LE DEGRÉ TOPOLOGIQUE : THÉORIE ET APPLICATIONS

Smail Djebali

Département de Mathématiques, E.N.S.

B.P. 92 Kouba, Alger, Algérie.

e-mail : djebali@ens-kouba.dz,djebali@hotmail.com

Version :

14 mars 2007

INTRODUCTION

Ces notes de cours sont issues d'un cours enseigné aux étudiants préparant un Magister d'Analyse non linéaire à l'École Normale Supérieure de Kouba, à Alger. Son objectif est d'introduire la notion importante de degré topologique et ses nombreuses applications aux E.D.P. et aux E.D.O. sur lesquelles un accent particulier sera mis.

De plus, ce cours, enseigné au second semestre depuis l'année universitaire 2001-2002, fait suite à un autre cours, enseigné au premier semestre, et portant sur "les problèmes aux limites associés aux E.D.O. du second ordre". Il s'agit, dans ce dernier, de présenter surtout différentes méthodes de résolution de ces types de problèmes : méthodes classiques, de point fixe, de sous et sur-solutions,.... le cours sur le degré topologique se place donc comme un outil complémentaire indispensable à l'étude de ces problèmes aux limites. Mais, bien entendu, cette notion importante de degré est aussi utile dans plusieurs autres cadres d'applications en analyse mathématique.

La notion de degré topologique (de Brouwer ou de Schauder) est assez bien couverte dans la littérature traitant des questions topologiques en analyse. Parmi les nombreuses références bibliographiques, nous avons choisi à la fin de ce cours un nombre assez restreint permettant au lecteur intéressé d'avoir accès à quelques sources que nous avons utilisées pour rédiger ce cours.

Les deux premiers chapitres de ce cours présentent la notion de degré topologique, d'abord en dimension finie (degré de Brouwer), puis en dimension infinie (degré de Schauder). Puis des applications du degré de Schauder à la résolution de quelques E.D.P. et E.D.O. sont proposées au chapitre trois. Le quatrième chapitre peut être lu indépndamment des deux premiers ; il introduit la notion d'indice du point fixe de Schau-

der avec quelques applications au calcul du nombre de solutions à des problèmes aux limites.

Chacun des chapitres de ce cours est suivi d'exercices résolus. Le chapitre cinq a été entièrement consacré à des problèmes résolus ; il s'agit souvent de problèmes d'examen posés aux étudiants en magister d'analyse non linéaire à l'E.N.S. de Kouba, à Alger.

En annexe, quelques compléments sur des notions fondamentales d'analyse fonctionnelle, utilisés dans ce cours, sont présentés. Ces notions préliminaires sont disponibles dans tout ouvrage de référence en analyse fonctionnelle ; nous en avons citées quelques unes.

Enfin, merci de me communiquer toute erreur éventuelle d'ordre typographique ou mathématique qui aurait pu se glisser fâcheusement dans ces notes.

Nous espèrons que ce cours sera utile pour les futurs participants à l'Ecole d'E.D.O. :

Tipaza, 13-18 mai 2006,

http ://www.ens-kouba.dz/EDAEDO/index.htm.

S. Djebali

Kouba, le 22 mars 2006

Table des matières

Chapitre 1

LE DEGRÉ TOPOLOGIQUE EN DIMENSION FINIE

1.1 Introduction et motivation

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application dans $C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ et $y_0 \in \mathbb{R}^n$. On considère le problème :

$$(\mathcal{P}) \qquad \text{Trouver } x \in \Omega,\ f(x) = y_0.$$

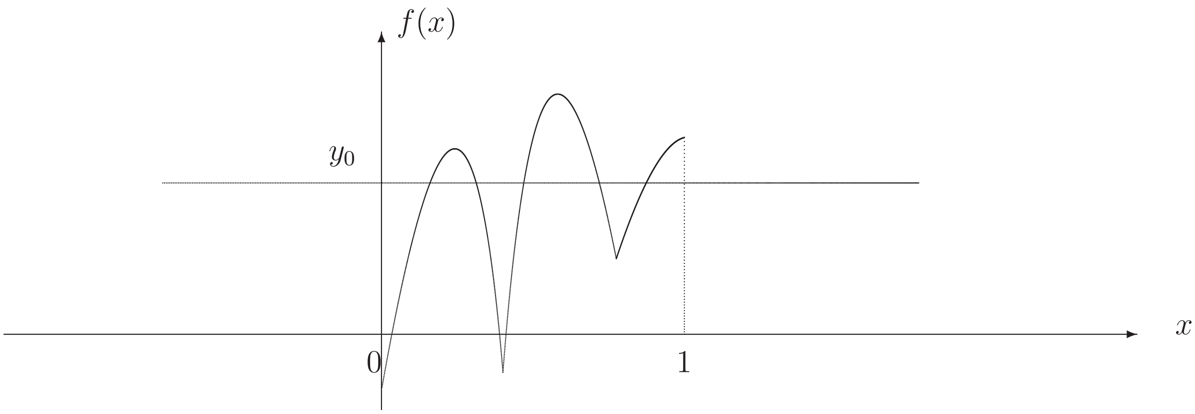
Exemple 1.1 *(n=1)*
$\Omega =]0, 1[$ *et* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *une application de classe* C^1 *vérifiant l'hypothèse :*

$$(\mathcal{H}) \qquad \textit{Pour toute solution } x \textit{ de } (\mathcal{P}),\ f'(x) \neq 0.$$

On introduit alors l'entier :

$$d(y_0) = \begin{cases} \sum_{i \in I} sgn(f'(x_i)), & \textit{si } \{x_i,\ i \in I\} \textit{ est l'ensemble des solutions de } (\mathcal{P}), \\ 0, & \textit{si le problème } (\mathcal{P}) \textit{ n'a pas de solution.} \end{cases}$$

En fait, l'entier d dépend aussi de la fonction f et de l'ouvert Ω ; enfin $d \in \mathbb{Z}$. On vérifiera que la somme intervenant dans la définition de d est finie ; mais, à présent, donnons quelques exemples illustratifs :



$d(y_0) = +1$

FIG. 1.1 –

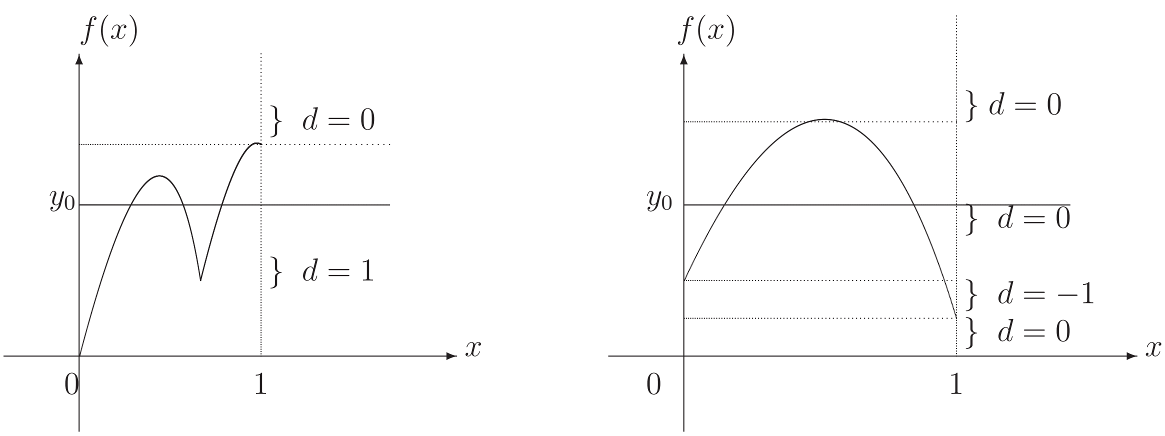


FIG. 1.2 –

Remarque 1.1 *On remarque que, pour f et Ω donnés, l'entier d reste constant par rapport à y_0 sur certains intervalles. De plus, si $d(y_0) \neq 0$, le problème $(\mathcal{P})$ admet au moins une solution et que, si $d(y_0) = 0$, le problème $(\mathcal{P})$ peut ou non admettre une solution. Ce sont deux propriétés générales et importantes de cet entier qu'on se propose de définir de manière rigoureuse dans le cas de dimension finie d'abord.*

1.2 Historique

La notion de degré a été introduite par Kronecker[1] pour les applications C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ en 1869. Poincaré[2], Böhler [3] et Hadamard[4] l'ont ensuite développé au début des années 1990 puis étendu au cas des fonctions continues. L.E. Brouwer[5] le généralisa pour les applications continues entre variétés compactes de même dimension finie et donna quelques applications topologiques. D'ailleurs, l'emploi dans les démonstrations d'arguments de type topologique revient à Poincaré (en 1883, 1884). Pour les applications différentiables, on a pu considérer des points critiques singuliers à partir de 1942 date à laquelle Sard étudia ces points. Les théories analytiques du degré de Brouwer pour les applications C^0 ont été développées par Nagumo[6] et Heinz[7]. Cependant, les théorèmes du point fixe restèrent longtemps plus célèbres que le degré lui-même si bien que l'on trouve de nos jours une démonstration directe pour ces théorèmes et une autre utilisant la théorie du degré.

[1] Krocker, L. (1869) Uber systeme von funktionen mehrer variabel n, Monatsberichte. Acad. Wiss. Berlin, pp. 159-193, 688-698

[2] Poincaré, H. (1892,1899) Méthodes nouvelles de la mécanique céleste (3 volumes). Gauthiers-Villars, Paris.

[3] Böhl, P. (1904) Uber die bewegung eines machaniscsches systems in der nähe einer Gleichgewichtslage. J. Reine Angew. Math. 127, 176, 179.

[4] Hadamard, J. (1910) Sur quelques applications de l'indice de Klonecker ; dans "introduction à la théorie des fonctions d'une variable", par J. Tannery, Vol. II, Hermann, Paris, pp. 875-915

[5] Brouwer, L.E.J. (1912) Uber abbildung von Mannigfaltigkeitein. Math. Ann 71 ; pp. 97-115.

[6] Nagumo, M. (1951) A theory of degree based on infinitesimal analysis. Amer. J. Math. 73, pp. 485-496. (1951) Degree of mapping in convex linear topological spaces. Amer. J. Math. 73, pp. 497-511.

[7] An elementary analytic theory of the degree of mappings in n-dimensional-spaces, J. Math. Mech., 8, 231-247

1.3 Le cas régulier

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application dans $C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Pour $x_0 \in \Omega$, on désignera par $Df(x_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)(x_0)$ $(1 \leq i, j \leq n)$ la matrice jacobienne de f en x_0 et par $J_f(x_0) = det\, Df(x_0)$ le déterminant jacobien de f en x_0.

Définition 1.1 **(a)** *$x_0 \in \Omega$ est dit point régulier si $J_f(x_0) \neq 0$.*

(b) *x_0 est dit point singulier (ou point critique) s'il n'est pas régulier.*

On notera l'ensemble des points singuliers de f sur l'ouvert Ω par

$$S_f(\Omega) = \{x_0 \in \Omega \; ; \; J_f(x_0) = 0\}.$$

(c) *$y_0 \in f(\overline{\Omega})$ est dite valeur régulière si $f^{-1}(y_0) \cap S_f(\Omega) = \emptyset$.*

Dans le cas contraire, y_0 est dite valeur singulière ou critique.

Immédiatement, on a

Proposition 1.1 *Si $y_0 \notin f(\partial\Omega)$ est une valeur régulière, alors l'ensemble $E = f^{-1}(\{y_0\})$ est fini.*

Démonstration

$$\begin{aligned} y_0 \text{ régulière} \quad & \Rightarrow \quad \forall\, x \in f^{-1}(\{y_0\}), J_f(x_0) \neq 0 \\ & \Rightarrow \quad \forall\, x \in f^{-1}(\{y_0\}), \exists\, U \in V(x) \text{ tel que } f_{|}U \text{ est un homéomorphisme} \\ & \qquad \text{(théorème de l'inversion locale)} \\ & \Rightarrow \quad \text{tous les points de } E \text{ sont isolés } (E \text{ est une ensemble discret}) \end{aligned}$$

Or, f étant continue, l'ensemble E est fermé donc compact car inclus dans le borné Ω. Enfin,

$$E \text{ compact et discret } \Leftrightarrow E \text{ fini.}$$

Définition 1.2 *Si $y_0 \notin [f(\partial\Omega) \cup S_f(\Omega)]$, on définit le degré topologique de Brouwer de f en y_0 relativement à l'ouvert Ω par :*

$$\deg(f, \Omega, y_0) \begin{cases} = \sum_{x \in \Omega \cap f^{-1}(y_0)} sgn J_f(x) & \\ = 0, & si\ \Omega \cap f^{-1}(y_0) = \emptyset. \end{cases}$$

Remarque 1.2 *Cette définition du degré peut se formuler autrement.*
En effet, soit $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *une famille de fonctions positives telles que* $supp\,\varphi_\varepsilon \subset B_\varepsilon(0)$ *et* $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x)dx = 1$*. D'après la proposition 1.1, posons* $E = f^{-1}(y_0) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$*. Alors, si* ε *est assez petit, le support de l'application*

$$x \mapsto \varphi_\varepsilon(f(x) - y_0)$$

admet N *composantes connexes* $U_1, ..., U_N$ *contenant* $x_1, ..., x_N$ *respectivement. Ainsi, par la formule de changement de variables dans les intégrales*[8] *on a successivement les égalités*

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \varphi_\varepsilon(f(x) - y_0) J_f(x)\, dx &= \sum_{k=1}^{k=N} \int_{U_k} \varphi_\varepsilon(f(x) - y_0) J_f(x)\, dx \\
&= \sum_{k=1}^{k=N} sgn(J_f(x_k)) \int_{U_k} \varphi_\varepsilon(f(x) - y_0) |J_f(x)|\, dx \\
&= \sum_{k=1}^{k=N} sgn(J_f(x_k)) \int_{B_\varepsilon(0)} \varphi_\varepsilon(y)\, dy \\
&= \sum_{k=1}^{k=N} sgn(J_f(x_k)) = deg\,(f, \Omega, y_0).
\end{aligned}$$

L'intégrale intervenant dans cette égalité est dite intégrale de Heinz.

1.4 Le cas singulier

Soit $f \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et $y_0 \notin f(\partial\Omega)$ une valeur singulière. On a

[8] Soit $y = \eta(x)$ une transformation bijective régulière telle que le jacobien $J_x\eta = det\left(\frac{\partial \eta_i}{\partial x_j}\right)_{1 \le i,j \le n}$ est différent de 0 (un difféomorphisme de classe C^1 par exemple). Alors pour toute fonction mesurable positive f, on a la formule de changement de variable :

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(\eta(x)) |J_x\eta|\, dx.$$

Si bien que pour une $n-$forme différentiable $\mu = \phi(x)dx$, on ait :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mu = (Sgn\, J\eta) \int_{\mathbb{R}^n} \mu \circ \eta.$$

Définition 1.3 *On pose $deg(f, \Omega, y_0) = deg(f, \Omega, y_1)$,
où y_1 est une valeur régulière proche de y_0 et dont l'existence est assuré par le lemme de Sard. On peut montrer que cette définition ne dépend pas du choix de y_1.*

Définition 1.4 *Soit $\mu : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$, une $n-$forme différentielle de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact $K \subset \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$, contenant y_0 et telle que $\int_{\mathbb{R}^n} \mu = 1$. ($\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace des formes linéaires, continues et alternées sur $\mathbb{R}^n$). On pose*

$$deg(f, \Omega, y_0) = \int_\Omega \mu \circ f.$$

Remarque 1.3 ***(a)*** *Cette définition est indépendante du choix de μ tant que le support de celle-ci est dans l'ensemble ouvert $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$.
En effet, si μ et ν sont deux $n-$formes différentielles de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact $K \subset \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ et telles que $\int_{\mathbb{R}^n} \mu = \int_{\mathbb{R}^n} \nu = 1$, alors $\int_{\mathbb{R}^n} (\mu - \nu) = 0$ et donc il existe une $(n-1)-$forme ω vérifiant $d\omega = \mu - \nu$ et support $\omega \subset K$. ($d\omega$ est la différentielle extérieure de ω ; c'est une $n-$forme). Grâce à la formule de Stokes, on a*

$$\int_\Omega \mu \circ f - \int_\Omega \nu \circ f = \int_\Omega (\mu - \nu) \circ f = \int_\Omega d\omega \circ f = \int_\Omega d(\omega \circ f) = \int_{\partial\Omega} \omega \circ f = 0.$$

(b) *Lorsque y_0 est une valeur régulière, les définitions 1.2 et 1.4 coïncident. Il suffit pour cela de reprendre la démonstration dans la remarque 1.2 en utilisant une représentation $\mu = \phi(x)dx$ de la forme différentielle μ.*

1.5 Propriétés du degré

On suppose que Ω est un ouvert borné de l'espace $\mathbb{R}^n$. Dans ce qui suit, I_d désigne l'application identité sur $\mathbb{R}^n$. On a les propriétés suivantes :

1.5.1 Degré de l'identité

$$\textbf{(a)} \quad deg(Id, \Omega, y_0) = \begin{cases} 1, & si\ y_0 \in \Omega, \\ 0, & si\ y_0 \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

$$\textbf{(b)} \quad deg(-Id, \Omega, y_0) = \begin{cases} (-1)^n, & si\ y_0 \in \Omega, \\ 0, & si\ y_0 \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Démonstration

(a) Si $y_0 \in \Omega, Id^{-1}(y_0) = \{y_0\}$ et y_0 est une valeur régulière car $J_{Id}(x) = +1, \forall x \in \mathbb{R}^n$. Si $y_0 \notin f(\overline{\Omega})$, l'ensemble $Id^{-1}(y_0) \cap \overline{\Omega}$ est vide ; d'où le résultat en utilisant la définition 1.2 avec y_0 valeur régulière.

(b) Se traite de la même manière en notant que $J_{-Id}(x) = (-1)^n$.

1.5.2 Résolution des équations algébriques

Si $y_0 \notin f(\overline{\Omega})$, le degré $deg(f, \Omega, y_0)$ est nul ; ou encore, de manière équivalente

$$[deg(f, \Omega, y_0) \neq 0] \Rightarrow [\text{ le problème } (\mathcal{P}) \text{ admet au moins une solution }].$$

Démonstration

Comme $f(\overline{\Omega})$ est fermé dans $\mathbb{R}^n$, il suffit de prendre pour μ une $n-$forme différentielle à support compact K dans l'ouvert $\mathbb{R}^n \setminus f(\overline{\Omega})$ et contenant y_0. Cette propriété de non nullité du degré répond à la question posée dans la motivation.

1.5.3 Continuité par rapport à y_0

Si y_1 est voisin de $y_0 \notin f(\partial\Omega)$ (dans un sens à préciser), alors

$$deg(f, \Omega, y_0) = deg(f, \Omega, y_1).$$

En particulier, $deg(f, \Omega, y_0) \in \mathbb{Z}$.

