la densité de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$. De plus, on a la propriété suivante.

Proposition 9.1 (Formule d'échange) *Soit $(f, g) \in L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$. Alors, $f\mathcal{F}(g)$ et $\mathcal{F}(f)g$ appartiennent à $L^1(\mathbb{R})$ et on a*

$$\int_{\mathbb{R}} f(u)\mathcal{F}(g)(u)\,du = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(v)g(v)\,dv\,.$$

9.4 TRANSFORMÉE DE FOURIER DANS $L^2(\mathbb{R})$ ET CONVOLUTION

Théorème 9.5
1°) Si $(f,g) \in L^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ alors $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$.
2°) Si $(f,g) \in L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ alors $\mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g)$.

Mise en garde : Si $(f,g) \in L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$, on sait d'après le théorème 7.3 que $f * g$ est bien définie, continue sur $\mathbb{R}$ et tend vers 0 quand $|x|$ tend vers $+\infty$. Mais, on ne sait pas si $f * g$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$ ou à $L^2(\mathbb{R})$, et on ne peut pas *a priori* parler de $\mathcal{F}(f * g)$.

9.5 TRANSFORMÉE DE FOURIER DANS $L^2(\mathbb{R})$ D'UNE DÉRIVÉE

Théorème 9.6 *Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$.*
Si f est continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et telle que $f' \in L^2(\mathbb{R})$, alors pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(f')(\xi) = 2i\pi\xi\mathcal{F}(f)(\xi)\,.$$

Si de plus f est de classe $\mathcal{C}^m$ par morceaux où $m \in \mathbb{N}^*$ et telle que les dérivées $f^{(k)}$ jusqu'à l'ordre m inclus sont de carré intégrable, alors pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$, et pour tout $1 \leqslant k \leqslant m$, on a

$$\mathcal{F}\left(f^{(k)}\right)(\xi) = (2i\pi\xi)^k\mathcal{F}(f)(\xi)\,.$$

Remarque 9.4 Le théorème 8.4 n'a pas d'anologue dans le cadre $L^2(\mathbb{R})$. En effet, si les fonctions f et $x \mapsto xf(x)$ appartiennent à $L^2(\mathbb{R})$, il n'est pas toujours vrai que $\hat{f}$ soit de classe $\mathcal{C}^1$.

EXERCICES

Exercice 9.1

Soient $a \in]0,+\infty[$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x}{x^2+a^2}\,.$$

1°) Vérifier que f appartient à $L^2(\mathbb{R})$ et n'appartient pas à $L^1(\mathbb{R})$.

2°) Calculer la transformée de Fourier de f, qu'on notera aussi $\hat{f}$.

3°) La fonction $\hat{f}$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Solution

1°) Il est clair que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. D'autre part, $|f(x)| \sim_{\pm\infty} \left|\frac{1}{x}\right|$ donc $f \notin L^1(\mathbb{R})$. Enfin, $|f(x)|^2 \sim_{\pm\infty} \frac{1}{x^2}$ donc $|f|^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et donc $f \in L^2(\mathbb{R})$.

2°) On a vu aux exemples usuels du chapitre 8 exemple (vi) (page 253) que pour tout $b > 0$,

$$\mathcal{F}\left(\mathrm{sign}(x)e^{-b|x|}\right)(\xi) = \frac{-4i\pi\xi}{b^2+4\pi^2\xi^2}\,,$$

en particulier si $b = 2\pi a$, on obtient

$$\mathcal{F}\left(\mathrm{sign}(x)e^{-b|x|}\right)(\xi) = \frac{-4i\pi\xi}{4\pi^2a^2+4\pi^2\xi^2} = \frac{1}{\pi}\frac{-i\xi}{a^2+\xi^2}$$

soit

$$\mathcal{F}\left(\mathrm{sign}(x)i\pi e^{-2\pi a|x|}\right) = \frac{\xi}{a^2+\xi^2}\,.$$

Comme $\mathcal{F}\mathcal{F}g = \check{g}$ pour tout $g \in L^2(\mathbb{R})$, on a alors

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(\frac{x}{a^2+x^2}\right)(\xi) &= \mathcal{F}\mathcal{F}\left(\mathrm{sign}(\xi)i\pi e^{-2\pi a|\xi|}\right)\\ &= \mathrm{sign}(-\xi)i\pi e^{-2\pi a|\xi|}\\ &= -i\pi\,\mathrm{sign}(\xi)e^{-2\pi a|\xi|}\,.\end{aligned}$$

Cette méthode est bien sûr courte, mais il faut connaître d'avance la réponse. Autrement, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^*$, l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2i\pi x\xi}\,dx$ est semi-convergente d'après le critère d'Abel, théorème 4.4, appelons sa valeur $g(\xi)$. Donc le théorème 9.3 est applicable et on a pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}\left(\frac{x}{a^2+x^2}\right)(\xi) = g(\xi)\,.$$

On peut calculer $g(\xi)$ en appliquant le théorème des résidus à la fonction de variable complexe $F(z) = \frac{z}{z^2+a^2}e^{-2i\pi z\xi}$ et au contour Γ_R composé du demi-cercle supérieur (ou inférieur suivant le signe de ξ), centré à l'origine de rayon $R > 1$ et de son diamètre placé sur l'axe des réels et on trouve pour tout $\xi \in \mathbb{R}^*$,

$$g(\xi) = -i\pi\,\mathrm{sign}(\xi)e^{-2\pi a|\xi|}\,.$$

3°) La fonction $\hat{f}$ n'est pas continue en 0.

Exercice 9.2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$.

1°) Vérifier que f appartient à $L^2(\mathbb{R})$ et n'appartient pas à $L^1(\mathbb{R})$.

2°) Soit $A \in]1,+\infty[$, on pose pour tout $\xi \in \mathbb{R}$

$$g_A(\xi) = \int_{-A}^{A} f(x)e^{-2i\pi\xi x}\,dx\,.$$

2.a Vérifier que g_A converge presque partout sur $\mathbb{R}$ vers une fonction qu'on déterminera.

2.b En déduire la transformée de Fourier de f.

Solution

1°) Il est clair que f est continue sur $\mathbb{R}^*$, impaire et $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$. D'autre part $f(x) \sim_{\pm\infty} \frac{1}{x}$ donc f n'appartient pas à $L^1(\mathbb{R})$. En revanche, $|f(x)|^2 \sim_{\pm\infty} \frac{1}{x^2}$ donc f appartient à $L^2(\mathbb{R})$.

2°) 2.a Puisque f est impaire, on a, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$g_A(\xi) = \int_{-A}^{A} f(x)e^{-2i\pi x\xi}\,dx = -2i\int_0^A \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)\sin(2\pi x\xi)\,dx.$$

Par ailleurs, en intégrant par parties, on a pour tout $\xi \in]0, +\infty[$,

$$\int_0^A \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)\sin(2\pi x\xi)\,dx = \left[\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)\frac{-\cos(2\pi x\xi)+1}{2\pi\xi}\right]_0^A + \frac{1}{2\pi\xi}\int_0^A \frac{-\cos(2\pi\xi x)+1}{x^2+1}\,dx.$$

En utilisant les exemples usuels du chapitre 8, exemple (ix), (page 253), on a

$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{\cos(2\pi\xi x)}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \frac{1}{2}\pi e^{-2\pi|\xi|},$$

on en déduit que

$$\lim_{\xi\to+\infty} g_A(\xi) = \frac{2i}{2\pi\xi}\left(\frac{\pi}{2}e^{-2\pi|\xi|} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{i}{2}\left(\frac{e^{-2\pi|\xi|}-1}{\xi}\right).$$

2.b Le théorème 9.3 entraîne que

$$\hat{f}(\xi) = \frac{i}{2}\left(\frac{e^{-2\pi|\xi|}-1}{\xi}\right) \text{ p.p.}$$

Exercice 9.3

On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x} \quad \text{et} \quad g(x) = \sin(\pi x)e^{-\pi x^2}.$$

1°) Calculer la transformée de Fourier de f et en déduire la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2 dx$.

2°) Calculer la transformée de Fourier de la fonction g.
On rappelle que $\mathcal{F}(\pi x e^{-\pi x^2}) = -i\pi\xi e^{-\pi\xi^2}$ d'après l'exercice 8.4.

Solution

1°) On sait d'après les exemples usuels du chapitre 8 exemple (i) (page 253) que $\mathcal{F}\left(\mathbb{1}_{[-1/2,1/2]}\right)(\xi) = \frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi}$. Comme $\mathcal{F}$ est un automorphisme de $L^2(\mathbb{R})$ et que la fonction $x \mapsto \mathbb{1}_{[-1/2,1/2]}(x)$ est paire, on a

$$\mathcal{F}\left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right) = \mathbb{1}_{[-1/2,1/2]}.$$

En vertu de la relation de Plancherel-Parseval, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2 dx = \int_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{1}_{[-1/2,1/2]}(\xi)\right)^2 d\xi = 1.$$

2°) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$g(x) = \sin(\pi x)e^{-\pi x^2} = \frac{\sin \pi x}{\pi x}\pi x e^{-\pi x^2} = f(x)h(x),$$

où l'on a posé $h(x) = \pi x e^{-\pi x^2}$, et d'autre part, f et h appartiennent à $L^2(\mathbb{R})$, donc le théorème 9.5 2°) est applicable et on a pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, en effectuant le changement de variable $v = \xi - y$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(\sin(\pi x)e^{-\pi x^2}\right)(\xi) &= \mathcal{F}\left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\pi x e^{-\pi x^2}\right)(\xi)\\
&= \mathcal{F}\left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right) * \mathcal{F}\left(\pi x e^{-\pi x^2}\right)(\xi)\\
&= \mathbb{1}_{[-1/2,1/2]} * \left(-i\pi\xi e^{-\pi\xi^2}\right)(\xi)\\
&= \int_{\mathbb{R}} -i\pi y \exp(-\pi y^2)\mathbb{1}_{[-1/2,1/2]}(\xi - y)\,dy\\
&= \int_{\xi-1/2}^{\xi+1/2} -i\pi v \exp(-\pi v^2)\,dv\\
&= \frac{i}{2}\left[\exp(-\pi v^2)\right]_{\xi-1/2}^{\xi+1/2}\\
&= -i\exp\left(-\pi(\xi^2+1/4)\right)\text{sh}\,\pi\xi.
\end{aligned}$$

Remarque 9.5 La fonction g appartient à $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, donc la formule intégrale (8.1) est applicable mais nécessite une intégration dans le plan complexe.

Exercice 9.4

1°) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{\sin \pi(b-a)x}{\pi x}e^{-\pi i(a+b)x}.$$

Calculer la transformée de Fourier de f.

2°) On suppose que $a = -b = \frac{-1}{2\pi}$. Calculer la transformée de Fourier de f en appliquant le théorème 9.3.

Solution

1°) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. On sait d'après les exemples usuels du chapitre 8 exemple (i) (page 253) que $\mathcal{F}\left(\mathbb{1}_{[a,b]}\right) = f$, donc

$$\mathcal{F}f = \mathcal{F}\mathcal{F}\left(\mathbb{1}_{[a,b]}\right) = \check{\mathbb{1}}_{[a,b]} = \mathbb{1}_{[-b,-a]}.$$

2°) Si $a = -b = -\dfrac{1}{2\pi}$ alors $f(x) = \dfrac{\sin x}{\pi x}$.

Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^*$, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2i\pi x\xi}\,dx$ est semi-convergente d'après le critère d'Abel 4.4, appelons sa valeur $g(\xi)$. Comme f est paire, on a alors pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$g(\xi) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2\pi x\xi)\sin x}{x}\,dx.$$

Exprimons $g(\xi)$ sans le signe intégral. En vertu de la formule classique

$$\cos a \sin b = \frac{1}{2}\big(\sin(a+b) - \sin(a-b)\big),$$

on a

$$\begin{aligned}\pi g(\xi) &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2\pi\xi+1)x}{x}\,dx - \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2\pi\xi-1)x}{x}\,dx \\ &= \frac{\pi}{2}\big(\operatorname{sign}(2\pi\xi+1) - \operatorname{sign}(2\pi\xi-1)\big) \quad \text{car} \quad \int_0^{+\infty}\frac{\sin \alpha x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\alpha,\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} g(\xi) &= \frac{1}{2}\Big(\operatorname{sign}(2\pi\xi+1) - \operatorname{sign}(2\pi\xi-1)\Big) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } |\xi| < \dfrac{1}{2\pi}, \\[2mm] \dfrac{1}{2} & \text{si } |\xi| = \dfrac{1}{2\pi}, \\[2mm] 0 & \text{si } |\xi| > \dfrac{1}{2\pi}. \end{cases}\end{aligned}$$

Le théorème 9.3 entraîne que pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}\left(\frac{\sin x}{\pi x}\right)(\xi) = \mathbb{1}_{\left[-\frac{1}{2\pi},\frac{1}{2\pi}\right]}(\xi).$$

Exercice 9.5

1°) Soit f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_a(x) = \dfrac{\sin \pi a x}{\pi x}$. En utilisant la transformation de Fourier, calculer $f_a * f_b$ où $(a,b) \in]0,+\infty[^2$.

2°) On considère l'équation suivante

$$f * f = f. \qquad (E)$$

Déduire de 1°) que (E) admet une infinité de solutions dans $L^2(\mathbb{R})$. Comparer le résultat à celui obtenu à l'exercice 8.7

Solution

1°) $f_a \in L^2(\mathbb{R})$, $f_b \in L^2(\mathbb{R})$ donc $f_a * f_b$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et appartient à $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ d'après le théorème 7.3. Donc, *a priori*, on ne sait pas si $f_a * f_b$ est dans $L^1(\mathbb{R})$ ou $L^2(\mathbb{R})$ et on ne peut pas parler de $\mathcal{F}(f_a * f_b)$. Mais on sait d'après les exemples usuels du chapitre 8 exemple (i) (page 253) que pour tout $a > 0$, on a

$$\mathcal{F}\left(\mathbb{1}_{[-a/2,a/2]}\right) = f_a,$$

et d'après le théorème 9.5 2°), pour $(f,g) \in L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$, on a

$$\mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g) = \mathcal{F}(fg).$$

D'où

$$\begin{aligned} f_a * f_b &= \mathcal{F}\left(\mathbb{1}_{[-a/2,a/2]}\right) * \mathcal{F}\left(\mathbb{1}_{[-b/2,b/2]}\right) \\ &= \mathcal{F}\left(\mathbb{1}_{[-a/2,a/2]}\mathbb{1}_{[-b/2,b/2]}\right) \\ &= \mathcal{F}\left(\mathbb{1}_{[-c/2,c/2]}\right) \quad \text{où} \quad c = \min(a,b) \\ &= f_c. \end{aligned}$$

2°) 2.a On a vu dans l'exercice 8.7 que (E) admet dans $L^1(\mathbb{R})$ une et une seule solution à savoir $f = 0$ p.p.

2.b D'après la première question, pour tout $a > 0$, f_a est solution de (E) dans $L^2(\mathbb{R})$. Ainsi (E) a une infinité de solutions dans $L^2(\mathbb{R})$. En fait, on montre que l'ensemble des solutions de (E) dans $L^2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions de la forme

$$f = \mathcal{F}(\mathbb{1}_A)$$

où A est un borélien de $\mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue finie.

Exercice 9.6

On désigne par $\mathcal{F}$ la transformation de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$ et par Id l'application identité de $L^2(\mathbb{R})$ sur lui-même.

1°) Établir que $\mathcal{F}^4 = Id$.

2°) En déduire les valeurs propres éventuelles de l'opérateur linéaire $\mathcal{F}$ sur $L^2(\mathbb{R})$.

3°) On considère les quatre opérateurs linéaires sur $L^2(\mathbb{R})$ suivants :

- $p_0 = \dfrac{1}{4}(Id + \mathcal{F} + \mathcal{F}^2 + \mathcal{F}^3)$;
- $p_1 = \dfrac{1}{4}(Id - i\mathcal{F} - \mathcal{F}^2 + i\mathcal{F}^3)$;
- $p_2 = \dfrac{1}{4}(Id - \mathcal{F} + \mathcal{F}^2 - \mathcal{F}^3)$;
- $p_3 = \dfrac{1}{4}(Id + i\mathcal{F} - \mathcal{F}^2 - i\mathcal{F}^3)$.

3.a Vérifier que $p_k^2 = p_k$ pour tout tout $k \in \{0,1,2,3\}$ et que $p_k \circ p_l = 0$ si $1 \leqslant k \neq l \leqslant 4$.

