Chapitre 9

Convergence dominée et conséquences.

I. Interversion limite-intégrale. . . . 2
1/ Le cas d'une CU sur un segment. . . . 2
2/ Théorème de convergence dominée. . . . 3
3/ Théorème de convergence monotone. . . . 4
4/ Intégration terme à terme. . . . 5

II. Intégrales à paramètre 7
1/ Continuité et dérivabilité sous le signe somme. . . . 7
2/ Quelques applications. . . . 8
3/ Fonction Gamma d'Euler. . . . 9

Chapitre 9

Convergence dominée et conséquences.

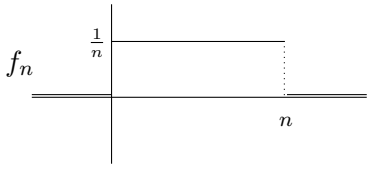
Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

I. Interversion limite-intégrale.

On va chercher des hypothèses suffisantes pour pouvoir intervertir les symboles lim et $\int$, c'est-à-dire quelles conditions doit-on avoir sur une suite d'applications (f_n) définies d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ pour avoir

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n \;=\; \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n$$

Le contre-exemple suivant montre que la question est pertinente puisqu'il existe des cas où l'inversion est impossible :



$$f_n(x) \;=\; \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si} \quad x \in [0,n] \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [0,n] \end{cases}$$

On a donc et $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n \;=\; 1$ et $\int_0^{+\infty} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n \;=\; 0$.

I.1/ Le cas d'une CU sur un segment.

Théorème - version suite.[1] Si (f_n) est une suite d'applications continues définies d'un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ convergeant uniformément alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n \;=\; \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n$$

Théorème - version série.[2] Si $\sum f_n$ est une série d'applications continues définies d'un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ convergeant uniformément alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n \;=\; \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$$

Ce théorème est appelé "Théorème d'intégration terme à terme (version CU sur un segment)".

Remarque. Ce théorème est un rappel. Voir toutes les informations sur ce théorème et les exemples dans le chapitre suite de fonctions.

I.2/ Théorème de convergence dominée.

Théorème.[3] Soient f et f_n dans $\mathcal{C}_m(I,\mathbb{K})$ pour tout n de $\mathbb{N}$, alors :

$$\exists g \in \mathcal{C}_m(I,\mathbb{R}^+),\ \begin{cases} f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f \\ g \text{ intégrable} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ |f_n| \leq g \quad \text{(condition de domination)} \end{cases}$$

alors les f_n et f sont intégrables et $\int_I \lim\limits_{n\to+\infty} f_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_I f_n$

Remarques. On rappelle que g intégrable signifie $\int_I |g|$ convergente.

Exercice.[4] Déterminer la limite des intégrales suivantes :

1. $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2+t^n}dt$
2. $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}dt$
3. $I_n = \displaystyle\int_0^{+\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt$

Exercice.[5] Montrer que le théorème de convergence dominée est une généralisation du théorème du paragraphe précédent, c'est-à-dire montrer grâce au théorème de convergence dominée que si (f_n) est une suite d'applications continues définies d'un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ convergeant uniformément alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n$$

Exercice - Cesàro intégrale.[6] Soit f une application continue de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ de limite l. Posons :

$$c_n = \frac{1}{n}\int_0^n f(t)dt$$

Montrer que $c_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

I.3/ Théorème de convergence monotone.

Exercice.[7] Soient f et f_n dans $\mathcal{C}_m(I,\mathbb{R})$ intégrables pour tout n de $\mathbb{N}$. Supposons de plus que (f_n) est croissante et converge simplement vers f.

1. Posons $g_n = f_n - f_0$. Montrer que g_n est intégrable et converge vers une fonction intégrable.
2. En utilisant le théorème de convergence dominée sur (g_n), montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I f \qquad (P)$$

   C'est le théorème de convergence uniforme.
3. Montrer que si (f_n) est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, on peut se passer de l'hypothèse f_n intégrables.

Remarque.

1. Comme le théorème de convergence dominée est admis, on peut voire le théorème de convergence monotone comme une conséquence. En réalité, il est utilisé dans la preuve du théorème de convergence dominée.
2. Le théorème de convergence monotone n'est pas au programme. Il faut donc refaire la démonstration quand on en a besoin.

