Chapitre 4

Les espaces de Hardy $H^p(\mathbb{D})$, $0 < p \leq \infty$

4.1 Rappels

4.1.1 Inégalité de Jensen

Théorème 4.1.1 (Inégalité de Jensen, p. 59 de [18]) *Soit μ une mesure positive sur une tribu $\mathcal{M}$ dans un ensemble Ω telle que $\mu(\Omega) \in]0, \infty[$. Soit $f \in L^1(\mu)$ une fonction à valeurs réelles telle que $a < f(x) < b$ pour tout $x \in \Omega$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Soit φ une fonction convexe sur $]a, b[$. On a l'inégalité*

$$\varphi\left(\frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega f d\mu\right) \leq \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega (\varphi \circ f) d\mu.$$

En particulier si $\mu(\Omega) = 1$ on obtient :

$$\varphi\left(\int_\Omega f d\mu\right) \leq \int_\Omega (\varphi \circ f) d\mu.$$

4.1.2 Inégalité de Hölder et Minkowski

Théorème 4.1.2 (p. 60 de [18]) *Soit X un espace mesuré, de mesure μ positive. Soient f et g deux fonctions mesurables sur X à valeurs dans $[0, \infty]$.*

1. *Soient p et q deux exposants conjugués (i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) avec $1 < p < \infty$. Alors*

$$\int_X fg d\mu \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X g^q d\mu\right)^{1/q} \quad \textbf{\textit{inégalité de Hölder}}.$$

2. Soit $p \in [1, \infty[$. Alors

$$\left(\int_X (f+g)^p d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X g^p d\mu\right)^{1/p} \quad \textbf{\textit{inégalité de Minkowski}}.$$

L'inégalité de Hölder dans le cas où $p = q = 2$ s'appelle **l'inégalité de (Herman) Schwarz**.

4.1.3 L'espace $L^2(\mathbb{T})$

Théorème 4.1.3 (de Plancherel-Parseval) *Si $f \in L^2(\mathbb{T})$ et si $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est la suite de ses coefficients de Fourier ($c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{-int}dt$) alors*

$$\|f\|_2 := \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^2 dt\right)^{1/2} dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2.$$

De plus f est la somme de sa série de Fourier $(S_n(f))_{n\geq 0}$ (où $S_n(f)(e^{it}) = \sum_{|k|\leq n} c_k e^{ikt}$) avec $\lim_{n\to\infty} \|f - S_n\|_2 = 0$.

Remarque 4.1.1 *Lorsque $f \notin L^2(\mathbb{T})$ f n'est pas en général égal à la somme de série de Fourier $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int}$.*

Théorème 4.1.4 (de Riesz-Fischer) *Toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $\mathbb{C}$ telle que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 < \infty$ est la suite des coefficients de Fourier d'une fonction $g \in L^2(\mathbb{T})$.*

4.2 Fonctions sous-harmoniques

4.2.1 Définition et caractérisation

Définition 4.2.1 *Une fonction $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{D}$ est dite* ***sous-harmonique*** *si elle a la propriété suivante : pour tout domaine (ouvert connexe) Ω de $\mathbb{D}$ dont la fermeture $\overline{\Omega}$ est inclus dans $\mathbb{D}$ et pour toute fonction U harmonique dans Ω et continue dans $\overline{\Omega}$ vérifiant $f(z) \leq U(z)$ sur la frontière $\partial\Omega$ de Ω, on a $f(z) \leq U(z)$ pour tout $z \in \Omega$.*

En pratique, les fonctions continues à valeurs réelles sous-harmoniques sur $\mathbb{D}$ sont caractérisées par la **propriété locale de majoration par la valeur moyenne** avec laquelle il est souvent plus facile de travailler ([8], p. 7).

Théorème 4.2.1 *Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{D}$. Alors f est sous-harmonique si et seulement si pour tout $z_0 \in \mathbb{D}$ il existe $\rho_0 > 0$ tel que $D(z_0, \rho_0) \subset \mathbb{D}$ avec de plus*

$$f(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it}) dt \tag{4.1}$$

pour tout $\rho < \rho_0$.

Preuve : Soit $z_0 \in \mathbb{D}$ et soit $\rho > 0$ tel que $\rho < \rho_0 = 1 - |z_0|$. Comme f est continue sur $\mathbb{D}$, d'après le Corollaire 1.3.1, il existe une unique fonction U harmonique sur $D(z_0, \rho)$, continue sur $\overline{D(z_0, \rho)}$ tel que U et f coïncident sur le cercle $\Gamma(z_0, \rho)$. Si f est sous-harmonique on a $f(z_0) \leq U(z_0)$. D'après le Corollaire 1.2.3, on a aussi $U(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(z_0 + \rho e^{it}) dt$. Finalement on obtient :

$$f(z_0) \leq U(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(z_0 + \rho e^{it}) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it}) dt,$$

ce qui prouve que (4.1) est une condition nécessaire pour que f soit sous-harmonique. Pour montrer que (4.1) est une condition suffisante pour que f soit sous-harmonique, supposons qu'il existe un domaine Ω avec $\overline{\Omega} \subset \mathbb{D}$, une fonction U harmonique dans Ω, continue sur $\overline{\Omega}$ telle que $f(z) \leq U(z)$ sur $\partial\Omega$ avec $f(z_1) > U(z_1)$ pour un point $z_1 \in \Omega$. On définit la fonction h sur le compact $\overline{\Omega}$ par $h(z) = f(z) - U(z)$. Comme h est continue sur le compact $\overline{\Omega}$, h atteint son maximum avec $m > 0$ car $h(z_1) > 0$. Soit $E \neq \emptyset$ l'ensemble où h atteint son maximum. Comme $h(z) \leq 0$ sur $\partial\Omega$, $E \subset \Omega$. Comme E est fermé (par continuité de h), il existe un point z_0 pour lequel aucune boule ouverte centrée en z_0 ne soit entièrement contenue dans E (sinon $E \neq \emptyset$ serait à la fois ouvert et fermé dans Ω connexe, et donc on aurait $E = \Omega$, ce qui est absurde puisque Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ tandis que E est un fermé borné non vide de $\mathbb{C}$). Considérons à présent $\rho > 0$ tel que $D(z_0, \rho) \subset \Omega$ et tels que le cercle $\Gamma_{z_0,\rho}$ ne soit pas entièrement contenu dans E. Par conséquent $h(z) \leq m$ sur $\Gamma_{z_0,\rho}$ avec une inégalité stricte sur un ouvert de $\Gamma_{z_0,\rho}$ donc sur un arc (de longueur strictement positive). La fonction U harmonique vérifiant la propriété de la moyenne, on obtient ainsi :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it}) dt - U(z_0) \quad = \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(z_0 + \rho e^{it}) - U(z_0 + \rho e^{it})) dt$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(z_0+\rho e^{it})dt \\ &< m = h(z_0) = f(z_0) - U(z_0), \end{aligned}$$

et donc $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+\rho e^{it})dt < f(z_0)$, ce qui contredit (4.1) et termine la preuve du théorème.

□

Remarque 4.2.1 *D'après le Corollaire 1.2.3, il est clair que toute fonction harmonique à valeurs dans $\mathbb{R}$ est une fonction sous-harmonique.*

4.2.2 Exemples

1. Soit f analytique dans $\mathbb{D}$ et soit $p > 0$. Alors la fonction g continue sur $\mathbb{D}$ à valeurs réelles définie par $g(z) = |f(z)|^p$ est sous-harmonique.

   En effet, d'après le Théorème 4.2.1, il suffit de vérifier (4.1). Soit $z_0 \in \mathbb{D}$. Si $f(z_0) = 0$, (4.1) est automatique. Supposons que $f(z_0) \neq 0$. D'après le principe des zéros isolés et le Théorème 3.1.1, il existe alors $\rho_0 > 0$ tel qu'il existe une détermination holomorphe du logarithme sur $D(z_0, \rho_0)$ avec $\overline{D(z_0, \rho_0)} \subset \mathbb{D}$ et ainsi on peut définir $z \longmapsto f(z)^p$ comme une fonction holomorphe dans $D(z_0, \rho_0)$. En particulier, pour tout $\rho < \rho_0$, on a :

   $$(f(z_0))^p = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (f(z_0+\rho e^{it}))^p dt,$$

   ce qui implique naturellement

   $$|f(z_0)|^p \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0+\rho e^{it})|^p dt.$$

2. Soit u une fonction harmonique dans $\mathbb{D}$ et soit $p \geq 1$. Alors la fonction g continue sur $\mathbb{D}$ à valeurs réelles définie par $g(z) = |u(z)|^p$ est sous-harmonique.

