République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université Ferhat Abbas, Sétif 1
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Domaine	:	Mathématiques et Informatique
Filière	:	Mathématiques
Option	:	Mathématiques Appliquées et EDP

Projet

ESPACE DE BESOV

Présenté par :

Sedka Ilyes
Aliane Hamza
Bouguettoucha Ridha

Table des matières

Chapitre 1

introduction

1.1 Espace d'interpolation :

En analyse, un espace d'interpolation ou espace interpolé est un espace qui se trouve entre deux autres espaces. Les applications les plus importantes de cette notion ont lieu pour les espaces de Sobolev de fonctions qui sont dérivables un nombre non entier de fois. Ces espaces sont créés par interpolation à partir des espaces de Sobolev de fonctions dérivables un nombre entier de fois.

Définition 1.1. Soient X et Y deux espaces de Banach. Un espace d'interpolation est un espace de Banach W tel que si L est un opérateur linéaire de X + Y dans lui-même qui est continu de X dans lui-même et de Y dans lui-même, alors L est aussi continu de W dans lui-même. De plus, l'espace W est dit d'exposant θ $(0 < \theta < 1)$ s'il existe une constante C telle que, quel que soit l'opérateur L satisfaisant les conditions ci-dessus, on ait :

$$\|L\|_{W,W} \leqslant C\|L\|_{X;X}^{1-\theta}\|L\|_{Y;Y}^{\theta}$$

Chapitre 2

Espace de Besov

Définition 2.1. Soit un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Soient s, p, q tels que : $0 < s < \infty$,$1 \leqslant p, q \leqslant \infty$. On note m le plus petit entier supérieur à s et $\theta = \dfrac{s}{m}$. On note $J_{\theta,q}(X,Y)$ l'espace interpolé des espaces de Banach X et Y par la méthode d'interpolation J. Par définition, l'espace de Besov $B^{s,p,q}(\Omega)$ est l'espace interpolé des espaces $L^p(\Omega)$ de Lebesgue et $W^{m,p}(\Omega)$ de Sobolev par la méthode d'interpolation réelle dite méthode J :

$$B^{s,p,q}(\Omega) = J_{\theta,q}(L^p(\Omega), W^{m,p}(\Omega))$$

C'est un espace de Banach dont la norme est fournie par la méthode d'interpolation :

$$\|.\|_{B^{s,p,q}(\Omega)} = \|.\|_{J_{\theta,q}(L^p(\Omega),W^{m,p}(\Omega))}$$

Définition 2.2. Soit : $0 < s < 1$, and $1 \leqslant p, \theta \leqslant \infty$. une fonction $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ appartient à l'espace de Besov $B^{s,p,\theta}(\mathbb{R}^N)$ si :

$$\|u\|_{B^{s,p,\theta}(\mathbb{R}^N)} := \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + |u|_{B^{s,p,\theta}(\mathbb{R}^N)} < \infty$$

Où :

$$|u|_{B^{s,p,\theta}(\mathbb{R}^N)} := \sum_{i=1}^{N} \left(\int_0^\infty \|\Delta_i^h u\|^\theta_{L^p(\mathbb{R}^N)} \frac{dh}{h^{1+s\theta}} \right)^{\frac{1}{\theta}} \quad \text{if :} \quad \theta < \infty.$$

Et :

$$|u|_{B^{s,p,\theta}(\mathbb{R}^N)} := \sum_{i=1}^{N} \sup_{h>0} \frac{1}{h^s} \|\Delta_i^h u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \quad \text{if :} \quad \theta = \infty$$

Si $\theta = p$, on écrit :

$$B^{s,p}(\mathbb{R}^N) := B^{s,p,p}(\mathbb{R}^N)$$

Dans la suite, nous utiliserons souvent la notation :

$$\psi(h) := \|\Delta_i^h u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \quad \text{where :} \quad i = 1, ..., N \quad \text{and} \quad h > 0. \tag{2.1}$$

Définition 2.3. Mollificateurs
Etant donnée une fonction bornée non positive avec $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^N)$ avec :

$$\text{supp}\varphi \subset \overline{B(0,1)}, \quad \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)dx = 1$$

Pour tout : $\varepsilon > 0$ on définit :

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N} \varphi(\frac{x}{\varepsilon}), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Les fonctions φ_ε sont appelées mollificateurs. Notons que : supp$\varphi_\varepsilon \subset \overline{B(0,\varepsilon)}$.
Par conséquent, étant donné un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et une fonction $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, on peut définir :

$$u_\varepsilon(x) := (u * \varphi_\varepsilon)(x) = \int_\Omega \varphi_\varepsilon(x-y)u(y)dy$$

Pour $x \in \Omega_\varepsilon$, où l'ouvert Ω_ε est donné par :

$$\Omega_\varepsilon(x) := \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}.$$

La fonction : $u_\varepsilon : \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}$ est appelée mollificateur de u.

Proposition 2.4. *(Complétude) Soit $0 < s < 1$ et $1 \leqslant p, \theta \leqslant \infty$. Alors l'espace de Besov $B^{s,p,\theta}(\mathbb{R}^N)$ est un espace de Banach.*

démonstration. 2.4
On montre le résultat pour $\theta < \infty$. Soit $u_n \subset B^{s,p,\theta}(\mathbb{R}^N)$ une suite de Cauchy. Alors u_n une suite de Cauchy dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ et pour tout $i = 1, ..., N$ la suite des fonctions $v_n^i : \mathbb{R}^N \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$, définie par :