3.b Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. On pose $f_k = p_k f$ pour tout $k \in \{0,1,2,3\}$; vérifier que $\mathcal{F} f_k = i^k f_k$.

4°) Déduire des questions précédentes que tout élément f de $L^2(\mathbb{R})$ est somme de quatre vecteurs propres de $\mathcal{F}$.

Solution

1°) Montrons que $\mathcal{F}^4 = Id$.

En effet, $\mathcal{F}$ est un automorphisme sur $L^2(\mathbb{R})$ et pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}\mathcal{F} f = \check{f}$. Donc

$$\mathcal{F}^4 f = \mathcal{F}\mathcal{F}(\mathcal{F}\mathcal{F} f) = \mathcal{F}\mathcal{F}\check{f} = \check{\check{f}} = f\,.$$

2°). Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Si λ est une valeur propre de $\mathcal{F}$ alors il existe $f \in L^2(\mathbb{R})$ non nulle telle que $\mathcal{F} f = \lambda f$. Ce qui entraîne d'après la question précédente que $\lambda^4 = 1$. Or $\lambda^4 = 1 \Leftrightarrow \lambda \in \{1, -1, i, -i\}$. Donc les valeurs propres éventuelles de l'opérateur linéaire $\mathcal{F}$ sur $L^2(\mathbb{R})$ sont $1, -1, i$ et $-i$.

3°) 3.a On déduit de la première question que $\mathcal{F}^5 = \mathcal{F}$, $\mathcal{F}^6 = \mathcal{F}^2$ et $\mathcal{F}^7 = \mathcal{F}^3$. Ainsi, on vérifie sans peine que $p_k^2 = p_k$ pour $k \in \{0,1,2,3\}$ et $p_k \circ p_l = 0$ si $1 \leqslant l \neq k \leqslant 4$. Autrement dit, les p_k sont des projecteurs, et Im $p_k \cap$ Im p_l est réduit à la fonction nulle.

3.b On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} f_0 &= \mathcal{F} p_0 f \\
&= \frac{1}{4}\mathcal{F}(f + \mathcal{F} f + \mathcal{F}^2 f + \mathcal{F}^3 f) \\
&= \frac{1}{4}(\mathcal{F} f + \mathcal{F}^2 f + \mathcal{F}^3 f + \mathcal{F}^4 f) \\
&= p_0 f \\
&= f_0\,.
\end{aligned}$$

On vérifie de même que

$$\mathcal{F} f_1 = i f_1\,,\quad \mathcal{F} f_2 = i^2 \mathcal{F} f_2 = -f_2 \quad \text{et} \quad \mathcal{F} f_3 = i^3 f_3 = -i f_3\,.$$

Donc $1, -1, i$ et $-i$ sont les valeurs propres de l'opérateur $\mathcal{F}$ sur $L^2(\mathbb{R})$ associées au fonctions propres f_1, f_2, f_3 et f_4.

4°) En remarquant que $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = Id$, on déduit que pour tout f appartenant à $L^2(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}
f &= p_0 f + p_1 f + p_2 f + p_3 f \\
&= f_0 + f_1 + f_2 + f_3\,.
\end{aligned}$$

Pour la détermination explicites des fonctions propres, voir exercice 10.10.

Exercice 9.7

Soit $(a,b) \in]0,+\infty[^2$. En appliquant la relation de Plancherel-Parseval (théorème 9.2), calculer l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,dx\,,$$

puis l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{(\sin x)^n}{x^n}\,dx \quad \text{où } n = 2,3,4\,.$$

Solution

– On sait d'après les exemples usuels du chapitre 8 exemple (ix) (page 253) que pour tout $a > 0$,

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)(\xi) = \frac{\pi}{a} e^{-2\pi a|\xi|}$$

donc, d'après la relation de Plancherel-Parseval (théorème 9.2), on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)(\xi)\mathcal{F}\left(\frac{1}{x^2+b^2}\right)(\xi)\,d\xi \\
&= \frac{\pi^2}{ab}\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi(a+b)|\xi|}\,d\xi \\
&= 2\frac{\pi^2}{ab}\int_0^{+\infty} e^{-2\pi(a+b)\xi}\,d\xi \\
&= \frac{2\pi^2}{ab}\left[-\frac{1}{2\pi(a+b)}e^{-2\pi(a+b)\xi}\right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{\pi}{ab(a+b)}\,.
\end{aligned}$$

Remarque 9.6 Ce calcul reste vrai si a et b sont de signe quelconque et dans ce cas-là, $I_{a,b} = \dfrac{\pi}{|ab|(|a|+|b|)}$.

– On sait d'après les exemples usuels du chapitre 8 exemple (i) (page 253) que

$$\mathcal{F}\left(\mathbb{1}_{[-a/2,a/2]}\right)(\xi) = \frac{\sin \pi a\xi}{\pi\xi}\,.$$

En particulier, pour $a = \dfrac{1}{\pi}$, on a

$$\mathcal{F}\left(\pi\mathbb{1}_{\left[-\frac{1}{2\pi},\frac{1}{2\pi}\right]}\right)(\xi) = \frac{\sin\xi}{\xi}\,.$$

Donc, d'après la relation de Plancherel-Parseval (théorème 9.2), on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx &= \int_{\mathbb{R}} \left(\pi \mathbb{I}_{\left[-\frac{1}{2\pi},\frac{1}{2\pi}\right]}(y)\right)^2 dy \\ &= \pi^2 \int_{-\frac{1}{2\pi}}^{\frac{1}{2\pi}} dy \\ &= \pi\,.\end{aligned}$$

– On sait d'après les exemples usuels du chapitre 8 exemple (ii) (page 253) que

$$\mathcal{F}\left(\left(1-\frac{2|x|}{a}\right)\mathbb{I}_{[-a/2,a/2]}\right) = \frac{\sin^2\left(\dfrac{\pi a \xi}{2}\right)}{\pi^2 \dfrac{a}{2}\xi^2}\,.$$

Si $a = \dfrac{2}{\pi}$, on obtient

$$\mathcal{F}\left(\left(1-\pi|x|\right)\mathbb{I}_{\left[-\frac{1}{\pi},\frac{1}{\pi}\right]}\right) = \frac{\sin^2(\xi)}{\pi\xi^2}\,.$$

Donc, d'après la relation de Plancherel-Parseval (théorème 9.2), on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^4 \xi}{\xi^4}\, d\xi &= \int_{\mathbb{R}} \pi^2 (1-\pi|x|)^2 \mathbb{I}_{\left[-\frac{1}{\pi},\frac{1}{\pi}\right]}(x)\, dx \\ &= 2\pi^2 \int_0^{\frac{1}{\pi}} (1-\pi x)^2\, dx \\ &= \frac{2}{3}\pi\,.\end{aligned}$$

– D'après la relation de Plancherel-Parseval (théorème 9.2), on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^3 \xi}{\xi^3}\, d\xi &= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin\xi}{\xi}\right)^2 \frac{\sin \xi}{\xi}\, d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \pi(1-\pi|x|)\mathbb{I}_{\left[-\frac{1}{\pi},\frac{1}{\pi}\right]}(x)\pi\mathbb{I}_{\left[-\frac{1}{2\pi},\frac{1}{2\pi}\right]}(x)\, dx \\ &= \pi^2 \int_{\mathbb{R}} (1-\pi|x|)\mathbb{I}_{\left[-\frac{1}{2\pi},\frac{1}{2\pi}\right]}(x)\, dx \\ &= 2\pi^2 \int_0^{\frac{1}{2\pi}} (1-\pi x)\, dx \\ &= 2\pi^2 \left[x - \pi\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2\pi}} \\ &= \frac{3\pi}{4}\,.\end{aligned}$$

Exercice 9.8

Le but de cet exercice est de montrer que

$$\mathcal{F}\left(L^1(\mathbb{R})\right) = L^2(\mathbb{R}) * L^2(\mathbb{R})\,.$$

1°) 1.a Soit $(f,g) \in L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$. Établir que $f * g = \mathcal{F}\left(\bar{\mathcal{F}} f \bar{\mathcal{F}} g\right)$.

1.b En déduire que $L^2(\mathbb{R}) * L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}\left(L^1(\mathbb{R})\right)$.

2°) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ presque partout non nulle. En posant $u = \mathcal{F}\left(\dfrac{f\,\mathbb{I}_{\{f\neq 0\}}}{\sqrt{|f|}}\right)$ et $v = \mathcal{F}\left(\sqrt{|f|}\right)$, montrer que $u * v = \mathcal{F} f$ et conclure.

Solution

1°) 1.a Soit $(f,g) \in L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$, alors $\bar{\mathcal{F}} f \in L^2(\mathbb{R})$, $\bar{\mathcal{F}} g \in L^2(\mathbb{R})$ et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (remarque 6.1), $\bar{\mathcal{F}} f \bar{\mathcal{F}} g \in L^1(\mathbb{R})$. En outre, d'après le théorème 9.5 2°), on a

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(\bar{\mathcal{F}} f \bar{\mathcal{F}} g\right) &= \mathcal{F}\bar{\mathcal{F}} f * \mathcal{F}\bar{\mathcal{F}} g \\ &= f * g \quad \text{car } \mathcal{F} \circ \bar{\mathcal{F}} = Id_{L^2(\mathbb{R})}\,.\end{aligned}$$

1.b On vient de montrer en 1.a que pour tout $(f,g) \in L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$, $\bar{\mathcal{F}} f \bar{\mathcal{F}} g \in L^1(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(\bar{\mathcal{F}} f \bar{\mathcal{F}} g) = f * g$. Autrement dit, pour tout $(f,g) \in L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$, il existe $h \in L^1(\mathbb{R})$ $(h = \bar{\mathcal{F}} f \bar{\mathcal{F}} g)$ telle que

$$f * g = \mathcal{F}(h)\,.$$

Ainsi $L^2(\mathbb{R}) * L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}\left(L^1(\mathbb{R})\right)$.

2°) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ presque partout non nulle ; posons $g = \sqrt{|f|}$ et $h = \dfrac{f\,\mathbb{I}_{\{f\neq 0\}}}{\sqrt{|f|}}$.

Il est clair que g et h appartiennent à $L^2(\mathbb{R})$. Soient $u = \mathcal{F}(g)$ et $v = \mathcal{F}(h)$; on a d'après le théorème 9.5 2°)

$$u * v = \mathcal{F}(g) * \mathcal{F}(h) = \mathcal{F}(gh) = \mathcal{F}(f)\,.$$

Ainsi, on vient de prouver que pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$, il existe $(u,v) \in L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ tel que $u * v = \mathcal{F}(f)$; autrement dit

$$\mathcal{F}\left(L^1(\mathbb{R})\right) \subset L^2(\mathbb{R}) * L^2(\mathbb{R})\,.$$

On déduit des deux points précédents que

$$\mathcal{F}\left(L^1(\mathbb{R})\right) = L^2(\mathbb{R}) * L^2(\mathbb{R})\,.$$

Exercice 9.9

Le but de cet exercice est de montrer le théorème 9.6.

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ telle que $f' \in L^2(\mathbb{R})$. On va montrer dans cet exercice que

$$\mathcal{F}(f')(\xi) = 2i\pi\xi\mathcal{F}(f)(\xi) \text{ p.p.}$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h_n(\xi) = \int_{-n}^{n} e^{-2i\pi\xi x} f'(x)\,dx$.

1°) 1.a Montrer que la suite de fonctions $(h_n)_{n\geqslant 1}$ converge dans $L^2(\mathbb{R})$ vers $\mathcal{F}(f')$.

1.b En déduire qu'il existe une sous-suite $(n_k)_{k\geqslant 0}$ telle que la suite de fonctions $(h_{n_k})_{k\geqslant 0}$ converge presque partout vers $\mathcal{F}(f')$.

2°) En intégrant par parties, montrer qu'il existe une sous-suite $(k_m)_{m\geqslant 0}$ telle que la suite de fonctions $(h_{n_{k_m}})_{m\geqslant 0}$ converge presque partout vers $2i\pi\xi\mathcal{F}(f)$. Conclure.

Solution

1°) 1.a On considère pour $n \in \mathbb{N}^*$, la suite de fonctions de terme général $g_n(x) = e^{-2i\pi x\xi} f'(x) \mathbb{1}_{[-n,n]}(x)$. On a

$$\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = e^{-2i\pi x\xi} f'(x) \quad \text{et} \quad |g_n(x)| \leqslant |f'(x)|\,.$$

Comme $f' \in L^2(\mathbb{R})$ par hypothèse, le théorème 6.3 avec $p = 2$ entraîne que la suite $(h_n)_{n\geqslant 1}$ converge dans $L^2(\mathbb{R})$ vers $\mathcal{F}(f')$.

1.b D'après le théorème 6.6, il existe une sous-suite $(h_{n_k})_{k\geqslant 1}$ extraite de $(h_n)_{n\geqslant 1}$ telle que $(h_{n_k})_{k\geqslant 1}$ converge presque partout vers $\mathcal{F}(f')$.

2°) En intégrant par parties, on a

$$\int_{-n_k}^{n_k} e^{-2i\pi x\xi} f'(x)\,dx = \left[f(x)e^{-2i\pi x\xi}\right]_{-n_k}^{n_k} + 2i\pi\xi \int_{-n_k}^{n_k} e^{-2i\pi\xi x} f(x)\,dx\,.$$

Comme f et f' appartiennent à $L^2(\mathbb{R})$, f admet des limites en $+\infty$ et $-\infty$ et $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. D'où $\lim_{k\to+\infty} \left[f(x)e^{-2i\pi x\xi}\right]_{-n_k}^{n_k} = 0$.

D'autre part, en posant $g_k(\xi) = \int_{-n_k}^{n_k} e^{-2i\pi\xi x} f(x)\,dx$, on montre comme en 1.a que la suite $(g_k)_{k\geqslant 1}$ converge dans $L^2(\mathbb{R})$ vers $\mathcal{F}(f)$. En outre, d'après le théorème 6.6, il existe une sous-suite $(g_{k_m})_{m\geqslant 1}$ extraite de $(g_k)_{k\geqslant 1}$ qui converge presque partout vers $\mathcal{F}(f)$. Ainsi, la sous-suite $(h_{n_{k_m}})_{m\geqslant 1}$ converge presque partout vers $2i\pi\xi\mathcal{F}(f)$ et converge presque partout vers $\mathcal{F}(f')$. D'où

$$\mathcal{F}(f') = 2i\pi\xi\mathcal{F}(f) \text{ p.p.}$$

Exercice 9.10

Soit f une fonction continue et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ par morceaux.

1°) Montrer que si f et f' appartiennent à $L^1(\mathbb{R})$ alors $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$.

2°) Montrer que si f et f' appartiennent à $L^2(\mathbb{R})$ alors $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

Solution

1°) La fonction f appartient à $L^1(\mathbb{R})$ donc $\hat{f}$ est bornée par $\|f\|_1$; de même f' appartient à $L^1(\mathbb{R})$ donc $\widehat{f'}$ est bornée par $\|f'\|_1$. De plus, d'après le théorème 8.3, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{f'}(\xi) = 2i\pi\xi\hat{f}(\xi)\,.$$

Puisque $\widehat{f'}$ est bornée par $\|f'\|_1$, on en déduit que, pour tout $|\xi| \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}|\hat{f}(\xi)| &= \frac{1}{2\pi}\frac{|\widehat{f'}(\xi)|}{|\xi|}\\ &\leqslant \frac{C}{|\xi|} \quad \text{où } C = \frac{\|f'\|_1}{2\pi}\,.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2\,d\xi &= \int_{-1}^{1} |\hat{f}(\xi)|^2\,d\xi + \int_{\{|\xi|\geqslant 1\}} |\hat{f}(\xi)|^2\,d\xi\\ &\leqslant 2\|f\|_1^2 + C\int_{\{|\xi|\geqslant 1\}} \frac{1}{|\xi|^2}\,d\xi = 2\|f\|_1^2 + \frac{\|f'\|_1}{\pi}\,.\end{aligned}$$

Donc $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$.