   En effet, comme u est harmonique dans $\mathbb{D}$, d'après le Corollaire 1.2.3, pour tout $z_0 \in \mathbb{D}$ et pour tout $\rho < \rho_0 = 1 - |z_0|$, on a l'égalité :

   $$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0+\rho e^{it})dt,$$

   ce qui implique

   $$|u(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |u(z_0+\rho e^{it})|dt.$$

Si $p = 1$, (4.1) est bien vérifiée et donc $|u|$ est sous-harmonique. Si $p > 1$, d'après l'inégalité de Hölder, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |u(z_0+\rho e^{it})|dt &\leq \left(\int_0^{2\pi} |u(z_0+\rho e^{it})|^p dt\right)^{1/p} \left(\int_0^{2\pi} 1^q dt\right)^{1/q} \\ &= \left(\int_0^{2\pi} |u(z_0+\rho e^{it})|^p dt\right)^{1/p} (2\pi)^{1/q}\end{aligned}$$

avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Par conséquent on a :

$$|u(z_0)|^p \leq (2\pi)^{1-p+p/q} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(z_0+\rho e^{it})|^p dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(z_0+\rho e^{it})|^p dt,$$

ce qui prouve d'après le Théorème 4.2.1 que $|u|^p$ est sous-harmonique.

3. Soit $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$. Alors $\log^+|f|$ est une fonction continue à valeurs réelles sous-harmonique sur $\mathbb{D}$.

   En effet, si $z_0 \in \mathbb{D}$ est tel que $|f(z_0)| \leq 1$, l'inégalité (4.1) est trivialement vérifiée. Si $z_0 \in \mathbb{D}$ est tel que $|f(z_0)| > 1$, par continuité de $|f|$, il existe $\rho_0 > 0$ tel que $|f(z)| > 1$ sur $D(z_0, \rho_0) \subset \mathbb{D}$. Par conséquent pour tout $\rho < \rho_0$, $\log^+|f(z)| = \log|f(z)|$ pour tout $z \in D(z_0, \rho)$. Comme $\log|f|$ est une fonction harmonique sur $D(z_0, \rho_0)$ (cf. Exercices 1.4.3 et 1.4.4), (4.1) est vérifiée (c'est même une égalité) pour $\rho < \rho_0$.

Proposition 4.2.1 *Soit f une fonction continue à valeurs réelles sous-harmonique sur $\mathbb{D}$ et soit*

$$m(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it})dt \text{ pour } 0 \leq r < 1.$$

Alors $r \longmapsto m(r)$ est une fonction croissante sur $[0, 1[$.

Preuve : Soient $0 \leq r_1 < r_2 < 1$. Comme f continue sur $\mathbb{D}$, d'après le Corollaire 1.3.1, il existe une unique fonction U harmonique sur $D(0, r_2)$, continue sur $\overline{D(0, r_2)}$ tel que U et f coïncident sur le cercle $\Gamma(0, r_2)$. Comme f est sous-harmonique, on a $f(z) \leq U(z)$ pour tout $z \in \overline{D(0, r_2)}$. On a donc :

$$\begin{aligned}m(r_1) &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(r_1 e^{it})dt = U(0) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(r_2 e^{it})dt = m(r_2).\end{aligned}$$

□

4.3 Définitions des espaces de Hardy et premières propriétés

Définition 4.3.1 *Pour $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ on définit les quantités suivantes :*

$$\begin{array}{rcl} M_0(f,r) & = & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{it})|dt, \\ M_p(f,r) & = & \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{it})|^p dt\right\}^{1/p}, \ \textit{si } 0 < p < \infty \textit{ et} \\ M_\infty(f,r) & = & \sup_{t\in[0,2\pi[} |f(re^{it})|. \end{array}$$

L'espace de Hardy $H^p(\mathbb{D})$, $0 < p \leq \infty$, est défini par

$$H^p(\mathbb{D}) = \{f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}) : \sup_{0\leq r<1} M_p(f,r) < \infty\}.$$

Proposition 4.3.1 *Soit $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$. Les fonctions $r \longmapsto M_p(f,r)$ (pour $0 \leq p \leq \infty$) sont des fonctions croissantes sur $[0,1[$.*

Preuve : Nous avons vu précédemment que si $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ alors $|f|^p$ et $\log^+ |f|$ sont des fonctions sous-harmoniques sur $\mathbb{D}$ pour $0 < p < \infty$. D'après la Proposition 4.2.1, $r \longmapsto M_p(f,r)$ (pour $0 \leq p < \infty$) est une fonction croissante sur $[0,1[$. Le fait que $r \longmapsto M_\infty(f,r)$ est croissante sur $[0,1[$ est une conséquence du principe du maximum pour les fonctions de $\mathcal{H}ol(\mathbb{D})$.

$\square$

On peut alors redéfinir les espaces de Hardy $H^p(\mathbb{D})$ (pour $0 < p \leq \infty$) ainsi que la classe de Nevanlinna $\mathcal{N}$ de la façon suivante :

Corollaire 4.3.1 *Pour $0 < p \leq \infty$ nous avons :*

$$H^p(\mathbb{D}) = \{f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}) : \lim_{r\to 1^-} M_p(f,r) < \infty\}$$

et

$$\mathcal{N} = \{f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}) : \lim_{r\to 1^-} M_0(f,r) < \infty\}.$$

Notation : si $f \in H^p(\mathbb{D})$ pour $0 < p \leq \infty$ nous noterons par $\|f\|_p$ la limite $\lim_{r\to 1^-} M_p(f,r)$. Le théorème suivant précise le lien entre les différents espaces de Hardy et la classe de Nevanlinna.

Théorème 4.3.1 *Nous avons les inclusions suivantes :*

$$H^\infty(\mathbb{D}) \subset H^p(\mathbb{D}) \subset H^s(\mathbb{D}) \subset \mathcal{N}$$

pour $0 < s < p < \infty$.

Preuve : Si $f \in H^\infty(\mathbb{D})$, pour tout $p \in]0, \infty[$ on a $|f(re^{it})|^p \leq \|f\|_\infty^p$ pour $r \in [0, 1[$ et $t \in [0, 2\pi[$. On en déduit alors $M_p(f, r) \leq \|f\|_\infty$ pour $r \in [0, 1[$, ce qui implique $\|f\|_p \leq \|f\|_\infty$ et donc $H^\infty(\mathbb{D}) \subset H^p(\mathbb{D})$ pour tout $p > 0$.
Pour $p > s > 0$, d'après l'inégalité de Hölder, pour f mesurable sur le cercle centré en 0 de rayon $r \in]0, 1[$, on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{it})|^s dt \leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{it})|^p dt\right)^{s/p} (2\pi)^{1-s/p},$$

et donc $M_s(f, r) \leq M_p(f, r)$. Ainsi $H^p(\mathbb{D}) \subset H^s(\mathbb{D})$ pour $p > s > 0$. Enfin, pour tout $s > 0$, comme $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^s} = 0$, il existe $A > 0$ tel que $\frac{\log x}{x^s} \leq A$ pour tout $x \geq 1$. Par conséquent, si f mesurable sur le cercle centré en 0 de rayon $r \in]0, 1[$, on a :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f(re^{it})| dt = \int_{t\in[-\pi,\pi]:|f(re^{it})|\geq 1} \log |f(re^{it})| dt \leq A \int_{t\in[-\pi,\pi]:|f(re^{it})|\geq 1} |f(re^{it})|^s dt.$$

On a donc $M_0(f, r) \leq AM_s(f, r)^s$, ce qui prouve que $H^s(\mathbb{D}) \subset \mathcal{N}$ pour $s > 0$.

□

Théorème 4.3.2 *Si* $1 \leq p \leq \infty$*, l'espace de Hardy* $H^p(\mathbb{D})$ *muni de la norme* $\|\cdot\|_p$ *est un espace de Banach.*

Preuve : La seule chose délicate à vérifier pour faire de $\|\cdot\|_p$ une norme est de vérifier que l'inégalité triangulaire est satisfaite. D'après l'inégalité de Minkowski (si $1 \leq p < \infty$) ou d'après l'inégalité triangulaire que vérifie le module sur $\mathbb{C}$ (si $p = \infty$), pour toutes les fonctions f et g mesurables sur le cercle centré en 0 de rayon $r \in]0, 1[$, on a :

$$M_p(f + g, r) \leq M_p(f, r) + M_p(g, r) \text{ pour tout } r \in [0, 1[.$$

Pour toutes les fonctions $f, g \in H^p(\mathbb{D})$ (avec $1 \leq p \leq \infty$), on a donc $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p+\|g\|_p$. Ainsi $\|\cdot\|_p$ est bien une norme sur $H^p(\mathbb{D})$. Pour $p < 1$, $H^p(\mathbb{D})$ est encore un espace vectoriel mais le problème est que $\|\cdot\|_p$ ne vérifie pas l'inégalité triangulaire.