$$v_n^i(x,h) := \frac{1}{h^{\frac{1}{\theta}} + s}\Delta_i^h u_n(x)$$

est une suite de Cauchy dans $L^p(\mathbb{R}^N \times (0,\infty))$, où : $p := (p, ..., p, \theta) \in \mathbb{R}^{N+1}$.
On peut trouver $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $v^i \in L^p(\mathbb{R}^N \times (0,\infty))$, $i = 1, ..., N$ tel que : $u_n \to u$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ et $v_n^i \to v^i$ dans $L^p(\mathbb{R}^N \times (0,\infty))$. On extrait une sous-suite u_{n_k} de u_n telle que : $u_{n_k}(x) \to u_x$ pour $L^N - a - e.\ x \in \mathbb{R}^N$ et $L^1 - a - e.\ h > 0$ la fonction $v^i(x,h)$ coïncide avec la fonction :

$$w^i(x,h) := \frac{1}{h^{\frac{1}{\theta}} + s}\Delta_i^h u(x)$$

Par conséquent : $u \in B^{s,p,\theta}(\mathbb{R}^N)$ et : $\|u_n - u\|_{B^{s,p,\theta}(\mathbb{R}^N)} \to 0$ □

Proposition 2.5. *Soit : $0 < s < 1$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ et $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$. pour tout $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, soit : $u_\epsilon := \phi_\epsilon * u$, où : ϕ_ϵ est un mollifier standard. Alors :*

$$|u_\epsilon|_{B^{s,p,\theta}(\mathbb{R}^N)} \leqslant |u|_{B^{s,p,\theta}(\mathbb{R}^N)} \quad \textit{pour tout} \quad \epsilon > 0. \tag{2.2}$$

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} |u_\epsilon|_{B^{s,p,\theta}(\mathbb{R}^N)} = |u|_{B^{s,p,\theta}(\mathbb{R}^N)} \tag{2.3}$$

de plus , si $p < \infty$, $\theta < \infty$, et $u \in B^{s,p,\theta}(\mathbb{R}^N)$, alors :

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} |u_\epsilon - u|_{B^{s,p,\theta}(\mathbb{R}^N)} = 0 \tag{2.4}$$

En particulier, si $p < \infty$ et $\theta < \infty$, alors $C^\infty(\mathbb{R}^N) \cap B^{s,p,\theta}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $B^{s,p,\theta}(\mathbb{R}^N)$.

démonstration. 2.5
Comme : $\Delta_i^h u_\epsilon = \varphi_\epsilon * \Delta_i^h u$, On a :

$$\left\|\Delta_i^h u_\epsilon\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leqslant \left\|\Delta_i^h u\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \tag{2.5}$$

pour tout $h > 0$ et $\epsilon > 0$ et :

$$\left\|\Delta_i^h u_\epsilon\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \to \left\|\Delta_i^h u\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \tag{2.6}$$

Quand $\epsilon \to 0^+$ pour tout $h > 0$: $\lim_{\epsilon\to 0^+} \sup |u_\epsilon|_{B^{s,p,\theta}(\mathbb{R}^N)} \leqslant |u|_{B^{s,p,\theta}(\mathbb{R}^N)}$
Pour prouver l'inégalité opposée, supposons d'abord que : $\theta < \infty$. For $h > 0$ and $\epsilon > 0$ on définit :

$$f_\epsilon(h) := \frac{1}{h^{1+s\theta}} \left\| \Delta_i^h u_\epsilon \right\|^\theta_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \quad f(h) := \frac{1}{h^{1+s\theta}} \left\| \Delta_i^h u \right\|^\theta_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

Comme $f_\epsilon(h) \to f(h)$ for every $h > 0$ by (2.6), par le lemme de Fatou on aura :

$$\int_0^\infty f(h)dh = \int_0^\infty \lim_{\epsilon\to 0^+} f_\epsilon(h)dh \leqslant \lim_{\epsilon\to 0^+} inf \int_0^\infty f_\epsilon(h)dh.$$

Ainsi (2.3) :
Si $\theta = \infty$, alors quand $\left\| \Delta_i^h u_\epsilon \right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \to \left\| \Delta_i^h u \right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$ pour tout $h > 0$ on aura :

$$\frac{1}{h^s} \left\| \Delta_i^h u \right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{h^s} \left\| \Delta_i^h u_\epsilon \right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leqslant \lim_{\epsilon\to 0^+} \inf \sup_{h>0} \frac{1}{h^s} \left\| \Delta_i^h u_\epsilon \right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

pour tout $h > 0$. il s'ensuit que :

$$\sup_{h>0} \frac{1}{h^s} \left\| \Delta_i^h u \right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leqslant \lim_{\epsilon\to 0^+} \inf \sup_{h>0} \frac{1}{h^s} \left\| \Delta_i^h u_\epsilon \right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

et alors (2.3) est satisfaite.
Supposons ensuite que : $p < \infty$, $\theta < \infty$, et $u \in B^{s,p,\theta}(\mathbb{R}^N)$.

$$\left\| \Delta_i^h u_\epsilon - \Delta_i^h u \right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \to 0 \tag{2.7}$$

Pour $h > 0$ and $\epsilon > 0$ on définit les fonctions :

$$g_\epsilon(h) := \frac{1}{h^{1+s\theta}} \left\| \Delta_i^h u_\epsilon - \Delta_i^h u \right\|^\theta_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \quad g(h) := \frac{1}{h^{1+s\theta}} \left\| \Delta_i^h u \right\|^\theta_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

Par hypothèse : $g \in L^1((0,\infty))$, et par(2.5), l'inégalité de Minkowski, et la convexité de la fonction $|y|^\theta$ on a :

$$g_\epsilon(h) \leqslant 2^\theta g(h) \quad \text{for all} \quad h > 0.$$

Comme $g_\epsilon(h) \to 0$ pour tout $h > 0$ par (2.7), nous sommes dans le cas où on peut appliquer le théorème de la convergence dominée par Lebesgue pour conclure que (2.4) est satisfaite. □

2.1 Dependence du $B^{s,p,\theta}$ de s :

Dans cette section, nous prouvons que pour : $0 < t < s < 1$:

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset B^{s,p,\theta}(\mathbb{R}^N) \subset B^{t,p,\theta}(\mathbb{R}^N)$$

Théoreme 2.6. *Soit :* $0 < t < s < 1$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *et* $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$. *Alors il existe une constante* $C = C(t,\theta) > 0$ *telle que :*

$$|u|_{B^{t,p,\theta}(\mathbb{R}^N)} \leqslant |u|_{B^{s,p,\theta}(\mathbb{R}^N)} + C\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \quad \textit{pour tout} \quad u \in B^{s,p,\theta}(\mathbb{R}^N).$$

In particular,

$$B^{s,p,\theta}(\mathbb{R}^N) \subset B^{t,p,\theta}(\mathbb{R}^N)$$

Théoreme 2.7. *LSoit : $0 < s < 1$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, et $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$. Alors il existe une constante $C = C(s, \theta) > 0$ telle que :*

$$|u|_{B^{s,p,\theta}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \quad \textit{pour tout} \quad u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

In particular,

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset B^{s,p,\theta}(\mathbb{R}^N)$$

Théoreme 2.8. *Soit : $0 < s < 1$ et $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$. Alors il existe une constante $C = C(s, \theta) > 0$ telle que :*

$$|u|_{B^{s,1,\theta}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\|u\|_{BV(\mathbb{R}^N)} \quad \textit{pour tout} \quad u \in BV(\mathbb{R}^N).$$

In particular,

$$BV(\mathbb{R}^N) \subset B^{s,1,\theta}(\mathbb{R}^N)$$

2.2 Dependence of $B^{s,p,\theta}$ on θ :

On étudie la relation entre les differents espaces de Besov $B^{s,p,\theta}(\mathbb{R}^N)$ quand θ varie.

Théoreme 2.9. *Soit $0 < s < 1$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ et $1 \leqslant \theta_1 < \theta_2 \leqslant \infty$. Alors il existe une constante $C = C(N, p, s, \theta_1, \theta_2) > 0$ telle que :*

$$|u|_{B^{s,p,\theta_2}(\mathbb{R}^N)} < C|u|_{B^{s,p,\theta_1}(\mathbb{R}^N)} \quad \textit{pour tout} \quad u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$$

En particulier ,

$$B^{s,p,\theta_1}(\mathbb{R}^N) \subset B^{s,p,\theta_2}(\mathbb{R}^N).$$

On commence par un résultat auxiliare.

Lemme 2.10. *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour chaque $u \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, et pour tout $h > 0$:*

$$\left\|\Delta^h u\right\|_{L^p(\mathbb{R})} \leqslant \frac{C}{h} \int_0^h \|\Delta^\eta u\|_{L^p(\mathbb{R})} d\eta.$$

Corollary 2.11. *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour chaque $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, et pour tout $i = 1, ..., N$ and $h > 0$:*

$$\left\|\Delta_i^h u\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leqslant \frac{C}{h} \int_0^h \|\Delta_i^\eta u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} d\eta.$$

démonstration. 2.9
Step 1 : Supposons d'abord que : $\theta_2 < \infty$. Pour tout $i = 1, ..., N$, soit ψ_i la fonction définie dans (2.1). Par la corollaire précédente :

$$\psi_i(h) \leqslant \frac{C}{h} \int_0^h \psi_i(y) dy \tag{2.8}$$

Fixons : $r > 0$. Utilisons (2.8), où la fonction g est la foncion croissante :

$$g(h) := \int_0^h \psi_i(y) dy, \quad h \in [O, r]$$

et le changement de variables $y = hz$, on obtient que :

$$\left(\int_0^r \frac{1}{h^{1+s\theta_2}}(\psi_i(h))^{\theta_2}dh\right)^{\frac{1}{\theta_2}} \leqslant C\left(\int_0^r \frac{1}{h^{1+(1+s)\theta_2}}\left(\int_0^r \psi_i(y)dy\right)^{\theta_2} dh\right)^{\frac{1}{\theta_2}}$$
$$\leqslant C\left(\int_0^r \frac{1}{h^{1+(1+s)\theta_1}}\left(\int_0^r \psi_i(y)dy\right)^{\theta_1} dh\right)^{\frac{1}{\theta_1}}$$
$$\leqslant C\left(\int_0^r \frac{1}{h^{1+s\theta_1}}\left(\int_0^r \psi_i(hz)dz\right)^{\theta_1} dh\right)^{\frac{1}{\theta_1}} = I$$

Par une corollaire et le changement de variables $\xi = hz$ on aura :

$$I \leqslant C\int_0^1 \left(\int_0^r \frac{1}{h^{1+s\theta_1}}(\psi_i(hz))^{\theta_1}dh\right)^{\frac{1}{\theta_1}} dz$$
$$= C\int_0^1 z^s\left(\int_0^{zr} \frac{1}{\xi^{1+s\theta_1}}(\psi_i(\xi))^{\theta_1}d\xi\right)^{\frac{1}{\theta_1}} dz$$
$$\leqslant C\left(\int_0^\infty \frac{1}{\xi^{1+s\theta_1}}(\psi_i(\xi)))^{\theta_1}d\xi\right)^{\frac{1}{\theta_1}}$$

En tendant $r \to \infty$, on obtient :

$$\left(\int_0^r \frac{1}{h^{1+s\theta_2}}(\psi_i(h))^{\theta_2}dh\right)^{\frac{1}{\theta_2}} \leqslant C\left(\int_0^\infty \frac{1}{\xi^{1+s\theta_1}}(\psi_i(\xi)))^{\theta_1}d\xi\right)^{\frac{1}{\theta_1}}$$

Step 2 : Si : $\theta_2 = \infty$, nous procédons exactement comme à l'étape précédente, pour conclure que :

$$\sup_{0<h<r} \frac{1}{h^s}\psi_i(h) \leqslant \sup_{0<h<r} \frac{1}{h^{1+s}}\int_0^h \psi_i(y)dy \leqslant I$$

Puisque l'estimation pour I est la même, nous concluons comme avant. □

2.3 Dependence du $B^{s,p,\theta}$ de s aet p :

Le théorème suivant montre qu'en abaissant le paramètre de régularité s des fonctions dans les espaces de Besov, on peut augmenter leur paramètre d'intégrabilité p.