2°) Comme f appartient à $L^2(\mathbb{R})$, $\hat{f}$ aussi. Donc $\hat{f}$ est localement intégrable car $L^2(\mathbb{R}) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R})$; en particulier,

$$\int_{[-1,1]} |\hat{f}(\xi)|\,d\xi < +\infty\,.$$

De même f' appartient à $L^2(\mathbb{R})$ donc $\widehat{f'}$ aussi. De plus, d'après le théorème 9.6, pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{f'}(\xi) = 2i\pi\xi\hat{f}(\xi)\,;$$

on en déduit que, pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}^*$,

$$|\hat{f}(\xi)| = \frac{1}{2\pi}\frac{|\widehat{f'}(\xi)|}{|\xi|}\,.$$

D'où

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|\,d\xi = \int_{-1}^{1} |\hat{f}(\xi)|\,d\xi + \frac{1}{2\pi}\int_{\{|\xi|\geqslant 1\}} |\widehat{f'}(\xi)|\frac{1}{|\xi|}\,d\xi\,.$$

Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (remarque 6.1), on a

$$\int_{\{|\xi|\geqslant 1\}} |\widehat{f'}(\xi)|\frac{1}{|\xi|}\,d\xi \leqslant \sqrt{\int_{\{|\xi|\geqslant 1\}} |\widehat{f'}(\xi)|^2\,d\xi}\sqrt{\int_{\{|\xi|\geqslant 1\}} \frac{1}{|\xi|^2}\,d\xi}$$

c'est-à-dire
$$\int_{\{|\xi|\geqslant 1\}} |\widehat{f'}(\xi)|\frac{1}{|\xi|}\,d\xi \leqslant \sqrt{2}\|\widehat{f'}\|_2 = \sqrt{2}\|f'\|_2 .$$
D'où
$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|\,d\xi \leqslant \int_{-1}^{1} |\hat{f}(\xi)|\,d\xi + \sqrt{2}\|f'\|_2 < +\infty .$$
Donc $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

Remarque 9.7 On montre de la même façon que précédemment que si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $f' \in L^2(\mathbb{R})$ alors $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 9.11 (Principe d'incertitude de Heinsenberg)

Le but de cet exercice est de démontrer le principe d'incertitude de Heinsenberg.

Commentaire : La solution ci-dessous suit de plus près le cours de C. Gasquet et P. Witomski [17]. Pour une autre variante voir par exemple Bony [5, pp. 124–125].

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ à valeurs complexes. On suppose que f, xf et f' appartiennent à $L^2(\mathbb{R})$.

1°) 1.a Vérifier que les fonctions $x|f|^2$ et $(x|f|^2)'$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$.

1.b Vérifier que $\lim_{x\to+\infty} x|f(x)|^2$ et $\lim_{x\to-\infty} x|f(x)|^2$ existent et sont nulles.

1.c Vérifier que $\int_{\mathbb{R}} x\big(|f(x)|^2\big)'\,dx = -\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,dx$.

Rappels : Soit h une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

- Si h appartient à $L^2(\mathbb{R})$ alors $\bar{h}$ aussi et on a $\|h\|_2 = \|\bar{h}\|_2$.
- Si h est dérivable, alors $\bar{h}$ l'est aussi et on a $(\bar{h})' = \overline{h'}$.

2°) Établir que
$$\left|\int_{\mathbb{R}} x\left(|f(x)|^2\right)'\,dx\right| \leqslant 2\sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2\,dx}\sqrt{\int_{\mathbb{R}} x^2|f(x)|^2\,dx}\,.$$

3°) Déduire de ce qui précède
$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,dx \leqslant 4\pi\sqrt{\int_{\mathbb{R}} x^2|f(x)|^2\,dx}\sqrt{\int_{\mathbb{R}} \xi^2|\hat{f}(\xi)|^2\,d\xi}\,.$$

Cette inégalité est connue sous le nom du principe d'incertitude de Heinsenberg, *voir ci-dessous son interprétation physique.*

Solution

1°) 1.a Vérifions que les fonctions $x|f|^2$ et $(x|f|^2)'$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$.
D'une part, xf et $\bar{f}$ appartiennent à $L^2(\mathbb{R})$ donc $x|f|^2$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (remarque 6.1). D'autre part, on a $(x|f|^2)' = (xf\bar{f})' = f\bar{f} + x\bar{f}f' + xf\overline{f'}$, et comme f, f', xf appartiennent à $L^2(\mathbb{R})$, on en déduit que $(x|f|^2)'$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (remarque 6.1).

1.b Montrons que $\lim_{x\to+\infty} x|f(x)|^2$ et $\lim_{x\to-\infty} x|f(x)|^2$ existent et sont nulles.

En effet, puisque $(x|f|^2)' \in L^1(\mathbb{R})$,
$$\lim_{x\to+\infty} x|f(x)|^2 = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x \left(t|f(t)|^2\right)'\,dt = \int_0^{+\infty} (t|f(t)|^2)'\,dt .$$
Donc $\lim_{x\to+\infty} x|f(x)|^2$ existe et est finie, appelons-la l. Supposons $l \neq 0$, alors il existe $A > 0$ tel que pour $x \geqslant A$ on ait $x|f(x)|^2 \geqslant \frac{|l|}{2}$ et donc $\int_A^{+\infty} x|f(x)|^2\,dx = +\infty$.
Ce qui est impossible puisque $x \mapsto x|f(x)|^2 \in L^1(\mathbb{R})$. En faisant un raisonnement identique si x tend vers $-\infty$, on montre que $\lim_{x\to-\infty} x|f(x)|^2 = 0$.

1.c Vérifions que $\int_{\mathbb{R}} x\left(|f(x)|^2\right)'\,dx = -\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,dx$.

En intégrant par parties, on obtient
$$\int_{\mathbb{R}} x\left(|f(x)|^2\right)'\,dx = [x|f(x)|^2]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,dx$$
$$= -\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,dx \quad \text{d'après 1.b}.$$

2°) Établissons que
$$\left|\int_{\mathbb{R}} x\left(|f(x)|^2\right)'\,dx\right| \leqslant 2\sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2\,dx}\sqrt{\int_{\mathbb{R}} x^2|f(x)|^2\,dx}\,.$$
D'après l'identité $\left(|f|^2\right)' = f'\bar{f} + f(\bar{f})' = f'\bar{f} + f\overline{f'}$, on a
$$\left|\int_{\mathbb{R}} x\left(|f(x)|^2\right)'\,dx\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |x\bar{f}(x)||f'(x)|\,dx + \int_{\mathbb{R}} |xf(x)||\overline{f'}(x)|\,dx$$
et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (remarque 6.1)
$$\left|\int_{\mathbb{R}} |x\bar{f}(x)||f'(x)|\,dx\right| \leqslant \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |x\bar{f}(x)|^2\,dx}\sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2\,dx}$$
et
$$\left|\int_{\mathbb{R}} |xf(x)||\overline{f'}(x)|\,dx\right| \leqslant \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |xf(x)|^2\,dx}\sqrt{\int_{\mathbb{R}} |\overline{f'}(x)|^2\,dx}\,.$$
Comme pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $|\bar{z}|^2 = |z|^2$, alors
$$\left|\int_{R} x\left(|f(x)|^2\right)'\,dx\right| \leqslant 2\sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2\,dx}\sqrt{\int_{\mathbb{R}} x^2|f(x)|^2\,dx}\,.$$

3°) Déduisons de ce qui précède que

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx \leqslant 4\pi\sqrt{\int_{\mathbb{R}} x^2|f(x)|^2\, dx}\sqrt{\int_{\mathbb{R}} \xi^2|\hat{f}(\xi)|^2\, d\xi}\,.$$

Puisque f est dérivable et $f' \in L^2(\mathbb{R})$ on a, d'après le théorème 9.6, pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{f'}(\xi) = 2i\pi\xi\hat{f}(\xi)$$

et donc d'après l'égalité de Plancherel-Parseval (théorème 9.2), la fonction $\xi \mapsto \xi\hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})$ et on a

$$\int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2\, dx = 4\pi^2 \int_{\mathbb{R}} \xi^2|\hat{f}(\xi)|^2\, d\xi\,.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx &= \left|\int_{\mathbb{R}} x\left(|f(x)|^2\right)'\, dx\right| \quad \text{d'après 1.c}\\ &\leqslant 2\sqrt{\int_{R} |f'(x)|^2\, dx}\sqrt{\int_{\mathbb{R}} x^2|f(x)|^2\, dx} \quad \text{d'après 2°)}\\ &\leqslant 2\pi\sqrt{\int_{\mathbb{R}} \xi^2|\hat{f}(\xi)|^2\, d\xi}\sqrt{\int_{\mathbb{R}} x^2|f(x)|^2\, dx}\,.\end{aligned}$$

Interprétation physique du principe d'incertitude de Heinsenberg

On note

$\sigma_f^2 = \int_{\mathbb{R}} t^2|f(t)|^2 dt$ (dispersion de l'énergie de f en temps) ;

$\sigma_{\hat{f}}^2 = \int_{\mathbb{R}} \xi^2|\hat{f}(\xi)|^2\, d\xi$ (dispersion d'énergie en fréquence) ;

$E_f = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx$ (énergie de f).

On appelle *durée utile* du signal f la quantité Δt définie par $\Delta t = \dfrac{\sigma_f}{\sqrt{E_f}}$ et *bande utile* du signal la quantité $\Delta\lambda$ définie par $\Delta\lambda = \dfrac{\sigma_{\hat{f}}}{\sqrt{E_f}}$.

Le principe d'incertitude de Heinsenberg est une relation entre Δt et $\Delta\lambda$ qui indique que l'on ne peut pas localiser finement et le signal et sa fréquence. Cette relation est

$$\Delta t\Delta\lambda \geqslant \frac{1}{4\pi}\,.$$

4°) Déterminons les signaux réels f pour lesquels à $\Delta\lambda$ fixé, on ait $\Delta t\Delta\lambda = \dfrac{1}{4\pi}$.

Or $\Delta t\Delta\lambda = \dfrac{1}{4\pi}$ si et seulement si $4\pi\sigma_f\sigma_{\hat{f}} = E_f$. Par ailleurs, $4\pi\sigma_f\sigma_{\hat{f}} = E_f$ dans le cas réel si l'inégalité de Cauchy-Schwarz (remarque 6.1) est une égalité

donc si les fonctions xf et f' sont proportionnelles. Ce qui donne f de la forme $f(x) = \alpha e^{-ax^2}$ avec $a > 0$ puisque $f \in L^2(\mathbb{R})$. Comme on sait que

$$\hat{f}(\xi) = \alpha\sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\left(-\frac{\pi^2\xi^2}{a}\right),$$

on a

$$(\Delta\lambda)^2 = \frac{\int_{\mathbb{R}} \xi^2|\hat{f}(\xi)|^2\, d\xi}{\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2\, d\xi} = \frac{a}{4\pi^2}$$

d'où $a = 4\pi^2(\Delta\lambda)^2$. Ainsi f est de la forme $\alpha\exp\left(-4\pi^2(\Delta\lambda)^2x^2\right)$.

Exercice 9.12

Soit u_0 une fonction de $L^2(\mathbb{R})$. On cherche $u \in \mathcal{C}^{1,2}(]0, +\infty[\times\mathbb{R})$ vérifiant l'équation (aux dérivées partielles) de Schrödinger,

$$(S)\quad \begin{cases} i\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (t, x) \in]0, +\infty[\times\mathbb{R}\,,\\ u(0, x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}\,.\end{cases}$$

La relation $u(0, x) = u_0(x)$ signifie que $\lim_{t\to 0} u(t, x) = u_0(x)$ pour presque tout x.

On suppose que pour tout $t > 0$

$$x \mapsto u(t, x)\,,\ x \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(t, x)\,,\ x \mapsto \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) \ \text{ et } \ x \mapsto \frac{\partial u}{\partial t}(t, x)$$

sont des éléments de $L^2(\mathbb{R})$ et que

$$\widehat{\frac{\partial u}{\partial t}(t, x)}(\xi) = \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(t, \xi) \text{ p.p.}$$

où $\widehat{f(t, \cdot)}$ désigne la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto f(t, x)$ élément de $L^2(\mathbb{R})$.

1°) Montrer que $\hat{u}$ est solution d'une équation différentielle qu'on résoudra.

2°) Établir que pour $t > 0$, $\|\hat{u}(t, \cdot)\|_{L^2_\xi(\mathbb{R})} = \|u(t, \cdot)\|_{L^2_x(\mathbb{R})} = \|u_0\|_{L^2_x(\mathbb{R})}$. La deuxième égalité est appelée *conservation de l'énergie*.

3°) Démontrer que $u(t, \cdot)$ tend vers u_0 dans $L^2(\mathbb{R})$ lorsque t tend vers zéro.

Solution

1°) En appliquant la transformée de Fourier partielle par rapport à xà (S), on obtient

$$(\hat{S}) \quad \begin{cases} i\dfrac{\partial \hat{u}}{\partial t} - 4\pi^2\xi^2\hat{u} = 0 & (t,x) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}, \\ \widehat{u(x,0)} = \hat{u}_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

D'où $\hat{u}(t,\xi) = e^{-i4\pi^2\xi^2 t}\hat{u}_0$. Comme u_0 appartient à $L^2(\mathbb{R})$, $\hat{u}_0$ aussi. Donc pour tout $t \geqslant 0$, la fonction $\xi \mapsto \hat{u}(t,\xi) \in L^2(\mathbb{R})$. Ainsi la fonction $x \mapsto u(t,x) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-i4\pi^2\xi^2 t}\hat{u}_0)$ appartient aussi à $L^2(\mathbb{R})$ puisque $\mathcal{F}$ est un isomorphisme de $L^2(\mathbb{R})$.

2°) En vertu de la relation de Plancherel-Parseval (théorème 9.2), on a, pour tout $t > 0$,

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^2_x(\mathbb{R})} = \|\hat{u}(t,\cdot)\|_{L^2_\xi(\mathbb{R})} = \|\hat{u}_0\|_{L^2_\xi(\mathbb{R})} = \|u_0\|_{L^2_x(\mathbb{R})}.$$

3°) Montrons que $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} u(t,\cdot) = u_0$ dans $L^2(\mathbb{R})$.

- Montrons tout d'abord que $\hat{u}(t,\cdot)$ tend vers $\hat{u}_0$ dans $L^2(\mathbb{R})$ quand t tend vers 0. En effet, on a d'une part $\lim\limits_{t\to 0}\hat{u}(t,\xi) = \hat{u}_0(\xi)$ et d'autre part $|\hat{u}(t,\xi) - \hat{u}_0(\xi)|^2 \leqslant 4|\hat{u}_0|^2$, donc le théorème de la convergence dominée (théorème 3.7) entraîne que $\lim\limits_{t\to 0}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |\hat{u}(t,\xi) - \hat{u}_0(\xi)|^2\,d\xi = 0$.
- $\bar{\mathcal{F}}$ est continue sur $L^2(\mathbb{R})$ donc $\bar{\mathcal{F}}(\hat{u}(t,\cdot))$ tend vers $\bar{\mathcal{F}}(\hat{u}_0)$ dans $L^2(\mathbb{R})$, d'où $u(t,\cdot)$ tend dans $L^2(\mathbb{R})$ vers u_0 quand t tend vers 0.

Commentaire : On montre que si $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ alors

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i(x-y)^2}{4t}} u_0(y)\,dy.$$

Exercice 9.13 (Une démonstration du théorème de Plancherel 9.1)

Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ alors $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ et $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$.

On considère l'unité approchée $(\varphi_n)_{n>0}$ où $\varphi_n(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{n}{1+n^2x^2}$. Rappelons que $\hat{\varphi}_n = g_n$ (où $g_n(\xi) = e^{-\frac{2\pi}{n}|\xi|}$).

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n = f * \varphi_n$.

1°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$; montrer que $f_n \in L^2(\mathbb{R})$, $\hat{f}_n \in L^2(\mathbb{R})$ et $\|f_n\|_2 = \|\hat{f}_n\|_2$. On pourra appliquer l'exercice 8.16.

2°) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\|f_n\|_2 = \|f\|_2$.

3°) Montrer que $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$.

4°) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\|\hat{f}_n\|_2 = \|\hat{f}\|_2$.

5°) Montrer que $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$.

Solution

1°) Pour montrer que $f_n \in L^2(\mathbb{R})$, $\hat{f}_n \in L^2(\mathbb{R})$ et $\|f_n\|_2 = \|\hat{f}_n\|_2$, il suffit, d'après l'exercice 8.16, de vérifier que $\hat{f}_n \in L^1(\mathbb{R})$.

- D'après le théorème 7.1, $f_n \in L^1(\mathbb{R})$ comme convolée de deux fonctions de $L^1(\mathbb{R})$.
- D'après le théorème 8.2, $\hat{f}_n = \hat{f}\hat{\varphi}_n = \hat{f}g_n$.