Fixons à présent $p \in [1, \infty]$ et montrons que les espaces vectoriels normés $H^p(\mathbb{D})$ sont complets. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de Cauchy dans $H^p(\mathbb{D})$. Soient r, R tels que $r < R < 1$ et supposons que $|z| \leq r$. On applique la formule de Cauchy à $f_n - f_m$ sur le cercle Γ_R centré en 0 et de rayon R. On obtient alors :

$$\begin{aligned} |f_n(z) - f_m(z)| &= \left| \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_R} \frac{f_n(\xi) - f_m(\xi)}{\xi - z} d\xi \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{R - r} \int_{-\pi}^{\pi} R|f_n(Re^{i\theta}) - f_m(Re^{i\theta})| d\theta. \end{aligned}$$

Ainsi, pour $|z| \leq r$ on a :

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq \frac{1}{R - r} M_1(f_n - f_m, R).$$

Comme l'application $\varphi : x \longmapsto x^p$ est convexe pour $p \geq 1$, d'après l'inégalité de Jensen appliquée à la mesure μ définie par $d\mu(t) = \frac{1}{2\pi} dt$ sur $[-\pi, \pi]$, on obtient :

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|(f_n - f_m)(Re^{it})|}{2\pi} dt \right)^p \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |(f_n - f_m)(Re^{it})|^p dt,$$

et donc $M_1(f_n - f_m, R) \leq M_p(f_n - f_m, R)$. D'après la Proposition 4.3.1, $M_p(f_n - f_m, R) \leq \lim_{R\to 1^-} M_p(f_n - f_m, R) = \|f_n - f_m\|_p$ et donc pour $|z| \leq r$ on a :

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq \frac{1}{R - r} \|f_n - f_m\|_p.$$

La suite $(f_n)_n$ converge donc uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}$ vers une fonction f holomorphe sur $\mathbb{D}$. Comme on a supposé que $(f_n)_n$ était de Cauchy dans $H^p(\mathbb{D})$, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $m = m(\varepsilon) \geq 1$ tel que pour tout $n > m$ on ait $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$. Pour $r < 1$ on obtient :

$$M_p(f - f_m, r) = \lim_{n\to\infty} M_p(f_n - f_m, r) \leq \lim_{n\to\infty} \|f_n - f_m\|_p \leq \varepsilon,$$

ce qui implique $\lim_{m\to\infty} \|f - f_m\|_p = 0$. D'autre part, sachant que $\|f\|_p \leq \|f - f_m\|_p + \|f_m\|_p$, il est clair que $\|f\|_p < \infty$. La suite $(f_n)_n$ converge donc dans $H^p(\mathbb{D})$ qui est donc un espace de Banach.

□

Théorème 4.3.3 *Soit $p \in]0,\infty]$ et soit f une fonction de $H^p(\mathbb{D})$ non identiquement nulle. Si B est le produit de Blaschke associé à f ($f \in \mathcal{N}$) alors $\frac{f}{B} \in H^p(\mathbb{D})$ avec $\left\|\frac{f}{B}\right\|_p = \|f\|_p$.*

Preuve : Soit $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ la suite des zéros de f comptés avec multiplicité et soit B_n le produit de Blaschke fini associé aux n premiers zéros de f. Nous avons vu que B_n est une fonction de $H^\infty(\mathbb{D})$ continue sur $\overline{\mathbb{D}}$ avec $|B_n(e^{it})| = 1$ pour $t \in \mathbb{R}$. Comme B_n est continue sur le compact $\overline{\mathbb{D}}$, B_n est uniformément continue sur $\overline{\mathbb{D}}$. Par conséquent, si l'on choisit $\varepsilon \in]0,1[$, il existe $\nu < 1$ tel que pour tous $z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{D}}$ vérifiant $|z_1 - z_2| < \nu$ on ait $|B_n(z_1) - B_n(z_2)| < \varepsilon$. En particulier, pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $1-\nu < r < 1$ on a $|B_n(re^{it}) - B_n(e^{it})| < \varepsilon$. Comme $|B_n(e^{it})| = 1$, on obtient $1-\varepsilon < |B_n(re^{it}| < 1+\varepsilon$ pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $1-\nu < r < 1$. On en déduit :

$$\frac{1}{1+\varepsilon}|f(re^{it})| < \left|\frac{f(re^{it})}{B_n(re^{it})}\right| < \frac{1}{1-\varepsilon}|f(re^{it})|$$

pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $1-\nu < r < 1$. Si $p \in]0,\infty]$ et $f \in H^p(\mathbb{D})$ on obtient ainsi

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\|f\|_p < \left\|\frac{f}{B_n}\right\|_p < \frac{1}{1-\varepsilon}\|f\|_p$$

pour tout $\varepsilon \in]0,1[$. Finalement on a $\|g_n\|_p = \|f\|_p$ avec $p \in]0,\infty[$ et avec $g_n = \frac{f}{B_n}$. Posons $g = \frac{f}{B}$. Par construction $g \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$. De plus, pour $z \in \mathbb{D}$, $\lim_{n\to\infty} g_n(z) = g(z)$ et $(|g_n(z)|)_{n\geq 1}$ est une suite croissante. D'après le théorème de convergence monotone, pour $p \in]0,\infty[$ et pour $r \in [0,1[$ fixé, on a :

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} |g_n(re^{it})|^p dt = \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{n\to\infty} |g_n(re^{it})|^p dt = \int_{-\pi}^{\pi} |g(re^{it})|^p dt,$$

ce qui implique $M_p(g,r) = \lim_{n\to\infty} M_p(g_n,r)$. Comme $r \longmapsto M_p(g_n,r)$ est une fonction croissante avec $\lim_{r\to 1^-} M_p(g_n,r) = \|f\|_p$, on obtient $\lim_{n\to\infty} M_p(g_n,r) \leq \|f\|_p$ pour tout $r \in [0,1[$ et donc $\|g\|_p = \lim_{r\to 1^-} M_p(g,r) \leq \|f\|_p$. Par conséquent $g \in H^p(\mathbb{D})$ avec $\|g\|_p \leq \|f\|_p$. D'autre part, comme $|B(z)| < 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, on en déduit $|g(z)| > |f(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Ainsi on a $\|g\|_p \geq \|f\|_p$. Finalement, pour $p \in]0,\infty[$, nous avons $\|g\|_p = \|f\|_p$. Si $f \in H^\infty(\mathbb{D})$, comme $\sup_{z\in\mathbb{D}} |g_n(z)| = \|g_n\|_\infty = \|f\|_\infty$, on a $|g_n(z)| \leq \|f\|_\infty$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ et pour tout entier $n \geq 1$. Comme pour $z \in \mathbb{D}$ nous avons $g(z) = \lim_{n\to\infty} g_n(z)$, on a $\|g\|_\infty := \sup_{z\in\mathbb{D}} |g(z)| \leq \|f\|_\infty$. De plus, comme $|g(z)| > |f(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, on obtient $\|g\|_\infty \geq \|f\|_\infty$, et donc $\|g\|_\infty = \|f\|_\infty$.

□

4.4 Théorèmes de factorisation

Nous venons de voir que, d'après le Théorème 4.3.3, toute fonction f non identiquement nulle de $H^p(\mathbb{D})$ ($p \in]0, \infty]$) peut se factoriser sous la forme $f = Bg$ où B est un produit de Blaschke et $g \in H^p(\mathbb{D})$ sans zéro dans $\mathbb{D}$. Il existe une factorisation plus subtile qui fait l'objet de la section suivante.

4.4.1 Les fonctions intérieures

Définition 4.4.1 *Une fonction* ***intérieure*** *est une fonction $U \in H^\infty(\mathbb{D})$ telle que $|U^*(e^{it})| = 1$ m-presque partout (avec $U^*(e^{it}) = \lim_{r\to 1^-} U(re^{it})$).*

Le résultat suivant donne une description complète de toute fonction intérieure.

Théorème 4.4.1 *Soit $c \in \mathbb{C}, |c| = 1$, soit B un produit de Blaschke et soit ν une mesure de Borel positive finie sur $\mathbb{T}$ telle que $\nu \perp m$. Pour $z \in \mathbb{D}$ on pose*

$$U(z) = cB(z)e^{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} d\nu(t)}. \tag{4.2}$$

La fonction U est une fonction intérieure et toute fonction intérieure peut s'obtenir de cette façon.