Théoreme 2.12. *Soit $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ be telle que : $|u|_{B^{s,p,\theta}(\mathbb{R}^N)} < \infty$ pour quelques : $0 < s < 1$,$1 \leq p < \infty$, et $1 \leq \theta \leq \infty$. Alors pour chaque $0 < t < s$ Il existe une constante $C = C(N, p, s, t, \theta) > 0$ telle que :*

$$|u|_{B^{t,q,\theta}(\mathbb{R}^N)} \leq C|u|_{B^{s,p,\theta}(\mathbb{R}^N)},$$

où :

$$t + \frac{N}{p} = s + \frac{N}{q}.$$

On divise la démonstration en quelques lemmes :

Lemme 2.13. *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute $u \in C^\infty(\mathbb{R})$,*

$$|u(x)| \leq \frac{C}{h}\int_0^h |u(x+y)|dy + C\int_0^h \int_0^\xi \int_0^{\xi-y} \frac{1}{\xi^3}|\Delta^\eta u(x+y)|d\eta dy d\xi \qquad (2.9)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $h > 0$.

Lemme 2.14. *Soit $1 \leq p < q \leq \infty$ et soit $u \in C^\infty(\mathbb{R})$. Alors pour tout $h > 0$,*

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R})} \leq \frac{C}{h^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}\|u\|_{L^p(\mathbb{R})} + C\int_0^h \frac{1}{h^{1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}\|\Delta^\eta u\|_{L^p(\mathbb{R})}d\eta,$$

où : $C = C(p,q) > 0$.

Lemme 2.15. *Supposons que les vecteurs : $p = (p_1, ..., p_N)$,$q = (q_1, ..., q_N)$ et les nombres réels θ, s, et t satisfassent the relations : $1 \leq \theta \leq \infty$,$1 \leq p_i \leq q_i \leq \infty$, $i = 1,..,N$, $0 < t \leq s < 1$, $t = \mu s$, où :*

$$\mu = 1 - \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{q_i}\right) > 0. \tag{2.10}$$

alors pour chaque $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $j = 1, ..., N$,

$$\left(\int_0^\infty \frac{1}{h^{1+t\theta}}\|\Delta_j^h u\|^\theta_{L^q(\mathbb{R}^N)}dh\right)^{\frac{1}{\theta}} \leq C\sum_{k=1}^{N}\left(\int_0^\infty \frac{1}{h^{1+s\theta}}\|\Delta_k^h u\|^\theta_{L^p(\mathbb{R}^N)}dh\right)^{\frac{1}{\theta}} \quad \text{if} \quad \theta < \infty,$$

tant que :

$$\sup_{h>0}\frac{1}{h^t}\|\Delta_j^h u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C\sum_{k=1}^{N}\sup_{h>0}\frac{1}{h^s}\|\Delta_k^h u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \quad \text{if} \quad \theta = \infty.$$

démonstration. (2.12)

Step 1 : Supposons que : $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Comme :

$$\mu = 1 - \frac{N}{ps} + \frac{N}{qs} > 0,$$

On peut appliquer **Lemme (2.15)**, avec $p = (p, .., p)$, $q = (q, ..., q)$, pour obtenir :

$$|u|_{B^{t,q,\theta}(\mathbb{R}^N)} \leq C|u|_{B^{s,p,\theta}(\mathbb{R}^N)}.$$

Step 2 : L'hypothèse supplémentaire que : $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ peut être enlevé par la mollification. Pour voir cela, soit : $u_\varepsilon = \varphi_\varepsilon * u$, where φ_ε est un mollifier standard. Par l'étape précédente :

$$|u_\varepsilon|_{B^{t,q,\theta}(\mathbb{R}^N)} \leq C|u_\varepsilon|_{B^{s,p,\theta}(\mathbb{R}^N)}.$$

Il suffit maintenant d'appliquer la Proposition (2.5)(voir (2.3)et (2.2)). □

Remarque 2.16. Sous les hypothèses du théorème précédent, nous avons aussi

$$|u|_{B^{t,q}(\mathbb{R}^N)} \leq C|u|_{B^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \quad \text{where} \quad t + \frac{N}{p} = s + \frac{N}{q}.$$

Pour voir ceci, notez que d'aprés **théorème (2.9)** et le théorème précédent,

$$|u|_{B^{t,q}(\mathbb{R}^N)} \leq C|u|_{B^{t,q,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C|u|_{B^{s,p}(\mathbb{R}^N)}.$$

En conséquence du théorème précédent et du théorème (2.9), nous obtenons une extension de **le théorème d'intégration de Morrey** aux espaces de Besov.