Par hypothèse $f \in L^1(\mathbb{R})$, donc $\hat{f}$ est bornée ; d'autre part, $g_n \in L^1(\mathbb{R})$, donc $\hat{f}_n \in L^1(\mathbb{R})$ en tant que produit d'une fonction bornée et d'une fonction intégrable. Ainsi, d'après l'exercice 8.16, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \in L^2(\mathbb{R})$, $\hat{f}_n \in L^2(\mathbb{R})$ et

$$\|f_n\|_2 = \|\hat{f}_n\|_2. \tag{9.1}$$

2°) Montrons que

$$\lim_{n\to+\infty}\|f_n\|_2 = \|f\|_2. \tag{9.2}$$

Comme $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $\varphi_n \in L^1(\mathbb{R})$, $f_n \in L^2(\mathbb{R})$ d'après le théorème 7.2. D'autre part, d'après le théorème 7.5, la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers f dans $L^2(\mathbb{R})$ c'est-à-dire

$$m_{n\to+\infty}\|f_n - f\|_2 = 0.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\|f_n - f\|_2 = 0$ implique que $\lim\limits_{n\to+\infty}\big|\|f_n\|_2 - \|f\|_2\big| = 0$. Autrement dit,

$$m_{n\to+\infty}\|f_n\|_2 = \|f\|_2.$$

3°) Montrons que $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$. Pour cela, on va appliquer le lemme de Fatou (théorème 3.3)

$$\int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to+\infty} |\hat{f}_n(\xi)|^2\,d\xi \leqslant \liminf_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}_n(\xi)|^2\,d\xi. \tag{9.3}$$

Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\hat{f}_n(\xi) = \hat{f}(\xi)\lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{2\pi}{n}|\xi|} = \hat{f}(\xi)$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty}|\hat{f}_n(\xi)|^2 = |\hat{f}(\xi)|^2.$$

Et d'autre part, en vertu de (9.1)

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}_n(\xi)|^2\,d\xi = \int_{\mathbb{R}} |f_n(x)|^2\,dx.$$

Donc d'après (9.2)

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}_n(\xi)|^2\,d\xi = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,dx.$$

Une application de (9.3) donne

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2\,d\xi \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,dx. \tag{9.4}$$

Comme $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\hat{f}$ l'est aussi et $\|\hat{f}\|_2 \leqslant \|f\|_2$.

4°) Montrons que la suite $(\hat{f}_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\hat{f}$ dans $L^2(\mathbb{R})$, ce qui entraîne que

$$\lim_{n\to+\infty} \|\hat{f}_n\|_2 = \|\hat{f}\|_2 .$$

Appliquons l'extension du théorème de la convergence dominée (théorème 6.3) :

– pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} \hat{f}_n(\xi) = \hat{f}(\xi)$;

– pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $|\hat{f}_n(\xi)| = |\hat{f}(\xi)|e^{-\frac{2\pi}{n}|\xi|} \leqslant |\hat{f}(\xi)|$.

Comme $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ d'après la question 3°), on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \|\hat{f}_n - \hat{f}\|_2 = 0 .$$

Et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \|\hat{f}_n\|_2 = \|\hat{f}\|_2 . \tag{9.5}$$

5°) Montrons que $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$. En faisant tendre n vers l'infini dans (9.1), et d'après (9.2) et (9.5), on obtient

$$\|\hat{f}\|_2 = \lim_{n\to+\infty} \|\hat{f}_n\|_2 = \lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_2 = \|f\|_2 .$$

Exercice 9.14 (Une démonstration du théorème 9.5)

1°) Soit $(f,g) \in L^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$, montrer que $\mathcal{F}(f*g) = \hat{f}\hat{g}$ p.p.

2°) Soit $(f,g) \in L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$, montrer que pour $\xi \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(fg)(\xi) = \hat{f} * \hat{g}(\xi)$.

Solution

1°) Soit $(f,g) \in L^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$, montrons que $\mathcal{F}(f*g) = \hat{f}\hat{g}$ p.p.
Comme $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$, il existe une suite $(g_n)_{n\geqslant 1} \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ qui converge dans $L^2(\mathbb{R})$ vers g. D'après le théorème 8.2 1°)(voir exercice 5.17), on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathcal{F}(f*g_n) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g_n) . \tag{9.6}$$

Comme $\mathcal{F}$ est continue sur $L^2(\mathbb{R})$, la suite $(\hat{g}_n)_{n\geqslant 1}$ converge dans $L^2(\mathbb{R})$ vers $\hat{g}$, et comme $\hat{f}$ est bornée, la suite $(\hat{f}\hat{g}_n)_{n\geqslant 1}$ converge dans $L^2(\mathbb{R})$ vers $\hat{f}\hat{g}$.
Par ailleurs, l'application linéaire $\Phi_f : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ qui à h associe $h*f$ est continue. En effet, en vertu du théorème 7.2, on a

$$\|\Phi_f(h)\|_2 \leqslant \|f\|_1 \|h\|_2 .$$

Donc, en faisant tendre n vers l'infini dans (9.6), on obtient

$$\mathcal{F}(f*g) = \lim_{n\to+\infty} \mathcal{F}(f*g_n) = \hat{f} \lim_{n\to+\infty} \hat{g}_n = \hat{f}\hat{g} , \tag{9.7}$$

où les limites sont au sens de $L^2(\mathbb{R})$. Par ailleurs d'après le théorème 6.6, il existe une suite extraite $(f*g_{n_k})_{k\geqslant 1}$ telle que $\mathcal{F}(f*g_{n_k})$ converge presque partout vers $\mathcal{F}(f*g)$ et il existe une suite extraite $(\hat{g}_{n_{k_l}})_{l\geqslant 1}$ telle que $(\hat{f}\hat{g}_{n_{k_l}})_{l\geqslant 1}$ converge presque partout vers $\hat{f}\hat{g}$ et donc à la limite

$$\mathcal{F}(f*g) = \hat{f}\hat{g} \text{ p.p.}$$

2°) Soit $(f,g) \in L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$, montrons que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(fg)(\xi) = \hat{f} * \hat{g}(\xi)$. Tout d'abord, en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (remarque 6.1), $fg \in L^1(\mathbb{R})$. Donc la relation (8.1) est applicable et $\mathcal{F}(fg)$ appartient à $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ d'après le théorème 8.1. Soit $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(fg)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x\xi} f(x)g(x)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{h(x)}\,dx\end{aligned}$$

où l'on a posé pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = e^{2i\pi x\xi}\bar{g}(x)$. Or, d'après la relation de Plancherel-Parseval (théorème 9.2), on a

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{h(x)}\,dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)\overline{\widehat{h(y)}}\,dy . \tag{9.8}$$

Comme $g \in L^2(\mathbb{R})$, $h \in L^2(\mathbb{R})$ aussi, donc pour presque tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\hat{h}(y) = \lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} e^{-2i\pi ty} h(t)\,dt \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}) .$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\int_{-A}^{A} e^{-2i\pi ty} h(t)\,dt &= \int_{-A}^{A} e^{-2i\pi ty} e^{2i\pi t\xi} \bar{g}(t)\,dt \\ &= \int_{-A}^{A} e^{2i\pi t(\xi-y)} \bar{g}(t)\,dt \\ &= \overline{\int_{-A}^{A} e^{-2i\pi t(\xi-y)} g(t)\,dt} .\end{aligned}$$

Comme $g \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} e^{-2i\pi t(\xi-y)} g(t)\,dt = \hat{g}(\xi-y) \text{ dans } L^2(\mathbb{R}) ,$$

d'où

$$\hat{h}(y) = \overline{\hat{g}(\xi-y)} .$$

Par conséquent (9.8) devient

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(x)\bar{h}(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)\hat{g}(\xi-y)\,dy \\ &= \hat{f} * \hat{g}(\xi) .\end{aligned}$$

Ainsi, pour $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(fg)(\xi) = \hat{f} * \hat{g}(\xi) .$$

L'égalité précédente a lieu pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ car $\hat{f} * \hat{g} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ comme convolée de deux fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ d'après le théorème 7.3.

Chapitre 10

Espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

RAPPELS DE COURS

10.1 FONCTIONS À DÉCROISSANCE RAPIDE

Définition 10.1 *Une fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{C}$ *est à* décroissance rapide *si pour tout* $p \in \mathbb{N}$

$$\lim_{|x| \to +\infty} x^p f(x) = 0 .$$

Exemple. La fonction $x \mapsto e^{-|x|}$ est à décroissance rapide.

Remarque 10.1 La terminologie est trompeuse, car le fait qu'une fonction f soit à décroissance rapide n'implique aucune monotonie pour f même dans un voisinage de l'infini. Il suffit de prendre par exemple $f(x) = e^{-|x|} \sin x$ pour s'en persuader.

10.2 ESPACE DE SCHWARTZ $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Définition 10.2 *On note* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ *l'ensemble des fonctions* f *définies sur* $\mathbb{R}$ *à valeurs dans* $\mathbb{C}$ *vérifiant les deux propriétés suivantes*

(i) f *est indéfiniment dérivable sur* $\mathbb{R}$ *;*

(ii) f *et toutes ses dérivées sont à décroissance rapide. Autrement dit pour tout* $(p, q) \in \mathbb{N}^2$,

$$\lim_{|x| \to +\infty} x^p f^{(q)}(x) = 0 .$$

Théorème 10.1
- *La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.*
- *$\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est inclus dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.*
- *$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.*
- *$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable par dérivation.*
- *$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable par multiplication par les fonctions polynômiales.*

Suites convergentes dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Définition 10.3 *On dit que la suite $(\varphi_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ converge dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ vers φ lorsque n tend vers $+\infty$, si pour tout $(m,p) \in \mathbb{N}^2$, la suite de fonctions $\left(x \mapsto x^m\varphi_n^{(p)}(x)\right)_{n\geqslant 0}$* converge uniformément *sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $x \mapsto x^m\varphi^{(p)}(x)$.*

Densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans les espaces fonctionnels usuels

Théorème 10.2
- *$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.*
- *$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \in [1,+\infty[$.*

Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Théorème 10.3 *La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est un automorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et a pour automorphisme réciproque $\bar{\mathcal{F}}$.*

Théorème 10.4 *Soient f et g deux éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors*
(i) $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$;
(ii) $fg \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g)$.

Si l'on munit $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ du produit scalaire

$$(f,g) \mapsto (f|g) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\bar{g}(x)\,dx,$$

on a le résultat suivant.

Théorème 10.5 *Pour tout $(f,g) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R})$,*
(i) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\bar{g}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\bar{\hat{g}}(\xi)\,d\xi$;
(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,dx = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2\,d\xi$.

EXERCICES

Exercice 10.1

1°) Soit f une fonction de $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ à décroissance rapide ; montrer que pour $p \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^pf(x)$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$ (en particulier $f \in L^1(\mathbb{R})$).

2°) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ à décroissance rapide ; montrer que $\hat{f}$ est indéfiniment dérivable.

3°) Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}, f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$; montrer que $\hat{f}$ est à décroissance rapide.

Solution

1°) Soit f une fonction de $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ à décroissance rapide et soit $p \in \mathbb{N}$. Puisque f est à décroissance rapide, il existe $M > 0$ tel que pour $|x| \geqslant M$ on ait $|x^{p+2}f(x)| \leqslant 1$. D'où

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |x^pf(x)|\,dx &= \int_{\{|x|\leqslant M\}} |x^pf(x)|\,dx + \int_{\{|x|>M\}} \frac{1}{x^2}|x^{p+2}f(x)|\,dx\\ &\leqslant M^p\int_{\{|x|\leqslant M\}} |f(x)|\,dx + \int_{\{|x|>M\}} \frac{1}{x^2}\,dx < +\infty\,.\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^pf(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

2°) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ à décroissance rapide ; montrons que $\hat{f}$ est indéfiniment dérivable.
D'après le théorème 8.4, il suffit de montrer que $x \mapsto x^pf(x) \in L^1(\mathbb{R})$ pour tout entier naturel p, ce qui résulte de la question précédente.

3°) Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}, f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$; montrons que $\hat{f}$ est à décroissance rapide. D'après le théorème 8.3 on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\widehat{f^{(k)}}(\xi) = (2i\pi\xi)^k\hat{f}(\xi)\,.$$

En appliquant le théorème de Riemann-Lebesgue (théorème 8.1 (iii)), il vient

$$\lim_{|\xi|\to+\infty} |\xi|^k|\hat{f}(\xi)| = 0\,.$$

Exercice 10.2

Montrer que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ alors $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Solution

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. En particulier, f est à décroissance rapide, donc $\hat{f}$ est indéfiniment dérivable d'après l'exercice 10.1 2°).
Montrons que la fonction $\hat{f}$ et toutes ses dérivées sont à décroissance rapide *i.e.* pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$,

$$\lim_{|\xi|\to+\infty} |\xi|^p|\hat{f}^{(q)}(\xi)| = 0\,.$$

Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. Comme f et toutes ses dérivées sont à décroissance rapide, les fonctions $x \mapsto (-2i\pi x)^q f(x)$ et $x \mapsto \left((-2i\pi x)^q f(x)\right)^{(p)}$ appartiennent à $L^1(\mathbb{R})$. En vertu des théorèmes 8.3 et 8.4, on a pour tout $\xi \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\xi^p \hat{f}^{(q)}(\xi) &= \xi^p \mathcal{F}\left((-2i\pi x)^q f(x)\right)(\xi)\\ &= \frac{1}{(2i\pi)^p}\mathcal{F}\left(\left((-2i\pi x)^q f(x)\right)^{(p)}\right)(\xi).\end{aligned}$$

Ainsi, le théorème de Riemann-Lebesgue (théorème 8.1 (iii)) entraîne que

$$\lim_{|\xi|\to+\infty} |\xi^p \hat{f}^{(q)}(\xi)| = \frac{1}{(2\pi)^p}\lim_{|\xi|\to+\infty}\left|\mathcal{F}\left(\left((-2i\pi x)^q f(x)\right)^{(p)}\right)(\xi)\right| = 0.$$

Exercice 10.3

Soit $(f,g) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R})$; montrer que $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
On commencera par vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$x^p (f*g)^{(q)}(x) = \sum_{j=0}^{p} C_p^j (x^{p-j} f) * \left(x^j g^{(q)}\right)(x).$$

Solution

D'après les résultats de l'exercice 4.32, $f * g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. En outre, d'après le théorème de la convergence dominée (théorème 3.7), $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f*g(x) = 0$. Montrons que pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $\lim\limits_{|x|\to+\infty} x^p (f*g)^{(q)}(x) = 0$.

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x^p (f*g)^{(q)}(x) &= x^p \left(f * g^{(q)}(x)\right)\\ &= \int_{\mathbb{R}} x^p f(x-y) g^{(q)}(y)\,dy\\ &= \int_{\mathbb{R}} (x-y+y)^p f(x-y) g^{(q)}(y)\,dy\\ &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{j=0}^{p} C_p^j (x-y)^{p-j} y^j f(x-y) g^{(q)}(y)\,dy\\ &= \sum_{j=0}^{p} C_p^j \int_{\mathbb{R}} (x-y)^{p-j} f(x-y) y^j g^{(q)}(y)\,dy\\ &= \sum_{j=0}^{p} C_p^j (x^{p-j} f) * \left(x^j g^{(q)}\right)(x). \end{aligned}$$

Comme l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable par dérivation et multiplication par une fonction polynômiale (théorème 10.1), pour tout $j \in \{0,\ldots,p\}$, $x^{p-j}f$ et $x^j g^{(q)}$ appartiennent à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\lim\limits_{|x|\to+\infty} (x^{p-j}f) * (xg^{(q)})(x) = 0$.

D'où

$$\lim_{|x|\to+\infty} x^p (f*g)^{(q)}(x) = 0.$$

Exercice 10.4

Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. On suppose que $f * g$ est identiquement nulle. Peut-on affirmer que f ou g est nulle ? Et si $f = g$? Comparer avec les exercices 8.7 et 9.5.

Solution

Soient φ et ψ deux éléments non nuls de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ tels que $\operatorname{supp}\varphi \cap \operatorname{supp}\psi = \emptyset$. Alors $\varphi\psi = 0$. Posons $f = \bar{\mathcal{F}}\varphi$ et $g = \bar{\mathcal{F}}\psi$. Alors $(f,g) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(f*g) = \mathcal{F}f\mathcal{F}g = \varphi\psi = 0$. Comme $\mathcal{F}$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $f * g = 0$, mais ni f ni g ne sont identiquement nulles.
Par contre, si $f * f = 0$, alors $f = 0$.