Preuve : Supposons que U soit définie sur $\mathbb{D}$ par (4.2). Par construction $U \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$. Posons $g = \frac{U}{B}$. On note que $\log|g|$ est l'intégrale de Poisson de la mesure finie négative $-\nu$. Ainsi $\log|g|$ est une fonction harmonique négative sur $\mathbb{D}$, ce qui implique $|g(z)| \leq 1$ pour $z \in \mathbb{D}$. Par conséquent, g et par suite U sont des fonctions de $H^\infty(\mathbb{D})$. De plus, comme $\nu \perp m$ et $\log|g| = -P(\nu)$, d'après le Corollaire 2.3.3, on a $\lim_{r\to 1^-} \log|g(re^{it})| = \log|g^*(e^{it})| = 0$ m-presque partout. On a donc $|g^*(e^{it})| = 1$ m-presque partout. Comme d'après la Remarque 3.3.1, $|B^*(e^{it})| = 1$ m-presque partout, on a donc $|U^*(e^{it})| = 1$ m-presque partout et ainsi la fonction U est bien une fonction intérieure.

Réciproquement, soit U une fonction intérieure et soit B le produit de Blaschke associé à la suite de ses zéros comptés avec multiplicité. D'après le Théorème 4.3.3, $g := \frac{U}{B} \in H^\infty(\mathbb{D})$, $\|g\|_\infty = \|U\|_\infty = 1$ et par construction g ne s'annule pas sur $\mathbb{D}$. Il existe donc $\ell \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ vérifiant $\log|g| = Re(\ell)$, ce qui implique que $\log|g|$ est une fonction harmonique sur $\mathbb{D}$. D'autre part $\log|g|$ est négative puisque $\|g\|_\infty = 1$. D'après la Remarque 3.3.1, $|B^*(e^{it})| = 1$ m-presque partout. Comme $|U^*(e^{it})| = 1$ m-presque partout, nécessairement $|g^*(e^{it})| = 1$ m-presque partout et donc $\log|g^*(e^{it})| = 0$ m-presque partout. D'après le Corollaire 2.3.3, il existe $\nu \geq 0$, ν finie sur $\mathbb{T}$, $\nu \perp m$ telle que $\log|g|$ soit l'intégrale de Poisson de $-\nu$. Finalement $\log|g|$ est la partie réelle de la fonction holomorphe $h(z) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\nu(t)$. Comme $g = e^\ell$ avec $Re(\ell) = Re\left(-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\nu(t)\right)$, on obtient $g(z) = ce^{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\nu(t)}$ avec $|c| = 1$ puisque $-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\nu(t) - \ell \in i\mathbb{R}$. Ceci termine la démonstration.

$\square$

Un exemple très simple d'une fonction intérieure qui ne soit pas un produit de Blaschke est le suivant : prenons $c = 1$, $B(z) = 1$ et $\nu = \delta_1$, la mesure de Dirac en 1. On obtient alors que la fonction définie sur $\mathbb{D}$ par $U(z) = e^{\frac{z+1}{z-1}}$ est une fonction intérieure sans zéro dans $\mathbb{D}$.

Définition 4.4.2 *Les fonctions* ***intérieures singulières*** *sont les fonctions intérieures qui ne s'annulent pas sur $\mathbb{D}$, i.e. les fonctions de la forme*

$$S_\nu(z) = ce^{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\nu(t)}$$

où $|c| = 1$ et où ν est une mesure de Borel positive finie sur $\mathbb{T}$ telle que $\nu \perp m$.

4.4.2 Les fonctions extérieures

Définition 4.4.3 *Une fonction* ***extérieure*** *est une fonction $Q \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ de la forme*

$$Q(z) = ce^{\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log\varphi(e^{it})dt}$$

où $|c| = 1$ et où φ est une fonction positive mesurable telle que $\log\varphi \in L^1(\mathbb{T})$.

Proposition 4.4.1 *Soit Q une fonction extérieure reliée à φ comme dans la Définition 4.4.3. Alors*

1. *$\log|Q|$ est l'intégrale de Poisson de la mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue dont la dérivée de Radon-Nikodym est $\log\varphi$.*
2. *$\lim_{r\to 1^-}|Q(re^{it})| = \varphi(e^{it})$ m-presque partout.*
3. *Pour $p \in]0,\infty]$, $Q \in H^p(\mathbb{D})$ si et seulement si $\varphi \in L^p(\mathbb{T})$. Dans ce cas $\|Q\|_p = \|\varphi\|_p$.*

Preuve : Comme

$$|Q(z)| = e^{\displaystyle Re\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log\varphi(e^{it})dt\right)} = e^{\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}Re\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right)\log\varphi(e^{it})},$$

avec $Re\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right) = P_r(\theta - t)$ si $z = re^{i\theta}$, on a $\log|Q(re^{i\theta})| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)\log\varphi(e^{it})dt$, ce qui prouve 1. De plus, d'après 1. et en appliquant le Théorème 2.3.3, on obtient $\lim_{r\to 1^-}\log|Q(re^{it})| = \log\varphi(e^{it})$ m-presque partout, ce qui implique 2.
Si $p = \infty$, compte tenu de 2. l'assertion 3. est évidente. Supposons $p \in]0,\infty[$ et $Q \in H^p(\mathbb{D})$. Soit $(r_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de réels de $]0,1[$ tendant vers 1. D'après le lemme de Fatou appliqué à la suite de fonctions mesurables positives (sur $\mathbb{T}$) $(Q_n)_{n\geq 1}$ définie par $Q_n(e^{it}) = |Q(r_ne^{it})|^p$, on a :

$$\int_{-\pi}^{\pi}\liminf_{n\to\infty}Q_n(e^{it})dt \leq \liminf_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}Q_n(e^{it})dt,$$

ce qui implique (à l'aide de la Proposition 4.3.1) $\|Q^*\|_p \leq \|Q\|_p$. D'après 2., on a donc $\|\varphi\|_p \leq \|Q\|_p$. Par conséquent, si $Q \in H^p(\mathbb{D})$ alors $\varphi \in L^p(\mathbb{T})$. Réciproquement, supposons que $\varphi \in L^p(\mathbb{T})$. On a alors :

$$|Q(re^{i\theta})|^p = e^{\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)\log\varphi^p(e^{it})dt}.$$

D'après l'inégalité de Jensen, Théorème 4.1.1 appliqué à la fonction convexe $x \longmapsto e^x$ et à la mesure positive μ définie par $d\mu(t) = \frac{1}{2\pi} P_r(\theta - t)dt$, on obtient :

$$e^{\displaystyle \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\log \varphi^p(e^{it})dt} \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\varphi^p(e^{it})dt.$$

On a donc

$$|Q(re^{i\theta})|^p \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\varphi^p(e^{it})dt.$$

En intégrant cette inégalité par rapport à la variable θ, sachant que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)d\theta = 1$, on obtient $M_p(Q, r) \leq \|\varphi\|_p$, et donc $\lim_{r\to 1^-} M_p(Q, r) = \|Q\|_p \leq \|\varphi\|_p$. L'équivalence $Q \in H^p(\mathbb{D}) \Longleftrightarrow \varphi \in L^p(\mathbb{T})$ est démontrée. Il résulte des calculs ci-dessus que si $Q \in H^p(\mathbb{D})$ alors $\|Q\|_p = \|\varphi\|_p$.

□

4.4.3 Facteurs extérieures des fonctions de $H^p(\mathbb{D})$, $0 < p \leq \infty$

Proposition 4.4.2 *Soit* $p \in]0, \infty]$. *Supposons que* $f \in H^p(\mathbb{D})$, f *non identiquement nulle. Alors la limite radiale de* f, *notée* f^*, *est telle que* $\log|f^*| \in L^1(\mathbb{T})$ *et* $f^* \in L^p(\mathbb{T})$.

Preuve : Si $f \in H^p(\mathbb{D})$ alors $\log|f^*| \in L^1(\mathbb{T})$. En effet, d'après le Théorème 4.3.1, $H^p(\mathbb{D}) \subset \mathcal{N}$ et d'après le Théorème 3.4.1, si $f \in \mathcal{N}$ alors $f^*(e^{it})$ est définie m-presque partout avec $\log|f^*| \in L^1(\mathbb{T})$. De plus, pour $p \in]0, \infty[$, d'après le lemme de Fatou,

$$\int_0^{2\pi} \liminf_{r\to 1^-} |f(re^{it})|^p dt \leq \liminf_{r\to 1^-} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p dt,$$

ce qui donne :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f^*(e^{it})|^p dt \leq \lim_{r\to 1^-} M_p(f, r)^p = \|f\|_p^p.$$

Par conséquent, pour $p \in]0, \infty[$, si $f \in H^p(\mathbb{D})$ alors $f^* \in L^p(\mathbb{T})$. Pour $p = \infty$, comme $|f(z)| \leq \|f\|_\infty$ pour $z \in \mathbb{D}$, on a donc $|f^*(e^{it})| \leq \|f\|_\infty$ m-presque partout. De ce fait, si $f \in H^\infty(\mathbb{D})$ on a donc $f^* \in L^\infty(\mathbb{T})$.