Démonstration

Par hypothèse, il existe une boule B contenant à la fois y_0 et y_1 et tel que $B \subset \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$; alors $y_1 \notin f(\partial\Omega)$ et l'on peut alors choisir μ une $n-$forme différentielle à support compact dans la boule B, et ce dans les deux définitions correspondantes du degré.

1.5.4 Invariance par homotopie

Soit $\{f_t\}_{0\leq t\leq 1}$ une famille d'applications appartenant à $\mathcal{C}(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$, dépendant continûment de t et $\{y_0(t)\}_{0\leq t\leq 1}$ une famille de points indexés continûment par t et telles que

$$y_0(t) \notin f_t(\partial\Omega),\ \forall\, t \in [0,1].$$

Alors le degré $deg(f_t,\Omega,y_0(t))$ ne dépend pas de t.

Remarque 1.4 *Les fonctions (f_t) sont dites reliées homotopiquement ; plus généralement, on dit que deux fonctions f et g sont homotopes s'il existe une fonction continue $H:[0,1]\times\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^n$ telle que $H(0,x)=f(x)$ et $H(1,x)=g(x),\forall x\in\overline{\Omega}$; d'où le nom de la propriété 1.4.4.*

Démonstration
Soit l'ensemble

$$\begin{aligned} Y=\bigcup_{0\leq t\leq 1} f_t(\partial\Omega) &= \{f_t(x)\ ;\ 0\leq t\leq 1,\ x\in\partial\Omega\}\\ &= f([0,1]\times\partial\Omega) \quad \text{où } f(t,x)=f_t(x). \end{aligned}$$

Y est un ensemble fermé. On choisit alors une $n-$forme différentielle μ à support compact dans $\mathbb{R}^n\setminus Y$ et contenant y_0 ; puis on introduit l'application

$$\begin{aligned} d:[0,1] &\to \mathbb{Z}\\ t &\mapsto deg(g,\Omega,y_0)=\int_\Omega \mu\circ f_t. \end{aligned}$$

Cette application est continue, discrète donc constante.

1.5.5 Invariance sur le bord

Si $y_0\notin f(\partial\Omega)$ et $f|_{\partial\Omega}=g|_{\partial\Omega}$, alors

$$deg(f,\Omega,y_0)=deg(g,\Omega,y_0).$$

Démonstration Pour $t\in[0,1]$, on introduit la déformation convexe $f_t=tf+(1-t)g$. Alors, $\forall x\in\partial\Omega,\ f_t(x)=g(x)=f(x)\neq y_0$. Le degré $deg(f_t,\Omega,y_0)$ est donc bien défini et constant, d'après la propriété 1.4.4 ; d'où

$$deg(f_0,\Omega,y_0)=deg(f_1,\Omega,y_0).$$

Cette propriété montre que, pour le degré, tout se passe sur le bord.

1.5.6 Continuité par rapport à la fonction

Soit $r = dist(y_0, f(\partial\Omega)) > 0$ et soit $g \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ une fonction telle que

$$\sup_{x\in\partial\Omega} \|g(x) - f(x)\| < r;$$

alors

$$deg(f, \Omega, y_0) = deg(g, \Omega, y_0).$$

On peut retenir cette propriété en se souvenant que deux fonctions voisines ont même degré.

Démonstration

Pour $t \in [0, 1]$, posons $f_t = tg + (1 - t)f$ et vérifions que $y_0 \notin f_t(\partial\Omega), \forall t \in [0, 1]$. Pour $x \in \partial\Omega$, on a successivement

$$\begin{array}{rcl}
\|f_t(x) - y_0\| & = & \|(tg + (1 - t)f)(x) - y_0\| \\
& = & \|t(g - f)(x) - (y_0 - f(x))\| \\
& \geq & |\|y_0 - f(x)\| - \|t(g - f)(x)\|| \\
& = & \|y_0 - f(x)\| - \|t(g - f)(x)\| \text{ (par définition de } r) \\
& \geq & \|y_0 - f(x)\| - \|(g - f)(x)\| \text{ (car } |t| \leq 1) \\
& > & \|y_0 - f(x)\| - r \geq 0 \text{ (par définition de } r).
\end{array}$$

Par conséquent, $f_t(x) \neq y_0$ pour tout $x \in \partial\Omega$. Le résultat demandé se déduit alors de la propriété d'invariance par homotopie du degré. Cette propriété sera utile pour l'approximation d'une fonction continue par une fonction plus régulière.

1.5.7 Constance sur les composantes connexes de $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$

Démonstration

Soit C une composante connexe de $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ et $(y_0, y_1) \in C^2$. L'espace $\mathbb{R}^n$ étant localement connexe, l'ensemble $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ est un ouvert ; par suite ce dernier est un ensemble fermé, ouvert et connexe par arcs ; il existe alors un chemin continu :

$$\phi : [0, 1] \to C \text{ tel que } \phi(0) = y_0 \text{ et } \phi(1) = y_1.$$

D'après la propriété 1.4.4, on a $deg(f, \Omega, y_0) = deg(f, \Omega, y_1)$.

1.5.8 Additivité

Soit $y_0 \in \mathbb{R}^n$ et $(\Omega_i)_{i\in I} \subset \Omega$ une famille d'ouverts deux à deux disjoints vérifiant l'une des assertions suivantes :

(a) $\Omega = \bigcup_{i\in I} \Omega_i$ et $y_0 \notin f(\partial\Omega)$;

(b) $\bigcup_{i\in I} \Omega_i \subset \Omega$ et $y_0 \notin f(\overline{\Omega} \setminus \bigcup_i \Omega_i)$.

Alors

$$deg(f, \Omega, y_0) = \sum_i deg(f, \Omega_i, y_0),$$

où seul un nombre fini de termes dans la somme est non nul.

Démonstration

Supposons l'assertion (a) ; le cas où (b) est vérifiée se traite de la même manière.

• Vérifions d'abord que $\partial\Omega_i \subset \partial\Omega, \forall i \in I$.

En effet, dans le cas contraire, il existerait un indice $i \in I$ et $x \in \overline{\Omega} \cap \partial\Omega_i$ tel que $x \notin \partial\Omega$. Alors, il existe un indice $j \neq i$ tel que $x \in \Omega_j$ car $\Omega = \bigcup_i \Omega_i$. De plus, Ω_j étant ouvert, il existe une boule ouverte $B(x, r_j) \subset \Omega_j$. Enfin, les ouverts $\{\Omega_i\}$ étant deux à deux disjoints, $B \cap \Omega_i = \emptyset$, ce qui contredit $x \in \partial\Omega_i$. On a donc, pour tout indice i, $f(\partial\Omega_i) \subset f(\partial\Omega)$; et donc $y_0 \notin f(\partial\Omega_i)$.

• Soit $\varepsilon > 0$ et, par le lemme de Sard, un point $y_1 \notin f(S_f(\Omega))$ tel que $y_1 \in B(y_0, \varepsilon)$. Alors

$$\begin{array}{rcl} deg(f, \Omega, y_0) & = & deg(f, \Omega, y_1) \\ & = & \sum_{x\in\Omega\cap f^{-1}(y_1)} sgn J_f(x) \\ & = & \sum_{i=1}^{i=N} \sum_{x\in\Omega\cap f^{-1}(y_1)} sgn J_f(x) \\ & = & \sum_{i=1}^{i=N} deg(f, \Omega_i, y_1). \end{array}$$

En effet il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $f^{-1}(y_0) \subset \cup_{i=1}^{i=N} \Omega_i$ et donc pour tout $i \geq N+1$, $deg(f, \Omega_i, y_0) = 0$.

Corollaire 1.1 (Propriété d'excision)
Soit $K \subset \Omega$ fermé et $y_0 \notin f(K) \cup f(\partial\Omega)$. Alors

$$deg(f, \Omega, y_0) = deg(f, \Omega \setminus K, y_0).$$

Ceci résulte de la partie 8-(b) en prenant $\Omega_1 = \Omega \setminus K$.

Corollaire 1.2 (Propriété d'invariance par rapport à l'ouvert)
Si $x_0 \in \Omega$ est une solution isolée de l'équation $f(x) = y_0$, alors il existe $r_1 > 0$ tel que pour tout $r \leq r_0$, le degré $deg(f, B_r(x_0), y_0)$ est constant.

1.5.9 Propriété multiplicative du degré

Soit $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $g\colon V \longrightarrow \mathbb{R}^m$ deux fonctions de classe C^1, où U est V sont deux ouverts bornés respectivement de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathbb{R}^m$ et soit $y_0 \notin f(\partial U)$ et $z_0 \notin f(\partial V)$. Alors, la formule suivante a lieu

$$\deg\,(f \times g, U \times V, (y_0, z_0)) = \deg\,(f, U, y_0).\deg\,(g, V, z_0)$$

où $(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y))\,, \quad \forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m.$

Démonstration

Soit $\mu(x) = \phi(x)dx$ et $\nu = \psi(x)dx$ deux formes différentielles intervenant dans les définitions respectives de μ et de ν. On définit le produit des formes μ et ν par $(\mu.\nu)(x, y) = \mu(x) \oplus \nu(y)$; (μ, ν) est alors une $(m+n)$-forme adaptée à la fonction $(f \times g)$. Notons $X = (x, y)$ et $(\mu.\nu)(X) = \eta(X)\,dX$ puis écrivons

$$\begin{aligned}
\deg\,(f \times g, U \times V, (y_0, z_0)) &= \int_{U\times V}(\mu.\nu)(f \times g) = \int_{U\times V}\eta(f \times g)J_{f\times g}dX\\
&= \int_{U\times V}\eta(f \times g)(X)J_f.J_g\,dX\\
&= \int_{U\times V}\eta(f(x), g(y))J_f.J_g\,dX\\
&= \int_{U\times V}\phi(f)(x)\psi(g)(y)J_f.J_g\,dxdy\\
&= \left(\int_U \phi(f)(x)J_f\,dx\right)\left(\int_U \psi(g)(y)J_g\,dy\right)\\
&= \left(\int_U \mu \circ f\,df\right)\left(\int_V \nu \circ g\,dg\right) = \left(\int_U \mu\right)\left(\int_V \nu\right)\\
&= \deg(f, U, y_0).\deg(g, V, z_0).
\end{aligned}$$

On a utilisé les définitions des formes μ et ν ainsi que le théorème de Fubini.

1.5.10 Composition d'applications

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et considérons une fonction $f \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. L'ensemble $f(\partial\Omega)$ étant compact, $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ admet une seule composante connexe non bornée C_∞ si $n > 1$ et deux si $n = 1$. Comme $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ est inclus dans

$\mathbb{R}^n \setminus f(\Omega)$, une telle composante non bornée coupe nécessairement $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$. En vertu des propriétés de non nullité et d'invariance du degré sur les composantes connexes, le degré $\deg(f, \Omega, C_\infty) \neq 0$. Énonçons alors le théorème du produit de Leray[9]

Théorème 1.1 *(Formule du produit de Leray) Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $(f,g) \in C^1(\bar{\Omega}) \times C^1(\bar{\Omega})$. On désigne par C_i^b les composantes connexes bornées de $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$. Alors, pour tout $z_0 \notin (g \circ f)(\partial\Omega)$, on la formule*

$$\deg(g \circ f, \Omega, z_0) = \sum_i \deg(f, \Omega, C_i^b). \deg(g, C_i^b, z_0)$$

où la somme dans le second membre est finie.

Démonstration

(a) Il est clair que les degrés intervenant dans la formule sont tous bien définis ; en effet, le degré $\deg(f, \Omega, C_i^b)$ est bien défini car les composantes connexes C_i^b, étant à la fois ouvertes et fermées, on $\partial C_i^b = \emptyset$. D'autre part, le degré $\deg(g, C_i^b, z_0)$ est bien défini car, par définition, $C_i^b \subset \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$.

(b) Commençons par vérifier l'existence d'un nombre fini de termes non nuls dans la somme. En effet, soit $B_R(0)$ une boule contenant $f(\bar{\Omega})$ et posons $M = \bar{B}_R(0) \cap g^{-1}(z_0)$. De l'hypothèse, on déduit que $g^{-1}(z_0) \cap f(\partial\Omega) \neq \emptyset$; par suite, $M \subset \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$. Écrivons $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega) = \cup_i C_i$, où les C_i désignent toutes les composantes, bornées et non bornées de $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$. M étant compact, il existe un nombre fini N d'indices i tel que les ensembles $\cup_{i=1}^{i=N} C_i^b$ et $C_{N+1} = C_\infty \cap B_{R+1}(0)$ couvrent l'ensemble M. D'après l'introduction, $\deg(f, \Omega, C_{N+1} = 0$. De plus, on peut choisir R assez grand pour que pour tout $i \geq N+2$, $C_i^b \subset B_R(0)$. Alors $g^{-1}(z_0) \cap C_i^b = \emptyset$ ce qui entraîne la nullité du degré $\deg(g, C_i^b, z_0)$, pour tout $i \geq N+2$. Par conséquent, l'un des deux facteurs au moins s'annule dans la sommation lorsque $i \geq N+1$ et elle est finie.

(c) Faisons la démonstration de la formule dans le cas régulier. Pour $z_0 \notin S_{g \circ f}$, on a

[9] Leray, J. (1950) La théorie des points fixes et ses applications en analyse. Proceeding of the Int. Congress of Math., Vol. 2, pp. 202,8.

les égalités

$$\begin{aligned}
\deg(g\circ f,\Omega,z_0) &= \textstyle\sum_{x\in(g\circ f)^{-1}(z_0)} Sgn\, J_{g\circ f}(x)\\
&= \textstyle\sum_{x\in(g\circ f)^{-1}(z_0)} Sgn\, J_g f(x) Sgn\, J_f(x)\\
&= \textstyle\sum_{x\in f^{-1}(y),\, y\in g^{-1}(z_0)} Sgn\, J_g(y) Sgn\, J_f(x)\\
&= \textstyle\sum_{y\in f(\Omega)\cap g^{-1}(z_0)} Sgn\, J_g(y)\left(\sum_{x\in f^{-1}(y)} Sgn\, J_f(x)\right).
\end{aligned}$$

Or, $f(\Omega)\cap g^{-1}(z_0)\neq\emptyset$; par suite $y\notin f(\partial\Omega)$; d'où l'égalité

$$\deg(g\circ f,\Omega,z_0)=\sum_{y\in f(\Omega)\cap g^{-1}(z_0)} Sgn\, J_g(y).\deg(f,\Omega,y).$$

De plus, $f(\Omega)$ étant compact, il peut être recouvert par un nombre fini de composantes C_i; en raisonnant comme dans la partie (a) et en utilisant la propriété d'additivité du degré, on obtient la formule

$$\deg(g\circ f,\Omega,z_0)=\sum_{i=1}^{i=n}\deg(f,\Omega,C_i^b).\sum_{y\in C_i\cap g^{-1}(z_0)} Sgn\, J_g(y),$$

ou encore

$$\deg(g\circ f,\Omega,z_0)=\sum_{i=1}^{i=n}\deg(f,\Omega,C_i^b).\deg(g,C_i^b,z_0).$$

(c) Dans les définitions des degrés de f et de g, nous avons utilisé pour le cas régulier ; en effet, soit $x\in f^{-1}(y)$ tel que $J_f(x)=0$, alors $J_{g\circ f}(x)=J_g-y).J_f(x)=0$ ce qui contredit le fait que z_0 est une valeur régulière.

1.6 Extensions de la définition du degré

1.6.1 Extension aux fonctions continues

Énonçons d'abord le

Lemme 1.1 (Lemme d'approximation) *Soit $K\subset\mathbb{R}^n$ un ensemble compact et $f\in\mathcal{C}^0(K)$. Alors $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\, g_\varepsilon\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ tel que* $\sup_{x\in K}\|f(x)-g_\varepsilon(x)\|\leq\varepsilon$.

On considère alors une fonction $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ et $y_0 \notin f(\partial\Omega)$. D'après le lemme d'approximation, il existe une fonction $g \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ tel que $\|f-g\|_{\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})} < dist(y_0, f(\partial\Omega))$. Posons alors

$$deg(f, \Omega, y_0) = deg(g, \Omega, y_0).$$

D'après la propriété 1.4.6, cette définition ne dépend pas du choix de la fonction g.

1.6.2 Extension aux ouverts non bornés

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert non nécessairement borné et $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ vérifiant $\sup_{x\in\overline{\Omega}} \|f(x) - x\| < \infty$. Pour $y_0 \notin f(\partial\Omega)$, on veut vérifier que l'ensemble $E = \{f^{-1}(y_0)\}$ est compact (en effet, toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E est bornée d'après la croissance de la fonction f et admet donc une sous-suite convergente). On peut donc choisir un ouvert borné Ω_0 contenant $f^{-1}(y_0)$ puis utiliser la définition

$$deg(f, \Omega, y_0) = deg(f_{|\Omega\cap\Omega_0}, \Omega \cap \Omega_0, y_0).$$

Enfin, on peut vérifier que cette définition est indépendante du choix de l'ouvert Ω_0 et ce en utilisant la propriété d'additivité.

1.7 Théorème du point fixe de Brouwer, 1912

Théorème 1.2 *Soit C un compact, convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : C \to C$ une application continue. Alors f admet au moins un point fixe dans C.*

Démonstration

Faisons-la dans le cas où $C = \overline{B}_R(0) = \overline{B}(0, R)$. Si $f(x_0) = x_0$, pour $x_0 \in \partial C$, le théorème est démontré ; sinon $f(x) \neq x,\ \forall x \in \partial C$. Considérons alors la déformation continue $f_t(x) = x - tf(x)$. Pour $t \in [0, 1[$ et $x \in \partial C$, on a les estimations suivantes :

$$\|f_t(x)\| \geq |\|x\| - t\|f(x)\|| = |R - t\|f(x)\|| \geq R - t\|f(x)\| \geq (1-t)R > 0.$$

En effet, comme $f(C) \subset C$, on a que $t\|f(x)\| < \|f(x)\| \leq R,\ \forall\, t \in [0, 1[$. Le degré $deg(Id - tf, x \in \overset{\circ}{C}, 0)$ est donc bien défini et vaut, par homotopie, $deg(Id, x \in \overset{\circ}{C}, 0) = 1 = deg(Id - f, x \in \overset{\circ}{C}, 0) \neq 0$; il existe donc $x \in \overset{\circ}{C}$ tel que $(Id - f)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$.

Remarque 1.5 **(a)** *Le cas général où C n'est pas une boule fermée se montre en utilisant le théorème d'extension de Dugundji (Théorème 6.2)*

(b) *Le théorème de Brouwer demeure vrai si C est un ensemble homéomorphe à un convexe, compact de $\mathbb{R}^n$.*

1.7.1 Formes équivalentes du théorème de Brouwer

1- Non rétraction de la boule unité

Dans un espace vectoriel de dimension finie, il n'existe pas d'application continue transformant la boule unité fermé sur sa frontière tout en conservant point par point cette frontière.