Exercice.[8] Posons

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1-\frac{x}{n}\right)^n & \text{si} \quad x \in [0,n[\\ 0 & \text{si} \quad x \in [n,+\infty[\end{cases}$$

1. Montrer que (f_n) est croissante.
2. Montrer que (f_n) converge simplement.
3. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx$ en utilisant le théorème de convergence monotone.
4. Redémontrer le résultat en utilisant uniquement le théorème de convergence dominée.

I.4/ Intégration terme à terme.

Dans le cas des séries, on peut très bien utiliser le théorème de convergence dominée tel quel. Cependant, il est souvent plus utile d'utiliser la version suivante où l'on utilise le théorème de convergence dominé avec :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} |f_n|$$

On l'appelle le "théorème d'intégration terme à terme - version convergence dominée".

Coin de culture. Remarquons que la fonction g peut ne pas être définie pour certaines valeurs ce qui pose problème dans la preuve et montre que la démonstration de ces théorèmes nécessite une autre théorie de l'intégration que celle de Riemann : l'intégrale de Lebesgue

Théorème.[9] Soient f, f_n dans $\mathcal{C}_m(I,\mathbb{R})$ pour tout n de $\mathbb{N}$, alors :

$$\begin{cases} \sum f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f \\ f_n \text{ intégrable pour tout } n \\ \sum \int_I |f_n| \text{ convergente} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f \text{ intégrable} \\ \int_I f = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n \end{cases}$$

Remarque.

1. Contrairement au théorème de convergence dominée, on demande aux f_n d'être intégrables.
2. Ne pas oublier l'hypothèse de f continue par morceaux. En effet une suite de fonctions continues par morceaux peut converger vers une fonction qui n'est pas continue par morceaux.

Exercice - preuve du théorème d'ITT.[10] Soit p dans $\mathbb{N}$. Posons :

$$R_p = \sum_{k=p+1}^{\infty} f_k \qquad m_n = min\left(|R_p| \ ; \ \sum_{k=p+1}^{n} |f_k| \right)$$

On va utiliser le théorème de convergence monotone sur la suite de fonctions (m_n).

1. Montrer que chaque m_n est intégrable et la suite (m_n) est croissante.
2. Montrer que la suite (m_n) converge simplement vers $|R_p|$.
3. Montrer que pour tout segment $[a,b]$ de I, on a :

$$\int_a^b |R_p| \ \leq \ \sum_{k=p+1}^{+\infty} \int_I |f_k|$$

4. Montrer que f est intégrable sur I et $\int_I f = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$

Exercice.[11]

1. Montrer que :
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 x^{2n}(1-x)dx \;=\; \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$$
2. En déduire que :
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \;=\; \ln(2)$$

Exercice.[12] Montrer que :
$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1}dt \;=\; \frac{\pi^2}{6}$$

On pourra faire apparaitre une série géométrique.

II. Intégrales à paramètre

II.1/ Continuité et dérivabilité sous le signe somme.

Soient D et I deux intervalles de $\mathbb{R}$ non vides. Dans ce paragraphe, on cherche à pouvoir étudier la continuité et la dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale :

$$F(x) = \int_I f(x,t)dt$$

variable de la fonction ↑ ↑ Variable d'intégration

avec $(x,t) \mapsto f(x,t)$ une application de $D \times I$ dans $\mathbb{K}$.

Théorème - Continuité.[13] Avec les notations de f et F de début de paragraphe, s'il existe g positive dans $\mathcal{C}_m(I, \mathbb{R}^+)$ telle que :

$$\begin{cases} t \mapsto f(x,t) \text{ continue par morceaux pour tout } x \text{ de } D & (*) \\ x \mapsto f(x,t) \text{ est continue pour tout } t \text{ de } I & \\ \forall x \in D,\ |f(x,t)| \leq g(t) & (CD) \\ g \text{ intégrable sur } I & (CD) \end{cases}$$

alors F est continue sur D.

Théorème - Dérivabilité.[14] Avec les notations de f et F de début de paragraphe, s'il existe g positive dans $\mathcal{C}_m(I, \mathbb{R}^+)$ telle que :

$$\begin{cases} t \mapsto f(x,t) \text{ continue par morceaux pour tout } x \text{ de } D & (*) \\ t \mapsto f(x,t) \text{ intégrable sur } I & (*) \\ x \mapsto f(x,t) \text{ est de classe } C^1 \text{ pour tout } t \text{ de } I & \\ t \mapsto \frac{\delta f}{\delta x}(x,t) \text{ continue par morceaux pour tout } x \text{ de } D & (*) \\ \forall x \in D,\ |\frac{\delta f}{\delta x}(x,t)| \leq g(t) & (CD) \\ g \text{ intégrable sur } I & (CD) \end{cases}$$

alors F est de classe C^1 sur D et $F'(x) = \int_I \frac{\delta f}{\delta x}(x,t)dt$

Remarques.