Corollary 2.17 (Morrey). *Soit $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ telle que : $|u|_{B^{s,p,\theta}(\mathbb{R}^N)} < \infty$ for $0 < s < 1$, $p > \dfrac{N}{s}$, et $1 \leq \theta \leq \infty$. Alors : un représentant $\overline{u}$ de u est un Hölder continu avec exponent $s - \dfrac{N}{p}$ et*

$$|\overline{u}(x) - \overline{u}(y)| \leq C(N,p,s,\theta)|x-y|^{s-\frac{N}{p}}|u|_{B^{s,p,\theta}(\mathbb{R}^N)} \quad \textit{for all} \quad x,y \in \mathbb{R}^N. \tag{2.11}$$

Démonstration. **[démonstration](2.17)**
D'aprés théorème (2.9) :

$$|u|_{B^{s,p,\infty}(\mathbb{R}^N)} \leq C|u|_{B^{s,p,\theta}(\mathbb{R}^N)} < \infty,$$

Et d'aprés théorème (2.9) (2.12) avec $q = \infty$ et $t = s - \dfrac{N}{p}$,

$$|u|_{B^{s-\frac{N}{p},\infty,\infty}(\mathbb{R}^N)} \leq C|u|_{B^{s,p,\theta}(\mathbb{R}^N)} < \infty.$$

Par la définition du seminorm : $|.|_{B^{s-\frac{N}{p},\infty,\infty}(\mathbb{R}^N)}$, il s'ensuit que u a un représentant $\overline{u}$ satisfaisant (2.11). Ceci conclut la preuve. □

2.4 Intégration de $B^{s,p,\theta}$ dans L^q

Nous étendons ensuite le théorème de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg aux espaces de Besov.

Théoreme 2.18. *Soit $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ une fonction disparaissant à l'infini telle que : $|.|_{B^{s,p,\theta}(\mathbb{R}^N)}$ pour certain $0 < s < 1$, $1 \leq p < \dfrac{N}{s}$, et $1 \leq \theta \leq \dfrac{N_p}{N-sp}$. Alors il existe une constante $C = C(N,p,s,\theta) > 0$ telle que :*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{\frac{N_p}{N-sp}}dx\right)^{\frac{N-sp}{N_p}} \leq C|u|_{B^{s,p,\theta}(\mathbb{R}^N)}.$$

En particulier : $B^{s,p,\theta}(\mathbb{R}^N)$ est continuellement intégré dans $L^q(\mathbb{R}^N)$ pour tout $p \leq q \leq \dfrac{N_p}{N-sp}$.

Nous divisons la preuve en quelques lemmes.

Lemme 2.19. *soit :*

$$f(x) = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\Phi(x+z,\xi)}{(z+\xi)^2}dzd\xi, \quad x \in \mathbb{R},$$

*où : $\Phi : [0,\infty) \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ est une **fonction mesurable de Lebesgue**. alors :*

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{R})} \leq C\left[\int_0^\infty \frac{1}{\xi^{1+\theta(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}}\left(\int_{\mathbb{R}} |\Phi(z,\xi)|^p dz\right)^{\frac{1}{\theta}} d\xi\right]^{\frac{1}{\theta}} \tag{2.12}$$

pour tout $1 \leq p < q < \infty$ et tout $1 \leq \theta \leq q$.

En combinant les lemmes (2.13),(2.19) et (2.15), on obtient le théorème de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg.

démonstration. (2.18)

Step 1 : Supposons que : $N = 1$ et que $u \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap L^{\frac{p}{1-sp}}(\mathbb{R})$. Par l'inégalité de Hölder :

$$\frac{1}{h}\int_0^h |u(x+y)|dy \leq \frac{1}{h^{1-(\frac{p}{1-sp})'}}\|u\|_{L^{\frac{p}{1-sp}}(\mathbb{R})}.$$

Par conséquent, en tendant $h \to \infty$ dans (2.14), on obtient :

$$|u(x)| \leq \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|\Delta^\eta u(x+z)|}{(z+\eta)^2} d\eta dz. \tag{2.13}$$

Nous pouvons maintenant appliquer Lemma (2.19) avec $q = \dfrac{p}{1-sp}$ on obtient que :

$$\|u\|_{L^{\frac{p}{1-sp}}(\mathbb{R})} \leq C\left[\int_0^\infty \frac{1}{\xi^{1+s\theta}}\left(\int_{\mathbb{R}} |\Delta^\xi u(z)|^p dz)\right)^{\frac{\theta}{p}} d\xi\right]^{\frac{1}{\theta}}. \tag{2.14}$$

Step 2 : Supposons esuite que : $N > 1$ et que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^{\frac{Np}{N-sp}}(\mathbb{R}^N)$. Raisonnant comme dans **Step 1**, on aura :

$$|u(x)| \leq \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|\Delta_N^h u(x', x_N + z)|}{(z+h)^2} dh dz,$$

où nous utilisons la notation introduite dans $(E.3)$ dans l'Appendice E. Soit $q = \ fracN_pN - sp$ et que q' soit l'exposant conjugué de Hölder.

$$\|u(., x_N)\|_{L^{\frac{N_p}{1-sp}}(\mathbb{R}^{N-1})} \leq \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{(z+h)^2}\|\Delta_N^h u(., x_N+z)\|_{L^{\frac{N_p}{1-sp}}(\mathbb{R}^{N-1})} dhdz.$$

Nous prenons maintenant la norme dans $L^q(\ R)$ dans x_N des deux côtés et appliquons Lemma (2.19) pour obtenir :

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{\frac{N_p}{N-sp}} dx\right)^{\frac{N-sp}{N_p}} \leq C\left(\int_0^\infty \frac{1}{h^{1+\frac{s}{N}\theta}}\|\Delta_N^h u\|^\theta_{L^q(\mathbb{R}^N)} dh\right)^{\frac{1}{\theta}}, \quad \text{where} \quad q = \left(\frac{N_p}{N-sp}, ..., \frac{N_p}{N-sp}, p\right).$$

Nous sommes maintenant en train d'appliquer Lemme (2.15) du côté droit de l'inégalité précédente. En effet, en tendant $p = (p, ..., p), \ quadt = \ fracsN$, on aura :

$$\mu = 1 - \frac{(N-1)}{s}\left(\frac{1}{p} - \frac{N-sp}{N_p}\right) = \frac{1}{N},$$

et donc :

$$\left(\int_0^\infty \frac{1}{h^{1+\frac{s}{N}\theta}}\|\Delta_N^h u\|^\theta_{L^q(\mathbb{R}^N)} dh\right)^{\frac{1}{\theta}} \leq C\sum_{k=1}^N \left(\int_0^\infty \frac{1}{h^{1+s\theta}}\|\Delta_N^h u\|^\theta_{L^q(\mathbb{R}^N)} dh\right)^{\frac{1}{\theta}}.$$