Exercice 10.5

1°) Soit $(f,g) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R})$; montrer que $fg \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

2°) Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ qui tend vers 0. Montrer que la suite $(f_n g)_{n\geq 1}$ tend vers 0 pour la « topologie » de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (voir à ce propos la définition 10.3).

Solution

1°) Soit $(f,g) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Comme $fg \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, il suffit de montrer que pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$,

$$\lim_{|x|\to+\infty} x^p (fg)^{(q)}(x) = 0.$$

Or, d'après la formule de Leibniz, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(fg)^{(q)}(x) = \sum_{j=0}^{q} C_q^j f^{(j)}(x) g^{(q-j)}(x).$$

Comme pour tout $j \in \{0,\ldots,q\}$,

$$\lim_{|x|\to+\infty} x^p f^{(j)}(x) = 0$$

et

$$\lim_{|x|\to+\infty} g^{(q-j)}(x) = 0,$$

on a alors

$$\lim_{|x|\to+\infty} x^p (fg)^{(q)}(x) = 0.$$

2°) Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ qui tend vers 0. Montrons que $(f_n g)_{n\geq 1}$ tend vers 0 pour la topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^p (f_n g)^{(q)}(x)|\right) = 0.$$

Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on a, en vertu de la formule de Leibniz,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|x^p(f_ng)^{(q)}(x)| \leqslant \sum_{j=0}^{q} C_q^j \sup_{x\in\mathbb{R}}|x^p f_n^{(j)}(x)| \sup_{x\in\mathbb{R}}|g^{(q-j)}(x)|\,.$$

En posant $M_j = \sup_{x\in\mathbb{R}}|g^{(q-j)}(x)|$ et $M = \max_{0\leqslant j\leqslant q} M_j$ on a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|x^p(f_ng)^{(q)}(x)| \leqslant M\sum_{j=0}^{q} C_q^j \sup_{x\in\mathbb{R}}|x^p f_n^{(j)}(x)|\,.$$

Comme pour tout $j \in \{0,\dots,q\}$,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}|x^p f_n^{(j)}(x)|\right) = 0$$

on a

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}|x^p (f_ng)^{(q)}(x)|\right) = 0\,.$$

Exercice 10.6

On dit qu'une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ est à *croissance lente* s'il existe un réel $c > 0$ et un entier naturel N tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$|f(x)| \leqslant c\left(1+x^2\right)^N\,.$$

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ à croissance lente ainsi que toutes ses dérivées et soit $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Montrer que $fg \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Solution

Puisque f et toutes ses dérivées sont à croissance lente, pour tout $j \in \mathbb{N}$, il existe $c_j > 0$ et $N_j \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$|f^{(j)}(x)| \leqslant c_j\left(1+x^2\right)^{N_j}\,.$$

Comme $fg \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, il reste à montrer que pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$

$$\lim_{|x|\to+\infty}|x^p(fg)^{(q)}(x)| = 0\,.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}|x^p(fg)^{(q)}(x)| &\leqslant \sum_{j=0}^{q} C_q^j |f^{(j)}(x) x^p g^{(q-j)}(x)|\\ &\leqslant \sum_{j=0}^{q} C_q^j c_j\left(1+x^2\right)^{N_j}|x^p g^{(q-j)}(x)|\\ &\leqslant \sum_{j=0}^{q}\sum_{l=0}^{N_j} C_{N_j}^{l} C_q^j c_j |x^{2l+p} g^{(q-j)}(x)|\,.\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{|x|\to+\infty}|x^p(fg)^{(q)}(x)| \leqslant \sum_{j=0}^{q}\sum_{l=0}^{N_j} C_q^j C_{N_j}^l c_j \lim_{|x|\to+\infty}|x^{2l+p}g^{(q-j)}(x)|\,,$$

soit

$$\lim_{|x|\to+\infty}|x^p(fg)^{(q)}(x)| = 0\,.$$

Exercice 10.7

Soient $a \in]0,+\infty[$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On pose, pour $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\psi(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{a-2i\pi x}e^{-2i\pi\xi x}\,dx\,. \tag{10.1}$$

1°) Vérifier que ψ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

2°) Vérifier que ψ satisfait l'équation différentielle $y' + ay = \hat{\varphi}$ et en déduire que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\psi(\xi) = e^{-a\xi}\int_{-\infty}^{\xi} e^{as}\hat{\varphi}(s)\,ds\,. \tag{10.2}$$

3°) Retrouver ce résultat en utilisant le théorème 9.5 2°).
On pourra vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\bar{\mathcal{F}}\left(e^{-a\xi}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}\right)(x) = \dfrac{1}{a-2i\pi x}$.

4°) On suppose maintenant que $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$. Vérifier que l'intégrale (10.1) est bien définie et montrer que l'égalité (10.2) reste vraie dans ce cas.

Solution

1°) La fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{1}{a-2i\pi x}$, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à croissance lente, ainsi que toutes ses dérivées. Donc d'après l'exercice 10.6, la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \varphi(x)g(x)$, appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. En outre, $\mathcal{F}$ est un automorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ donc $\psi = \hat{f}$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

2°) La fonction h, définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{-2i\pi x}{a-2i\pi x}$, est bornée ; donc la fonction $h\varphi$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en vertu du théorème de dérivabilité sous le signe intégral (théorème 3.10) et on a, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\psi'(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{-2i\pi x}{a-2i\pi x}\varphi(x)e^{-2i\pi x\xi}\,dx\,.$$

D'où

$$\psi' + a\psi = \hat{\varphi}\,.$$

La solution générale de l'équation différentielle $y' + ay = \hat{\varphi}$ est

$$y(\xi) = e^{-a\xi}\left(C + \int_0^{\xi} e^{as}\hat{\varphi}(s)\,ds\right) \tag{10.3}$$

où C est une constante complexe. Déterminons ψ.

Comme $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, nécessairement, $C = \int_{-\infty}^{0} e^{as}\hat{\varphi}(s)\,ds$, sinon en faisant tendre ξ vers $-\infty$ dans (10.3), on obtient $\lim_{\xi\to-\infty} |\psi(\xi)| = +\infty$; ce qui est absurde puisque $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. D'où

$$\psi(\xi) = e^{-a\xi}\int_{-\infty}^{\xi} e^{as}\hat{\varphi}(s)\,ds\,.$$

3°) Tout d'abord, on vérifie sans peine que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\bar{\mathcal{F}}\left(e^{-a\xi}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}\right)(x) = g(x)$$

et que la fonction g appartient à $L^2(\mathbb{R})$; d'où $\mathcal{F}(g) = e^{-a\xi}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}$ p.p.
D'autre part, $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$ donc φ appartient à $L^2(\mathbb{R})$. Ainsi, en appliquant le théorème 9.5 2°), on obtient pour tout $\xi \in \mathbb{R}$

$$\psi(\xi) = \hat{\varphi} * \hat{g}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(s)e^{-a(\xi-s)}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(\xi - s)\,ds = e^{-a\xi}\int_{-\infty}^{\xi} e^{as}\hat{\varphi}(s)\,ds\,.$$

4°) Si $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$, alors $g\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ (car $\|g\varphi\|_{L^1(\mathbb{R})} \leqslant \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}\|g\|_{L^2(\mathbb{R})}$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (remarque 6.1). Donc la fonction ψ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et appartient à $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. En outre, en appliquant le théorème 9.5 2°) comme dans la troisième question, on obtient le même résultat.

Exercice 10.8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x\cos(e^x)$. Vérifier que f n'appartient pas à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ mais que l'application Φ, qui à tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ associe $\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx$, est continue.

Solution

– Il est clair que f appartient à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Mais f n'est pas à décroissance rapide, elle n'est même pas à croissance lente. Sinon, il existerait une constante réelle $C > 0$ et un entier naturel k tels que

$$|f(x)| \leqslant C\left(1 + x^2\right)^k,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, et dans ce cas-là, on aurait

$$|\cos(e^x)| \leqslant \frac{C\left(1+x^2\right)^k}{e^x}.$$

Ce qui entraîne en particulier que $\lim_{x\to+\infty} |\cos(e^x)| = 0$. Ce qui est absurde, puisqu'on peut exhiber de nombreuses suites réelles qui tendent vers $+\infty$ et telles que

$$\lim_{n\to+\infty} |\cos(e^{x_n})| \neq 0\,;$$

par exemple $x_n = \ln(2\pi n)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

– Il est clair que Φ est une application linéaire. Donc pour montrer qu'elle est continue, il suffit de montrer que pour toute suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ qui converge vers 0 dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\Phi(\varphi_n)$ tend vers 0 dans $\mathbb{R}$. En intégrant par parties, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{\mathbb{R}} e^x\cos(e^x)\varphi_n(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} \sin(e^x)\varphi_n'(x)\,dx\,.$$

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\int_{\mathbb{R}} e^x\cos(e^x)\varphi_n(x)\,dx\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |\varphi_n'(x)|\,dx \leqslant \pi\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\left(1+x^2\right)\varphi_n'(x)\right|.$$

Or par hypothèse, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ vers 0, donc en particulier

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\left(1+x^2\right)\varphi_n'(x)\right|$$

tend vers 0, et $\Phi(\varphi_n)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Exercice 10.9

Soient $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ égale à 1 sur $[-1, 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $\varphi_n(x) = \varphi\left(\frac{x}{n}\right)$ et $f_n = \varphi_n f$. Vérifier que chaque $f_n = \varphi_n f$ appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers f pour la topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Autrement dit, $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Solution

Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, φ_n appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.
Soit $\varepsilon > 0$. En vertu de la formule de Leibniz, on a pour $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$

$$|x^p(f_n - f)^{(q)}(x)| = \left|x^p\left(\left(\varphi\left(\frac{x}{n}\right) - 1\right)f(x)\right)^{(q)}\right|$$
$$\leqslant \left|x^p\left(\varphi\left(\frac{x}{n}\right) - 1\right)f^{(q)}(x)\right| + \sum_{j=1}^{q} C_q^j n^{-j}\left|\varphi^{(j)}\left(\frac{x}{n}\right)x^p f^{(q-j)}(x)\right|.$$

Comme $\lim_{|x|\to+\infty} x^p f^{(q)}(x) = 0$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $|x| \geqslant N_1$, on ait

$$|x^p f^{(q)}(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(1 + \|\varphi\|_\infty)}$$

et donc, pour tout $n \geqslant N_1$,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|x^p\left(\varphi\left(\frac{x}{n}\right) - 1\right)f^{(q)}(x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part, il existe $C_{p,q,j} > 0$ tel que pour tout $j \in \{1, 2, \ldots, q\}$, on ait

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|x^p f^{(q-j)}(x)| \leqslant C_{p,q,j}\,,$$

d'où

$$\sum_{j=1}^{q} C_q^j n^{-j} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\varphi^{(j)}\left(\frac{x}{n}\right) x^p f^{(q-j)}(x)\right| \leqslant \sum_{j=1}^{q} C_q^j n^{-j} C_{p,q,j} \|\varphi^{(j)}\|_\infty ,$$

or il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_2$, on ait

$$\sum_{j=1}^{q} C_q^j n^{-j} C_{p,q,j} \|\varphi^{(j)}\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{2} .$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant \max(N_1, N_2)$ on a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^p (f_n - f)^{(q)}(x)| \leqslant \varepsilon .$$

Les cas $p = 0$ ou $q = 0$ se traitent de la même façon que ci-dessus et sont laissés au lecteur.
Conclusion : $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Exercice 10.10

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'équation différentielle

$$y'' - 4\pi x y' + 4\pi n y = 0 . \qquad (E_n)$$

1°) Montrer l'existence et l'unicité d'une solution polynôme H_n de degré n, dont le coefficient du terme de degré n vaut 1, de l'équation différentielle (E_n).
H_n est appelé *polynôme d'Hermite.*

2°) On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h_n(x) = e^{-\pi x^2} H_n(x)$ (fonction d'Hermite). Trouver une équation différentielle vérifiée par h_n.

3°) Vérifier que $h_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et déterminer une équation différentielle vérifiée par $\widehat{h_n}$.

4°) Montrer que $\widehat{h_n}(\xi) = e^{-\pi\xi^2} P_n(\xi)$ où P_n est un polynôme de degré n dont on déterminera le coefficient du terme de degré n.

5°) Trouver une équation différentielle vérifiée par P_n et en déduire une relation entre les fonctions h_n et $\widehat{h_n}$.

6°) Déduire de ce qui précède des vecteurs propres correspondant aux diverses valeurs propres de l'opérateur $\mathcal{F}$ (voir exercices 8.4 et 9.6).

Solution

1°) Posons $y = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ avec $a_n = 1$ et $a_k \in \mathbb{R}$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$; y est solution de (E_n) si et seulement si

$$\sum_{k=0}^{n-2} (k+1)(k+2) a_{k+2} x^k - 4\pi \sum_{k=1}^{n} k a_k x^k + 4\pi n \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0 .$$

Ainsi, pour tout $k \in \{0, \ldots, n-2\}$, $(k+1)(k+2)a_{k+2} + 4\pi(n-k)a_k = 0$, $a_n = 1$ et $a_{n-1} = 0$. On doit distinguer deux cas.

– Si n est pair *i.e.* $n = 2p$, on obtient alors

$$\begin{cases} a_{2k+1} = 0 & \text{pour tout } k \in \{0, \ldots, p-1\} , \\ a_{2k} = \left(\dfrac{-1}{8\pi}\right)^{p-k} \dfrac{(2p)!}{(2k)!(p-k)!} & \text{pour tout } k \in \{0, \ldots, p\} . \end{cases}$$

– Si n est impair *i.e.* $n = 2p+1$, on obtient alors

$$\begin{cases} a_{2k} = 0 & \text{pour tout } k \in \{0, \ldots, p\} , \\ a_{2k+1} = \left(\dfrac{-1}{8\pi}\right)^{p-k} \dfrac{(2p+1)!}{(2k+1)!(p-k)!} & \text{pour tout } k \in \{0, \ldots, p\} . \end{cases}$$

2°) Comme $H_n = e^{\pi x^2} h_n$, en dérivant $H_n = e^{\pi x^2} h_n$ deux fois et sachant que H_n est solution de (E_n), on vérifie facilement que

$$h_n'' + \left(-4\pi^2 x^2 + 4\pi n + 2\pi\right) h_n = 0 . \qquad (10.4)$$

3°) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, donc $\widehat{h_n}$ existe et appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ d'après le théorème 10.3. D'autre part, en appliquant la transformation de Fourier à (10.4)

$$\mathcal{F}\left(h_n''\right) - 4\pi^2 \mathcal{F}\left(x^2 h_n\right) + (4\pi n + 2\pi)\mathcal{F}(h_n) = 0$$

et sachant d'après les théorèmes 8.3 et 8.4 que

$$\mathcal{F}\left(h_n''\right) = -4\pi^2\xi^2 \mathcal{F}(h_n) ,$$
$$\left(\mathcal{F}(h_n)\right)'' = -4\pi^2 \mathcal{F}(x^2 h_n) ,$$

on obtient

$$-4\pi^2\xi^2 \mathcal{F}(h_n) - 4\pi^2 \frac{-1}{4\pi^2}\left(\mathcal{F}(h_n)\right)'' + (4\pi n + 2\pi)\mathcal{F}(h_n) = 0 .$$

Ainsi, $\widehat{h_n}$ est solution de l'équation différentielle

$$\widehat{h_n}'' + \left(-4\pi^2\xi^2 + 4\pi n + 2\pi\right) \widehat{h_n} = 0 . \qquad (10.5)$$

4°) – Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\widehat{h_n}(\xi) = e^{-\pi\xi^2} P_n(\xi)$ où P_n est un polynôme de degré n. Remarquons tout d'abord que d'après l'exercice 8.4

$$\mathcal{F}\left(e^{-\pi x^2}\right) = e^{-\pi\xi^2} \quad \text{donc} \quad P_0 = H_0 = 1 ;$$
$$\mathcal{F}\left(x e^{-\pi x^2}\right) = -i\xi e^{-\pi\xi^2} \quad \text{donc} \quad P_1(\xi) = -iH_1(\xi) = -i\xi .$$

D'après la linéarité de $\mathcal{F}$ et le théorème 8.4, on a

$$\widehat{h_n}(\xi) = \sum_{k=0}^{n} a_k \widehat{x^k e^{-\pi x^2}}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{1}{(-2\pi i)^k} \frac{\partial^k}{\partial \xi^k}\left(e^{-\pi\xi^2}\right) .$$

Or, on vérifie par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\partial^k}{\partial \xi^k}\left(e^{-\pi\xi^2}\right) = e^{-\pi\xi^2} Q_k(\xi)$$

où Q_k est un polynôme à coefficients réels de degré k. Ainsi

$$\widehat{h_n}(\xi) = e^{-\pi\xi^2} P_n(\xi) \quad \text{où } P_n(\xi) = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{1}{(-2\pi i)^k} Q_k(\xi).$$

– Déterminons le coefficient du terme de degré n du polynôme P_n.
On vérifie sans peine que

$$Q_n(\xi) = e^{+\pi\xi^2} \frac{\partial^n}{\partial \xi^n}\left(e^{-\pi\xi^2}\right) = (-2\pi)^n \xi^n + \sum_{k=0}^{n-1} b_k \xi^k.$$

Comme $a_n = 1$ par hypothèse, le coefficient du terme de degré n du polynôme P_n est donc

$$\frac{a_n}{(-2i\pi)^n}(-2\pi)^n = (-i)^n.$$

5°) En dérivant $\widehat{h_n}(\xi) = e^{-\pi\xi^2} P_n(\xi)$ deux fois et sachant d'après la question 3°)que $\widehat{h_n}$ vérifie (10.5), on montre facilement que le polynôme P_n vérifie l'équation différentielle

$$P_n'' - 4\pi\xi P_n' + 4\pi n P_n = 0. \tag{10.6}$$

Autrement dit, $\dfrac{P_n}{(-i)^n}$ est solution de l'équation différentielle (E_n).