1. Les conditions $(*)$ sont les conditions qui permettent de donner un sens aux intégrales présentes dans le théorème. Ainsi, à x fixé, toutes les fonctions présentes sous une intégrable doivent être continues par morceaux et intégrables Une exception près les fonctions inférieures à g en valeur absolue dans (CD) n'ont pas besoin d'être intégrables, puisqu'elles le sont automatiquement grâce au théorème de convergence dominée.
2. Les conditions (CD) sont les conditions de domination qui permettent d'utiliser le théorème de convergence dominée.
3. Sans les conditions $(*)$, les théorèmes ressemblent à :
   - f continue par rapport à la variable x et condition de domination implique F continue (par rapport à la variable x).
   - f dérivable par rapport à la variable x et condition de domination implique F dérivable (par rapport à la variable x).
4. Si on trouve une fonction de domination sur chaque segment de D, c'est suffisant pour conclure.

II.2/ Quelques applications.

Conséquence - dérivation n fois.[15] Avec les notations de f et F de début de paragraphe, s'il existe $g_1,\dots,g_n$ positives dans $\mathcal{C}_m(I,\mathbb{R}^+)$ telle que :

$$\begin{cases} x \mapsto f(x,t) \text{ est de classe } C^n \text{ pour tout } t \text{ de } I & \\ t \mapsto \frac{\delta^k f}{\delta x^k}(x,t) \text{ continue par morceaux pour tout } x \text{ de } D \text{ et } k \text{ de } \{0,\dots,n\} & (*) \\ \forall x \in D, \forall k \in \{0,\dots,n\},\ |\frac{\delta^k f}{\delta x^k}(x,t)| \leq g_k(t) & (CD) \\ g_k \text{ intégrable sur } I \text{ pout tout } k & (CD) \end{cases}$$

alors F est de classe C^n sur D et pour tout k de $\{0,\dots,n\}$, on a :

$$F^{(k)}(x) = \int_I \frac{\delta^k f}{\delta x^k}(x,t)dt$$

Exercice - théorème de division.[16] Soit f une application de $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant $f(0)=0$. Notons g la fonction $\frac{f(x)}{x}$ prolongée par continuité en 0.

1. Que vaut $g(0)$? Montrer que $f^{(n+1)}$ est bornée sur $[-1;1]$.
2. Montrer que $g(x) = \int_0^1 f'(xt)dt$
3. Montrer que g est C^∞ sur $[-1;1]$, puis sur $\mathbb{R}$.

Exercice - intégrale de Gauss.[17] Soit F la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}dt$$

1. Montrer que F est dérivable et calculer F'.
2. Calculer $F(0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.
3. Posons $g(x) = F(x^2)$. Calculer g' puis en déduire que :
$$g(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2 = \frac{\pi}{4}$$
4. En déduire que :
$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

II.3/ Fonction Gamma d'Euler.

Exercice.[18] La fonction Gamma d'Euler est définie par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$$

On notera $f(x,t) = e^{-t}t^{x-1}$

1. Montrer que Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}_+^*$. Pour n dans $\mathbb{N}$, considérons l'application g_n définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :
$$g_n(t) = \begin{cases} e^{-t}\,t^{a-1}\,|\ln(t)|^n & \text{si} \quad t\in]0,1] \\ e^{-t}\,t^{b-1}\,|\ln(t)|^n & \text{si} \quad t\in]1;+\infty] \end{cases}$$
   a) Montrer que g est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
   b) Montrer que pour tout x de $[a,b]$, pour tout t de $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout p de $\mathbb{N}$, on a :
   $$\left|\frac{\delta^p f}{\delta x^p}(x,t)\right| \leq g_p(t)$$
   c) Montrer que Γ est C^0 sur $\mathbb{R}_+^*$.
   d) Montrer que Γ est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$. Que vaut $\Gamma^{(p)}$ pour p dans $\mathbb{N}$?
3. Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}^+$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire que la fonction Γ prolonge la factorielle c'est-à-dire que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.
4. Montrer que $\Gamma(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$. Tracer la courbe.