□

Corollaire 4.4.1 *Soit $p \in]0,\infty]$. Supposons que $f \in H^p(\mathbb{D})$, f non identiquement nulle. Dans ce cas, la fonction extérieure Q_f définie par*

$$Q_f(z) = e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \log |f^*(e^{it})| dt} \tag{4.3}$$

appartient à $H^p(\mathbb{D})$.

Remarque 4.4.1 *La fonction Q_f est appelée le **facteur extérieur** de f. Notons que Q_f ne dépend que de f^*, c'est à dire des limites radiales de f sur $\mathbb{T}$.*

Preuve : Soit $p \in]0,\infty]$. Supposons que $f \in H^p(\mathbb{D})$, f non identiquement nulle. D'après le Théorème 4.4.2, $\log |f^*| \in L^1(\mathbb{T})$. Par suite l'intégrale (4.3) est bien définie comme une fonction extérieure. De plus, comme d'après le Théorème 4.4.2, $f \in H^p(\mathbb{D})$ implique $f^* \in L^p(\mathbb{T})$, la 3ième assertion de la Proposition 4.4.1 nous permet de conclure que $Q_f \in H^p(\mathbb{D})$. $\square$

4.4.4 L'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$

Les propriétés fondamentales de $H^2(\mathbb{D})$ sont résumées par le théorème suivant :

Théorème 4.4.2
1. *Une fonction $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ de la forme $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ appartient à $H^2(\mathbb{D})$ si et seulement si $\sum_{n\geq 0} |a_n|^2 < \infty$. Dans ce cas $\|f\|_2 = \left(\sum_{n\geq 0} |a_n|^2\right)^{1/2}$.*
2. *Si $f \in H^2(\mathbb{D})$, $f^* \in L^2(\mathbb{T})$ et le $n^{ième}$ coefficient de Fourier de f^* est a_n si $n \geq 0$ et 0 si $n < 0$. De plus*
$$\lim_{s\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f^*(e^{it}) - f(se^{it})|^2 dt = 0$$
et f est l'intégrale de Poisson ainsi que l'intégrale de Cauchy de f^*.
3. *L'application $f \longmapsto f^*$ est un isomorphisme isométrique de $H^2(\mathbb{D})$ dans $H^2(\mathbb{T}) := \{g \in L^2(\mathbb{T}) : \hat{g}(n) = 0, n < 0\}$.*
4. *$H^2(\mathbb{D})$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire*
$$< f, g >_{H^2(\mathbb{D})} = < f^*, g^* >_{L^2(\mathbb{T})} := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^*(e^{it})\overline{g^*(e^{it})} dt.$$

Preuve : Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ pour $z \in \mathbb{D}$. On a donc, pour $r \in [0,1[$ et $t \in \mathbb{R}$, $f(re^{it}) = \sum_{n\geq 0} a_n r^n e^{int}$. D'après le théorème de **Plancherel-Parseval**, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt = \sum_{n\geq 0} |a_n|^2 r^{2n}.$$

Par convergence monotone discrète, on a :

$$\lim_{r\to 1^-} \sum_{n\geq 0} |a_n|^2 r^{2n} = \sum_{n\geq 0} |a_n|^2.$$

Comme $\|f\|_2^2 = \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt$, on obtient f appartient à $H^2(\mathbb{D})$ si et seulement si $\sum_{n\geq 0} |a_n|^2 < \infty$ et $\|f\|_2 = \left(\sum_{n\geq 0} |a_n|^2\right)^{1/2}$, ce qui termine la preuve de 1.
D'après la Proposition 4.4.2, $f^* \in L^2(\mathbb{T})$ si $f \in H^2(\mathbb{D})$. Supposons $f \in H^2(\mathbb{D})$ et pour $0 < s < 1$ on définit les fonctions f_s sur $\mathbb{T}$ par $f_s(e^{it}) = f(se^{it}) = \sum_{n\geq 0} a_n s^n e^{int}$. Comme $\sum_{n\geq 0} |a_n|^2 < \infty$, le **théorème de Riesz-Fischer** nous garantit l'existence d'une fonction $g \in L^2(\mathbb{T})$ telle que $\hat{g}(n) = a_n$ si $n \geq 0$ et 0 si $n < 0$. Les coefficients de Fourier de $g - f_s$ valent $(1 - s^n)a_n$ si $n \geq 0$ et 0 si $n < 0$. Une nouvelle application de l'égalité de Plancherel-Parseval donne :

$$\|g - f_s\|_2^2 = \sum_{n\geq 0} (1 - s^n)^2 |a_n|^2.$$

Par convergence monotone décroissante discrète,

$$\lim_{s\to 1^-} \sum_{n\geq 0} (1 - s^n)^2 |a_n|^2 = 0.$$

On a donc $\lim_{s\to 1^-} \|g - f_s\|_2 = 0$. Pour $0 < s < 1$, la fonction f_s définie par $f_s(z) = f(sz)$ est holomorphe dans $D(0, \frac{1}{s})$. On a donc, pour $z \in \mathbb{D}$,

$$f_s(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{f_s(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

La fonction f_s étant en particulier harmonique sur $D(0, \frac{1}{s})$, d'après le Théorème 1.3.1, on a aussi, pour $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$,

$$f_s(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) f_s(e^{it}) dt.$$

L'inégalité de Schwarz et le fait que $P_r(\theta - t) \leq \frac{1+r}{1-r}$, nous donne

$$\begin{aligned}\left| f_s(re^{i\theta}) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta-t)g(e^{it})dt \right| &= \left| \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta-t)(f_s(e^{it}) - g(e^{it}))dt \right| \\ &\leq \frac{1+r}{1-r}\|f_s - g\|_2,\end{aligned}$$

et

$$\left| f_s(re^{i\theta}) - \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{g(\xi)}{\xi - re^{i\theta}}d\xi \right| = \left| \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{f_s(\xi) - g(\xi)}{\xi - re^{i\theta}}d\xi \right| \leq \frac{1}{1-r}\|f_s - g\|_2.$$

Comme $\lim_{s\to 1^-} \|g - f_s\|_2 = 0$, on a donc

$$f(re^{i\theta}) = \lim_{s\to 1^-} f_s(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta-t)g(e^{it})dt = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{g(\xi)}{\xi - re^{i\theta}}d\xi.$$

En particulier, f est la fonction harmonique définie comme l'intégrale de Poisson de la mesure $\mu \ll m$ définie par $d\mu(t) = g(e^{it})dt$ avec $g \in L^1(\mathbb{T})$ puisque $g \in L^2(\mathbb{T})$. D'après le Théorème 2.3.3, $f^*(e^{it}) = g(e^{it})$ m-presque partout. On en déduit que $f^* \in L^2(\mathbb{T})$, $\widehat{f^*}(n) = a_n$ si $n \geq 0$ et que $\widehat{f^*}(n) = 0$ si $n < 0$. Enfin on a aussi :

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta-t)f^*(e^{it})dt = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{f^*(\xi)}{\xi - re^{i\theta}}d\xi,$$

ce qui termine la preuve de 2.

Puisque $\lim_{s\to 1^-} \|f^* - f_s\|_2 = 0$, on a $\|f\|_2 := \lim_{s\to 1^-} \|f_s\|_2 = \|f^*\|_2$. Comme $\widehat{f^*}(n) = 0$, l'application $\Phi : f \longmapsto f^*$ est bien une isométrie de $H^2(\mathbb{D})$ dans $H^2(\mathbb{T})$. Par définition l'application Φ est linéaire. Etant isométrique, elle est automatiquement injective. Enfin, si $g \in H^2(\mathbb{T})$, g est de la forme $g(e^{it}) = \sum_{n\geq 0} a_n e^{int}$ avec $\|g\|_2^2 = \sum_{n\geq 0} |a_n|^2 < \infty$. Alors la fonction f définie sur $\mathbb{D}$ par $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ appartient à $H^2(\mathbb{D})$ d'après 1. L'application Φ est donc surjective. Ainsi Φ est bien un isomorphisme isométrique.