D'après la question précédente, $\dfrac{P_n}{(-i)^n}$ est un polynôme de degré n, dont le coefficient du terme de plus haut degré est 1, donc d'après l'unicité de la solution polynômiale de l'équation différentielle (E_n),

$$\frac{P_n}{(-i)^n} = H_n.$$

Par conséquent, $\widehat{h_n} = (-i)^n h_n$.

6°) On déduit de la question précédente des vecteurs propres de l'opérateur $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$
$\widehat{h_{4k}} = h_{4k}$, $\widehat{h_{4k+1}} = -ih_{4k+1}$, $\widehat{h_{4k+2}} = -h_{4k+2}$ et $\widehat{h_{4k+3}} = ih_{4k+3}$.

Chapitre **11**

Transformation de Fourier à plusieurs variables

RAPPELS DE COURS

Tout ce qu'on a vu dans les trois derniers chapitres sur $\mathbb{R}$ se généralise à $\mathbb{R}^N$ muni du produit scalaire euclidien. Nous allons plutôt insister sur les changements pour une fonction de $L^1(\mathbb{R}^N)$. Le lecteur les adaptera pour une fonction de $L^2(\mathbb{R}^N)$ ou de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Mais auparavant, fixons les notations.

Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$, $a \in \mathbb{R}$ et $\alpha = (k_1, k_2, \dots, k_N) \in \mathbb{N}^N$. On note

$ax = (ax_1, ax_2, \dots, ax_N)$;

$x^\alpha = x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \dots \cdot x_N^{k_N}$;

$$D^\alpha g(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_N^{k_N}}(x) \text{ où } |\alpha| = k_1 + \dots + k_N ;$$

$$(x|\xi) = \sum_{l=1}^{N} x_l \xi_l \text{ produit scalaire euclidien de } \mathbb{R}^N ;$$

$$\|x\|^2 = \sum_{l=1}^{N} x_l^2 \text{ et } r = \|x\| ;$$

$$\|\xi\|^2 = \sum_{l=1}^{N} \xi_l^2 \text{ et } \rho = \|\xi\|.$$

Définition 11.1 *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. On appelle* transformée de Fourier *l'application qu'on note $\hat{f}$ ou $\mathcal{F}(f)$ définie pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ par*

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)e^{-2i\pi(x|\xi)}\,dx,$$

et transformée de Fourier conjuguée *l'application qu'on note $\bar{\mathcal{F}}(f)$ définie pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ par*

$$\bar{\mathcal{F}}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)e^{2i\pi(x|\xi)}\,dx.$$

Les théorèmes 8.1, 8.2, 8.5 et leurs corollaires, 8.6, ainsi que les deux premières assertions de la proposition 8.1 sont encore valables.

Nous avons par ailleurs les résultats suivants.

Théorème 11.1 (Transformation de Fourier de produits tensoriels) *Supposons que $N = p + q$ et que f soit le produit tensoriel des deux fonctions f_1 et f_2, c'est-à-dire si $x = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ alors $f(x) = f_1(y_1)f_2(y_2)$. Alors, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$,*

$$\hat{f}(\xi) = \hat{f}_1(\nu_1)\hat{f}_2(\nu_2)$$

où $\nu_1 = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ et $\nu_2 = (\xi_{p+1}, \xi_{p+2}, \ldots, \xi_N)$.

Théorème 11.2 (Transformation de Fourier d'une fonction radiale) *Supposons que f est* radiale *c'est-à-dire qu'il existe une fonction φ d'une variable réelle positive telle que $f(x) = \varphi(r)$. Alors, $\hat{f}$ est aussi radiale* i.e. *il existe une fonction ψ d'une variable réelle positive telle que $\hat{f}(\xi) = \psi(\rho)$ (voir exercice 11.2) et on a*

$$\psi(\rho) = \frac{2\pi}{\rho^{\frac{N-2}{2}}} \int_0^{+\infty} r^{\frac{N}{2}} \varphi(r) J_{\frac{N-2}{2}}(2\pi\rho r)\,dr$$

où J_a est la fonction de Bessel d'indice a.

Explicitons $\psi(\rho)$ dans les cas les plus courants : $N = 1, 2$ ou 3.

Sachant que pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$J_{\frac{-1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x \quad \text{et} \quad J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x,$$

on en déduit que

$$\psi(\rho) = 2\int_0^{+\infty} \varphi(r)\cos(2\pi\rho r)\,dr \quad \text{si } N = 1\,;$$

$$\psi(\rho) = \frac{2}{\rho}\int_0^{+\infty} r\varphi(r)\sin(2\pi\rho r)\,dr \quad \text{si } N = 3\,.$$

Quant au cas $N = 2$, $\psi(\rho) = 2\pi \int_0^{+\infty} r\varphi(r)J_0(2\pi\rho r)\,dr$ où,

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix\cos\theta}\,d\theta = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\sin\theta)\,d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

selon l'usage (voir les exercices 11.3 et 11.4).

Théorème 11.3 (Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ et dérivation) *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$.*

1°) Si la fonction $x \mapsto x_j f(x)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^N)$, alors $\hat{f}$ admet une dérivée partielle par rapport à ξ_j continue, uniformément bornée et on a

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_j} = -2i\pi\mathcal{F}(x_j f)\,.$$

Plus généralement, si $\alpha = (k_1, k_2, \ldots, k_N) \in \mathbb{N}^N$ et si la fonction $x \mapsto x^\alpha f(x)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^N)$, alors $D^\alpha \hat{f}$ est une fonction continue, uniformément bornée et on a

$$D^\alpha \hat{f} = \mathcal{F}\left((-2i\pi x)^\alpha f\right).$$

2°) Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ et si $x \mapsto \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j}$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^N)$, alors la fonction définie sur $\mathbb{R}^N$, qui à ξ associe $\xi_j \hat{f}(\xi)$, est continue, uniformément bornée et on a

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = 2i\pi\xi_j \hat{f}\,.$$

Plus généralement, si $\alpha = (k_1, k_2, \ldots, k_N) \in \mathbb{N}^N$ et si la fonction $D^\alpha f$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^N)$, alors la fonction définie sur $\mathbb{R}^N$, qui à ξ associe $(2i\pi\xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$, est une fonction continue, uniformément bornée et on a pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$,

$$\mathcal{F}\left(D^\alpha f\right)(\xi) = (2i\pi\xi)^\alpha \hat{f}(\xi)\,.$$

EXERCICES

Exercice 11.1

Soit $a \in]0, +\infty[$ donné. Calculer $\mathcal{F}(e^{-a\|x\|^2})$. On pourra utiliser l'exercice 8.4.

Solution

Grâce au théorème 11.1, on a, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$,

$$\mathcal{F}\left(e^{-a\|x\|^2}\right)(\xi) = \mathcal{F}\left(\prod_{k=1}^{N} e^{-ax_k^2}\right)(\xi) = \prod_{k=1}^{N}\mathcal{F}\left(e^{-ax_k^2}\right)(\xi_k)\,.$$

Or $\mathcal{F}\left(e^{-ax_k^2}\right)(\xi_k) = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\exp\left(-\dfrac{\pi^2\xi_k^2}{a}\right)$ (d'après l'exercice 8.4), d'où

$$\mathcal{F}\left(e^{-a\|x\|^2}\right)(\xi) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{N}{2}}\exp\left(-\frac{\pi^2\|\xi\|^2}{a}\right).$$

Exercice 11.2

Soient A une matrice réelle inversible d'ordre N et $B = ({}^tA)^{-1}$ (*i.e.* l'inverse de la transposée de A). Établir que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$, on a

$$\mathcal{F}\big(f(Ax)\big)(\xi) = \frac{1}{|\det A|}\hat{f}(B\xi).$$

Solution

– Soit $\xi \in \mathbb{R}^N$. En effectuant le changement de variable $y = Ax$ (théorème 5.3) et sachant que $(A^{-1}y|\xi) = (y|{}^t(A^{-1})\xi) = (y|({}^tA)^{-1}\xi)$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\big(f(Ax)\big)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2i\pi(x|\xi)}f(Ax)\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2i\pi(A^{-1}y|\xi)}f(y)\frac{1}{|\det A|}\,dy\\ &= \frac{1}{|\det A|}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-2i\pi(y|{}^t(A^{-1})\xi)}f(y)\,dy\\ &= \frac{1}{|\det A|}\mathcal{F}(f)\big(({}^tA)^{-1}\xi\big).\end{aligned}$$

– Si A est une matrice diagonale, on a, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$,

$$\mathcal{F}\big(f(Ax)\big)(\xi) = \mathcal{F}\big(f(a_1x_1,\ldots,a_Nx_N)\big)(\xi) = \frac{1}{|a_1a_2\ldots a_N|}\hat{f}\left(\frac{\xi_1}{a_1},\ldots,\frac{\xi_N}{a_N}\right).$$

– Si A est une matrice de rotation *i.e.* ${}^tA = A^{-1}$ et $\det A = 1$, alors, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$, on a

$$\mathcal{F}\big(f(Ax)\big)(\xi) = \mathcal{F}(f)(A\xi).$$

En particulier si f est radiale *i.e.* $f(Ax) = f(x)$ alors $\hat{f}$ l'est aussi.

Exercice 11.3

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ une fonction radiale *i.e.* il existe φ telle que $f(x_1, x_2) = \varphi(r)$.

1°) En passant en coordonnées polaires (théorème 5.3), montrer que $\hat{f}$ est aussi radiale *i.e.* il existe ψ telle que $\hat{f}(\xi_1,\xi_2) = \psi(\rho)$ et qu'on a, pour tout $\rho \in]0,+\infty[$,

$$\psi(\rho) = 2\pi\int_0^{+\infty} J_0(2\pi\rho r)\varphi(r)r\,dr,$$

où J_0 est la fonction de Bessel d'indice 0 définie par

$$J_0(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp(-it\cos\theta)\,d\theta.$$

2°) Montrer que, pour tout $\rho > 0$, on a

$$\psi(\rho) = \int_{-\pi}^{\pi}\hat{h}(\rho\cos\theta)\,d\theta$$

où $\hat{h}$ est la transformée de Fourier d'une fonction h intégrable sur $\mathbb{R}$ qu'on exprimera en fonction de φ.

3°) Soit $a > 0$; déduire de la question précédente les transformées de Fourier respectives des fonctions $\dfrac{e^{-ar}}{r}$ et e^{-ar}.

Solution

1°) En passant aux coordonnées polaires et sachant que f est radiale, on obtient

$$\hat{f}(\xi_1,\xi_2) = \int_{]0,+\infty[\times[-\pi,\pi]} r\varphi(r)\exp\big(-2i\pi r(\xi_1\cos\theta + \xi_2\sin\theta)\big)\,dr\,d\theta.$$

Comme $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$, la fonction $r \mapsto r\varphi(r) \in L^1(]0,+\infty[)$ d'après le théorème 5.4. Par suite, la fonction $(r,\theta) \mapsto r\varphi(r)\exp(-2i\pi r\rho\cos\theta)$ est intégrable sur $]0,+\infty[\times[-\pi,\pi]$. Ainsi, d'après le théorème de Fubini (théorème 5.2), on a

$$\hat{f}(\xi_1,\xi_2) = \int_0^{+\infty} r\varphi(r)\left(\int_{-\pi}^{\pi}\exp\big(-2i\pi r(\xi_1\cos\theta + \xi_2\sin\theta)\big)\,d\theta\right)dr.$$

En posant $\xi_1 = \rho\cos\alpha$ et $\xi_2 = \rho\sin\alpha$, on obtient

$$\int_{-\pi}^{\pi}\exp\big(-2i\pi r(\xi_1\cos\theta + \xi_2\sin\theta)\big)\,d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\exp\big(-2i\pi r\rho\cos(\theta-\alpha)\big)\,d\theta.$$

Or il est clair que l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi}\exp\big(-2i\pi r\rho\cos(\theta-\alpha)\big)\,d\theta$ est indépendante de α et vaut $2\pi J_0(2\pi r\rho)$. Ainsi, $\hat{f}$ ne dépend que de ρ et on a

$$\psi(\rho) = 2\pi\int_0^{+\infty} r\varphi(r)J_0(2\pi\rho r)\,dr.$$

2°) D'après le théorème de Fubini (théorème 5.2), on a aussi

$$\psi(\rho) = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^{+\infty} r\varphi(r)\exp(-2i\pi r\rho\cos\theta)\,dr\right)d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\hat{h}(\rho\cos\theta)\,d\theta$$

où $\hat{h}$ est la transformée de Fourier de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x\varphi(x)\mathbb{I}_{]0,+\infty[}$.

3°) Application.

– Si $\varphi(r) = \dfrac{e^{-ar}}{r}$ alors

$$\hat{h}(\rho\cos\theta) = \int_0^{\infty}\exp\big(-r(a + 2i\pi r\rho\cos\theta)\big)\,dr = \frac{1}{a + 2i\pi\rho\cos\theta}.$$

Comme $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\theta}{a^2+4\pi^2\rho^2\cos^2\theta}\,d\theta = 0$, on a, en effectuant le changement de variable $x = \tan\theta$,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{a+2i\pi\rho\cos\theta}\,d\theta &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a}{a^2+4\pi^2\rho^2\cos^2\theta}\,d\theta\\ &= 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a^2+4\pi^2\rho^2\cos^2\theta}\,d\theta\\ &= 4a\int_0^{+\infty} \frac{1}{a^2+4\pi^2\rho^2+a^2x^2}\,dx\\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{a^2+4\pi^2\rho^2}}\,.\end{aligned}$$

D'où

$$\mathcal{F}\left(\frac{e^{-ar}}{r}\right)(\rho) = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2+4\pi^2\rho^2}}\,.$$

- Si $\varphi(r) = e^{-ar}$, après une intégration par parties, on trouve

$$\hat{h}(r\cos\theta) = \int_0^{+\infty} r\exp\big(-r(a+2i\pi\rho\cos\theta)\big)\,dr = \frac{1}{(a+2i\pi\rho\cos\theta)^2}\,.$$

Par ailleurs, on montre que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{(a+2i\pi\rho\cos\theta)^2}\,d\theta = \frac{2\pi a}{\left(a^2+4\pi^2\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Ainsi, il vient

$$\mathcal{F}\left(e^{-ar}\right)(\rho) = \frac{2\pi a}{\left(a^2+4\pi^2\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Exercice 11.4

Soient $R > 0$ fixé et $\varphi(r) = \mathbb{1}_{[0,R[}(r)$. Exprimer la transformée de Fourier de φ dans le cas $N = 2$ en fonction de J_1 en utilisant

1°) la relation de « récurrence » : $\dfrac{d}{dx}\left(x^{a+1}J_{a+1}(\alpha x)\right) = \alpha x^{a+1}J_a(\alpha x)$;

2°) le développement en série entière des fonctions de Bessel. On rappelle que pour tout entier naturel k, J_k est développable en série entière et on a

$$J_k(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+k)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n}\,. \qquad (11.1)$$

Solution

Dans le cas $N = 2$, on a

$$\mathcal{F}\left(\mathbb{1}_{[0,R[}\right)(\rho) = 2\pi\int_0^R rJ_0(2\pi\rho r)\,dr\,.$$

1°) En vertu de la relation de récurrence rappelée ci-dessus, on a

$$\frac{d}{dr}\big(rJ_1(2\pi\rho r)\big) = 2\pi\rho rJ_0(2\pi\rho r)\,.$$

D'où

$$\mathcal{F}\left(\mathbb{1}_{[0,R[}\right)(\rho) = \frac{R}{\rho}J_1(2\pi\rho R)\,,$$

formule utilisée en optique dans la théorie de la diffraction.