Remarque 1.6 *Dans $\mathbb{R}^n$, la sphère n'est pas une rétractée de la boule ; par contre, la boule est une rétractée de l'espace $\mathbb{R}^n$ tout entier. Il suffit, pour cela, de considérer l'application $r\colon X \to B(x_0, R)$ définie par*

$$r(x) = \begin{cases} x, & si\ \|x - x_0\| \leq R \\ x_0 + R\frac{x-x_0}{\|x-x_0\|}, & si\ \|x - x_0\| \geq R \end{cases}$$

2- Non contractilité de la sphère unité

La sphère unité S^{n-1} n'est pas contractile, i.e l'application identité $Id_{|S^{n-1}}$ n'est pas homotope à une constante.

3- Théorème de Hartmann-Stampacchia

Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un compact, convexe et $f : C \to \mathbb{R}^n$ une application continue. Alors $\exists\, u \in C$ tel que $\langle Tu, v - u\rangle > 0$, $\forall\, v \in C$.

4- Théorème de Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz[10]

Soit $x_1, ..., x_p \in \mathbb{R}^n$ et $F_1, ..., F_p$ des fermés de $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout multi-indice $\{i_1, ..., i_p\} \in \mathbb{N}^p$, on a $Conv\{x_1, ..., x_p\} \subset \bigcup_{j=1}^{i=p} Fj$. Alors $\bigcap_{i=1}^{i=p} Fi \neq \emptyset$.

5- Théorème du mini-max de Ky-Fan[11]

Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un compact, convexe et $f : C^2 \to \mathbb{R}$ une application telle que :

[10] Ein Beweis des fixpunktsatzes für n-dimensionale simplexe. Fund. Math. 14 (1929), 132-137

[11] Ky Fan (1952), Fixed point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces ; Proc. Nat. Acad. Sci. U.S. 38, 121-126

(a) l'application $y \mapsto f(.,y)$ est s.c.i,

(b) l'application $x \mapsto f(x,.)$ est continue et quasiconcave (i.e $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\varphi^{-1}(]\lambda, +\infty[)$ est convexe)

Alors $\min_{y\in C} \max_{x\in C} f(x,y) \leq \max_{x\in C} f(x,x)$.
Problème Montrer l'équivalence de ces formes avec le théorème de Brouwer (Voir section 1.9).

1.7.2 Théorème de Perron-Frobenius

Soit $A \in M(n \times n)$ une matrice carrée dont tous les termes sont positifs. Alors elle admet au moins une valeur propre positive associée à un vecteur propre positif (i.e dont toutes les composantes sont positives au sens large).

Démonstration
L'espace $\mathbb{R}^n$ étant muni de la norme $\|x\|_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^{i=n} |x_i|$, considérons le compact, convexe

$$C = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0,\ \forall\, i \in \{1, ..., n\} \text{ et } \sum_{i=1}^{i=n} x_i = 1\}.$$

S'il existe $x_0 \in C$ tel que $Ax_0 = 0$, le problème est résolu avec $\lambda = 0$. Sinon, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in C,\ \sum_{i=1}^{i=n}(Ax)_i \geq \alpha > 0$. L'application f définie par $f(x) = \frac{Ax}{\sum_{i=1}^{i=n}(Ax)_i}$ vérifie $\|f(x)\| \leq \frac{\|A\|\|x\|}{\alpha}\cdot$ Elle est donc définie et continue ; de plus, comme les termes (a_{ij}) sont positifs, elle envoie C dans C. Elle admet donc, d'après le théorème de point fixe de Brouwer, au moins un point fixe $x_0 \in C$ vérifiant $Ax_0 = \lambda x_0$ avec $\lambda = \sum_{i=1}^{i=n}(Ax_0)_i$.

1.7.3 Point d'équilibre d'un système autonome

Théorème 1.3 *Soit D une partie homémomorphe à une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ et soit f une fonction localement lipschitzienne définie sur $\bar{D}$. On suppose que chaque trajectoire du système autonome suivant*

$$(S) \quad x' = f(x)$$

partant de D à l'instant $t = 0$ reste dans D pour tout $t > 0$ (les trajectoires sont piégées dans D). Alors, le système (S) admet au moins d'équilibre dans $\bar{D}$.

Démonstration

Considérons une suite réelle (t_n) à termes positifs et convergente vers 0 puis définissons l'application continue

$$\begin{aligned} D &\longrightarrow D \\ x_0 &\longmapsto x(t_n; 0, x_0). \end{aligned}$$

Cette application est continue d'après la continuité de la solution unique d'un problème de Cauchy par rapport aux conditions intiales ; il existe alors, d'après le théorème de Brouwer, un point fixe $x_n = x(t_n; 0, x_n)$. Le système étant autonome donc invariant par translation, la solution maximale $\tilde{x}(s) = x(s + t_n)$ satisfait la condition initiale $\tilde{x}(0) = x(t_n) = x_n = x(0)$. D'après l'unicité, on a l'égalité $\tilde{x} \equiv x$. Par conséquent, $x(kt_n; 0, x_n) = x(t_n; 0, x_n) = x_n, \ \forall k \in \mathbb{Z}$. En particulier, pour $k = \left[\frac{t}{t_n}\right]$, $[\quad]$ désignant la partie entière, on a

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \ \text{ et } \ \forall\, t > 0, \quad x\left(\left[\frac{t}{t_n}\right] t_n; 0, x_n\right) = x_n.$$

Avant de passer à la limite dans cette relation, notons que D étant relativement compacte, il existe une suite (x_{n_k}) convergente vers $\bar{x} \in \bar{D}$. Utilisant la continuité de x et remarquant que

$$\frac{t}{t_n} - 1 \left[\frac{t}{t_n}\right] \leq \frac{t}{t_n} \Longrightarrow t - t_n < t_n \frac{t}{t_n} \leq t$$

on obtient à la limite

$$x(t; 0, \bar{x}) = \bar{x}, \qquad \text{pour tout } t > 0.$$

Alors, $f(\bar{x}) = 0$ et donc $\bar{x}$ est point d'équilibre pour le système (S).

1.7.4 Théorème de Poincaré-Böhl, 1886

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et $f, g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que : $f(x) + \lambda g(x) \neq 0, \forall x \in \partial\Omega$ et $\forall \lambda \geq 0$. Si $0 \notin g(\partial\Omega)$, alors

$$deg(f, \Omega, 0) = deg(g, \Omega, 0).$$

Démonstration

Considérons la déformation convexe : $f_t(x) = tf(x) + (1-t)g(t),\ \forall\, t \in [0,1]$. Alors

- Si $t = 0,\ f_0(x) = g(x) \neq 0, \forall\, x \in \partial\Omega$, par hypothèse.
- Si $t \neq 0,\ f(x) + \frac{1-t}{t}g(x) \neq 0, \forall\, x \in \partial\Omega$, par hypothèse.

Donc, le degré $deg(f_t, \Omega, 0)$ est bien défini et le résultat découle de la propriété 1.4.4.

Corollaire 1.3 *Supposons* $0 \in \Omega$ *et*

$$f(x) + \lambda x \neq 0,\ \forall\, \lambda \geq 0\ \textit{et}\ \forall\, x \in \partial\Omega\ (\textit{ou}\ \forall\, \lambda \leq 0\ \textit{et}\ \forall\, x \in \partial\Omega).$$

Alors l'équation $f(x) = 0$ *admet au moins une solution dans* Ω*.*

Démonstration

On applique le théorème précédent avec $g = Id$ ou $g = -Id$.

Corollaire 1.4 (théorème des applications subjectives)
Soit $f \in C(\mathbb{R}^n)$ *tel que* $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} \frac{\langle f(x), x\rangle}{\|x\|} = +\infty$, *alors* $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$*.*

Démonstration

Soit $y_0 \in \mathbb{R}^n$ et $g(x) = f(x) - y_0$. Alors g vérifie l'hypothèse de coercivité ci-dessus et donc, il existe $R > 0$ tel que $\forall x \in \partial B(0,R),\ \langle g(x), x\rangle > 0$. Par conséquent, $g(x) + \lambda x \neq 0, \forall \lambda \geq 0$ et $\forall x \in \partial B_R$ car sinon il existerait x tel que $\|x\| = R$ et $\langle g(x), x\rangle + \lambda \|x\|^2 = 0$, ce qui est absurde. D'après le corollaire 1.3, l'équation $g(x) = 0$, i.e. $f(x) = y_0$ admet au moins une solution $x \in \Omega$.

Remarque 1.7 *Si* $n = 1$*, le corollaire 1.4 n'est autre que le théorème des valeurs intermédiaires.*

1.7.5 Théorème de Borzuk, 1933

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, symétrique par rapport à l'origine ($\Omega = -\Omega$) et $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ une application continue, impaire telle que $0 \notin f(\partial\Omega)$. Alors

(a) Si $0 \notin \overline{\Omega}$, le degré $deg(f, \Omega, 0)$ est pair.

(b) Si $0 \in \Omega$, le degré $deg(f, \Omega, 0)$ est impair.

Démonstration

Dans le cas où $f \in \mathcal{C}^1(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$, et 0 est valeur régulière.

(a) Si $0 \notin \overline{\Omega}$, il y'a deux possibilités :

(i) $f^{-1}(0) = \emptyset$ auquel cas $deg(f, \Omega, 0) = 0$.

(ii) $f^{-1}(0) \neq \emptyset$; f étant impaire, on a l'implication $(x \in f^{-1}(0) \Rightarrow -x \in f^{-1}(0))$ et donc $f^{-1}(0) = \{x_1, x_2, ..., x_N, -x_1, -x_2, ..., -x_N\}$. D'autre part, $Df(-x) = Df(x), \forall\, x \in \Omega$. Par conséquent

$$\begin{aligned} \deg(f, \Omega, 0) &= \textstyle\sum_{x \in \Omega \cap f^{-1}(0)} sgn J_f(x) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{i=N} sgn J_f(x_i) + \sum_{i=1}^{i=N} sgn J_f(-x_i) \\ &= 2 \textstyle\sum_{i=1}^{i=N} sgn J_f(x_i). \end{aligned}$$

Le degré est donc un entier pair.

(b) $0 \in \overline{\Omega}$. Comme f est impaire, $f(0) = 0$; alors de deux choses l'une :

(i) $f^{-1}(0) = \{0\}$ auquel cas $deg(f, \Omega, 0) = sgn J_f(0) = 1$

(ii) $f^{-1}(0) = \{0\} \cup \{x_1, x_2, ..., x_N, -x_1, -x_2, ..., -x_N\}$ et alors

$$deg(f, \Omega, 0) = sgn J_f(0) + 2 \sum_{i=1}^{N} sgn J_f(x_i);$$

et c'est un entier impair.

1.7.6 Applications du théorème de Borzuk

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, contenant l'origine et symétrique par rapport à ce dernier. On notera $S^n = \partial B_{n+1}(0, 1)$ où B_{n+1} est la boule unité dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

Théorème 1.4 (Thérème des antipodes)
Soit $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue telle que

$$\forall x \in \partial\Omega, \left(f(x) \neq 0 \;\; et \;\; \frac{f(x)}{\|f(x)\|} \neq \frac{f(-x)}{\|f(-x)\|} \right).$$

Alors, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution x dans Ω.

Remarque 1.8 *La condition du théorème dit que la fonction f ne doit pas pointer dans la même direction en deux points antipodaux ; d'où le nom du théorème qui porte aussi son appellation d'origine allemande "antipodensatz".*

Démonstration

On considère la déformation $f_t(x) = f(x) - tf(-x)$ pour $t \in [0,1]$; alors, par hypothèse, $f_t(x) \neq 0, \forall x \in \partial\Omega$; le degré $deg(f_t, \Omega, 0)$ est donc bien défini et l'on a $deg(f, \Omega, 0) = deg(f_1, \Omega, 0) \neq 0$ car f est impaire, d'où le résultat.

Corollaire 1.5 *Toute fonction $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ continue et impaire s'annule et admet au moins un point fixe dans $\overline{\Omega}$.*

Corollaire 1.6 *Soit $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^m$ une fonction continue.*
Si $m < n$, alors il existe $x \in \partial\Omega$ tel que $f(x) = f(-x)$.

Démonstration

Lorsque $m < n$, on identifie $\mathbb{R}^m$ au sous-espace $\mathbb{R}^m \times \underbrace{\{(0,0,...,0)\}}_{(n-m)\text{ zéros}}$ de $\mathbb{R}^n$. Supposons le résultat faux, alors la fonction $g(x) = f(x) - f(-x)$ ne s'annule pas sur $\partial\Omega$. Alors le degré $deg(g, \Omega, 0)$ est bien défini et vaut, par homotopie, $deg(g, \Omega, y)$ pour tout $y \in B(0,r)$ et pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$. Comme g est impaire, le degré $deg(g, \Omega, 0)$ est impair et il existe donc $x \in \Omega$ tel que $g(x) = y$. On a donc montré que $B(0,r) \subset g(\overline{\Omega}) \subset \mathbb{R}^m$. Or, $B(0,r)$ est une boule de $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^m$ avec $m < n$, ce qui est absurde.
Comme cas particulier important, on a le théorème suivant :

Théorème 1.5 (Théorème de Borzuk-Ulam)
Soit $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue.
Alors, il existe $x \in S^n$, $f(x) = f(-x)$.
En particulier, toute fonction impaire $f \in C(S^n, \mathbb{R}^n)$ admet un zéro sur S^n.

Remarque 1.9 *(a) Ce théorème admet aussi la version suivante :*
Soit X et Y deux espaces de Banach tel que $dimY < dimX < \infty$, S la sphère unité dans X et $f\colon\ S \longrightarrow Y$ une application continue. Alors, il existe au moins un $x \in S$ tel que $f(x) = f(-x)$.
(b) Grâce au théorème, on a l'existence sur la terre au moins deux points antipodaux ayant même température et même pression !

Corollaire 1.7 *Si $m \neq n$, les espaces $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ ne sont pas homéomorphes.*

Démonstration

Supposons $m < n$ et considérons, par l'absurde, une application continue $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; la fonction $h_{|S^{n-1}} : S^{n-1} \to \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{n-1}$ est aussi continue ; d'après le théorème de Borzuk-Ulam, il existe $x \in S^{n-1}$ tel que $h(x) = h(-x)$; et donc h n'est pas injective, ce qui est contradictoire.

Théorème 1.6 (Théorème des applications ouvertes)
Soit $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue et localement injective. Alors f est une application ouverte. En particulier, si Ω est un domaine, $f(\Omega)$ est un domaine si f est injective ; de plus, l'application $f : \Omega \to f(\Omega)$ est un homéomorphisme (théorème de l'invariance du domaine.)

Démonstration

Ω étant un ouvert, on a : $\forall\, x \in \Omega, \exists\, r(x) > 0,\ B(x, r(x)) \subset \Omega$ et donc $f(\Omega) = \bigcup_{x\in\Omega} f[B(x, r(x))]$. Il suffit donc de montrer que $\forall x \in \Omega$, l'ensemble image $f[B(x, r(x))]$ est ouvert. Soit $x_0 \in \Omega$; quitte à considérer la fonction $\tilde{f}(x) = f(x + x_0) - x_0$ et à remarquer que $\hat{\Omega} = \Omega + x_0$ reste un ouvert, on peut supposer $x_0 = 0$ et $f(x_0) = 0$. Soit donc $r > 0$ tel que $f_{|\overline{B}(0,r)}$ soit injective et posons :

$$f_t(x) = f\left(\frac{x}{1+x}\right) - f\left(\frac{-tx}{1+x}\right), \forall\, (t, x) \in [0, 1] \times \overline{B}_r(0).$$

Alors :

- f_t est continue en t et en x ;
- $f_0(x) = f(x)$ et $f_1(x) = f(\frac{x}{2}) - f(\frac{-x}{2})$ est une fonction impaire ;
- $f_t(x) \neq 0, \forall x \in \partial B_r(0)$ et $\forall\, t \in [0, 1]$ car f est injective.

Donc, $\forall\, y \in B_r(0)$, on a, d'après le théorème de Borzuk,

$$deg(f, B_r(0), 0) = deg(f_1, B_r(0), 0) \neq 0,$$

autrement dit, il existe $x \in B_r(0 : f(x) = y$, soit $B_r(0) \subset f(B_r(0))$ et donc $f(B_r(0))$ est un ensemble ouvert.

Corollaire 1.8 *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application continue, injective telle que $\lim_{\|x\|\to+\infty} \|f(x)\| = +\infty$. Alors, f est un homéomorphisme.*

Démonstration

D'après le théorème des applications ouvertes, l'ensemble image $f(\mathbb{R}^n)$ est un ouvert. Montrons que c'est un ensemble fermé. Soit $y_n \in f(\mathbb{R}^n)$ une suite convergente vers une limite y_0 et soit $x_n \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x_n) = y_n$. D'après l'hypothèse de coercivité, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée car sinon il existerait une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui tend, en norme, vers $+\infty$ et donc $\lim_{k\to+\infty} \|f(x_{n_k})\| = +\infty = y_0$, ce qui est absurde. En vertu du théorème de Bolzano-Weientrass, soit donc $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergente, vers une limite x_0. Par continuité de f, $f(x_0) = y_0$ et donc $y_0 \in f(\mathbb{R}^n)$, montrant que $f(\mathbb{R}^n)$ est fermé, ouvert dans le connexe $\mathbb{R}^n$; par conséquent, $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$. La fonction f est donc bijective, continue et ouverte ; c'est donc un homéomorphisme.

Remarque 1.10 *Soit $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue, injective. On peut montrer, comme conséquence de ce corollaire, que*

$$\forall\, y_0 \in f(\Omega),\ deg(f, \Omega, y_0) = \pm 1.$$

1.8 Exercices résolus

Exercice 1

Soit $\Omega =]-1, 1[^2$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $f(x, y) = (y - x^3, y)$. Montrer que $deg(f, \Omega, 0) = -1$.

Corrigé

On a $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0) \notin \partial\Omega$; de plus $J_f = |Df(x, y)| = -3x^2 = 0$. Les valeurs singulières sont donc représentées par l'axe des y. Calculons de deux façons différentes le degré par rapport à l'origine.