Step 3 : Pour supprimer l'hypothèse que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, nous appliquons Proposition (2.5). Le cas où $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ est une fonction disparaissant à l'infini comme dans l'énoncé du théorème. □

Comme corollaire des théorèmes (2.9), (2.12), et (2.18) Nous obtenons les résultats suivants :

Corollary 2.20. *Soit $0 < s < 1$ et $1 \leq p < \dfrac{N}{s}$. Si $0 < t < s$ et*

$$t + \frac{N}{p} = s + \frac{N}{q},$$

alors : $B^{t,q}(\mathbb{R}^N)$ est continuellement intégré $B^{s,p,q}(\mathbb{R}^N)$ (et dans $B^{s,p}(\mathbb{R}^N)$).

2.5 Intégration de $W^{1,p}$ dans $B^{t,q}$

Nous étudions maintenant la relation entre les espaces de Besov et de Sobolev.

Théoreme 2.21. *Soit $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ tel que son gradient distributionnel ∇u appartient à $L^p(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$ pour certain $1 \leq p < \infty$. Si $N \geq 2$, $p < q < \infty$, $0 < t < 1$, $q \leq \theta \leq \infty$, et :*

$$t + \frac{N}{p} = 1 + \frac{N}{q}, \tag{2.15}$$

alors il existe une constante $C = C(N,p,q,\theta) > 0$ telle que :

$$|u|_{B^{t,q,\theta}(\mathbb{R}^N)} \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.16}$$

En particulier : $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ est continuellement intégré dans $B^{t,q}(\mathbb{R}^N)$.

Nous divisons la preuve en quelques lemmes.

Lemme 2.22. *Soit $u \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ et soit $1 \leq p < q < r < \infty$, $0 < l < t < 1$, et $1 \leq \theta \leq \infty$ be tel que :*

$$1 - l - \frac{1}{p} + \frac{1}{r} > 0, \quad \alpha_0 = \frac{t - l - \frac{1}{q} + \frac{1}{r}}{1 - l - \frac{1}{p} + \frac{1}{r}} \in \left(\frac{t-l}{1-l}, 1\right). \tag{2.17}$$

Alors :

$$|u|_{B^{t,q,\theta}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u'\|^{\alpha_0}_{L^p(\mathbb{R})}|u|^{1-\alpha_0}_{B^{l,r,q}(\mathbb{R})}. \tag{2.18}$$

Pour : $\theta = \infty$ la valeur $\alpha_0 = \dfrac{t-l}{1-l}$ est autorisée.

Preuve du théorème :(2.21). Au regard du théorème (2.9) il suffit de prouver (2.16) pour $\theta = q$.

Step 1 : Nous affirmons qu'il existe $l \in (0,t)$ and $r > q$ telle que (2.17) est vérifiée $p - \alpha_0 q > 0$, ou équivalent :

$$1 - l - \frac{1}{p} + \frac{1}{r} > 0, \quad \frac{\frac{1-l}{q} - \frac{t-l}{p}}{1-t} < \frac{1}{r} < \frac{\frac{1-l}{q} - \frac{t-l}{p}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}. \tag{2.19}$$

Pour voir ceci, notons par (2.15) nous avons que : $t = 1 - \dfrac{N}{p} + \dfrac{N}{q} > 1 - \dfrac{N}{p}$. Par conséquent, nous pouvons choisir l tel que :

$$\max\left\{1 - \frac{N}{p}, 0\right\} < l < t. \tag{2.20}$$

Comme : $1 - \dfrac{N}{p} < l$, en utulisant (2.15), on aura que $\dfrac{1-l}{q} - \dfrac{t-l}{p} > 0$. On affirme que :

$$\frac{\frac{1-l}{q} - \frac{t-l}{p}}{1-t} < \min\left\{\frac{\frac{1-l}{q} - \frac{t-l}{p}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}, \frac{1}{q}\right\} = \frac{1}{r_*}. \tag{2.21}$$

En effet, par (2.15) et les faits que $N \geq 2$ et $p < q$ on aura que :

$$1 - t - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) = (N-1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) > 0, \tag{2.22}$$

et donc :

$$\frac{\frac{1-l}{q}-\frac{t-l}{p}}{1-t}<\frac{\frac{1-l}{q}-\frac{t-l}{p}}{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \tag{2.23}$$

D'autre part, puisque $l<t$ par (2.20) et $p<q$, on aura :

$$\frac{\frac{1-l}{q}-\frac{t-l}{p}}{1-t}<\frac{1}{q}. \tag{2.24}$$

Par conséquent, (2.21) est valide. Ensuite, nous affirmons que : $1-l-\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{r_*}>0$. D'abord, on voit ue $1-l-\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}>0$ par (2.22) et l'effet que $l<t$. Ensuite, par (2.15) et l'effet que $p<q$ on aura :

$$1+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}>1-\frac{N}{p}+\frac{N}{q}=t,$$

ce qui implique que :

$$\frac{\frac{1-l}{q}-\frac{t-l}{p}}{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}>l-1+\frac{1}{p},$$

et ainsi l'affirmation est valable. Pour prouver (2.19), il suffit maintenant de choisir un nombre $r>r_*\geq q$ trés proche de r_* tel que : $l-1-\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{r}>0$ et tel que :

$$\frac{\frac{1-l}{q}-\frac{t-l}{p}}{1-t}<\frac{1}{r}<\frac{1}{r_*}.$$

Step 2 : Nous rappelons que $\theta=q$. Nous commençons par estimer $\Delta_N^h u$. Par le lemme précédent :

$$\int_0^\infty \frac{1}{h^{1+tq}}\int_{\mathbb{R}}\left|\Delta_N^h u(x',x_N)\right|^q dx_N dh\leq C\|\frac{\partial u}{\partial x_N}(x',.)\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\alpha_0 q}\left(\int_0^\infty \|\Delta_N^h u(x',.)\|_{L^r(\mathbb{R})}^q\frac{dh}{h^{1+lq}}\right)^{1-\alpha_0}$$