Par définition, $< f, f >_{H^2(\mathbb{D})} = \|f^*\|_2^2$. Comme $\|f^*\|_2 = \|f\|_2$, la norme sur $H^2(\mathbb{D})$ se déduit bien du produit scalaire que nous avons fixé. De plus $H^2(\mathbb{D})$ est complet d'après le Théorème 4.3.2. Ainsi $H^2(\mathbb{D})$ est bien un espace de Hilbert.

□

Corollaire 4.4.2 *Si $f \in H^1(\mathbb{D})$ alors $\lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f^*(e^{it}) - f(re^{it})|dt = 0$.*

Preuve : Soit B le produit de Blaschke associé à la suite des zéros de f dans $\mathbb{D}$. D'après le Théorème 4.3.3, $g := \frac{f}{B} \in H^1(\mathbb{D})$ avec $\|g\|_1 = \|f\|_1$. Comme par construction g ne s'annule par sur $\mathbb{D}$, il existe donc une détermination holomorphe du logarithme de g. De ce fait on peut définir la fonction holomorphe $h = g^{1/2}$ sur $\mathbb{D}$. On a donc $h^2 = g$ et finalement $f = Bg = (Bh)h$ avec $\|h\|_2^2 = \|g\|_1 = \|f\|_1$. Par conséquent h et $\ell := Bh$ sont deux fonctions de $H^2(\mathbb{D})$ et $f = \ell h$. Pour $r \in]0,1[$, on définit la fonction f_r sur $\mathbb{T}$ par $f_r(e^{it}) = f(re^{it}) = \ell(re^{it})h(re^{it}) = \ell_r(e^{it})h_r(e^{it})$ si l'on pose $\ell_r(e^{it}) = \ell(re^{it})$ et $h_r(e^{it}) = h(re^{it})$. Comme $f^* = \ell^* h^*$, on a :

$$f^* - f_r = \ell^*(h^* - h_r) + h_r(\ell^* - \ell_r). \tag{4.4}$$

D'après le Théorème 4.4.2, comme $\ell, h \in H^2(\mathbb{D})$, on a

$$\lim_{r\to 1^-} \|h^* - h_r\|_2 = 0 = \lim_{r\to 1^-} \|\ell^* - \ell_r\|_2 \text{ et } \|\ell^*\|_2^2 = \|\ell\|_2^2 = \|f\|_1, \quad \|h_r\|_2^2 \leq \|h\|_2^2 = \|f\|_1.$$

L'inégalité de Schwarz appliquée aux deux produit du membre de droite de (4.4) nous donne :

$$\|f^* - f_r\|_1 \leq \|f\|_1^{1/2}(\|h^* - h_r\|_2 + \|\ell^* - \ell_r\|_2).$$

Il est à présent clair que $\lim_{r\to 1^-} \|f^* - f_r\|_1 = 0$.

Remarque 4.4.2 *Au cours de la démonstration du théorème précédent, nous avons montré que toute fonction de $H^1(\mathbb{D})$ est le produit de deux fonctions de $H^2(\mathbb{D})$.*

4.4.5 Factorisations des fonctions de $H^p(\mathbb{D})$, $0 < p \leq \infty$

Le Corollaire 4.4.2 va nous permettre d'établir la factorisation de toute fonction appartenant à un espace de Hardy sous la forme d'un produit d'une fonction intérieure par une fonction extérieure.

Théorème 4.4.3 *Soit $p \in]0, \infty]$ et soit $f \in H^p(\mathbb{D})$. Alors il existe une fonction intérieure U_f telle que $f = U_f Q_f$ où Q_f et le facteur extérieur de f, à savoir la fonction de $H^p(\mathbb{D})$ définie par :*

$$Q_f(z) = e^{\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \log|f^*(e^{it})|dt}.$$

De plus

$$\log|f(0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f^*(e^{it})|dt, \tag{4.5}$$

avec égalité dans (4.5) si et seulement si U_f est constante, autrement dit, si et seulement si f est extérieure.

Preuve : Supposons tout d'abord que $f \in H^1(\mathbb{D})$. Soit B est le produit de Blaschke associé à la suite des zéros de f. D'après le Théorème 4.3.3, $g := \frac{f}{B} \in H^1(\mathbb{D})$ avec $\|g\|_1 = \|f\|_1$ et $|f^*| = |g^*|$. Pour démontrer le théorème, quitte à remplacer g par f, on peut supposer que f ne s'annule pas sur $\mathbb{D}$. Nous avons déjà établi dans le corollaire 4.4.1 que $Q_f \in H^1(\mathbb{D})$. La 2ième assertion de la Proposition 4.4.1 nous dit que $|Q_f^*(e^{it})| = |f^*(e^{it})|$ m-presque partout. Ainsi, si nous montrons que $|f(z)| \leq |Q_f(z)|$ pour $z \in \mathbb{D}$, nous aurons montré que $\frac{f}{Q_f}$ est une fonction intérieure, ce qui prouvera qu'il existe une fonction intérieure telle que $f = U_f Q_f$. Comme $|Q_f|$ est égal à $e^{P(\log|f^*|)}$ (où $P(\log|f^*|)$ désigne l'intégrale de Poisson de $\log|f^*|$ définie par $P(\log|f^*|)(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\log|f^*(e^{it})|dt$ pour $r \in [0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$), pour $z \in \mathbb{D}$, on a,

$$|f(z)| \leq |Q_f(z)| \Longleftrightarrow \log|f(z)| \leq P(\log|f^*|)(z).$$

Vérifions à présent que $\log|f(z)| \leq P(\log|f^*|)(z)$ pour $z \in \mathbb{D}$. Pour $|z| \leq 1$ et $0 < R < 1$ on définit f_R par $f_R(z) = f(Rz)$. Ainsi f_R est holomorphe dans $D(0, \frac{1}{R})$ et f_R ne s'annule pas. Par suite, $\log|f_R|$ est harmonique dans $D(0, \frac{1}{R})$. D'après le Théorème 1.3.1, pour $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$, on a donc

$$\log|f_R(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f_R(e^{it})|P_r(\theta - t)dt.$$

Comme $\log = \log^+ - \log^-$, on a donc :

$$\log|f_R(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+|f_R(e^{it})|P_r(\theta - t)dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^-|f_R(e^{it})|P_r(\theta - t)dt.$$

Notons que pour $u, v > 0$, on a $|\log^+ u - \log^+ v| \leq |u - v|$. Par conséquent on obtient :

$$\left|P(\log^+|f_R|)(re^{i\theta}) - P(\log^+|f^*|)(re^{i\theta})\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)||f_R(e^{it})| - |f^*(e^{it})||dt$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta-t)|f_R(e^{it})-f^*(e^{it})|dt \\ &\leq \frac{1+r}{1-r}\|f_R-f^*\|_1. \end{aligned}$$

D'après le Corollaire 4.4.2, $\lim_{R\to 1^-}\|f_R-f^*\|_1=0$. Ainsi, $\lim_{R\to 1^-} P(\log^+|f_R|)(re^{i\theta}) = P(\log^+|f^*|)(re^{i\theta})$. D'après le lemme de Fatou,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta-t)\log^-|f^*(e^{it})|dt &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \liminf_{R\to 1^-}\log^-|f_R(e^{it})|dt \\ &\leq \liminf_{R\to 1^-}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta-t)\log^-|f_R(e^{it})|dt. \end{aligned}$$

Comme

$$\lim_{R\to 1^-} P(\log^+|f_R|)(re^{i\theta}) = P(\log^+|f^*|)(re^{i\theta})$$

et

$$\lim_{R\to 1^-} P(\log|f_R|)(re^{i\theta}) = \lim_{R\to 1^-}\log|f_R(re^{i\theta})| = \log|f(re^{i\theta})|,$$

on obtient :

$$P(\log^-|f^*|)(re^{i\theta}) \leq P(\log^+|f^*|)(re^{i\theta}) - \log|f(re^{i\theta})|,$$

ce qui implique

$$\log|f(re^{i\theta})| \leq P(\log^+|f^*|-\log^- f^*|)(re^{i\theta}) = P(\log|f^*|)(re^{i\theta}),$$