(a) $1^{\text{ère}}$ méthode : Le point $Y_1 = (\frac{-1}{2}, 0) \in B(0, 1)$ pour la norme $\|(x, y)\| = \max(|x|, |y|)$ et n'appartient pas à $f(\partial\Omega) = \{(\Delta_1) \cup (\Delta_2) \cup (\Delta_3) \cup (\Delta_4)\}$ (voir la figure 1.3). Enfin, comme $J_f(Y_1) = \frac{-3}{4} \neq 0$, Y_1 est une valeur régulière. De plus, $f(x, y) = Y_1 \Leftrightarrow (x, y) = (\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, 0)$, on en déduit que

$$deg(f, \Omega, 0) = deg(f, \Omega, Y_1) = sgn(J_f(Y_1)) = -1.$$

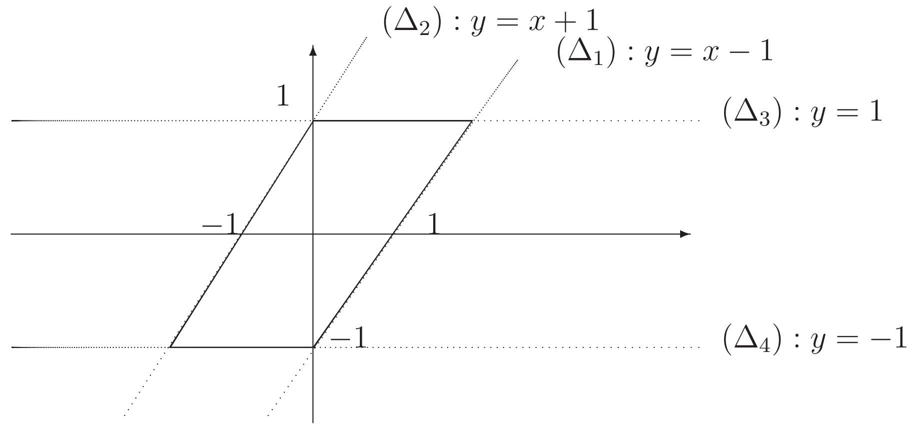


FIG. 1.3 –

(b) 2$^{\text{ème}}$ méthode : On perturbe la fonction f par la fonction $g(x,y) = (y - x^3 + x\varepsilon^2, y)$; alors $J_g(x,y) = -3x^2 + \varepsilon^2$ et

$$g(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0) \vee (x,y) = (\varepsilon, 0) \vee (x,y) = (-\varepsilon, 0).$$

Donc, si ε est assez petit $(0 < \varepsilon < 1)$, $g(x,y) \neq 0, \forall\, (x,y) \in \partial\Omega$ et $J_g(0,0) = \varepsilon^2, J_g(\varepsilon, 0) = J_g(-\varepsilon, 0) = -2\varepsilon^2$; donc $deg(f, \Omega, 0) = deg(g, \Omega, o) = 1 - 1 - 1 = -1$.

Exercice 2

Soit $\Omega =]-1, 1[^2$ et la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (\max(|x|, |y|), 0)$. Montrer que $deg(f, \Omega, 0) = 0$.

Corrigé

$f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$ et la fonction $f(\partial\Omega) = (1,0)$. On considère alors la fonction constante définie par $g(x,y) = (0,1)$; alors $g(x,y) \neq (0,0), \forall (x,y) \in \overline{\Omega}$ et donc $deg(f, \Omega, 0) = deg(g, \Omega, 0) = 0$ car $g(x,y) = (0,0)$ n'a pas de solution dans Ω (ni ailleurs, d'ailleurs).

Exercice 3

Soit $\Omega = B(0,R)$, $Y_0 = (1,0$ et $f(x,y) = (x^3 - 3xy^2, -y^3 + 3x^2y)$.
Calculer $deg(f, \Omega, y_0)$.

Corrigé

$f(x,y) = (1,0) \Leftrightarrow (x,y) = (1,0) \vee (\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \vee (\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}) \in \partial\Omega$. On remarque qu'au moins le point $(1,0)$ est sur la frontère de la boule unité quelle que soit la norme usuelle que l'on considère sur $\mathbb{R}^2$. Par conséquent, le degré n'est pas défini si $R = 1$.
Si $0 < R < 1$, alors $B(0,R) \cap f^{-1}(y_0) = \emptyset$ et donc $deg(f, B(0,R,y_0) = 0$.
Enfin, si $R > 1$, alors le degré est bien défini. De plus, on a :

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y^2 & -6xy \\ 6xy & -3y^2 + 3x^2 \end{pmatrix}$$

et donc

$$J_f(x,y) = (3x^2 - 3y^2)^2 + 36x^2y^2 = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0).$$

Les trois points sont alors réguliers et comme $sgn(J_f(x,y)) > 0, \forall\,(x,y) \neq (0,0)$ alors $deg(f, \Omega, y) = 3$.

Exercice 4

Soit $\Omega =]a,b[\subset \mathbb{R},\ f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $y_0 \notin f(\partial\Omega) = \{f(a), f(b)\}$.
Montrer que $deg(f, \Omega, y_0) \in \{-1, 0, 1\}$. Plus précisément, on a la formule

$$deg(f, \Omega, y_0) = \begin{cases} 0, & \text{si } f(a) = f(b) \\ sgn\frac{f(b)-f(a)}{b-a}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Corrigé

On introduit la fonction g définie sur $\overline{\Omega}$ par $g(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$. Alors, de deux choses l'une :

- $f(b) = f(a)$, alors g est constante et donc $deg(f, \Omega, y_0) = deg(g, \Omega, y_0) = 0$
- $f(b) \neq f(a)$, alors $g_{|\partial\Omega} = f_{|\partial\Omega} \Rightarrow deg(g) = deg(f)$ et donc

$$deg(f, \Omega, y_0) = deg(g, \Omega, y_0) = sgn\,\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Exercice 5

Soit $\Omega =]-\alpha, \alpha[$ $(\alpha > 0)$ et $f(x) = ax^n$ $(a \in \mathbb{R}^*, n \in \mathbb{N})$. Montrer que

$$deg(f, \Omega, 0) = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ est pair ;} \\ sgn(a), & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Corrigé

• $n = 0$: $f(x) = a \Rightarrow deg(f, \Omega, 0) = 0$ car $a \neq 0$

• $n = 1$: $f(x) = ax = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et $f'(x) = a \Rightarrow deg(f, \Omega, 0) = sgn(a)$

• $n \geq 2$: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \notin \partial\Omega$ car $\alpha \neq 0$. De plus,
$f'(x) = nax^{n-1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$; donc 0 est une valeur singulière.
Considérons alors deux sous-cas :

(a) n **pair :** $f(\partial\Omega) = a\alpha^n$; on introduit la fonction constante g définie par $g(x) = a\alpha^n$; alors $g(x) \neq 0$, $\forall\, x \in \Omega$ et donc $deg(f, \Omega, 0) = deg(g, \Omega, 0) = 0$ car $g_{|\partial\Omega} = f_{|\partial\Omega}$.

(b) n **impair :** On perturbe f par une fonction g de même monotonie que f, s'annulant en zéro et telle que $g'(0) \neq 0$; alors

$$deg(f, \Omega, 0) = deg(g, \Omega, 0) = sgn(a).$$

Remarque 1.11 *L'exercice 5 peut aussi se déduire de l'exercice 4.*

Exercice 6

Soit $\Omega = B(0, 1)$ la boule unité de $\mathbb{R}^n$ et $f \in C(\overline{\Omega})$ une fonction telle que $0 \notin f(\overline{\Omega})$. Montrer qu'il existe

$$(x, y) \in (\partial\Omega)^2 \text{ et } \lambda > 0,\ \mu < 0 \text{ vérifiant } f(x) = \lambda x \text{ et } f(y) = \mu y.$$

Corrigé

Dans le cas contraire, on a l'assertion suivante :

$$\forall\, x \in \partial\Omega, \forall\, \lambda \in \mathbb{R}^*, f(x) \neq \lambda x.$$

Considérons la déformation convexe $F_t(x) = tf(x) + (1-t)x$; alors $F_t(x) \neq 0$, $\forall\, x \in \partial\Omega$ et $\forall\, t \in [0, 1]$ et donc $deg(f, \Omega, 0) = deg(I, \Omega, 0) = 1$; l'équation $f(x) = 0$ admet donc une solution dans Ω, ce qui est impossible.

Exercice 7

Soit $B = B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ la boule unité et $f : \overline{B} \to \overline{B}$ une application continue telle que $f(x) = x, \forall x \in \partial B$. Montrer que f est surjective.

Corrigé

Comme $f_{|\partial B} = I_{|\partial B}$, la surjectivité de f découle de l'assertion suivante :

$$\forall\, y \in B, \exists\, x \in B : \; f(x) = y \tag{1.1}$$

qu'il faut démontrer. Considérons, à cet effet, la déformation convexe $f_t(x) = tf(x) + (1-t)I(x)$. Alors, grâce à la définition de f, on a l'équivalence :

$$(\exists x \in \partial B : f_t(x) = y) \Leftrightarrow (\exists\, x \in \partial B : x = y).$$

La seconde assertion de l'équivalence étant impossible, le degré $deg(f_t, B, y)$ est bien défini et vaut, par homotopie $deg(I, B, y) = 1$ car $y \in B$. Finalement $deg(f, B, y) \neq 0$ et l'assertion (1.1) en découle.

Exercice 8

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application continue sur $\overline{B}(0,R)$ et vérifiant l'hypothèse $f(x).x \geq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\| = R$.

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $\overline{B}$.

Corrigé

Dans le cas contraire, on peut définir la fonction $g(x) = -R\frac{f(x)}{\|f(x)\|}\cdot$ La fonction g est continue et envoie $\overline{B}$ sur ∂B ; elle admet donc par le théorème de Brouwer un point fixe $x \in \overline{B}$ (en fait sur ∂B). Or, $f(x).x = -\frac{1}{R}\|f(x)\|g(x).x = -\frac{1}{R}\|f(x)\|\|x\|^2 < 0$, ce qui contredit l'hypothèse.

Exercice 9

Soit n un entier impair.

(1) Montrer que dans $\mathbb{R}^n$, il n'existe pas d'homotopie continue définie sur la sphère unité et joignant l'application identité I à $-I$.

(2) Montrer qu'il n'existe pas de fonction continue $f : \bar{B}(0,R) \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ telle

que $\langle x, f(x)\rangle = 0,\ \forall\, x \in \partial B$.

Corrigé

(1) Dans le cas contraire, il existe une application continue

$$H:\ S^{n-1} \times [0,1] \longrightarrow S^{n-1}$$

telle que $H(x,0) = x$ et $H(x,1) = -x,\ \forall\, x \in S^{n-1}$. Par le théorème de Tietze-Uryshon, H admet un prolongement continu $\tilde{H}$ défini sur $\overline{B(0,1)} \times [0,1]$ et telle que $\tilde{H}_{|S^{n-1}} = H$. En utilisant les propriétés usuelles du degré, on déduit les égalités suivantes

$$\begin{aligned} 1 = \deg(I, B(O,1), 0) &= \deg(\tilde{H}(.,0), B(O,1), 0) \\ &= \deg(\tilde{H}(.,1), B(O,1), 0) \\ &= \deg(-I, B(O,1), 0) = (-1)^n = -1, \end{aligned}$$

ce qui est contradictoire.

(2) Considérons l'homotopie continue définie par

$$H(x,t) = x\cos(\pi t) + \frac{f(x)}{\|f(x)\|}\sin(\pi t)$$

et supposons le résultat faux, alors $\|H\|^2 = \|x\|^2\cos^2\pi t + \sin^2\pi t = 1$ et donc H joint l'application identité I à $-I$ sur la sphère S^{n-1}, ce qui contredit la question (1).

Remarque 1.12 *(a) Sur $\mathbb{R}^3$, ce résultat est connu sous le nom du théorème de l'hérisson ; en effet, il dit qu'il existe, sur S^1, au moins un vecteur qui ne soit pas orthogonal à $f(x)$, donc "un poil hérissé".*

(b) La réciproque de ce résultat est vraie. En effet, si $n = 2$ est un entier pair, la fonction $f:\ \bar{B} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{0\}$ définie par $f(x) = (-x_{p+1}, \cdots, -x_{2p}, \cdots, x_1, \cdots, x_p)$ est continue et vérifie $\langle x, f(x)\rangle = 0$ pour tout $x \in S^{n-1}$.

Exercice 10

Soit $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une application continue et injective. Alors, si $m > n$ l'ensemble $\mathbb{R}^m \setminus f(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathbb{R}^m$.

Corrigé

• Première étape :

Montrons que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathbb{R}^m \setminus f(I_k^n)$ est dense dans $\mathbb{R}^m$. Dans le cas contraire, il existerait $y_0 \in \mathbb{R}^m$ et $R > 0$ tel que $\bar{B}(y_0, R) \subset f(I_k^n)$. Soit le compact $K = f^{-1}(\bar{B}(y_0, R))$; f étant une application ouverte, sa restriction est un homéomorphisme de K sur $\bar{B}$; il en est de même de l'application réciproque $(f_|)^{-1} \colon \bar{B} \longrightarrow K$. Or, $\bar{B} \subset \mathbb{R}^m$, $K \subset \mathbb{R}^n$ et $m > n$; alors, d'après le théorème de Borsuk-Ulam, la fonction $(f_{|K})^{-1}$ n'est pas injective ; d'où la contradiction.

• Seconde étape :

Les ensembles $f(I_k^n)$ étant compacts, les ensembles $\mathbb{R}^m \setminus f(I_k^n)$ sont ouverts. D'après la première étape, ils sont aussi denses dans $\mathbb{R}^m$. D'après le théorème de Baire, l'ensemble $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}^m \setminus f(I_k^n)$ est dense dans $\mathbb{R}^m$. Or, $\mathbb{R}^n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_k^n$; alors $\mathbb{R}^m \setminus f(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}^m \setminus f(I_k^n)$; et le résultat s'ensuit.

Exercice 11 (Théorème de Ljusternik-Schnirelman [12]

Soit S^{n-1} la shère unité dans $\mathbb{R}^n$ et soit $\{F_k\}_{1\leq k\leq n}$ un recouvrement de S^{n-1} par des fermés. Alors, il existe $k \in \{1, n\}$ et $x_k \in F_k$ tel que $(-x_k) \in F_k$.

Corrigé

Pour $n = 1$, le résultat est trivial. Supposons que $F_k \cap (-F_k) = \emptyset$, pour tout $k\{1, \cdots, n-1\}$ puis montrons que $F_n \cap (-F_n) \neq \emptyset$. Considérons les fonctions f_k $(1 \leq k \leq n-1)$ définies par

$$\begin{cases} 0, & x \in F_k \\ 1, & x \in -F_k. \end{cases}$$

En vertu du théorème d'extension de Tietze-Uryshon, on peut prolonger continûment ces fonctions à la sphère unité $\tilde{f}_k \colon S^{n-1} \longrightarrow [0, 1]$. Appliquons le théorème de Borsuk-Ulam à la fonction

$$\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \cdots, \tilde{f}_{n-1}) : S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}.$$

[12]L. Ljusternik & Schnirelman L. (1934), Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels. Hermann, Paris.

On obtient l'existence d'un élément $x_0 \in S^{n-1}$ tel que $\tilde{f}(x_0) = \tilde{f}(-x_0)$ et donc $\tilde{f}_k(x_0) = \tilde{f}_k(-x_0)$, $\forall\, k \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$. Alors, par définition des fonctions f_k, $x_0 \notin F_k \cup (-F_k)$; en effet

$$\begin{aligned} x_0 \in F_k \;&\Longrightarrow\; f_k(x_0) = 0 \quad \Longrightarrow\; f_k(-x_0) = 0 \\ &\Longrightarrow\; -(x_0) \in F_k \;\;\Longrightarrow\; x_0 \in (-F_k) \end{aligned}$$

et donc $f_k(x_0) = 0 = 1$, ce qui est absurde. Comme la famille $\{F_k\}_{1 \leq k \leq n}$ recouvre la sphère S^{n-1}, on en déduit que $x \in F_n \cap (-F_n)$.

Exercice 12 (Théorème du sandwich)

Soit $(B_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'ensembles mesurables et bornés de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe un hyperplan H de $\mathbb{R}^n$ divisant chacun des B_i en deux parties de même mesure.

Remarque 1.13 *Le résultat est évident lorsque les B_i sont des boules de $\mathbb{R}^2$ ou dans $\mathbb{R}^3$. Il est intéressant de voir que les B_i peuvent être de formes géométriques quelconques ; à titre d'exemple, on peut prendre dans $\mathbb{R}^3$ un morceau de pain, un morceau de cacher et un morceau de fromage ; H représente alors le couteau.*

Corrigé

Fixons $\alpha = (0, 0, \cdots, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Pour $1 \leq k \leq n$, posons $E_k(x) = \{y \in B_k : (y - \alpha).x \geq 0\}$ et considérons la fonction $f\colon\, S^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, \cdots, f_n)$ définie par

$$f_k(x) = mes(E_k(x)), \; \forall\, k \in [0, 1].$$

On a identifié un élément $y \in \mathbb{R}^n$ à l'élément $y' = (y, 0)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ et on a désigné par . le produit scalaire dans $\mathbb{R}^{n+1}$. La fonction f est continue. En effet, soit (x_j) une suite convergente vers x dans S^n, quand $j \to \infty$. Comme les ensembles B_k sont bornés, les suites $\chi_{E_k(x_j)}$ convergent vers $\chi_{E_k(x)}$, pour tout $k \in [1, n]$; la fonction χ_A représente la fonction caractéristique de l'ensemble A. D'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, les fonctions $f_k(x_j)$ convergent vers $f_k(x)$ $(1 \leq k \leq n)$. Par conséquent, on déduit du théorème de Borzuk-Ulam, l'existence d'un point $x_0 \in S^n$

tel que $f(x_0) = f(-x_0)$. On a donc l'égalité

$$\forall\, k \in [1, n],\ mes\{y \in B_k :\ (y - \alpha).x_0 \geq 0\} = mes\{y \in B_k :\ (y - \alpha).x_0 \leq 0\}. \quad (1.2)$$

Supposons, par l'absurde, que les n premières composantes de x_0 sont nulles ; comme x_0 est sur la sphère, alors $x_0^{n+1} = \pm 1$ et donc

$$\forall\, k \in [1, n],\ mes\{y \in B_k :\ (y_{n+1} - 1).x_0 \geq 0\} = mes\{y \in B_k :\ (y_{n+1} - 1) \leq 0\}.$$

D'autre part, $y_{n+1} = 0$ et donc $mesB_k = 0$ pour tout $k \in [1, n]$; ceci contredit l'hypothèse. Il résulte alors de (1.2), l'égalité suivante :

$$\forall\, k \in [1, n],\ mes\{y \in B_k :\ y.x_0 \geq x_0^{n+1}\} = mes\{y \in B_k :\ y.x_0 \leq x_0^{n+1}\}.$$

Enfin, il suffit de prendre $H = \{y \in \mathbb{R}^n : \quad y.x_0 = x_0^{n+1}\}$.

1.9 Exercices non résolus

Exercice 1

Soit $f\colon\ [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $f(a).f(b) \neq 0$. Montrer que

$$deg(f,]a, b[, 0) = \frac{1}{2}[Sgnf(b) - Sgnf(a)].$$

Exercice 2

Étant donné la boule ouverte dans $\mathbb{R}$, soit ψ la fonction définie par $\psi(x, y) = (e^x - 1, y^2)$. Montrer que $deg(\psi, B, 0) = 0$. (On pourra par exemple introduire l'approximation ψ_ε définie par $\psi_\varepsilon(x, y) = (e^x - 1, y^2 - \varepsilon)$.