2°) La série entière (11.1) a pour intervalle de convergence $\mathbb{R}$ et on peut permuter $\int$ et $\sum$ sur l'intervalle $[0, R]$. D'où

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(\mathbb{1}_{[0,R[}\right)(\rho) &= 2\pi\int_0^R rJ_0(2\pi\rho r)\,dr\\ &= 2\pi\int_0^R r\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{2\pi\rho r}{2}\right)^{2n}dr\\ &= 2\pi\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{2\pi\rho}{2}\right)^{2n}\int_0^R r^{2n+1}\,dr\\ &= 2\pi\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{2\pi\rho}{2}\right)^{2n}\frac{R^{2n+2}}{2n+2}\\ &= \frac{2\pi}{2}R^2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2(n+1)}\left(\frac{2\pi\rho R}{2}\right)^{2n}\\ &= \frac{R}{\rho}\frac{2\pi\rho R}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+1)!}\left(\frac{2\pi\rho R}{2}\right)^{2n}\\ &= \frac{R}{\rho}J_1(2\pi\rho R)\,.\end{aligned}$$

Exercice 11.5

Soient $a > 0$ donné et φ_a la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $\varphi_a(r) = \dfrac{e^{-ar}}{r}$. Calculer la transformée de Fourier de φ_a en dimension 3 et en déduire $\varphi_a * \varphi_b$.

Solution

– Dans le cas $N = 3$, on a pour tout $\rho > 0$

$$\mathcal{F}(\varphi_a)(\rho) = \frac{2}{\rho}\int_0^{+\infty} \sin(2\pi\rho r) r \frac{e^{-ar}}{r}\,dr = \frac{2}{\rho}\int_0^{+\infty} \sin(2\pi\rho r) e^{-ar}\,dr.$$

Par ailleurs, on sait que pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, une primitive de $e^{-\alpha x}\sin(\beta x)$ est $\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}\big(\alpha\sin(\beta x) - \beta\cos(\beta x)\big)$, donc

$$\int_0^{+\infty} \sin(2\pi\rho r)e^{-ar}\,dr = \frac{2\pi\rho}{a^2+4\pi^2\rho^2}.$$

D'où

$$\mathcal{F}(\varphi_a)(\rho) = \frac{4\pi}{a^2+4\pi^2\rho^2}.$$

– On sait que pour tout $(f,g) \in L^1(\mathbb{R}^N) \times L^1(\mathbb{R}^N)$, $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(g)\mathcal{F}(f)$. Donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\varphi_a * \varphi_b)(\rho) &= \frac{4\pi}{a^2+4\pi^2\rho^2}\,\frac{4\pi}{b^2+4\pi^2\rho^2} \\
&= \frac{4\pi}{b^2-a^2}\left(\frac{4\pi}{a^2+4\pi^2\rho^2} - \frac{4\pi}{b^2+4\pi^2\rho^2}\right) \quad \text{si } b \neq a \\
&= \frac{4\pi}{b^2-a^2}\big(\mathcal{F}(\varphi_a) - \mathcal{F}(\varphi_b)\big) \quad \text{si } b \neq a \\
&= \mathcal{F}\left(\frac{4\pi}{b^2-a^2}(\varphi_a - \varphi_b)\right) \quad \text{si } b \neq a,
\end{aligned}$$

comme $\mathcal{F}$ est injective (théorème 8.6) sur $L^1(\mathbb{R}^N)$, on a alors si $b \neq a$,

$$\varphi_a * \varphi_b = \frac{4\pi}{b^2-a^2}(\varphi_a - \varphi_b).$$

Si $a = b$, on fait tendre a vers b et on trouve

$$\varphi_a * \varphi_a = \frac{2\pi r}{a}\varphi_a.$$

Exercice 11.6

1°) Établir que pour $(\nu,\mu,\beta) \in]-1,+\infty[^2 \times]0,+\infty[$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_\nu(\beta\sin t)\cos^{2\mu+1}(t)\sin^{\nu+1}(t)\,dt = 2^\mu\Gamma(1+\mu)\beta^{-1-\mu}J_{\nu+\mu+1}(\beta),$$

où J_ν est la fonction de Bessel d'ordre ν définie sur $]0,+\infty[$ par

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}}{n!\Gamma(n+\nu+1)}.$$

On pourra utiliser l'exercice 5.12.

2°) En déduire que, pour tout $\alpha \in]0,+\infty[$,

$$\mathcal{F}\left(\left(1-r^2\right)^\alpha \mathbb{I}_{\{(r<1)\}}\right)(\rho) = \frac{1}{\pi^\alpha\rho^{\alpha+\frac{N}{2}}}\Gamma(1+\alpha)J_{\alpha+\frac{N}{2}}(2\pi\rho).$$

Solution

1°) Soit $(\nu,\mu,\beta) \in]-1,+\infty[^2 \times]0,+\infty[$. Pour tout $t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, on a

$$J_\nu(\beta\sin t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{\beta\sin t}{2}\right)^{2n+\nu}}{n!\Gamma(n+\nu+1)}.$$

Ainsi pour établir la formule demandée, on permute $\int$ et $\sum$ (puisque la convergence est normale), ce qui donne

$$\int_0^{\pi/2} J_\nu(\beta\sin t)\cos^{2\mu+1}(t)\sin^{\nu+1}(t)\,dt = \left(\frac{\beta}{2}\right)^\nu\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{\beta}{2}\right)^{2n}}{n!\Gamma(\nu+n+1)}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+2\nu+1}(t)\cos^{2\mu+1}(t)\,dt.$$

Par ailleurs, on sait (d'après l'exercice 5.12) que

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+2\nu+1}(t)\cos^{2\mu+1}(t)\,dt = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(n+\nu+1)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(n+\mu+\nu+2)},$$

d'où

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} J_\nu(\beta\sin t)(\cos t)^{2\mu+1}(\sin t)^{\nu+1}\,dt
&= \frac{\Gamma(\mu+1)}{2}\left(\frac{\beta}{2}\right)^\nu\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{\beta}{2}\right)^{2n}}{n!\Gamma(n+\mu+\nu+2)} \\
&= \frac{\Gamma(\mu+1)}{2}\left(\frac{\beta}{2}\right)^{-\mu-1}\left(\frac{\beta}{2}\right)^{\mu+\nu+1}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{\beta}{2}\right)^{2n}}{n!\Gamma(n+\mu+\nu+1+1)} \\
&= 2^\mu\beta^{-1-\mu}\Gamma(1+\mu)J_{\mu+\nu+1}(\beta).
\end{aligned}$$

2°) La formule

$$\hat{f}(\xi) = \psi(\rho) = \frac{2\pi}{\rho^{\frac{N-2}{2}}}\int_0^{+\infty} r^{\frac{N}{2}}J_{\frac{N-2}{2}}(2\pi\rho r)\varphi(r)\,dr$$

donne

$$\psi(\rho) = \frac{2\pi}{\rho^{\frac{N-2}{2}}}\int_0^1 J_{\frac{N-2}{2}}(2\pi\rho r)\left(1-r^2\right)^\alpha r^{\frac{N}{2}}\,dr.$$

En faisant le changement de variable $r = \sin t$, on obtient

$$\psi(\rho) = \frac{2\pi}{\rho^{\frac{N-2}{2}}}\int_0^{\pi/2} J_{\frac{N-2}{2}}(2\pi\rho\sin t)(\cos t)^{2\alpha+1}(\sin t)^{\frac{N}{2}}\,dt.$$

En appliquant le résultat de la première question avec $\beta = 2\pi\rho$, $\mu = \alpha$ et $\nu = \dfrac{N}{2} - 1$, on trouve que

$$\mathcal{F}\left(\left(1-r^2\right)^{\alpha}\mathbb{I}_{(r<1)}\right)(\rho) = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\pi^{\alpha}}\,\frac{J_{\alpha+\frac{N}{2}}(2\pi\rho)}{\rho^{\alpha+\frac{N}{2}}}.$$

Exercice 11.7

Soient $N \geqslant 1$ et A une matrice réelle définie positive. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, $Q(x) = (Ax|x)$ et $f(x) = \exp\bigl(-Q(x)\bigr)$.

Vérifier que f appartient à $L^1(\mathbb{R}^N)$ et que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$,

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\sqrt{\det A}}\exp\bigl(-\pi^2(A^{-1}\xi|\xi)\bigr).$$

Rappel : $\mathcal{F}\left(e^{-\|y\|^2}\right)(\xi) = \pi^{\frac{N}{2}}e^{-\pi^2\|\xi\|^2}$ d'après l'exercice 11.1.

Application : calculer la transformée de Fourier de f où

$$f(x_1,x_2) = \exp\bigl(-(x_1^2+x_2^2+x_1x_2)\bigr).$$

Solution

- On a montré dans l'exercice 5.10 que $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et que $\|f\|_1 = \dfrac{\pi^{N/2}}{\sqrt{\det A}}$.
- Puisque A est symétrique définie positive, il existe une unique matrice $B \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ symétrique définie positive telle que $B^2 = A$. En effet, si on désigne par $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ les N valeurs propres (strictement positives) de A, D la matrice diagonale dont les coefficients sont les α_i, Δ la matrice diagonale d'éléments diagonaux $\sqrt{\alpha_i}$ et P une matrice orthogonale telle que $A = P^{-1}DP$, on prend $B = P^{-1}\Delta P$. Il en résulte que pour $x \in \mathbb{R}^N$,
$$\|B^{-1}x\|^2 = (B^{-1}x|B^{-1}x) = \bigl((B^{-1})^2x|x\bigr) = (A^{-1}x|x)$$
et pour $(y,\xi) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$,
$$\bigl(B^{-1}y|\xi\bigr) = \bigl(y|B^{-1}\xi\bigr).$$
- Calculons maintenant $\hat{f}$. On a, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$,
$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2i\pi(x|\xi)}e^{-(Ax|x)}\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2i\pi(x|\xi)}e^{-(Bx|Bx)}\,dx.$$
En faisant le changement de variable $y = Bx$, on obtient
$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \frac{1}{\det B}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-2i\pi(B^{-1}y|\xi)}e^{-\|y\|^2}\,dy\\ &= \frac{1}{\sqrt{\det A}}\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi(y|B^{-1}\xi)}e^{-\|y\|^2}\,dy\\ &= \frac{1}{\sqrt{\det A}}\mathcal{F}\left(e^{-\|y\|^2}\right)(B^{-1}\xi)\\ &= \frac{\pi^{N/2}}{\sqrt{\det A}}e^{-\pi^2\|B^{-1}\xi\|^2}\\ &= \frac{\pi^{N/2}}{\sqrt{\det A}}e^{-\pi^2(A^{-1}\xi|\xi)}.\end{aligned}$$

- Calculons $\hat{f}$ où $f(x_1,x_2) = \exp\bigl(-(x_1^2+x_2^2+x_1x_2)\bigr)$. On applique le résultat précédent avec
$$A = \begin{pmatrix}1 & 1/2\\ 1/2 & 1\end{pmatrix} \quad\text{et}\quad A^{-1} = \frac{4}{3}\begin{pmatrix}1 & -1/2\\ -1/2 & 1\end{pmatrix}$$
pour trouver
$$\hat{f}(\xi_1,\xi_2) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\exp\left(-\frac{4\pi^2}{3}\bigl(\xi_1^2-\xi_1\xi_2+\xi_2^2\bigr)\right).$$

Exercice 11.8

Le but de cet exercice est de calculer la transformée de Fourier de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^N$ par $f(x) = e^{-\|x\|}$ sans passer par les fonctions de Bessel.

1°) Vérifier que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{1+y^2} = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(1+y^2)u}\,du$ et pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, $e^{-|\beta|} = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(\beta y)}{1+y^2}\,dy$.

En déduire que pour tout $\beta \in \mathbb{R}$,
$$e^{-|\beta|} = \int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi u}}\exp\left(-u-\frac{\beta^2}{4u}\right)du.$$

2°) Soit $u \in]0,+\infty[$; on considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^N$ par $g_u(x) = \exp\left(-\dfrac{\|x\|^2}{4u}\right)$. Établir que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$
$$\hat{f}(\xi) = \int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi u}}e^{-u}\hat{g}_u(\xi)\,du.$$

3°) Calculer $\hat{g}_u$ et en déduire que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$
$$\hat{f}(\xi) = \frac{2^N\pi^{\frac{N-1}{2}}\Gamma\left(\dfrac{N+1}{2}\right)}{\left(1+4\pi^2\|\xi\|^2\right)^{\frac{N+1}{2}}}.$$

Solution

1°) – Il est évident que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{1+y^2} = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(1+y^2)u}\,du$.

– On sait d'après les exemples usuels du chapitre 8 (page 253), exemple (v), que pour tout $\beta \in \mathbb{R}$
$$\mathcal{F}\left(\frac{2}{4\pi^2x^2+1}\right)(\beta) = e^{-|\beta|}$$

soit
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{4\pi^2x^2+1}\cos(2\pi\beta x)\,dx = e^{-|\beta|}.$$
En faisant le changement de variable $y = 2\pi x$, on obtient
$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(\beta y)}{y^2+1}\,dy = e^{-|\beta|}.$$

– Soit $\beta > 0$, on a en vertu de ce qui précède
$$\begin{aligned} e^{-\beta} &= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(\beta y)}{1+y^2}\,dy \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos(\beta y)\left(\int_0^{+\infty} e^{-(1+y^2)u}\,du\right)dy. \end{aligned}$$
Par ailleurs, la fonction Φ définie sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ par
$$\Phi(y,u) = \cos(\beta y)e^{-u}e^{-y^2u}$$
est continue et intégrable sur $]0,+\infty[^2$. En appliquant le théorème de Fubini (théorème 5.2), on a alors
$$\frac{\pi}{2}e^{-\beta} = \int_0^{+\infty} e^{-u}\left(\int_0^{+\infty}\cos(\beta y)e^{-y^2u}\,dy\right)du.$$
Or, en effectuant le changement de variable $y = 2\pi t$, on obtient
$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty}\cos(\beta y)e^{-y^2u}\,dy &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2u}e^{-i\beta y}\,dy \\ &= \pi\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4\pi^2t^2u}e^{-2i\pi t\beta}\,dt \\ &= \pi\mathcal{F}\left(e^{-4\pi^2ut^2}\right)(\beta) \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{u}}\exp\left(-\frac{\beta^2}{4u}\right) \end{aligned}$$
car $\mathcal{F}\left(e^{-at^2}\right)(\beta) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\left(-\frac{\pi^2\beta^2}{a}\right)$ (voir exercice 8.4).

D'où
$$\begin{aligned} e^{-\beta} &= \frac{2}{\pi}\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\sqrt{\frac{\pi}{u}}e^{-u}\exp\left(-\frac{\beta^2}{4u}\right)du \\ &= \int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi u}}\exp\left(-u-\frac{\beta^2}{4u}\right)du. \end{aligned}$$

2°) D'après la question précédente, on a, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$,
$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2i\pi(x|\xi)}e^{-\|x\|}\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2i\pi(x|\xi)}\left(\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi u}}\exp\left(-u-\frac{\|x\|^2}{4u}\right)du\right)dx. \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour $\xi \in \mathbb{R}^N$ fixé, l'application Φ définie sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}^N$ par $\Phi(u,x) = e^{-2i\pi(x|\xi)}\frac{1}{\sqrt{\pi u}}\exp\left(-u-\frac{\|x\|^2}{4u}\right)$ est intégrable, donc le théorème de Fubini (théorème 5.2) est applicable et on a
$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{\pi u}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} e^{-2i\pi(x|\xi)}\exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4u}\right)dx\right)du \\ &= \int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{\pi u}}\mathcal{F}(g_u)(\xi)\,du. \end{aligned}$$

3°) D'après l'exercice 11.1, $\mathcal{F}(g_u)(\xi) = (4\pi u)^{\frac{N}{2}}\exp\left(-4\pi^2u\|\xi\|^2\right)$, donc, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$,
$$\hat{f}(\xi) = 2^N\pi^{\frac{N-1}{2}}\int_0^{+\infty} u^{\frac{N-1}{2}}e^{-u\left(1+4\pi^2\|\xi\|^2\right)}\,du.$$
Or, en faisant le changement de variable $x = u\left(1+4\pi^2\|\xi\|^2\right)$, on obtient
$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} u^{\frac{N-1}{2}}e^{-u\left(1+4\pi^2\|\xi\|^2\right)}\,du &= \int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac{N-1}{2}}}{\left(1+4\pi^2\|\xi\|^2\right)^{\frac{N-1}{2}}}e^{-x}\frac{dx}{1+4\pi^2\|\xi\|^2} \\ &= \frac{1}{\left(1+4\pi^2\|\xi\|^2\right)^{\frac{N+1}{2}}}\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\frac{N+1}{2}-1}\,dx \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)}{\left(1+4\pi^2\|\xi\|^2\right)^{\frac{N+1}{2}}}. \end{aligned}$$
Finalement,
$$\hat{f}(\xi) = \frac{2^N\pi^{\frac{N-1}{2}}\Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)}{\left(1+4\pi^2\|\xi\|^2\right)^{\frac{N+1}{2}}}.$$

Commentaire : Pour le calcul de $\hat{f}$ *via* les fonctions de Bessel, voir le livre de L. Schwartz [42, pp. 163–165].