inégalité désirée qui permet de conclure que $\frac{f}{Q_f}$ est bien une fonction intérieure U_f dès que $f\in H^1(\mathbb{D})$. Comme $|f(z)|\leq |Q_f(z)|$ pour tout $z\in\mathbb{D}$, en particulier, pour $z=0$, on obtient l'inégalité (4.5). Notons que si $f(0)=0$, (4.5) est trivialement vérifiée. L'égalité survient dans (4.5) si et seulement si $|f(0)|=|Q_f(0)|$. Comme $f(0)=U_f(0)Q_f(0)$, on a donc $U_f(0)=1$ avec $\|U_f\|_\infty=1$. D'après le principe du maximum, on a donc nécessairement $U_f=c$ avec $|c|=1$. Ceci termine la preuve de cas où $p=1$.
Lorsque $p\in]1,\infty]$, comme d'après le Théorème 4.3.1, $H^p(\mathbb{D})\subset H^1(\mathbb{D})$, il n'y a rien à faire. Considérons à présent le cas où $p\in]0,1[$. Soit $f\in H(\mathbb{D})$ et soit B le produit de Blaschke associé à la suite des zéros de f. Par construction, $g:=\frac{f}{B}$ est holomorphe sur $\mathbb{D}$ et ne s'annule pas. D'après le Théorème 4.3.3, $g\in H^p(\mathbb{D})$ avec $\|g\|_p=\|f\|_p$. La fonction

g ne s'annulant pas sur $\mathbb{D}$ simplement connexe, il existe une détermination holomorphe φ du logarithme de g. On peut donc définir la fonction $h = e^{p\varphi} = g^p$. De plus, on a $\|g\|_p^p = \|h\|_1$, ce qui prouve que $h \in H^1(\mathbb{D})$ puisque $g \in H^p(\mathbb{D})$. La fonction f possède donc une factorisation de la forme $f = Bg = Bh^{1/p}$ avec $h \in H^1(\mathbb{D})$ sans zéro dans $\mathbb{D}$. D'après ce qui précède, $h = U_h Q_h$ avec U_h fonction intérieure sans zéro dans $\mathbb{D}$ et Q_h extérieure. Comme

$$Q_h^{1/p}(z) = e^{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\frac{1}{p}\log|h^*(e^{it})|dt} = e^{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log|h^*(e^{it})^{1/p}|dt}$$

avec $|h^*(e^{it})^{1/p}| = |g^*(e^{it})| = |f^*(e^{it})|$ m-presque partout, $Q_h^{1/p}$ est le facteur extérieur de f. De plus il est clair que $U_f^{1/p}$ est bien une fonction intérieure (singulière). Ainsi, si $f \in H^p(\mathbb{D})$ f se décompose comme le produit d'une fonction intérieure par une fonction extérieure. L'inégalité (4.5) étant une conséquence de la factorisation que nous venons d'établir, elle reste vraie si $p \in]0, 1[$.

□

Remarque 4.4.3 *Les fonctions Q_f et U_f sont appelées respectivement les **facteurs extérieures** et les **facteurs intérieures** de f. Le facteur U_f tient compte des zéros de f dans $\mathbb{D}$ et du comportement de f^* sur $\mathbb{T}$ tandis que le facteur Q_f ne dépend que des valeurs de $|f^*|$ sur $\mathbb{T}$.*

4.5 Résultats fondamentaux sur les fonctions de H^p, $0 < p \leq \infty$

4.5.1 Limites radiales des fonctions de $H^p(\mathbb{D})$, $0 < p \leq \infty$

Nous avons déjà mentionné que $H^p(\mathbb{D}) \subset \mathcal{N}$ impliquait automatiquement que f^* soit définie m-presque partout avec de plus $\log|f^*| \in L^1(\mathbb{T})$. Ceci mérite une mention spéciale, à savoir, un théorème d'unicité.

Théorème 4.5.1 *Soit $p \in]0, \infty]$ et supposons que la fonction f non identiquement nulle appartienne à $H^p(\mathbb{D})$. Alors $f^*(e^{it}) \neq 0$ m-presque partout. Par conséquent, si $f, g \in$*

$H^p(\mathbb{D})$ sont telles que $f^*(e^{it}) = g^*(e^{it})$ sur un sous-ensemble de $\mathbb{T}$ de mesure de Lebesgue strictement positive, nécessairement $f = g$.

Preuve : Si $f^*(e^{it}) = 0$ alors $\log|f^*(e^{it})| = -\infty$ et si cela survient sur un ensemble de mesure positive, cela met en défaut le fait que $\log|f^*| \in L^1(\mathbb{T})$. En appliquant ceci a $f - g \in H^p(\mathbb{D})$ si $f, g \in H^p(\mathbb{D})$ on a donc $f - g$ identiquement nulle dès que $(f^* - g^*)(e^{it})$ sur un sous-ensemble de $\mathbb{T}$ de mesure de Lebesgue strictement positive.

□

Remarque 4.5.1 *En fait le Théorème 4.5.1 est vrai sous l'hypothèse un peu plus générale $f \in \mathcal{N}$.*

Nous avons vu dans la Proposition 4.4.2 que si $f \in H^p(\mathbb{D})$ alors $f^* \in L^p(\mathbb{T})$. Nous allons montrer qu'en fait l'application $f \longmapsto f^*$ est une isométrie de $H^p(\mathbb{D})$ dans $L^p(\mathbb{T})$.

Théorème 4.5.2 *Soit $p \in]0, \infty]$ et soit $f \in H^p(\mathbb{D})$. Alors $\|f\|_p = \|f^*\|_p$.*

Preuve : D'après la Proposition 4.4.2, $f^* \in L^p(\mathbb{T})$ dès que $f \in H^p(\mathbb{D})$. Pour cela nous avons vérifié que $\|f^*\|_p \leq \|f\|_p$. D'autre part, d'après le Théorème 4.4.3 et la $3^{\text{ième}}$ assertion de la Proposition 4.4.1, $f = U_f Q_f$ avec Q_f extérieure, U_f intérieure et $\|Q_f\|_p = \|f^*\|_p$. Comme $Q_f = \frac{f}{U_f}$ avec $|U_f(z)| \leq 1$ sur $\mathbb{D}$, on a immédiatement $|Q_f(z)| \geq |f(z)|$, $z \in \mathbb{D}$. Ceci implique $\|Q_f\|_p \geq \|f\|_p$. Finalement, on obtient :

$$\|f\|_p \leq \|Q_f\|_p = \|f^*\|_p \leq \|f\|_p,$$

ce qui prouve que $\|f\|_p = \|f^*\|_p$.

□

Nous déduisons de ceci un résultat de convergence en moyenne vers la limite radiale dès que $f \in H^p(\mathbb{D})$ avec $p \in]0, \infty[$. Pour démontrer ceci nous allons admettre le lemme suivant dont la preuve repose sur le Théorème d'Egoroff (cf. Théorème 5.6.20 de [20]).

Lemme 4.5.1 (p.21 de [8]) *Soit Ω un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}$ et soit $\varphi_n \in L^p(\Omega)$, $0 < p < \infty$, $n \geq 1$. Supposons de plus que $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$ m-presque partout sur Ω.*

Si

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n\|_p = \|\varphi\|_p < \infty,$$

alors

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi\|_p = 0.$$

Soit $f \in H^p(\mathbb{D})$, pour $0 < p < \infty$. Pour $0 < r < 1$ posons $g_r(t) = f(re^{it})$ pour $t \in [0, 2\pi[$. Sachant que $\lim_{r\to 1^-} \|g_r\|_p = \lim_{r\to 1^-} M_p(f,r) = \|f\|_p$ avec $\|f\|_p = \|f^*\|_p$ (d'après le Théorème 4.5.2), et comme de plus $\lim_{r\to 1^-} g_r(t) = g^*(t)$ m-presque partout avec $g^*(t) := f^*(e^{it})$, on obtient le résultat suivant.

Corollaire 4.5.1 *Soit $p \in]0, \infty[$ et soit $f \in H^p(\mathbb{D})$. Alors*

$$\lim_{r\to 1^-} \|f_r - f^*\|_p = 0,$$

avec, pour $0 < r < 1$ et $|z| \leq 1$, f_r définie par $f_r(z) = f(rz)$.

Remarque 4.5.2 *Le Corollaire ci-dessus n'est pas vérifié en général pour $f \in H^\infty(\mathbb{D})$, nous avons besoin pour cela que f^* soit continue sur $\mathbb{T}$, autrement dit que f ne soit pas simplement dans $H^\infty(\mathbb{D})$ mais dans l'algèbre du disque $A(\mathbb{D})$.*

4.5.2 Résultat de représentation des fonctions de $H^p(\mathbb{D})$ pour $p \in [1, \infty]$

Nous allons voir qu'une conséquence immédiate du Corollaire 4.4.2 est le fait que si $f \in H^1(\mathbb{D})$ alors f est égale à l'intégrale de Cauchy et à l'intégrale de Poisson de sa limite radiale.