Exercice 3

Étant donné Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, soit f et g deux fonctions de $C(\bar{\Omega})$ telles que $\|f(x)\| < \|g(x)\|$, $\forall\, x \in \Omega$. Montrer que

$$deg(f + g, \Omega, 0) = deg(g, \Omega, 0).$$

Exercice 4

Étant donné Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, soit $f \in C(\bar{\Omega})$ et $y_0 \notin f(\partial\Omega)$. Montrer que

$$\forall\, y \in \mathbb{R}, \quad deg(f, \Omega, y_0) = deg(f - y, \Omega, y_0 - y).$$

Exercice 5

Étant donné Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, soit $f \in C(\bar{\Omega})$ et $0 \notin f(\partial\Omega)$. Montrer que

$$deg(-f, \Omega, 0) = (-1)^n deg(f, \Omega, 0).$$

Exercice 6

Étant donné Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, soit f et g deux fonctions de $C(\bar{\Omega})$ telles que $\langle f(x), g(x)\rangle < 0,\ \forall\, x \in \partial\Omega$. Montrer que

$$deg(f, \Omega, 0) = (-1)^n deg(g, \Omega, 0).$$

Exercice 7

Soit $f \in C(\mathbb{R}^n)$ une fonction continue telle qu'il existe $r > 0$ vérifiant $f(\partial B_r(0)) = \partial B_r(0)$. Montrer que

$$\deg\left(f^m, B_r(0), 0\right) = \left(\deg\left(f, B_r(0), 0\right)\right)^m.$$

Exercice 8

$B = B_r$ désignant la boule ouverte de rayon r dans $\mathbb{R}^n$, soit $f \in C(\bar{B})$ et $x_0 \in B$ tel que $\langle f(x), x - x_0\rangle \geq 0,\ \forall\, x \in \partial B$. Montrer que f admet au moins un zéro dans $\bar{B}$.

Exercice 9

S^n désignant la sphère unité dans $\mathbb{R}^{n+1}$, montrer que

(1) Toute fonction impaire $f \in C(S^n, \mathbb{R}^n)$ admet au moins un zéro sur S^n.

(2) Il n'existe pas de fonction continue impaire $f\colon\ S^n \to S^m$, si $n > m$.

Exercice 10 (Autre forme du théorème de Böhl)

Soit $\Omega = B(0,1)$ la boule unité ouverte dans $\mathbb{R}^n$ et $f\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ une application continue.

(1) Montrer que l'on a l'alternative suivante :

(a) f admet au moins un point fixe.

(b) $\exists\, x \in \partial\Omega,\ \exists\, \lambda \in]0,1[,\ x = \lambda f(x)$.

(2) Supposons que f vérifie l'hypothèse suivante :

$$\langle x, f(x)\rangle > \|x\|^2,\ \forall\, x \in \Omega.$$

Montrer que f admet un point fixe.

1.10 Problème résolu sur les formes équivalentes du théorème de Brouwer

1- Non rétraction de la boule unité

Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, il n'existe pas d'application continue transformant la boule unité fermée sur sa frontière tout en conservant point par point cette frontière.

(a) Démonstration directe

Par l'absurde, supposons qu'il existe une fonction continue f de $\bar{B}_1(0)$ sur $\partial B_1(0)$ telle que $f(x) = x,\ \forall\, x \in \partial B_1(0)$. En appliquant le théorème de Brouwer à la fonction $g = -f$, on obtient l'existence d'au moins un point $x_0 \in \bar{B}_1(0)$ tel que $g(x_0) = x_0$, i.e. $f(x_0) = -x_0$. Or, $f(\bar{B}_1(0)) \subset \partial B_1(0)$, donc $-x_0 \in \partial B_1(0)$ et $\|x_0\| = 1$. Comme f conserve la frontière $f(x_0) = x_0$ et donc $x_0 = -x_0$; d'où $x_0 = 0$, ce qui est absurde.

(b) Démonstration de la réciproque

Supposons que le théorème de Brouwer soit faux ; Il existe alors une fonction $f\colon\ B_1(0) \to B_1(0)$ continue et n'ayant aucun point fixe. Considérons l'application continue $g\colon\ B_1(0) \to B_1(0)$ telle que $g(x)$ soit le point d'intersection de la demi-droite joignant $f(x)$ à x

avec $\partial B_1(0)$; plus précisément, $g(x) = f(x) + t(x)(x - f(x))$ où $t(x)$ est la racine positive de l'équation du second degré :

$$t^2\|x - f(x)\|^2 + 2t\langle f(x), x - f(x)\rangle + \|f(x)\|^2 = 1.$$

Par définition, la fonction g conserve la frontière $\partial B_1(0)$.

2- Théorème de Hartman-Stampacchia

Soit C un convexe, compact de $\mathbb{R}^n$ et $T\colon\ C \to \mathbb{R}^n$ une application continue. Alors, il existe au moins $u \in C$ tel que

$$(\mathcal{H}) \quad \langle Tu, v - u\rangle \geq 0,\ \forall\, v \in C.$$

(a) La démonstration directe utilise le lemme de Stampacchia 6.9

Soit $T\colon\ C \to \mathbb{R}^n$ une application continue, et f l'application définie par $f(x) = x - Pr_C(Tx)$. Cette application continue, admet, en vertu du théorème de Brouwer, un point fixe $u_0 \in C$, donc vérifiant $u_0 = u_0 - Pr_C(Tu_0) = Pr_C(u_0 - Tu_0)$. D'après la deuxième partie du lemme 6.9, $\langle u_0 - Tu_0 - u_0, v - u_0\rangle \leq 0,\ \forall\, v \in C$ et donc $\langle Tu_0, v - u_0\rangle \geq 0,\ \forall\, v \in C$.

(b) Démonstration de la réciproque

Supposons satisfaite l'hypothèse $(\mathcal{H})$, considérons une application continue f d'un convexe, compact C vers lui-même puis posons $Tu = u - f(u)$. Alors, en faisant $v = u - Tu$ dans $(\mathcal{H})$, on obtient

$$-\|Tu\|^2 \geq 0 \ \Leftrightarrow\ f(u) = u.$$

L'application f admet donc au moins un point fixe, d'où le théorème de Brouwer.

3- Théorème de Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz

Soit $x_1, ..., x_N$ N points de $\mathbb{R}^n$ et $F_1, ..., F_N$ N fermés tels que pour tout sous-groupe d'indices $\{i_1, ..., i_k\} \subset \mathbb{N}^k$, on a :

$$conv\{x_{i_1}, ..., x_{i_k}\} \subset F_{i_1} \cup ... \cup F_{i_k}.$$

Alors $\cap_{i=1}^{i=N} F_i \neq \emptyset$.

(a) Démonstration directe

Posons $C = conv\{x_{i_1}, ..., x_{i_N}\}$ et supposons, par l'absurde, que $\cap_{i=1}^{i=N} F_i = \emptyset$; comme $C \subset F_1 \cup ... \cup F_N$, alors $\forall\, x \in C,\ \exists\, i_0 \in \{1, ..., N\}:\ x \notin F_{i_0}$. Considérons les fonctions continues définies sur C par $\phi_j(x) = d(x, F_i)$ pour $i \in [1, N]$; alors $\sum_{i=1}^{i=N} \phi_i(x) > 0$. Soit donc la fonction définie, $\forall\, x \in C$, par

$$\phi(x) = \frac{\sum_{i=1}^{i=N} \phi_i(x) x_i}{\sum_{i=1}^{i=N} \phi_i(x)}.$$

Il est clair que ϕ est une application continue du compact, convexe C dans lui-même. D'après le théorème de Brouwer, il existe $x_0 \in C,\ \phi(x_0) = x_0$. Comme par hypothèse, $C \subset \cup_{i=1}^{i=N} F_i$, alors il existe un indice $j \in [1, N]$ tel que $x_0 \in F_j$ et donc, par définition, $\phi_j(x_0) = 0$. De plus

$$\phi(x_0) = x_0 = \frac{\sum_{i=1}^{i=N} \phi_i(x_0) x_i}{\sum_{i=1}^{i=N} \phi_i(x_0)}.$$

Ainsi $x_0 \in Conv\{x_i,\ i \neq j\} \subset \cap\{F_i,\ i \neq j\}$ et il existe alors k tel que $x_0 \in F_k$. Par suite $\phi_k(x_0) = 0$ et donc $x_0 \in Conv\{x_i,\ i \neq j\}$. En répétant le même argument N fois, on arrive à montrer que $x_0 \in \cap_{i=1}^{i=N} F_i$; d'où la contradiction avec l'hypothèse.

(b) Démonstration de la réciproque

Soit C un compact, convexe non vide $\mathbb{R}^n$ et f une application continue de C dans C ; posons $g(x) = f(x) - x$. Si $C = \{x_1\}$, alors $f(x_1) = x_1$; d'où le théorème de Brouwer. Si $\{x_1, x_2\} \subset C$, alors considérons, pour $N = 2$, les fermés $F_1 = C$ et $F_2 = g^{-1}(0)$. Alors $Conv\{x_1, x_2\} \subset C \subset F_1 \cup F_2$. D'après le théorème de Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz, $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$ et il existe donc $x_0 \in C$ tel que $f(x_0) = x_0$; le théorème de Brouwer est prouvé.

4- Théorème du mini-max de Ky-Fan

Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un compact, convexe et $f : C^2 \to \mathbb{R}$ une application telle que :

(a) l'application $y \mapsto f(., y)$ est s.c.i,

(b) l'application $x \mapsto f(x, .)$ est continue et quasiconcave

(i.e $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\varphi^{-1}(]\lambda, +\infty[)$ est convexe)

Alors $\min_{y\in C}\max_{x\in C} f(x,y) \leq \max_{x\in C} f(x,x)$.

(a) Démonstration

Montrons dans un premier temps que le théorème de Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz entraine le théorème de Ky-Fan. Considérons une fonction f vérifiant les hypothèses du théorème du mini-max de Ky-Fan puis posons $M = \max_{x\in C} f(x,x)$. Soit la famille de fermés définis, pour tout $x \in C$, par

$$F(x) = \{y \in C,\ f(x,y) \leq M\}.$$

Si montre que $\cap_{x\in C}F(x) \neq \emptyset$, on obtient l'existence d'un élément y_0 appartenant à $\cap_{x\in C}F(x)$ et vérifiant $\max_{x\in C} f(x,y_0) \leq M$, le théorème sera démontré. Afin d'utiliser le théorème de Knaster *et al*, considérons une famille $\{x_1,...,x_N\}$ d'éléments de C puis vérifions que l'enveloppe convexe de $\{x_1,...,x_N\}$ est inclus dans $\cup_{i=1}^{i=N}F_i$. En effet, dans le cas contraire, il existerait $(\lambda_1,...,\lambda_N) \in [0,1]^N$ tel que

$$\sum_{i=1}^{i=N}\lambda_i = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{i=N}\lambda_i x_i \notin \cup_{i=1}^{i=N}F(x_i).$$

Alors $f(x_i, \sum_{i=1}^{i=N}\lambda_i x_i) > M,\ \forall\, i \in [1,N]$. De plus, f étant quasi-concave par rapport à la première variable, on a $f(\sum_{i=1}^{i=N}\lambda_i x_i, \sum_{i=1}^{i=N}\lambda_i x_i) > M$, contredisant la définition de M.

(b) Démonstration de la réciproque

Montrons que le théorème de Ky-Fan entraîne celui de Brouwer. Soit $f\colon\ C \to C$ une application continue du compact, convexe C dans lui-même. La fonction ϕ définie par $\phi(x,y) = (f(y)-y, x-y)$ vérifie les hypothèses du théorème de Ky-Fan car elle est continue en x et affine en y. On a donc

$$\min_{y\in C}\max_{x\in C}\phi(x,y) \leq \max_{x\in C}\phi(x,x) = 0.$$

Par conséquent, il existe $y_0 \in C$ tel que $\langle f(y_0)-y_0, x-y_0\rangle \leq 0,\ \forall\, x \in C$. Comme f envoie C dans C, on peut prendre en particulier $x = f(y_0)$ et obtenir $\|f(y_0)-y_0\|^2 \leq 0$, soit $f(y_0) = y_0$, d'où le théorème de Brouwer.

Chapitre 2

LE DEGRÉ TOPOLOGIQUE EN DIMENSION INFINIE

2.1 Introduction

2.1.1 Rappels

Une différence essentielle entre les espaces de dimensions finie et infinie est donnée par la proposition suivante :

Proposition 2.1 *Soit B la boule unité ouverte d'un espace normé X. Alors :*
$dimX < +\infty \Leftrightarrow$ toute application continue $f : \overline{B} \to \overline{B}$ admet au moins un point fixe.

Démonstration
Une implication étant donnée par le théorème de Brouwer, la réciproque est fournie par le contre-exemple suivant dans l'espace des suites numériques $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ muni de la norme du sup $\|x\| = \sup_n |x_n|$. Considérons l'ensemble $X = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \lim_{n\to+\infty} x_n = 0\}$ et l'application $f : X \to X$ définie par :

$$(f(x))_1 = \frac{1 + \|x\|}{2} \text{ et } (f(x))_n = x_{n-1},\ n > 1.$$

Alors f n'a pas de point fixe car sinon $\forall n \geq 1, x_{n+1} = x_n = ... = x_1 = \frac{1+\|x\|}{2}$, ce qui est absurde avec $\frac{1+\|x\|}{2} \notin X$.

Remarque 2.1 *Un autre contre-exemple est fourni par* $X = l_2 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n^2 < \infty\}$ *l'espace des suites de carrés sommables muni de la norme* $\|x\| = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$. *Si* B *est la boule unité fermée dans* X *et* $f\colon B \longrightarrow B$ *l'application définie par* $f(x) = \left(\sqrt{1-\|x\|^2}, x_1, x_2, \cdots\right)$. *L'application* f *est continue mais n'a pas de point fixe ; dans le cas contraire, il existerait* $x \in X$ *tel que* $x = f(x)$ *; alors* $\|x\| = \|f(x)\| = 1$; *d'où* $x_1 = \sqrt{1-\|x\|^2} = 0$ *et* $x_2 = x_1 = \cdots = 0$ *ce qui contredit le fait que* $\|x\| = 1$.

Une autre caractérisation des espaces vetoriels normés de dimensions finies est fournie par le théorème de Riesz [4] :

Proposition 2.2 *Soit* X *un espace vectoriel normé. On a les équivalences :*

$$\begin{aligned}
dim X < +\infty \quad &\Leftrightarrow \quad \text{la boule fermée } \overline{B}(0,1) \text{ compacte} \\
&\Leftrightarrow \quad \text{la frontière } \partial B(0,1) \text{ compacte} \\
&\Leftrightarrow \quad \text{de toute suite de } \overline{B}(0,1), \\
&\qquad\ \text{on peut extraire une sous-suite convergente.}
\end{aligned}$$

A titre d'exemple, dans l'espace des fonctions continues $C([0,1])$ muni de la norme du sup $\|x\|_0 = \sup_{0\leq t\leq 1} |x(t)|$, la suite $(t^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée mais n'admet aucune sous-suite convergente.

On peut donc remarquer que, pour introduire une notion de degré en dimension infinie, la continuité de f ne suffit plus (et même d'ailleurs une régularité supérieure C^1 ou autre).

D'autre part, étant donné un ouvert borné Ω, l'ensemble image $f(\overline{\Omega})$ n'est pas en général compact ; il le sera si f est "complètement continue" ; de plus, $f(\partial\Omega)$ est un ensemble fermé si f est application fermée, ce qui est vrai si elle est "une perturbation compacte." C'est pourquoi, nous commençons d'abord par introduire ces deux notions.

2.1.2 Application compacte

Soit X et Y deux espaces de Banach et $\Omega \subset X$ un ouvert.

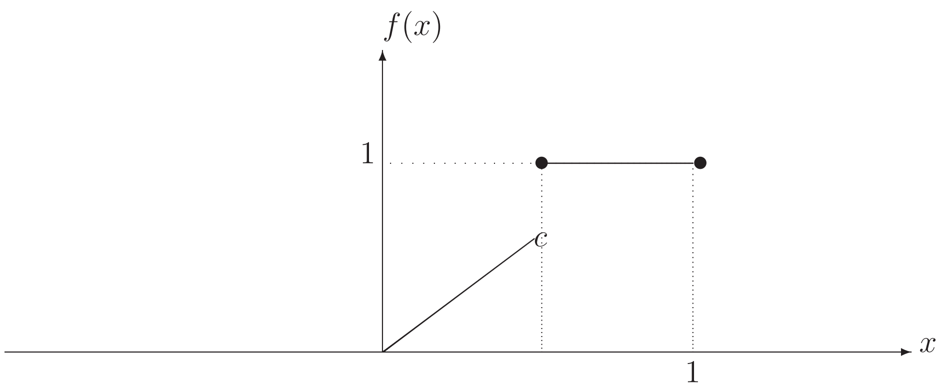


FIG. 2.1 –

Définition 2.1 *Une application continue $f : \Omega \to Y$ est dite compacte si $f(\overline{\Omega})$ est compacte. Elle est dite complètement continue si l'image de tout borné est relativement compacte.*

Remarque 2.2 **(a)** *Il est clair que toute application compacte est complètement continue ; la réciproque est vraie si Ω est borné.*

(b) *De manière générale, une application compacte n'est pas nécessairement continue ; un exemple est fournie par la fonction représentée sur la figure 2.1.*

(c) *Toute application linéaire compacte est continue ; la réciproque est vraie si f est de rang fini. (le rang est la dimension de l'espace image).*

(d) *Si X est de dimension finie, tout endomorphisme linéaire sur X est continue et compact.*

Le résultat suivant découle de la caractérisation des espaces relativement compacts :

Proposition 2.3 *Une application $f : X \to Y$ est compacte si et seulement si de toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X, on peut extraire une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $(f(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans Y.*

Le résultat qui suit fournit une caractérisation des applications compactes [4] (voir aussi lemme 5.3).

Proposition 2.4 *Soit $K \subset X$ un fermé, borné et $f : K \to X$ une application. Alors, f est compacte si et seulement si f est limite uniforme d'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications compactes de rangs finis.*

Définition 2.2 *Une application de la forme $f = I - K$ où I est l'application identité et K une application compacte est dite perturbation compacte de l'identité (ou application de Leray-Schauder).*

Nous allons voir que les perturbations compactes de l'identité possèdent des propriétés topologiques très intéressantes ; mais d'abord introduisons la notion d'application propre.

2.1.3 Application propre

Soit X et Y deux espaces vectoriels topologiques localement compactes et $f : X \to Y$ est une application continue. On a :

Définition 2.3 *f est dite application propre si l'image réciproque de tout compact est un compact.*

Remarque 2.3 *Si X est compact, toute application continue est propre.*
Si X et Y sont de dimensions finies, on a la

Proposition 2.5 (Caractérisation en dimension finie) *Une application est propre si et seulement si l'image réciproque d'un borné est un borné.*

Démonstration
(i) Soit B un borné de Y et supposons f propre ; alors l'image réciproque $f^{-1}(\overline{B})$ est compact, donc borné.
(ii) Réciproquement, si la condition est satisfaite et si K est un compact de Y, alors $f^{-1}(K)$ est fermé, borné, donc compact dans X.