En intégrerant les deux côtés dans x' sur $\mathbb{R}^{N-1}$ et utiliser le théorème de Tonelli et l'inégalité de HÖlder avec les exposants $\dfrac{p}{\alpha_0 q}$ et $\dfrac{p}{p-\alpha_0 q}$, on obtient :

$$\int_0^\infty \frac{1}{h^{1+tq}}\int_{\mathbb{R}}\|\Delta_N^h u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}^q dh\leq C\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\|\frac{\partial u}{\partial x_N}(x',.)\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\alpha_0 q}\left(\int_0^\infty \|\Delta_N^h u(x',.)\|_{L^r(\mathbb{R})}^q\frac{dh}{h^{1+lq}}\right)^{1-\alpha_0}dx'$$
$$\leq C\|\frac{\partial u}{\partial x_N}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^{\alpha_0}\times\left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\left(\int_0^\infty \|\Delta_N^h u(x',.)\|_{L^r(\mathbb{R})}^q\frac{dh}{h^{1+lq}}\right)^{\frac{(1-\alpha_0)p}{p-\alpha_0 q}}dx'\right)^{\frac{(1-\alpha_0)}{\frac{(1-\alpha_0)p}{p-\alpha_0 q}}}=I$$

Par corollaire avec p remplacé par $\left(1-\alpha_0\dfrac{p}{p-\alpha_0 q}\right)$, on obtient que :

$$I\leq C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^{\alpha_0 q}\times\left(\int_0^\infty \frac{1}{h^{1+lq}}\left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\|\Delta_N^h u(x',.)\|_{L^r(\mathbb{R})}^{\frac{(1-\alpha_0)p}{p-\alpha_0 q}}dx'\right)^{\frac{q}{\frac{(1-\alpha_0)pq}{p-\alpha_0 q}}}dh\right)^{1-\alpha_0}$$
$$=C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^{\alpha_0 q}\left(\int_0^\infty \frac{1}{h^{1+lq}}\|\Delta_N^h u\|_{L^r(\mathbb{R}^N)}^q dh\right)^{1-\alpha_0},$$

où r est le vecteur des composants.

$$\begin{cases} r & \text{if} \quad i=N, \\ \dfrac{(1-\alpha_0)pq}{p-\alpha_0 q} & \text{si} \quad i\neq N, \end{cases} \quad i=1,...,N.$$

Par **l'inégalité de Young** on a :

$$\int_0^\infty \frac{1}{h^{1+lq}}\|\Delta_N^h u\|^q_{L^q(\mathbb{R}^N)}dh \leq C_\varepsilon \|\nabla u\|^q_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \varepsilon \int_0^\infty \frac{1}{h^{1+lq}}\|\Delta_N^h u\|^q_{L^r(\mathbb{R}^N)}dh. \tag{2.25}$$

Utilisons (2.15) et (2.17), on aura :

$$\begin{aligned}\mu &= 1 - \frac{1}{t}\sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r_i}\right)\\ &= \frac{1}{t}\left(t - \frac{N}{q} + \frac{1}{r} + (N-1)\frac{p-\alpha_0 q}{(1-\alpha_0)pq}\right)\\ &= \frac{1}{t}\left(t - \frac{N}{q} + \frac{1}{r} + (N-1)\frac{[p + \frac{p}{r} - tq - \frac{q}{r}] + l(q-p)}{(1-t)pq - (q-p)}\right)\\ &= \frac{1}{t}\left(t - \frac{N}{q} + \frac{1}{r} + \frac{p - tq + (l - \frac{1}{r})(q-p)}{(q-p)}\right)\\ &= \frac{1}{t}\left(t - \frac{N}{q} + \frac{p-tq}{(q-p)} + l\right) = \frac{l}{t} > 0.\end{aligned}$$

Comme les vecteurs $q = (q, ..., q)$ and r et les nombres réels l et t satisfont $1 \leq q \leq r_i < \infty$, $0 < l \leq t < 1$, $l = \mu t$, nous sommes en mesure d'appliquer Lemme (2.15) pour conclure que (rappeler que $\theta = q$)

$$\int_0^\infty \frac{1}{h^{1+lq}}\|\Delta_N^h u\|^q_{L^r(\mathbb{R}^N)}dh \leq C\sum_{i=1}^N \int_0^\infty \frac{1}{h^{1+lq}}\|\Delta_i^h u\|^q_{L^q(\mathbb{R}^N)}dh.$$

et ainsi, aussi de (2.25),

$$\int_0^\infty \frac{1}{h^{1+lq}}\|\Delta_N^h u\|^q_{L^q(\mathbb{R}^N)}dh \leq C_\varepsilon \|\Delta_i^h u\|^q_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \varepsilon C \sum_{i=1}^N \int_0^\infty \frac{1}{h^{1+lq}}\|\Delta_i^h u\|^q_{L^q(\mathbb{R}^N)}dh.$$

Une inégalité similaire est vérifiée avec $\Delta_k^h u$ à la place de $\Delta_N^h u$ (pour voir ceci, on peut soit changer l'ordre des variables, soit continuer quelque peu).
En additionnant tous les rendements de k.