Théorème 4.5.3 *Soit $f \in H^p(\mathbb{D})$ pour $p \in [1, \infty]$. Alors pour tout $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$, on a :*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) f^*(e^{it}) dt = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{f^*(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Preuve : Si $f \in H^p(\mathbb{D})$ pour $p \in [1, \infty]$, d'après le Théorème 4.3.1, on a en particulier $f \in H^1(\mathbb{D})$. Pour $R \in]0, 1[$ posons $f_R(z) = f(Rz)$ fonction holomorphe sur $D(0, \frac{1}{R})$. En particulier f_R est harmonique sur $\mathbb{D}$ et continue sur $\overline{\mathbb{D}}$. On a donc, d'après le Théorème 1.3.1,

$$f_R(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) f_R(e^{it}) dt \text{ pour } z = re^{i\theta}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\left| f_R(z) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) f^*(e^{it})dt \right| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)|f^*(e^{it}) - f_R(e^{it})|dt \\ &\leq \frac{1+r}{1-r}\|f^* - f_R\|_1.\end{aligned}$$

Comme d'après le Corollaire 4.4.2, $\lim_{R\to 1^-} \|f^* - f_R\|_1 = 0$, on en déduit, $f(z) = P(f^*)(z)$ pour $z \in \mathbb{D}$. D'autre part, f_R étant holomorphe sur $D(0, \frac{1}{R})$, d'après la formule de Cauchy, on a :

$$f_R(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{f_R(\xi)}{\xi - z}d\xi.$$

Pour $z = re^{i\theta}$, on en déduit :

$$\begin{aligned}\left| f_R(z) - \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{f^*(\xi)}{\xi - z}d\xi \right| &= \left| \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{f_R(\xi) - f^*(\xi)}{\xi - z}d\xi \right| \\ &= \left| \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f_R(e^{it}) - f^*(e^{it})}{e^{it} - re^{i\theta}} ie^{it}dt \right| \\ &\leq \frac{1}{1-r}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_R(e^{it}) - f^*(e^{it})|dt \\ &= \frac{1}{1-r}\|f^* - f_R\|_1.\end{aligned}$$

Le Corollaire 4.4.2 permet alors de conclure que $f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{f^*(\xi)}{\xi - z}d\xi$.

□

4.5.3 Identification entre $H^p(\mathbb{D})$ et $H^p(\mathbb{T})$ pour $1 \leq p \leq \infty$

Théorème 4.5.4 *Soit $1 \leq p \leq \infty$. L'application $\Phi : H^p(\mathbb{D}) \to H^p(\mathbb{T})$ telle que $\Phi(f) = f^*$ et où $H^p(\mathbb{T}) := \{f \in L^p(\mathbb{T}) : \widehat{f}(n) = 0, n < 0\}$ est un isomorphisme isométrique.*

Preuve : La linéarité de Φ est évidente. Vérifions tout d'abord que si $f \in H^p(\mathbb{D})$ pour $1 \leq p \leq \infty$, alors $\Phi(f) = f^* \in H^p(\mathbb{T})$. Comme d'après le Théorème 4.5.2, $\|f\|_p = \|f^*\|_p$, il est clair que $\Phi(f) \in L^p(\mathbb{T})$. Il nous reste à vérifier que $\widehat{f^*}(n) = 0$ si $n < 0$. Comme d'après le Théorème 4.3.1, nous avons $H^p(\mathbb{D}) \subset H^1(\mathbb{D})$ pour $p \in [1, \infty]$, il suffit de vérifier que si $f \in H^1(\mathbb{D})$ alors $\widehat{f^*}(n) = 0$ si $n < 0$. Si $f \in H^1(\mathbb{D})$, en particulier, $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$. D'après le Théorème de Cauchy, pour $0 < r < 1$, on a

$$\int_{\Gamma_r} f(\xi)\xi^n d\xi = 0 \text{ pour } n \geq 0,$$

où Γ_r désigne le cercle centré en 0 et de rayon r. Posons $\xi = re^{it}$. On obtient alors

$$\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{i(n+1)t}dt \text{ pour } n \geq 0.$$

Le Corollaire 4.4.2 nous permet de dire que

$$\lim_{r\to 1^-} \int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{i(n+1)t}dt = \int_0^{2\pi} f^*(e^{it})e^{i(n+1)t}dt$$

car

$$\left|\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{i(n+1)t}dt - \int_0^{2\pi} f^*(e^{it})e^{i(n+1)t}dt\right| \leq 2\pi\|f_r - f^*\|_1,$$

où $f_r(e^{it}) := f(re^{it})$. On a donc $\int_0^{2\pi} f^*(e^{it})e^{i(n+1)t}dt = 0$, ce qui prouve que $\widehat{f^*}(n) = 0$ si $n < 0$. Une autre façon de vérifier ceci est d'utiliser le fait que $f \in H^1(\mathbb{D})$ est le produit de deux fonctions de $H^2(\mathbb{D})$ dont les limites radiales sont dans $H^2(\mathbb{T})$ d'après le Théorème 4.4.2. Ainsi $\Phi(H^p(\mathbb{D})) \subset H^p(\mathbb{T})$ et Φ est une isométrie. De ce fait Φ est automatiquement injective. Vérifions la surjectivité de Φ pour conclure. Soit $p \in [1, \infty]$ et $g \in H^p(\mathbb{T})$. Comme en particulier $g \in L^1(\mathbb{T})$, on peut considérer la fonction harmonique f sur $\mathbb{D}$ définie par

$$f(z) = P(g)(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)g(e^{it})dt \text{ si } z = re^{i\theta}.$$

On a donc

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{in(\theta-t)})g(e^{it})dt.$$

La série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{in(\theta-t)}$ étant normalement convergente pour $r < 1$, donc uniformément convergente, on en déduit :

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{in\theta}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}g(e^{it})dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{in\theta}\widehat{g}(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{g}(n)z^n.$$

Comme $\widehat{g}(n) = 0$ si $n < 0$, on a donc $f(z) = \sum_{n\geq 0} \widehat{g}(n)z^n$. La fonction f est donc holomorphe sur $\mathbb{D}$. Comme f est l'intégrale de Poisson de $g \in L^1(\mathbb{T})$, d'après le Théorème 2.3.3, $f^* = g$ m-presque partout. Par conséquent $\|f^*\|_p = \|g\|_p < \infty$, ce qui implique $f \in H^p(\mathbb{D})$ d'après le Théorème 4.5.2. L'application Φ est donc surjective, c'est donc un isomorphisme isométrique.

□

Remarque 4.5.3 *Lorsque $p \in [1, \infty]$, compte tenu de l'existence d'un isomorphisme isométrique entre $H^p(\mathbb{D})$ et $H^p(\mathbb{T})$, dans la plupart des articles de recherche on trouvera la notation H^p, laquelle désignera indifféremment $H^p(\mathbb{D})$ ou $H^p(\mathbb{T})$ suivant le contexte.*

4.6 Exercices

Exercice 4.6.1

1. *Montrer que toute fonction f de $\mathcal{N}$ non identiquement nulle se décompose sous la forme $f = B\dfrac{S_1}{S_2}Q$ où B est un produit de Blaschke, où S_1 et S_2 sont deux fonctions intérieures singulières et où Q est une fonction extérieure.*
2. *Réciproquement, montrer que toute fonction de la forme $B\dfrac{S_1}{S_2}Q$ (où B est un produit de Blaschke, où S_1 et S_2 sont deux fonctions intérieures singulières et où Q est une fonction extérieure) est bien dans la classe de Nevanlinna.*

Exercice 4.6.2 *Soit $p \in]0, \infty]$ et $f \in H^p(\mathbb{D})$.*

1. *Montrer que pour tout $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$ on a :*
$$\log |f(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) \log |f^*(e^{it})| dt.$$
2. *Montrer l'équivalence suivante*
$$f \text{ est extérieure} \Longleftrightarrow \exists z_0 = r_0 e^{i\theta_0} \in \mathbb{D}; \log |f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_{r_0}(\theta_0 - t) \log |f^*(e^{it})| dt.$$
3. *Si l'on suppose à présent que $f \in \mathcal{N}$ au lieu de $f \in H^p(\mathbb{D})$ avec $p \in]0, \infty]$, l'équivalence ci-dessus est-elle toujours vraie ?*

Exercice 4.6.3 (Théorème de F. et M. Riesz) *Soit μ une mesure complexe (finie) sur $[0, 2\pi]$. Supposons que pour tout $n < 0$ on ait :*
$$\int_0^{2\pi} e^{-int} d\mu(t) = 0.$$
Montrer qu'alors μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.
Indication *: Poser $F(z) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - ze^{-it}} d\mu(t)$. Vérifier que $F = P(d\mu)$ et que $F \in H^1(\mathbb{D})$ puis conclure.*