Le résultat qui suit sera particulièrement utile pour la suite :

Proposition 2.6 (condition nécessaire) *Toute application propre est fermée (en particulier $f(\partial\Omega)$ fermé).*

Démonstration

Soit $A \subset X$ fermé et $B = f(A)$. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B$ une suite convergente vers y; montrons que $y \in B$. Soit $x_n \in A$ tel que $y_n = f(x_n), \forall n \in \mathbb{N}$; cette suite admet une sous-suite convergente car, f étant propre, l'ensemble $f^{-1}(\overline{\{y_n, n \in \mathbb{N}\}})$ est compact. Soit $x = \lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k}$; alors f étant continue, $f(x) = \lim\limits_{k\to+\infty} y_{n_k} = y$; donc $y \in B$.
Après cette condition nécessaire, donnons deux conditions suffisantes :

Proposition 2.7 (condition suffisante) *Soit K un ensemble fermé, borné de X. Alors toute perturbation compacte de l'identité est une application propre.*

Démonstration

En supposant K compact, le résultat se déduit uniquement de la continuité de F ; dans le cas général, on pourra utiliser la notion de mesure de compacité de Kuratowski, qu'on omet dans ce cours.

Proposition 2.8 (condition suffisante) *Soit $F : X \to X$ une perturbation compacte de l'identité, coercive ($\lim\limits_{\|x\|\to+\infty} \|F(x)\| = +\infty$). Alors F est une application propre.*

Démonstration

Soit K un compact de X et $L = F^{-1}(K)$. Si $x_n \in L$ est une suite bornée, alors $F(x_n) \in K$. D'après la compacité de K et la coercivité de F, $(F(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente. L'application $F = I - G$ étant une perturbation compacte, $G(x_n)$ admet aussi une sous-suite convergente. Or, $x_n = G(x_n)+F(x_n)$; donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet enfin une sous-suite convergente.

2.2 Définition du degré topologique en dimension infinie

2.2.1 Introduction

Soit X un espace de Banach, $\Omega \subset X$ un ouvert borné et $f : \overline{\Omega} \to X$ une perturbation compacte de l'identité ($f = I - K$).

Soit $y_0 \in X \backslash f(\partial\Omega)$ où $X \backslash f(\partial\Omega)$ est, en vertu des propositions 2.6 et 2.7, un ouvert ; posons $\delta = dist(y_0, f(\partial\Omega)) > 0$. On se propose de définir $deg(f, \Omega, y_0)$. Commençons par :

Lemme 2.1 (Le degré en dimension inférieure) *Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, borné, $g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^m$ une application continue et $f = Id|_{\mathbb{R}^n} - g$ une perturbation continue de l'identité. Soit $y_0 \notin f(\partial\Omega)$ et supposons $m < n$; alors*

$$deg(f, \Omega, y_0) = deg(f|_{\overline{\Omega}\cap\mathbb{R}^m}, \Omega \cap \mathbb{R}^m, y_0)$$

(l'espace $\mathbb{R}^m$ est identifié à $\{x \in \mathbb{R}^n : \ x_{m+1} = ... = x_n = 0\}$.)

Démonstration

Comme $\partial_{\mathbb{R}^m} \subset \partial\Omega \cap \mathbb{R}^m \subset \partial\Omega$ et $y_0 \notin f(\partial\Omega)$, les deux degrés sont bien définis. Pour montrer l'égalité, on peut toujours, grâce au lemme de Sard raisonner dans le cas régulier et supposer $f \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. Posons $f_m = f_{\bar{\Omega}\cap\mathbb{R}^m}$, alors $f_m \in C^1(\bar{\Omega} \cap \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$. De plus, en écrivant

$$f(x) = (x_1, \cdots, x_m, x_{m+1}, \cdots, x_n) - (g_1(x), \cdots, g_m(x), 0, \cdots, 0),$$

on a la formule

$$\left(\begin{array}{c|c} f'_m(x) & -(\partial_j g_i(x)) \quad (m+1 \leq i \leq n; \ 1 \leq j \leq m) \\ \hline 0_{m,n-m} & I_{n-m} \end{array}\right)$$

En développpant par rapport aux $(n - m)$ dernières colonnes, on obtient $J_f(x) = J_{f_m}(x)$ et

$$\begin{aligned} \deg(f, \Omega, y_0) &= \textstyle\sum_{x \in f^{-1}(y_0)\cap\Omega} Sgn\, J_f(x) \\ &= \textstyle\sum_{x \in f_m^{-1}(y_0)\cap\Omega\cap\mathbb{R}^m} Sgn\, J_{f_m}(x) \\ &= \deg(f_m, \Omega \cap \mathbb{R}^m, y_0). \end{aligned}$$

2.2.2 Définition du degré pour les perturbations compactes de l'identité, de rang fini

Les notations étant celles de l'introduction, soit $K_\varepsilon : \overline{\Omega} \to X$ une application continue, compacte à valeurs dans un espace de dimension finie N_ε contenant y_0 et telle que $\sup_{x\in\Omega} \|K_\varepsilon(x) - K(x)\| < \frac{\delta}{2}$. Le choix de K_ε est justifié par la proposition 2.4. Alors, on a

Proposition 2.9 *Le degré de Brouwer* $deg(I - K_\varepsilon|_{\overline{\Omega}\cap N_\varepsilon}, N_\varepsilon \cap \Omega, y_0)$ *est bien défini. On posera* $f_\varepsilon = I - K_\varepsilon$.

Démonstration

(a) $y_0 \notin (I - K_\varepsilon)(\partial\Omega)$. Pour tout $x \in \partial\Omega$, on a

$$\begin{aligned} \|y_0 - (I - K_\varepsilon)(x)\|_X &= \|y_0 - f(x) + f(x) - f_\varepsilon(x)\|_X \\ &\geq |\|y_0 - f(x)\|_X - \|f(x) - f_\varepsilon(x)\|_X| \\ &= \|y_0 - f(x)\|_X - \|f(x) - f_\varepsilon(x)\|_X \geq \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2} > 0. \end{aligned}$$

(b) Remarquons que les solutions $x \in \overline{\Omega}$ de l'équation $x - K_\varepsilon(x) = y_0$ sont dans $\Omega \cap N_\varepsilon$; de plus, si $\partial(\Omega \cap N_\varepsilon)$ désigne la frontière de $\Omega \cap N_\varepsilon$ dans l'espace N_ε, la trace sur N_ε de $\partial\Omega$, alors $\partial(\Omega \cap N_\varepsilon) \subset \partial\Omega \cap N_\varepsilon$ et donc le degré est bien défini.

Définition 2.4 (K_ε de rang fini et Ω en dimension infini). *On pose*

$$deg(I - K_\varepsilon, \Omega, y_0) = deg(I - K_\varepsilon|_{\overline{\Omega}\cap N_\varepsilon}, N_\varepsilon \cap \Omega, y_0).$$

Remarque 2.4 *Cette définition ne dépend pas du choix de l'espace N_ε.*
En effet, soit N_ε et M_ε deux espaces vectoriels de dimensions finies contenant y_0 et $K_\varepsilon(\overline{\Omega})$. Alors $N_\varepsilon \cap M_\varepsilon$ est un sous-espace de N_ε et M_ε contenant y_0. Appliquons alors le lemme 2.1 avec $\mathbb{R}^n := N_\varepsilon$, $\Omega := N_\varepsilon \cap \Omega$ et $\mathbb{R}^m := N_\varepsilon \cap M_\varepsilon$; on obtient les égalités

$$\begin{aligned} deg(I - K_\varepsilon|_{\overline{\Omega}\cap N_\varepsilon}, N_\varepsilon \cap \Omega, y_0) &= deg(I - K_\varepsilon|_{\overline{\Omega}\cap N_\varepsilon \cap M_\varepsilon}, N_\varepsilon \cap M_\varepsilon \cap \Omega, y_0) \\ &= deg(I - K_\varepsilon|_{\overline{\Omega}\cap M_\varepsilon}, M_\varepsilon \cap \Omega, y_0). \end{aligned}$$

2.2.3 Degré topologique de Leray-Schauder

Soit K_ε une approximation de K (donnée par la proposition 2.4). Alors

Définition 2.5 $deg(I - K, \Omega, y_0) = deg(I - K_\varepsilon, \Omega, y_0)$.

Proposition 2.10 **(a)** *Cette définition ne dépend pas du choix de K_ε.*

(b) *Si $dimX < +\infty$, les degrés de Brouwer et Schauder coïncident.*

Démonstration

(a) Soit f_ε et $f_{\varepsilon'}$, deux approximations de f et $N_\varepsilon, N_{\varepsilon'}$ les espaces images correspondants. Soit N un sous-espace de dimension finie contenant à la fois y_0, N_ε et $N_{\varepsilon'}$. Grâce à la définition 2.5, on a $deg(I - K_\varepsilon, \Omega, y_0) = deg(I - K_\varepsilon|_{\overline{\Omega}\cap N}, \Omega \cap N, y_0)$ et $deg(I - K_{\varepsilon'}, \Omega, y_0) = deg(I - K_{\varepsilon'}|_{\overline{\Omega}\cap N}, \Omega \cap N, y_0)$. Maintenant, si on déforme homotopiquement $(I - K_\varepsilon)$ et $I - K_{\varepsilon'})$, on constate que les degrés de Brouwer sur $\overline{\Omega} \cap N$ sont bien définis et égaux.

(b) Trivial en considérant $N_\varepsilon = X$ avec $dimX < +\infty$ et $f_\varepsilon = f$.

2.3 Propriétés du degré de Leray-Schauder

Les propriétés essentielles du degré en dimension finie restent valables en dimension infinie et se démontrent par approximation. En effet, il existe toujours une suite d'applications compactes convergeant uniformément vers K et telle que, $\forall n \in \mathbb{N},\ K_n(\overline{\Omega}) \subset N_n$ avec $dim(N_n) < +\infty$. Et, d'après la définition du degré en dimension infinie, on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ deg(I - K, \Omega, y_0) = deg(I - K_n, \Omega, y_0) = deg(I - K_n|_{\overline{\Omega}\cap N_n}, \Omega \cap K_n, y_0).$$

Ceci montre, en particulier, que le degré de Schauder est aussi un entier relatif. De plus, si $deg(I - K, \Omega, y_0) \neq 0$, alors il existe $x_n \in \Omega \cap N_n$ tel que $(I - K_n)(x_n) = y_0$. Mais, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \|K_n(x_n) - K(x_n)\|_X = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \|(I - K)(x_n) - y_0\|_X = 0$. Enfin, K étant compact, il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $K(x_{n_k})$ soit convergente ; la suite (x_{n_k}) converge aussi vers une limite $x_0 \in \Omega$ et l'on a, par passage à la limite, l'égalité $x_0 - K(x_0) = y_0$. Ceci prouve la propriété de non nullité du degré ; les autres propriétés se montrent de façons similaires.

2.4 Théorèmes de point fixe et Applications

2.4.1 Théorème de Schauder, 1930

Théorème 2.1 *Soit C un sous-ensemble convexe, fermé, borné, non vide d'un espace de Banach X et $K : C \to C$ une application compacte. Alors K admet au moins un point fixe.*

Première Démonstration

(a) $1^{\text{ère}}$ étape : On suppose $C = B(0,1)$ la boule unité.

S'il existe $x_0 \in \partial C$ tel que $K(x_0) = x_0$, il n'y a rien à démontrer. Sinon, $\forall\, t \in [0,1]$, le degré $deg(K_t, C, 0)$, où $K_t = I - tK$, est bien défini. En effet, s'il existe $x \in \partial C,\ tK(x) = x$, alors $R = \|x\| = t\|K(x)\| \leq Rt$ car $K(C) \subset C$ et donc $t = 1$, ce qui conduit à une contradiction avec $\|K(x)\| = R = \|x\|$. Le degré est donc bien défini et vaut, par homotopie, $deg(K, C, 0) = 1$, d'où le résultat.

(b) $2^{\text{ème}}$ étape : C est un convexe, fermé, borné, non vide.

On considère une rétraction continue $R :\ X \to C$ et B une boule contenant C. Soit le diagramme $B \to^R C \to^K B$. L'application $(K \circ R)$ est compacte car K est compacte et R bornée. D'après la première étape, l'application $(K \circ R)$ admet un point fixe $x_0 \in B$, $x_0 = (K \circ R)(x_0)$. Or, $R(x_0) \in C$ et, par hypothèse, $K(C) \subset C$; alors $K(R(x_0)) \in C$ et donc $x_0 \in C$.

Remarque 2.5 *Le théorème reste vrai si C est homéomorphe à un convexe, fermé.*

Deuxième Démonstration

Le théorème du point fixe de Schauder peut se démontrer à partir du théorème de Brouwer en utilisant le lemme d'approximation des applications compactes (Proposition 2.4). Soit, en effet K_n une suite d'opérateurs de rangs finis approchant K et N_n le sous-espace engendré par l'image de K_n. Or, l'ensemble C est convexe et l'image $K_n(C)$ est contenu dans l'enveloppe convexe de $K(C)$; alors K_n envoie C dans $C \cap N_n$. Par conséquent, K_n envoie le fermé, borné $C \cap N_n$ dans lui-même. D'après le théorème de Brouwer, l'application K_n possède au moins un point fixe

x_n dans $C \cap N_n$. Lorsque n tend vers ∞, la suite $K_n(x_n)$ possède, par compacité, une sous-suite encore notée $K_n(x_n)$, uniformément convergente. Alors $x_n = K_n(x_n)$ converge vers une limite x_0 lorsque $n \to \infty$. Or, $\|x_n - K(x_n)\| = \|K_n(x_n) - K(x_n)\|$; d'où $\lim_{n\to\infty} K_n(x_n) = K(x_0)$ et finalement $K(x_0) = x_0$.

Corollaire 2.1 *Soit C un sous-ensemble convexe, compact, non vide d'un espace de Banach X et $f : C \to C$ une application continue. Alors f admet au moins un point fixe.*

Corollaire 2.2 *Soit C un sous-ensemble convexe, fermé, non vide, C non nécessairement borné, d'un espace de Banach X et $f : C \to C$ une application continue tel que $f(C)$ est inclus dans un compact de C. Alors f admet au moins un point fixe.*

Démonstration
Il existe un sous-ensemble compact $A \subset C$ tel que $f(C) \subset A \subset C$; alors, en posant $A_0 = \overline{Conv(A)}$, on obtient un point fixe dans A_0, donc, dans C (A_0 est convexe, compact et $f(A_0) \subset A \subset A_0 \subset C$).

2.4.2 Alternative non linéaire de Leray-Schauder

Théorème 2.2 *Soit Ω un un ouvert, borné d'un espace de Banach X et $f : \Omega \to X$ une application compacte. Alors*
ou (i) f admet un point fixe dans Ω.
ou (ii) Il existe $x \in \partial\Omega$, $\exists\, t \in [0,1] : x = tf(x)$.

Démonstration
Si la condition (ii) n'est pas satisfaite, l'assertion suivante a lieu :

$$\forall\, x \in \partial\Omega,\ \forall\, t \in [0,1] : (I - tf)(x) \neq 0;$$

le degré $deg(I - tf, \Omega, 0)$ est donc bien défini, et vaut, par homotopie, $deg(I, \Omega, 0) = 1$. Pour $t = 1$, f admet donc un point fixe dans Ω.

Corollaire 2.3 *Soit X un espace de Banach et $K : X \to X$ une application compacte. Admettons l'hypothèse :*

$$(H) \quad \exists\, r > 0 : \forall\, t \in [0,1] \quad (tK(x) = x \Rightarrow x \in B(0,r)).$$

Alors K admet au moins un point fixe dans $B = B(0, r)$.

Remarque 2.6 ***(a)*** *(H) est une hypothèse d'estimation à priori.*
(b) *Le corollaire est équivalent au théorème de Schauder.*
(c) *Ce corollaire possède aussi la version suivante :*

2.4.3 Théorème de Schaefer, 1955

Théorème 2.3 *Soit X un espace de Banach et $K : X \to X$ une application compacte. On a alors l'alternative :*
Ou bien, l'équation $tK(x) = x$ admet une solution pour tout $t \in [0, 1]$.
Ou bien, l'ensemble $S = \{x \in X : \exists\, t \in [0, 1], tK(x) = x\}$ est non borné.

2.4.4 Théorème de Rothe, 1937

Corollaire 2.4 *Soit B une boule ouverte d'un espace de Banach X et $K : X \to X$ une application compacte tel que $K(\partial\Omega) \subset \overline{B}$. Alors K admet un point fixe dans $\overline{B}$.*

2.4.5 Théorème de Borzuk, 1933

Théorème 2.4 *Soit X un espace de Banach et $\Omega \subseteq X$ un ouvert borné contenant l'origine et symétrique par rapport à celui-ci. On considère une application compacte K définie sur $\overline{\Omega}$ et impaire. Alors, si $0 \notin (I - K)(\partial\Omega)$, le degré $deg(I - K, \Omega, 0)$ est impair.*

Démonstration
Pour $\varepsilon > 0$, approchons K par une famille d'applications K_ε de rangs finis N_ε. Alors l'application $L_\varepsilon(x) = \frac{K_\varepsilon(x) - K_\varepsilon(-x)}{2}$ est encore une approximation de K; comme elle est impaire, le degré $deg(I - L_\varepsilon, \Omega \cap N_\varepsilon, 0)$ est, d'après le théorème de Borzuk en dimension finie, un entier impair ; le théorème se déduit alors de la définition du degré en dimension infinie.

Corollaire 2.5 *Soit B une boule ouverte dans un espace de Banach X et K une application compacte et impaire sur ∂B. Alors $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \exists\, x \in \overline{B},\; K(x) = \lambda x$. En particulier, K admet un zéro et un point fixe dans $\overline{B}$.*

2.4.6 Théorème des applications ouvertes

Théorème 2.5 Ω *étant un ouvert borné de* X*, soit* $F : \Omega \to X$ *une perturbation compacte de l'identité, injective. Alors, l'application* $F : \Omega \to F(\Omega)$ *est un homéomorphisme.*

Démonstration
L'application réciproque $F^{-1} : F(\Omega) \to \Omega$ est aussi une perturbation compacte de l'identité (exercice 1). Alors $F(\Omega) = (F^{-1})^{-1}(\Omega) = (I - L)^{-1}(\Omega)$; c'est donc un ouvert de X (L est continue).

2.5 Exercices résolus

Exercice 1

Soit $\Omega \subset X$ borné et $F = I - K : \Omega \to F(\overline{\Omega})$ une perturbation compacte de l'identité, bijective. Montrer que l'application réciproque F^{-1} est aussi une perturbation compacte.

Corrigé
• Remarquons d'abord que $F^{-1} = I + (K \circ F^{-1})$ car $(I + K \circ F^{-1}) \circ F = F + K = I$.
• Montrons donc que $(K \circ F^{-1})$ est compact :
Soit $B \subset F(\overline{\Omega})$ un ensemble borné ; alors $F^{-1}(B)$ est aussi borné car inclus dans $\overline{\Omega}$ borné ; comme l'application K est compacte, l'ensemble $(K \circ F^{-1})(B)$ est relativement compact.
• Montrons que $(K \circ F^{-1})$ est continue.
Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $F(\overline{\Omega})$ convergente vers une limite $y \in F(\overline{\Omega})$ (F est fermée). Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{\Omega}$ tel que $y_n = F(x_n)$ et $x \in \overline{\Omega}$ tel que $y = F(x)$. Comme F^{-1} est compact, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compacte, d'où l'existence d'une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente vers x_0 dans $\overline{\Omega}$; mais F étant continue, $\lim\limits_{k\to+\infty} F(x_{n_k}) = F(x_0)$; donc $x_0 = x$ car F est injective.