$$\sum_{k=1}^N \int_0^\infty \frac{1}{h^{1+lq}}\|\Delta_i^h u\|^q_{L^q(\mathbb{R}^N)}dh C_\varepsilon \|\Delta_i^h u\|^q_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \varepsilon C \sum_{i=1}^N \int_0^\infty \frac{1}{h^{1+lq}}\|\Delta_i^h u\|^q_{L^q(\mathbb{R}^N)}dh,$$

Ou équivalent :

$$\sum_{i=1}^N \int_0^\infty \frac{1}{h^{1+lq}}\|\Delta_k^h u\|^q_{L^q(\mathbb{R}^N)}dh \leq \frac{C_\varepsilon}{1-\varepsilon C}\|\nabla u\|^p_{L^q(\mathbb{R}^N)},$$

où $\varepsilon > 0$ est choisi si petit que $1 - \varepsilon C > 0$. □

2.6 Les espaces de Besov et les espaces fractionnaires de Sobolev

Dans cette section, nous étudions la relation entre les espaces de Besov et les espaces de Sobolev fractionnaires.

Définition 2.23. Soit : $1 \leq p < \infty$ et $0 < s < 1$. Une fonction $u \in L^p(R^N)$ appartient à l'espace fractionnel de Sobolev $W^{s,p}(\mathbb{R}^N) < \infty$, où :

$$|u|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} = \left(\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

La proposition suivante montre que dans la gamme des exposants considérés dans ce chapitre, l'espace Sobolev fractionnaire $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ coïncide avec les espaces Besove $B^{s,p}(\mathbb{R}^N)$.

Proposition 2.24. *Soit $1 \leq p < \infty$ et $0 < s < 1$. Puis les seminormes $|.|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)}$ et $|.|_{B^{s,p}(\mathbb{R}^N)}$ sont equivalentes.*

Démonstration. Preuve : (2.24) Au vu de l'exercice précédent, il suffit de montrer que :

$$|u|_{B^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C|u|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)}$$

pour tout $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$. Soit $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. pour chaque :
$x_1', y_1' \in \mathbb{R}^{N-1}$, $x_1 \in \mathbb{R}$, et $h > 0$ on a :

$$\begin{aligned}
|\Delta_1^h u(x)|^p &= |u(x_1+h, x_1') - u(x_1, x_1')|^p \\
&\leq 2^{p-1}|u(x_1+h, x_1') - u(x_1 + \frac{1}{2}h, y_1')|^p. \\
&+ 2^{p-1}|u(x_1 + \frac{1}{2}h, y_1') - u(x_1+, x_1')|^p
\end{aligned}$$

En intégrant l'inégalité précédente dans y_1' sur la boule $(N-1)$ dimensionnelle centrée sur x_1' et ayant un rayon de $\frac{1}{2}h$ donne :

$$\begin{aligned}
|\Delta_1^h u(x)|^p \leq \frac{C}{h^{N-1}} \int_{B_{N-1}(x_1', \frac{h}{2})} |u(x_1+h, x_1') - u(x_1 + \frac{h}{2}, y_1')|^p dy_1' \\
+ \frac{C}{h^{N-1}} \int_{B_{N-1}(x_1', \frac{1h}{2})} |u(x_1 + \frac{h}{2}, y_1') - u(x_1, x_1')|^p dy_1'
\end{aligned}.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{h^{1+sp}} |\Delta_1^h u(x)|^p dx dh &\leq C \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \int_{B_{N-1}(x_1', \frac{h}{2})} \frac{|u(x_1+h, x_1') - u(x_1 + \frac{h}{2}, y_1')|^p}{h^{sp+N}} dy_1' dx dh \\
&+ C \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \int_{B_{N-1}(x_1', \frac{h}{2})} \frac{|u(x_1 + \frac{h}{2}, y_1') - u(x_1, x_1')|^p}{h^{sp+N}} dy_1' dx dh \\
&= C(I + II).
\end{aligned}.$$

On estime I. Par le théorème de Tonelli et le changement de variables $z_1 = x_1 + h$, I peut être écrit comme :

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^\infty \int_{B_{N-1}(x_1', \frac{h}{2})} \int_{\mathbb{R}} \frac{|u(x_1+h, x_1') - u(x_1 + \frac{h}{2}, y_1')|^p}{h^{sp+N}} dx_1 dy_1' dh dx_1' \\
&\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^\infty \int_{B_{N-1}(x_1', \frac{h}{2})} \int_{\mathbb{R}} \frac{|u(z_1, x_1') - u(z_1 - \frac{h}{2}, y_1')|^p}{h^{sp+N}} dz_1 dy_1' dh dx_1' \\
&\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{2|x_1'-y_1'|}^\infty \frac{|u(z_1, x_1') - u(z_1 - \frac{h}{2}, y_1')|^p}{h^{sp+N}} dh dy_1' dz_1 dx_1' \\
C &\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{-\infty}^{z_1-|x_1'-y_1'|} \frac{|u(z_1, x_1') - u(y_1, y_1')|^p}{(z_1 - y_1)^{sp+N}} dy_1 dy_1' dz_1 dx_1'.
\end{aligned}$$

où dans la dernière identité nous avons fait le changement de variables $y_1 = z_1 - z_1 - \dfrac{h}{2}$.
Puisque dans la dernière intégrale : $z_1 - y_1 \geq |x_1' - y_1'|$, on a :

$$|(z_1, x_1') - (y_1, y_1')| \leq \sqrt{2}(z_1 - y_1),$$

et donc :

$$\begin{aligned} I &\leq C \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|u(z_1, x_1') - u(y_1, y_1')|^p}{|(z_1, x_1') - (y_1, y_1')|^{sp+N}} dy_1 dy_1' dz_1 dx_1' \\ &= C \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{sp+N}} dx dy \end{aligned}$$

.

Le terme II peut être estimé de la même manière. Des inégalités similaires valent pour $\Delta_i^h u$, $i = 2, ..., N$. Nous omettons les détails. $\square$