Exercice 11.9

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N)$.

1°) Montrer que si pour tout $j \in \{1,\dots,N\}$, les fonctions $x \mapsto \frac{\partial f(x)}{\partial x_j}$, $x \mapsto \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j^2}$ appartiennent à $L^1(\mathbb{R}^N)$, alors pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$
$$\mathcal{F}(\Delta f)(\xi) = -4\pi^2\|\xi\|^2\hat{f}(\xi).$$
On rappelle que $\Delta f = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$, appelé le *laplacien*.

2°) Montrer que si la fonction $x \mapsto \|x\|^2 f(x)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^N)$, alors $\hat{f}$ appartient à $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N)$ et on a, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$,

$$\mathcal{F}\left(-4\pi^2\|x\|^2 f\right)(\xi) = \Delta\hat{f}(\xi).$$

Solution

1°) Sachant que pour tout $j \in \{1, \ldots, N\}$, on a

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}\right) = (2i\pi\xi_j)^2\hat{f},$$

il est facile de voir que

$$\mathcal{F}(\Delta f) = \mathcal{F}\left(\sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}\right) = \sum_{j=1}^N \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}\right) = -4\pi^2\sum_{j=1}^N \xi_j^2\hat{f} = -4\pi^2\|\xi\|^2\hat{f}.$$

2°) On sait que, pour tout $j, k \in \{1, \ldots, N\}$,

$$|x_j x_k f(x)| \leqslant \left(x_j^2 + x_k^2\right)|f(x)| \leqslant \|x\|^2|f(x)|.$$

Comme la fonction $x \mapsto \|x\|^2 f(x)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^N)$, la fonction $x \mapsto x_j x_k f(x)$ appartient aussi à $L^1(\mathbb{R}^N)$. Donc la fonction $\hat{f}$ admet des dérivées partielles deuxièmes continues, soit $\hat{f}$ appartient à $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N)$ et on a

$$\frac{\partial^2\hat{f}}{\partial\xi_j\partial\xi_k} = \mathcal{F}\left(-4\pi^2 x_j x_k f\right).$$

En outre

$$\mathcal{F}\left(-4\pi^2\|x\|^2 f\right) = \mathcal{F}\left(\sum_{j=1}^N -4\pi^2 x_j^2 f\right) = \sum_{j=1}^N \mathcal{F}\left(-4\pi^2 x_j^2 f\right) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2\hat{f}}{\partial\xi_j^2} = \Delta\hat{f}.$$

Exercice 11.10

Montrer que pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$,

$$\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\right\|_2 \leqslant \frac{1}{2}\|\Delta u\|_2.$$

Solution

On sait d'après l'exercice précédent 11.9 que

$$\mathcal{F}(\Delta u)(\xi) = -4\pi^2\|\xi\|^2\hat{u} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\right)(\xi) = -4\pi^2\xi_1\xi_2\hat{u}.$$

Donc, en vertu de l'inégalité $|ab| \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$, on a

$$\left|\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\right)\right| = 4\pi^2|\xi_1\xi_2||\hat{u}| \leqslant 4\pi^2\frac{\xi_1^2+\xi_2^2}{2}|\hat{u}|,$$

soit

$$\left|\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\right)\right| \leqslant \frac{1}{2}|\mathcal{F}(\Delta u)|,$$

d'où

$$\left\|\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\right)\right\|_2 \leqslant \frac{1}{2}\|\mathcal{F}(\Delta u)\|_2.$$

Par ailleurs, d'après la relation de Plancherel-Parseval (théorème 9.2), on a pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$, $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$, d'où

$$\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\right\|_2 = \left\|\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\right)\right\|_2 \leqslant \frac{1}{2}\|\mathcal{F}(\Delta u)\|_2 = \frac{1}{2}\|\Delta u\|_2.$$

Exercice 11.11

On considère l'équation de la chaleur à N dimensions

$$(C)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, & (t,x) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}^N, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

En opérant comme dans l'exercice 8.10, montrer qu'il existe $u \in \mathcal{C}^{1,2}(]0,+\infty[\times\mathbb{R}^N)$ vérifiant (C). On distinguera les cas $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

Solution

En appliquant la transformée de Fourier par rapport à la variable x et sachant que $\mathcal{F}(-\Delta u) = 4\pi^2\|\xi\|^2\hat{u}$, on vérifie que $\hat{u}(t,\xi) = \hat{u}_0(\xi)e^{-4\pi^2\|\xi\|^2 t}$. Posons pour tout $t > 0$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^N$, $h_t(\xi) = e^{-4\pi^2\|\xi\|^2 t}$. La fonction h_t appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $t > 0$.

- *Cas où* $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Dans ce cas, $\hat{u}_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ et donc $\xi \mapsto \hat{u}(t,\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $t \geqslant 0$. Comme $\mathcal{F}$ est un automorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ et puisqu'on a, d'après l'exercice 11.1, pour tout $t > 0$,

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-4\pi\|\xi\|^2 t}\right) = g_t \quad \text{où} \quad g_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}}e^{\frac{-\|x\|^2}{4t}},$$

la solution de (C) est alors donnée pour tout $t > 0$ par

$$u(t,\cdot) = g_t(\cdot) * u_0.$$

– *Cas où* $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Alors $\hat{u}_0 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N)$ et $\hat{u}(t,\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ pour tout t *strictement positif.* Donc, dans ce cas aussi, la solution de (C) est donnée par la formule

$$u(t,\cdot) = g_t * u_0 .$$

En outre, $g_t \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, donc

(i) $u(t,\cdot) \in L^p(\mathbb{R}^N)$ pour tout $p \in [1,+\infty]$ et on a, d'après le théorème 7.2,

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leqslant \|g_t\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} ;$$

(ii) $u(t,\cdot) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^N$, $D^\alpha u = D^\alpha g_t * u_0$, $D^\alpha u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et on a

$$\|D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leqslant \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \|D^\alpha e^{\frac{-\|x\|^2}{4t}}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} .$$

Mais attention, $u(t,\cdot)$ *n'appartient pas* à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Enfin, comme $(g_t)_{t>0}$ est une approximation de l'unité (voir exercice 7.9),

$$\int_{\mathbb{R}^N} g_t(x)\,dx = 1 ,$$

on a en vertu du théorème 7.5

$$\lim_{\substack{t\to 0 \\ t>0}} \|g_t * u_0 - u_0\|_1 = 0 .$$

– *Cas où* $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Alors $\hat{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$, la fonction $\xi \mapsto \hat{u}(t,\xi) = e^{-4\pi^2\|\xi\|^2 t}\hat{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et on a

$$\|\hat{u}(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leqslant \|\hat{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} .$$

Par ailleurs, $\mathcal{F}$ est un isomorphisme de $L^2(\mathbb{R}^N)$ donc $u(t,\cdot) \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et est aussi donné par la formule

$$u(t,\cdot) = g_t * u_0 .$$

De plus, on a d'après la relation de Plancherel-Parseval (théorème 9.2),

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^2_x(\mathbb{R}^N)} = \|\hat{u}(t,\cdot)\|_{L^2_\xi(\mathbb{R}^N)} \leqslant \|\hat{u}_0\|_{L^2_\xi(\mathbb{R}^N)} = \|u_0\|_{L^2_x(\mathbb{R}^N)} .$$

Par ailleurs, remarquons que pour tout $t > 0$ les fonctions $\xi_j\hat{u}(t,\cdot)$, $\xi_j\xi_k\hat{u}(t,\cdot)$, $\|\xi\|^2\hat{u}(t,\cdot)$ appartiennent à $L^2(\mathbb{R}^N)$, donc $\dfrac{\partial u}{\partial x_j}(t,\cdot)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}(t,\cdot)$ et $\Delta u(t,\cdot)$ appartiennent aussi à $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Enfin, dans ce cas aussi $u(t,\cdot) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ pour tout $t > 0$. Cela est dû au fait que $(1+4\pi^2\|\xi\|^2)^{s/2}\,\hat{u}(t,\cdot) \in L^2(\mathbb{R}^N)$ pour tout $s > 0$ et donc $u(t,\cdot) \in H^s(\mathbb{R}^N)$ pour tout $s > 0$ et tout $t > 0$.

Montrons que $u(t,\cdot)$ tend vers u_0 dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ quand t tend vers 0.

– Montrons tout d'abord que $\hat{u}(t,\cdot)$ tend vers $\hat{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$ quand t tend vers 0. En effet, on a

$$\lim_{\substack{t\to 0 \\ t>0}} \hat{u}(t,\xi) = \hat{u}_0(\xi) \text{ p.p. et } |\hat{u}(t,\xi) - \hat{u}_0(\xi)|^2 \leqslant 4|\hat{u}_0|^2 ,$$

donc le théorème de la convergence dominée (théorème 6.3) entraîne que

$$\lim_{\substack{t\to 0 \\ t>0}} \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{u}(t,\xi) - \hat{u}_0(\xi)|^2\,d\xi = 0 \quad \text{soit} \quad \lim_{\substack{t\to 0 \\ t>0}} \|\hat{u}(t,\cdot) - \hat{u}_0\|_2 = 0 .$$

– $\bar{\mathcal{F}}$ est continue sur $L^2(\mathbb{R}^N)$ donc $\bar{\mathcal{F}}(\hat{u}(t,\cdot))$ tend vers $\bar{\mathcal{F}}(\hat{u}_0)$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ quand t tend vers 0, soit $u(t,\cdot)$ tend vers u_0 dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ quand t tend vers 0.

Bibliographie

[1] Ansel J.P. et Ducel Y. – *Exercices corrigés en théorie de la mesure et de l'intégration.* Ellipses, Paris, 1995.

[2] Arino O., Delome C. et Genet J. – *Mesure et intégration. Exercices et problèmes avec solutions.* Vuibert, Paris, 1976.

[3] Aubin J.P. – *Analyse fonctionnelle appliquée, tome 1.* Presses universitaires de France, Paris, 1987.

[4] Bezard M. – *Cours d'analyse.* École nationale supérieure de techniques avancées, Paris, 1998.

[5] Bony J.M. – *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques.* École polytechnique, Palaiseau, 2000.

[6] Bouyssel M. – *Intégrale de Lebesgue, mesure et intégration. Exercices avec solutions et rappels de cours.* Cepadues-éditions, Toulouse, 1996.

[7] Brezis H. – *Analyse Fonctionnelle, théorie et applications.* Masson, Paris, 1993.

[8] Briane M. et Pagès G. – *Théorie de l'intégration.* Vuibert, Paris, 1998.

[9] Buchwalter H. – *Le calcul intégral.* Ellipses, Paris, 1991.

[10] Choquet G. – *Topologie.* Masson, Paris, 1995.

[11] Dalmasso R. et Witomski P. – *Analyse de Fourier et applications. Exercices corrigés.* Masson, Paris, 1996.

[12] de la Vallée Poussin C.J. – *Intégrale de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire.* Université Paris II, Paris, 1936.

[13] Deny J. – *Théorie de l'intégration.* Service de publications Orsay plus, Orsay, 1989.

[14] Dixmier J. – *Topologie générale.* Presses universitaires de France, Paris, 1981.

[15] Dolbeault P. – *Analyse complexe.* Masson, Paris, 1990.

[16] Ferrier J.P et Raboin P. – *Dictionnaire d'exercices d'analyse, Calcul intégral.* Ellipses, Paris, 1997.

[17] Gasquet C. et Witomski P. – *Analyse de Fourier et applications.* Masson, Paris, 1995.

[18] George C. – *Intégrale de Lebesgue.* École des mines de Nancy, Nancy, 1977.

[19] George C. – *Exercices et problèmes d'intégration.* Gauthier-Villars, Paris, 1980.

[20] George C. – *Mesure et intégration.* Cours de licence, Université Nancy 1, Nancy, 1982.

[21] Gostiaux B. – *Topologie, Analyse réelle, tome 2.* Presses universitaires de France, Paris, 1993.

[22] Hervé M. – *Transformation de Fourier et distributions.* Presses universitaires de France, Paris, 1986.

[23] Heurteau Y., Hulin D., Piquard F. et Queffelec H. – *Exercices et problèmes corrigés de calcul intégral.* Paris Onze éditions, Orsay, 1991.

[24] Kahane J.P. – *Mathématiques. Cours et exercices.* Service de publications Orsay plus, Orsay, 1991.

[25] Kaltenbach A. – *Intégration.* École des mines de Nancy, Nancy, 1996.

[26] Kolmogorov A. et Fomine S. – *éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle.* Mir, Moscou, 1974.

[27] Laudenbach F. – *Calcul différentiel et intégral.* École polytechnique, Palaiseau, 2000.

[28] Lebesgue H. – Intégrale, longueur, aire. *Annali di Mat.*, 7 : 231-359, 1902.

[29] Lebesgue H. – *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives.* Gauthiers-Villars, Paris, 1904.

[30] Lebesgue H. – *Leçons sur la théorie de l'intégration et la recherche des fonctions primitives.* Gautier-Villars, Paris, 1928.

[31] Legrand G. – *Intégration et distributions.* École des mines de Paris, Paris, 1986.

[32] Métivier M. – *Notions fondamentales de la théorie des probabilités.* Dunod, Paris, 1983.

[33] Métivier M. et J. Neveu J. – *Cours de Probabilités.* École polytechnique, Palaiseau, 1982.

[34] Ramis E., Deschamps C. et Odoux J. – *Cours de mathématiaues spéciales. Topologie et éléments d'analyse.* Masson, Paris, 1982.

[35] Revuz D. – *Mesure et intégration.* Hermann, Paris, 1994.

[36] Rouvière F. – *Petit guide de calcul différentiel.* Cassini, Paris, 1999.

[37] Rudin W. – *Analyse réelle et complexe.* Dunod, Paris, 1998.

[38] Samuelides M. et Touzillier L. – *Analyse Fonctionnelle.* Cepadues-éditions, Toulouse, 1989.

[39] Schwartz L. – *Théorie des distributions.* Hermann, Paris, 1966.

[40] Schwartz L. – *Topologie générale et analyse fonctionnelle.* Hermann, Paris, 1970.

[41] Schwartz L. – *Analyse I, Théorie des ensembles et topologie.* Hermann, Paris, 1991.

[42] Schwartz L. – *Analyse IV, Applications de la théorie de la mesure.* Hermann, Paris, 1992.

[43] Schwartz L. – *Analyse III, Calcul Intégral.* Hermann, Paris, 1993.

[44] Schwartz L. – *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques.* Hermann, Paris, 1994.

[45] Stein M.E et Weiss G. – *Introduction to Fourier Analysis on euclidean spaces.* Princeton University Press, Princeton, 1971.

[46] Stricker C. – *Cours de licence.* Centre de Télé-enseignement, Université de Franche-Comté, 1990.

[47] Tauvel P. – *Exercices corrigés d'analyse complexe.* Masson, Paris, 1992.

[48] Vo Khac K. – *Théorie de la mesure. Exercices et problèmes corrigés.* Hermann, Paris, 1993.

[49] Vo Khac K. – *Intégration et espaces de Lebesgue.* Hermann, Paris, 1994.

[50] Wagschal C. – *Intégration, exercices et problèmes corrigés.* Hermann, Paris, 1999.

Index