Exercice 2

On considère l'espace $X = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme du sup et $K : X \to X$ l'opérateur intégral défini par $(Ku)(x) = \int_0^1 G(x,y)f(y,u(y))dy$ où $G : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ est continue et $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, bornée.

(1) Montrer que K est complètement continue.

(2) En déduire que l'équation $Ku = u$ admet au moins une solution $u \in X$.

Corrigé

(1) (a) K est continue :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, telle que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u \in X$. Alors $\lim\limits_{n\to\infty} \sup_{y\in[0,1]} |u_n(y) - u(y)| = 0$ et donc, par continuité de f, on a que

$$\forall x \in [0,1], |Ku_n(x) - Ku(x)| \leq \sup_{(x,y)\in[0,1]^2} |G(x,y)| \sup_{y\in[0,1]} |f(y,u_n(y)) - f(y,u(y))|$$

où le second membre tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

(1)(b) Soit B un borné de X et $B' = K(B)$. Montrons, en utilisant le théorème d'Ascoli-Arzela, que B' est relativement compact :

(i) B' est borné car $\forall\, u' \in B'$ et $\forall\, x \in [0,1], \exists\, u \in B : u'(x) = (Ku)(x)$ avec

$$|u'(x)| \leq \sup_{(x,y)\in[0,1]^2} |G(x,y)| \sup_{(y,u)\in[0,1]\times B([0,1])} |f(y,u)|.$$

(ii) B' est équicontinu car $\forall\,(x_1,x_2) \in [0,1]^2$, et $\forall\, u \in B$, on a :

$$\begin{aligned} |Ku(x_1) - Ku(x_2)| &\leq \int_0^1 |f(y,u(y))||G(x_1,y) - G(x_2,y)|\, dy \\ &\leq \sup_{(y,u)\in[0,1]\times B([0,1])} |f(y,u)| \int_0^1 |G(x_1,y) - G(x_2,y)|dy. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$; par continuité de $G(x,.)$, il existe $\delta > 0$:

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2| \leq \delta \quad &\Rightarrow \quad |G(x_1,y) - G(x_2,y)| < \frac{\varepsilon}{\sup_{(y,u)\in[0,1]\times B([0,1])} |f(y,u)|}, \ \forall\, y \in [0,1] \\ &\Rightarrow \quad |Ku(x_1) - Ku(x_2)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

(2) Considérons dans X la boule de rayon R, avec

$$R = \sup_{(x,y)\in[0,1]^2} |G(x,y)| \sup_{(x,y)\in[0,1]\times\mathbb{R}} |f(x,y)|.$$

Alors, K est une application compacte qui envoie B dans B (et même X dans B) ; elle admet donc, en vertu du théorème de point fixe de Schauder, au moins un point fixe dans B.

Exercice 3

Soit B une boule ouverte dans un espace de Banach X et $K : \overline{B} \to X$ une application compacte vérifiant la condition d'Altmann suivante, 1958 :

$$\|x - Kx\|^2 \geq \|Kx\|^2 - \|x\|^2, \ \forall x \in \partial B.$$

Montrer que K admet un point fixe dans $\overline{B}$.

Corrigé

Par l'absurde, supposons l'existence d'un couple $(t, x) \in]0, 1] \times \partial B$ tel que $x = tK(x)$; on peut supposer $t \neq 1$ car autrement le résultat est prouvé. On a alors

$$x - K(x) = (t-1)K(x) \text{ et } \|Kx\|^2 - \|x\|^2 = (1-t^2)\|Kx\|^2.$$

La condition d'Altmann donne alors $(1-t)^2 \geq 1 - t^2 \Leftrightarrow t \geq 1$, ce qui est absurde. Par conséquent, $\forall\, t \in [0, 1]$ et $\forall\, x \in \partial B, \ tK(x) \neq x$; le degré $deg(I - tK, B, 0)$ est bien défini et vaut par homotopie 1 ; l'équation $(I - K)(x) = 0$ admet donc au moins une solution dans B, sinon sur la frontière ∂B, d'où le résultat.

Remarque 2.7 **(1)** *L'une des conditions suivantes implique la condition d'Altmann :*

$$\text{(a) } \|Kx\| \leq \|x\|, \forall\, x \in \partial\Omega. \quad \text{(b) } \|Kx\| \leq \|x - Kx\|, \forall\, x \in \partial\Omega.$$

(2) *La condition d'Altmann équivaut à* $\|x\|^2 \geq \langle x, Kx \rangle$ *si* X *est un espace de Hilbert.*

Exercice 4

Soit C un fermé, borné d'un espace de Banach X et $f : C \to X$ une application compacte tel que : $\exists\, x_0 \in \overset{\circ}{C}, \forall\, \lambda > 1, \forall\, x \in \partial C, \ f(x) - x_0 \neq \lambda(x - x_0)$.

Montrer que f admet un point fixe dans C.

Corrigé

On considère la déformation $f_t(x) = (x - x_0) - t(f(x) - x_0)$.

On peut supposer $f_t(x) \neq 0, \forall x \in \partial C$ car sinon le théorème est prouvé ; il est clair aussi que $f_0(x) \neq 0, \forall\, x \in \partial C$. De plus, par hypothèse, $\forall t \in]0,1[$ et $\forall\, x \in \partial C, \frac{1}{t}(x - x_0) \neq f(x) - x_0$. Le degré de f_t relativement à $\overset{\circ}{C}$ et à l'origine est bien défini et vaut, par homotopie

$$deg(I - f, \overset{\circ}{C}, 0) = deg(I - x_0, \overset{\circ}{C}, 0) = deg(I, \overset{\circ}{C}, 0) = 1;$$

l'application f admet donc au moins un point fixe dans $\overset{\circ}{C}$, ou sur ∂C, donc dans C.

Exercice 5 (Théorème de Peano)

Soit $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,\ (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et soit le rectangle $R = [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}(x_0, b)$. Pour $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ et posons $M = \sup_{(t,x)\in R} \|f(t, x)\|$ et $\alpha = \min(a, \frac{b}{M})$.

Montrer que le problème de Cauchy (Π) $\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$ admet au moins une solution $x \in \mathcal{C}^1([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \mathbb{R}^n) := \mathcal{C}^1(\overline{I}, \mathbb{R}^n)$ tel que $\|x\|_{\mathcal{C}^0} \leq b$.

Corrigé

Le problème donné équivaut à l'équation intégrale

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

Considérons dans l'espace de Banach $X = \mathcal{C}([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \mathbb{R}^n)$, muni de la norme du sup, la boule fermée $\overline{B} = \{x \in X\,;\, \|x - x_0\| \leq b\} = \overline{B}(x_0, b)$ et $F : \overline{B} \to X$ l'application définie par

$$(Fx)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds;$$

alors F est compacte et envoie $\overline{B}$ dans $\overline{B}$ car $\|Fx - x_0\| \leq M\alpha \leq b$, elle admet donc au moins un point fixe x dans $\overline{B}$ solution du problème (Π). Pour la compacité de F, on utilise l'exercice 2.

Remarque 2.8 *Le résultat reste vrai si $\mathbb{R}^n$ est remplacé par un espace de Banach X de dimension infinie et en supposant f application compacte (c'est le théorème* *de Peano généralisé). En effet, le sup sur R existe encore car $f(\overline{I} \times \overline{B}(x_0, b))$ est un ensemble relativement compact. De plus, $F(\overline{B})$ est équicontinu car si $\varepsilon > 0$ et $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$, on a :*

$$\|Fx - Fx_0\| \leq M|t - t_0| < \varepsilon, \forall\, x \in B \text{ et } t \in I \text{ tel que } |t - t_0| < \delta.$$

Enfin, $F(\overline{B})$ est relativement compact en raison encore de cette estimation.

Exercice 6

On considère l'équation intégrale non linéaire

$$x(t) = k_1 \int_a^b f(t, s, x(s))ds + \int_a^b g(t, s, x(s))ds + k_2 h(t) \colon = Tx \qquad (2.1)$$

et soit l'ensemble $R = [a, b]^2 \times [-r_0, r_0]$ avec $a < b$ et $r_0 > 0$.
On suppose les fonctions $f, g \in \mathcal{C}(R, \mathbb{R})$ et $h \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ avec la condition :

$$\exists\, \varrho > 0,\ p > 1 : |g(t, s, x)| \leq \varrho |x|^p,\ \forall (t, s, x) \in R.$$

Montrer que si k_1 et k_2 sont assez petits, l'équation (2.1) admet au moins une solution.

Corrigé

On considère l'espace $X = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ muni de la norme du sup et $B = \{x \in X : \|x\| \leq r\}$ où $r > 0$ est une constante à choisir. L'équation s'écrit alors $x \in X, x = Tx$. T est une application complètement continue sur X. En effet,

• T est continue d'après la continuité uniforme des fonctions données.

• Pour tout borné A de X, l'image $T(A)$ est relativement compacte car, $\forall\, x \in A$, on a $\|x\| \leq R_1$ ainsi que les estimations

(i)

$$\begin{aligned} \|Tx\| &\leq k_1(b-a)\sup\nolimits_{(t,s,x)\in[a,b]^2\times[-R_1,R_1]} |f(t, s, x(s))| \\ &\quad + \sup\nolimits_{(t,s,x)\in[a,b]^2\times[-R_1,R_1]} |g(t, s, x(s))| \\ &\quad + k_2\|h\|_\infty \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{array}{ll} |Tx(t_1) - Tx(t_2)| & \leq k_1 \int_a^b |f(t,s,x(s)) - f(t,s,x(s))|\, ds \\ & + \int_a^b |g(t,s,x(s)) - g(t,s,x(s))| \\ & + k_2 |h(t_1) - h(t_2)|. \end{array}$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe alors $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que si $|t_1 - t_2| \leq \delta$, $|f(t_1, s, x(s)) - f(t_2, s, x(s))| \leq \frac{\varepsilon}{3k_1(b-a)}$ car f est uniformément continue sur $[a,b]^2 \times [-R_1, R_1]$; il en va de même pour les deux autres termes.

Pour vérifier que T envoie B dans B, choisissons $r > 0$ assez petit de tel sorte que $|g(t,s,x)| \leq \varrho |x|^p \leq \frac{r}{2(b-a)}$ et donc $\|Tx\| \leq k_1(b-a) \sup |f| + \frac{r}{2} + k_2 \|h\|_\infty \leq r$
si k_1 et $k_2 > 0$ sont choisis suffisamment petits.

Exercice 7

(1) Soit X un espace de Banach, $\Omega \subset X$ un ouvert borné et $K\colon \Omega \to X$ une application complètement continue vérifiant la condition suivante :

$$(\mathcal{C}) \quad (\exists\, x \in \Omega,\ \exists\, \lambda \in \mathbb{R} :\ Kx = \lambda x) \Rightarrow (\lambda < 1).$$

(a) Donner une condition suffisante assurant la condition $(\mathcal{C})$.

(b) Montrer que si $0 \in \Omega$, alors le degré de Schauder

$$deg(I - K, \Omega, 0) = 1.$$

(c) En déduire que l'application K admet au moins un point fixe dans $\bar{\Omega}$.

(2) Application : On considère le problème aux limites

$$(\mathcal{P}) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} u'' & = & f(u),\ 0 < t < 1 \\ u(0) & = & u(1) = 0. \end{array} \right.$$

où $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue vérifiant l'hypothèse de croissance :

$$(\mathcal{H}) \quad \exists\, k, p > 0 :\ |f(s)| \leq k|s|^p,\ \forall\, s \in \mathbb{R}.$$

Montrer que le problème $(\mathcal{P})$ admet au moins une solution dans l'un des cas suivants :

$$(\mathbf{a})\ p \in \mathbb{R}\backslash\{1\} \quad \text{ou} \quad (\mathbf{b})\ p = 1 \ \text{ et } \ 0 < k \leq 8.$$

Corrigé

(1)(a) La condition suivante

$$\|Kx\| < \|x\|, \ \forall\, x \in \partial\Omega$$

entraîne la condition $(\mathcal{C})$; de plus, si $0 \notin \partial\Omega$, l'inégalité peut être prise au sens large. En effet, s'il existe $x \in \partial\Omega$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Kx = \lambda x$, alors $\|Kx\| = |\lambda.\|x\| < \|x\|$ et donc $|\lambda| < 1$.

(1)(b) Supposons $0 \in \partial\Omega$, alors le degré de Schauder $deg(I - tK, \Omega, 0)$ est bien défini, $\forall\, t \in [0, 1]$. En effet, s'il existe $x \in \partial\Omega$ tel que $tKx = x$ avec $t \in [0, 1]$, alors $t \neq 0$ et $Kx = \frac{1}{t}x$; et donc $t > 1$, ce qui est absurde. Par homotopie, $deg(I - tK, \Omega, 0) = deg(I, \Omega, 0) = 1$.

(1)(c) Comme le degré $deg(I - K, \Omega, 0) \neq 0$, l'application $I - K$ admet au moins un zéro dans Ω et donc K admet au moins un point fixe dans Ω.

(2) Dans l'espace $X = C([0, 1]; \mathbb{R})$ muni de la norme du sup, considérons l'application $K\colon\ u \mapsto U$ où U est la solution du problème aux limites

$$\begin{cases} U'' &= f(u), \ 0 < t < 1 \\ U(0) &= U(1) = 0. \end{cases}$$

ou encore, de manière équivalente, $U(x) = \int_0^1 G(x, y) f(u)(y)\, dy$ où G est la fonction de Green du problème $-y'' = y(0) = y(1) = 0$. On alors :

• L'opérateur K est continu car f l'est ; en effet, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui converge vers u, $(f(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f(u)$ et donc $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers Ku et ce d'après les estimations classiques sur la fonction de Green.

• L'opérateur K est compact : en effet, si u est borné dans X, disons $\|u\|_X \leq R$, alors en vertu encore des estimations sur la fonction de Green (voir le cours sur les problèmes aux limites associés aux E.D.O.), on a que $|U(x)| \leq \frac{1}{8}kR^p$ et $|U'(x)| \leq \frac{1}{2}kR^p$. Par suite, U est bornée dans $C^1(0, 1)$ qui s'injecte de manière compacte dans $C^0(0, 1)$; d'où le résultat. Enfin, d'après l'hypothèse $(\mathcal{H})$, on a que

$$\|Ku\|_X = \|U\|_X \leq \frac{1}{8}kR^p \leq R = \|u\|_X, \ \forall\, u \in \partial B(0, R),$$

si $\frac{1}{8}kR^{p-1} \leq 1$ ce qui a lieu dans l'un des cas suivants :

(a) $p = 1$ et $0 < k \leq 8$.

(b) $p \neq 1$ et $R \geq exp\left(\frac{1}{p-1}\ln(\frac{8}{k})\right)$ ou $R \leq exp\left(\frac{1}{p-1}\ln(\frac{8}{k})\right)$ selon que $p > 1$ ou $p < 1$.

Dans ces deux cas, l'opérateur envoie la boule $B(0, R)$ dans elle-même et admet par le théorème de Schauder au moins un point fixe dans l'espace X.

Exercice 8

(Les questions **(1)** et **(2)** sont indépendantes.) Soit X un espace de Banach de dimension infinie et $\Omega \subset X$ un ouvert tel que $0 \notin \partial\Omega$. Soit $K\colon \Omega \to X$ une application complètement continue vérifiant la condition suivante :

$$\forall\, x \in \partial\Omega, \quad Kx \neq x \ \text{ et } \ \|Kx\| \geq \|x\|.$$

(1) Montrer que $deg(I - K, \Omega, 0)$ (Utiliser l'indication).

(2) Considérer deux ouverts Ω_1 et Ω_2 tels que

$$0 \in \Omega_1 \subset \bar{\Omega_1} \subset \Omega_2 \subset X$$

et soit $K\colon \bar{\Omega_2} \setminus \Omega_1 \to X$ une application complètement continue vérifiant les deux hypothèses suivantes (Théorème de Krasnoselskii) :

(1) $\|Kx\| \geq \|x\|$, $\forall\, x \in \partial\Omega_1$

(2) $\|Kx\| \leq \|x\|$, $\forall\, x \in \partial\Omega_2$.

Montrer que K admet un point fixe dans $\bar{\Omega_2} \setminus \Omega_1$.

(3) En considérant le contre-exemple $X = \mathbb{R}^2$, $\Omega_1 = B(0, 1)$, $\Omega_2 = B(0, 2)$, et $K\colon X \to X$ la rotation de centre l'origine du plan et d'angle $\frac{\pi}{4}$, montrer que le résultat de la partie **(2)** est faux en dimension finie.

Indications : Soit X un espace de Banach de dimension infinie, $\Omega \subset X$ un ouvert borné et $K\colon \bar{\Omega} \to X$ une application complètement continue vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \inf_{x\in\partial\Omega} \|Kx\| > 0. \\ (\exists\, x \in \Omega,\ \exists\, \lambda \in \mathbb{R}:\ Kx = \lambda x) \Rightarrow (\lambda \notin]0, 1]). \end{cases}$$

Alors le degré de Schauder $deg(I - K, \Omega, 0) = 0$.

Corrigé

(1) Pour vérifier les conditions d'application de l'indication, on a successivement :

$$\inf_{x \in \partial\Omega} \|Kx\| \geq \inf_{x \in \partial\Omega} \|x\| > 0.$$

Supposons maintenant qu'il existe $x \in \partial\Omega$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Kx = \lambda x$ $(x \neq 0,\ \mu \neq 1)$; alors $\|\lambda x\| = |\lambda|.\|x\| \geq \|x\|$. Par suite, $|\lambda| > 1$ et donc $\lambda \notin]0, 1]$.
(2) D'après la formule d'additivité, on a :

$$deg(I - K, \Omega_1, 0) = deg(I - K, \Omega_2, 0) + deg(I - K, \bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1, 0).$$

Utilisant la question **(1)** ainsi que l'exercice 7, on en déduit que $def(I - K, \bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1, 0) = 1 - 0 = 1 \neq 0$ et donc K admet au moins un point fixe dans $\Omega_2 \setminus \Omega_1$.
(3) Pour tout $z = re^{i\theta}$, on a $Kz = re^{i(\theta + \frac{\pi}{4})}$. Par suite, $\|Kz\| = \|z\|$, $\forall\, z \in \partial\Omega_1$ et $\forall\, z \in \partial\Omega_2$. Les conditions de la partie **(2)** sont donc satisfaites sans que l'application K ait un point fixe dans $\Omega_2 \setminus \Omega_1$ car $z = re^{i\frac{\pi}{4}} \neq 1$.

2.6 Exercices non résolus

Exercice 1

Soit X un espace de Banach et $K\colon X \longrightarrow X$ une application complètement continue. On pose $F = I - K$ et on suppose l'existence d'une fonction ϕ de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$ vérifiant les deux conditions suivantes :
(a) $\lim\limits_{s \to 0} \phi(s) = 0$.
(b) $\|Fx - Fy\| \geq \phi(\|x - y\|), \quad \forall\, x, y \in X$.
Montrer que f est un homémorphisme sur X.

Exercice 2

Soit B une boule de rayon R dans un espace de Banach X et $K\colon \bar{B} \longrightarrow X$ une application compacte vérifiant, pour tout $x \in \partial B$, l'une des conditions suivantes :
(a) $\|K(x)\| \leq \|x\|$.
(b) $\|K(x)\| \leq \|x - K(x)\|$.
Montrer que K admet au moins un point fixe dans $\bar{B}$.

Exercice 3 (*T*héorème de Birkhoff-Kellog)

Soit X un espace vectoriel normé et Ω un ouvert borné contenant l'origine. On considère une application compacte $f\colon\ \partial\Omega \longrightarrow X$ vérifiant la condition suivante

$$\exists\, \alpha > 0, \quad \|f(x)\| \geq \alpha, \quad \forall\, x \in \partial\Omega.$$

Montrer qu'il existe $x \in \partial\Omega$ et $\lambda > 0$ tels que $x = \lambda f(x)$.

Exercice 4

Soit X un espace de Banach et $K\colon\ X \longrightarrow X$ une application complètement continue telle que $F = I - K$ soit localement injective.

(a) Montrer que si $F(x)$ est fermé, alors F est un homéomorphisme.

(b) Reprendre la question (a) en supposant que F vérifie la condition suivante :

$$\exists\, k > 0, \quad \|F(x) - F(y)\| \geq k\|x - y\|, \quad \forall\, (x, y) \in X^2.$$

Exercice 5 (*A*lternative non linéaire. Leray, 1950)

Soit X un espace de Banach et $K\colon\ X \longrightarrow X$ une application complètement continue. Montrer que l'on a l'alternative suivante

(a) Ou bien K admet un point fixe.

(b) Ou bien l'équation $K(x) - x = y$ admet, pour tout $y \in X$, une solution unique $x \in X$.

Chapitre 3

QUELQUES APPLICATIONS AUX E.D.P-E.D.O

3.1 Applications aux E.D.P

3.1.1 Une E.D.P semi-linéaire

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ étant un ouvert borné, on considère le problème

$$(P) \quad \begin{cases} -\Delta u + g(x,u) = f(x), & \text{dans } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

où $f \in L^2(\Omega)$ et $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de carathéodory vérifiant les hypothèses suivantes :

(H1) L'opérateur de Nemytskii G définie par $G(u)(x) = g(x, u(x))$ est continue de $L^2(\Omega)$ vers $L^2(\Omega)$ (et donc bornée de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$).

(H2) Hypothèse de signe :

$$g(x,s).s \geq 0, \, \forall s \in \mathbb{R} \text{ et } p.p.\, x \in \Omega.$$

On a alors le

Théorème 3.1 *Le problème (P) admet au moins une solution $u \in H_0^1(\Omega)$.*

Remarque 3.1 *L'hypothèse (H1) est réalisée si g vérifie, par exemple, la condition de croissance suivante :*

$$|g(x,s)| \leq a(x) + k|s|, \; \forall\, s \in \mathbb{R} \;\, et \; p.p.\, x \in \Omega,$$

où $k \in \mathbb{R}^+$ *et* $a \in L^2(\Omega)$*. De plus, si* $g(x,s) = g(s)$*, cette condition de croissance sous-linéaire équivaut à :*

$$\overline{\lim}_{|s|\to+\infty} \frac{g(s)}{s} \;\; \textit{finie.}$$

En effet, soit (u_n) un suite convergeant vers u dans $L^2(\Omega)$; (u_n) admet donc une sous-suite (u_{n_k}) convergente *p.p.* dans Ω vers u et il existe $\bar{u} \in L^2(\Omega)$ telle que $|u_{n_k}(x)| \leq |\bar{u}(x)|$ *p.p.* dans Ω. La fonction g étant continue en la seconde variable, la suite $g(x, u_{n_k}(x))$ converge *p.p.* vers $g(x, u(x))$ et l'on a l'estimation suivante

$$\begin{aligned} \|Gu_{n_k}\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |g(x, u_{n_k}(x))|^2 dx \;\; &\leq \;\; 2\int_\Omega |a(x)|^2 + |k^2|u_{n_k}(x)|^2 dx \\ &\leq \;\; 2\int_\Omega |a(x)|^2 dx + 2k^2 \int_\Omega |\bar{u}(x)|^2 dx \\ &\leq \;\; \textit{constante.} \end{aligned}$$

Grâce au théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on dérive la convergence dans $L^2(\Omega)$ de la suite $(Gu_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ vers la limite Gu.

Démonstration

(a) Soit $X = L^2(\Omega)$ l'espace de Hilbert muni de la norme $|f|_0 = \left(\int_\Omega |f(t)|^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}}$ et pour $t \in [0,1]$, K_t l'application définie par $K_t(u) = U$ où U est la solution du problème linéaire :

$$(P_t) \quad \begin{cases} -\Delta U + tg(x,u) = tf(x), & \text{dans } \Omega \\ U|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Pour tout $u \in X$, $g(x,u) \in X$ d'après l'hypothèse (H1) ; de plus $f \in X$. Alors, le problème (P_t) admet, en vertu du théorème de Lax-Milgram, une unique solution $u \in H^1(\Omega)$ donc dans $L^2(\Omega)$; K_t est donc bien définie. Enfin, u est solution du problème (P) si et seulement si $K_1(u) = u$.

(b) Estimation à priori

Nous allons à présent construire une boule qui contient toute solution éventuelle. Soit

u un point fixe de K_t. Faisons alors le produit scalaire par u dans (P_t) puis intégrons en utilisant la formule de Green ; on obtient $\int_\Omega |\nabla u|^2 dx = t\int_\Omega [f - g(x,u)]u\,dx$.
En utilisant l'hypothèse (H2), les inégalités de Cauchy-Schwartz et de Poincaré, on arrive à $|\nabla u|_0 \leq C|f|_0$ puis $|u|_0 \leq C'|f|_0 := R$. On en déduit qu'aucune solution ne se trouve sur la frontière de la boule $B = (0, R+1)$ et ce, pour tout $t \in [0,1]$; par suite le degré $deg(I - K_t, B, 0)$ sera bien défini si K_t est compact.

(c) K_t est compact

Soit (U_n) une suite bornée dans X et (U_n) son image par l'application K_t ; la suite $g(.,u_n(.))$ est alors bornée dans X. En multipliant, comme dans le (b), l'équation dans (P_t) par U_n et en intégrant sur Ω, on obtient que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est borné dans $H^1(\Omega)$ lequel s'injecte de manière compacte dans $L^2(\Omega) = X$; il existe donc une sous-suite $(U_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergeant vers une fonction u fortement dans X ; d'où la compacité de K_t.

(d) K_t est continu

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers u dans X et (U_n), U leurs images respectives par l'application K_t. Alors $-\Delta(U_n - U) + t[g(x,u_n) - g(x,u)] = 0$. Comme dans le (b), on obtient que $|U_n - U_0|_0 \leq C|g(.,u_n) - g(.,u)|_0$. De l'hypothèse (H1), on déduit alors la convergence dans l'espace X de (U_n) dans U_0.

(e) Conclusion

Le degré $deg(I - K_t, B, 0)$ est bien défini et vaut, par homotopie 1 ; le problème (P_1) admet donc au moins une solution dans l'espace X.

3.1.2 Une E.D.P. elliptique abstraite

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ étant un ouvert borné, de frontière $\partial\Omega$ régulière on considère le problème aux limites :

$$(Q) \quad \begin{cases} P(x,D)u = G(u), & \text{dans } \Omega \\ Bu = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où

- B un opérateur de dérivation au bord, d'ordre $(m-1)$.

• P est un opérateur de dérivation linéaire, uniformément elliptique, d'ordre m:

$$P(x,D)u = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\partial^\alpha u := \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial^{\alpha_1}x_1\partial^{\alpha_2}x_2...\partial^{\alpha_n}x_n}$$

où $a_\alpha \in C^\infty(\Omega)$ et $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$ pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$.
• On suppose que P vérifie l'hypothèse d'ellipticité (en particulier, P est injectif) :

$$P(x,\xi) \geq c|\xi|^m, \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n \text{ avec } c > 0 \text{ et } P(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\xi^\alpha.$$

• $G(u) = g(x, u, \partial^\beta u)$, $|\beta| < m$ où g est une fonction continue en x, u et en ses dérivées jusqu'à l'ordre $(m-1)$ et vérifie l'hypothèse de croissance
$\exists\, c_0 > 0, \exists\, \gamma \in]0,1[, \forall\, \beta \in \mathbb{N}^n, 0 < |\beta| \leq m-1$

$$\textbf{(H)} \quad |g(x,u,\partial^\beta u)| \leq c_0 \left(1 + \sum_{0<|\beta|\leq m-1} |\partial^\beta u|\right)^\gamma.$$

Théorème 3.2 *Sous les hypothèses précédentes, le problème* (Q) *admet au moins une solution* $u \in \mathcal{C}^{m-1}(\overline{\Omega})$.

Remarque 3.2 *Lorsque* $m = 2$, *la condition de croissance sur* g *s'écrit*

$$|g(x,u,\nabla u)| \leq c_0 \left(1 + |u| + \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\right)^\gamma.$$

Démonstration
On considère l'espace de Banach $X = \mathcal{C}^{m-1}(\overline{\Omega})$ muni de la norme du sup puis on définit, pour $t \in [0,1]$, l'application

$$\begin{aligned} K_t : X &\rightarrow X \\ u &\mapsto U \end{aligned}$$

où U est la solution du problème linéaire :

$$(Q_t) \quad \begin{cases} PU = tG(u), & \text{dans } \Omega \\ BU = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

• Alors u est solution de (Q) si et seulement si u est point fixe de K_1 et K_t est bien défini car P est injectif par hypothèse.

• On va montrer que le degré de l'application $(I - K_t)$ relativement à un ouvert Ω à préciser et par rapport à 0, est non nul. Dans ce qui suit Ω sera une boule contenant toutes les solutions : ce sont les estimations à priori.

(a) $1^{\text{ère}}$ étape : Estimations à priori

D'après l'estimation classique d'Agmond-Dougles-Niremberg (A.D.N) [16], on a, pour tout point fixe u :

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \leq c_1 \|Pu\|_{L^p(\Omega)} = c_1 \|Gu\|_{L^p(\Omega)}$$

et, grâce à l'hypothèse de croissance (H), on obtient :

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} &\leq c_1 \left(\int_\Omega |g(x,u,\partial^\beta u)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq c_0 c_1 \left[\int_\Omega \left(1 + \sum_{0<|\beta|\leq m-1} |\partial^\beta u|\right)^{p\gamma} dx\right]^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

L'ouvert Ω étant borné, l'injection $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ est continue, $\forall\, r \in [1, p[$. En effet, d'après l'inégalité de Hölder, si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, alors $\|fg\| \leq \|f\|_p . \|g\|_q$. Par suite, en supposant $p\gamma \geq 1$ et en prenant $r = p\gamma < p$, on obtient la nouvelle estimation :

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \leq c_0 c_1 c_2 \left[\int_\Omega \left(1 + \sum_{0<|\beta|\leq m-1} |\partial^\beta u|\right)^p dx\right]^{\frac{\gamma}{p}}.$$

Or, $\forall\, a_i \in \mathbb{R}$

$$\exists\, c_3 > 0, \left(\sum_{i=1}^{i=n} |a_i|\right)^p \leq c_3 \sum_{i=1}^{i=n} |a_i|^p, \quad \forall\, p, n \geq 1.$$

Par conséquent,

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \leq c_0 c_1 c_2 c_3 \left[\int_\Omega \left(1 + \sum_{0<|\beta|\leq m-1} |\partial^\beta u|^p\right) dx\right]^{\frac{\gamma}{p}};$$

soit

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \leq c_0 c_1 c_2 c_3 c_4 \left[1 + \sum_{0<|\beta|\leq m-1} \int_\Omega |\partial^\beta u|^p\right]^{\frac{\gamma}{p}}$$

ou encore

$$\|u\|^p_{W^{m,p}(\Omega)} \leq c' \left[1 + \sum_{0<|\beta|\leq m-1} \|\partial^\beta u\|^p_{L^p(\Omega)}\right]^\gamma.$$

Appliquons maintenant l'inégalité de Young :

$$\text{si } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \text{ alors } \forall\,(a,b)\in\mathbb{R}^2, \forall\,\varepsilon>0, \exists\, c_\varepsilon\in\mathbb{R} : ab\leq \varepsilon a^p + c_\varepsilon b^q,$$

en prenant $p=\frac{1}{\gamma}$; $a=\left[1+\sum_{0<|\beta|\leq m-1}\|\partial^\beta u\|^p_{L^p(\Omega)}\right]^\gamma$ et $b=c'$. On obtient l'estimation :

$$\|u\|^p_{W^{m,p}(\Omega)}\leq \varepsilon\left(1+\sum_{0<|\beta|\leq m-1}\|\partial^\beta u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)+c''=\varepsilon(1+\|u\|^p_{\mathcal{W}^{m,p}(\Omega)}+c'').$$

En choisissant $\varepsilon>0$ suffisamment petit, on arrive donc à l'estimation :

$$\exists\, C=C(\Omega,p,\varepsilon), \quad \|u\|^p_{\mathcal{W}^{m,p}(\Omega)}\leq C.$$

En vertu de l'immersion de Sobolev $\mathcal{W}^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow \mathcal{C}^{m-1}(\overline{\Omega})$ pour $p>n$, on obtient finalement pour $p>\max(n,\frac{1}{\gamma})$, $\|u\|_{\mathcal{C}^{m-1}(\overline{\Omega})}\leq C$. Il suffit donc de prendre, dans le Banach X, une boule B de rayon $R>C$ afin qu'aucune solution ne puisse se trouver sur la frontière de B.

(b) 2$^{\text{ème}}$ étape : K_t est compacte et uniformément continue en t

Soit u borné dans B, alors $u\in\mathcal{C}^{m-1}(\overline{\Omega})$ et donc, d'après la continuité de $g, G(u)$ est bornée dans $L^p(\Omega)$. De plus, de l'estimation d'A.D.N, on a

$$\|u\|_{\mathcal{W}^{m,p}(\Omega)}\leq C\|PU\|_{L^p(\Omega)}=C\|G(u)\|_{L^p(\Omega)}\leq C'.$$

Or, pour $\alpha=1-\frac{n}{p}$ et $p>n$, l'injection $\mathcal{W}^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow\mathcal{C}^{m-1}(\overline{\Omega})$ est compacte. par suite, l'image $U=tP^{-1}Gu$ est relativement compacte dans B.

(c) 3$^{\text{ème}}$ étape : Conclusion

D'après la propriété d'invariance par homotopie du degré, on a donc les égalités $deg(T-K_t,B,0)=deg(I,B,0)=1\neq 0$. L'application K_t, et en particulier K_1, admet donc au moins un point fixe u dans l'ouvert B et donc une solution $u\in\mathcal{C}^{m-1}(\Omega)$ du problème (Q).

3.2 Applications aux E.D.O

3.2.1 Le problème de Picard

On considère le problème aux limites posé sur l'intervalle $I =]0,1[$:

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} -u'' = f(x,u,u'),\ x \in I \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

où la non linéarité f vérifie les hypothèses suivantes :

(H1) $f : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory telle que $\forall\, r > 0, \exists\, g_r \in L^1(I,\mathbb{R})$:

$$|f(x,y,z)| \leq g_r(x), \forall\, y,z : |y| \leq r, z \in \mathbb{R} \text{ et p.p. } x \in I.$$

(H2) $\exists\, k_1, k_2 > 0 (k_1 + k_2 < 1), \exists\, g \in L^1(I,\mathbb{R}^+)$:

$$\forall\, (y,z) \in \mathbb{R}^2 \text{ et p.p. } x \in I,\ |f(x,y,z)| \leq k_1|y| + k_2|z| + g(x).$$

(H3) $\exists\, c > 0, \exists\, h \in L^1(I,\mathbb{R}^+) : \forall\, y \in \mathbb{R}, \forall\, z \in \mathbb{R} : |y| \leq \frac{\|g\|_1}{1-k_1-k_2}$

$$\text{et p.p. } x \in I,\ |f(x,y,z)| \leq c|z|^2 + h(x).$$

Remarque 3.3 *L'hypothèse (H1) entraîne que l'opérateur de Nemytskii F défini par $F(u)(x) = f(x,u(x),u'(x))$ est continue, borné de $\mathcal{C}_0^1(I \times \mathbb{R})$ vers $L^1(I \times \mathbb{R})$.*

Théorème 3.3 *Sous les hypothèses (H1)-(H-3), le problème (P) admet au moins une solution $u \in \mathcal{C}_0^1(I)$.*

Démonstration

(a) $1^{\text{ère}}$ étape : Définition d'un degré topologique

Soit $K_t\,(0 \leq t \geq 0)$ une famille d'applications définies dans l'espace $X = \mathcal{C}^1(\overline{I})$ par :

$$\begin{aligned} K_t : X &\to X \\ u &\mapsto U \end{aligned}$$

où U est la solution du problème linéaire :

$$(P_t) \qquad \begin{cases} -U'' = tf(x,u,u'), \ x \in]0,1[\\ U(0) = U(1) = 0. \end{cases}$$

(b) $2^{\text{ème}}$ étape : Étude de l'application K_t

Il est clair que $K_t = T \circ N$ où $\mathcal{C}^1 \xrightarrow{N} L^1 \xrightarrow{T} \mathcal{C}^1$, $(Nu)(x) = tf(x, u(x), u'(x))$ et

$$\begin{aligned} (Tv)(x) &= \int_0^x \left(\int_0^t v(s)ds \right) dt - x \int_x^1 \left(\int_0^t v(s)ds \right) dt \\ &= \int_0^1 G(x,y)v(y)dy \end{aligned}$$

avec $G(x,y) = \begin{cases} x(y-1), & 0 \leq x \leq y \\ y(x-1), & y \leq x \leq y \end{cases}$ comme fonction de Green.

L'opérateur N est continu, borné par le théorème de Lebesgue. L'application T est continue car $\|Tv\|_{\mathcal{C}^\infty} \leq 4\|v\|_{L^1}$; donc K_t est continue. De plus, si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de $L^1(I)$, disons $\|v_n\|_{L^1} \leq R$, alors, en posant $V_n = T(v_n)$ on a les estimations $\|V_n\|_{\mathcal{C}^1} \leq 4\|v_n\|_{L^1} \leq 4R$ et $|V_n(t) - V_n(t')| \leq 4R$. La suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc, d'après le lemme d'Ascoli-Arzela, relativement compact dans $\mathcal{C}^1(I)$. Par conséquent, T, puis K_t, est complètement continue. K_t est donc une application compacte.

(c) $3^{\text{ème}}$ étape : Estimation à priori

Soit u un point fixe de l'application K_t. Multiplions l'équation satisfaite par u, puis intégrons par parties ; il vient

$$\int_0^1 |u'(x)|^2 dx = t \int_0^1 uf(x,u,u')dx.$$

L'hypothèse (H2) donne : $\int_0^1 |u'(x)|^2 dx \leq \int_0^1 |k_1 u^2 + k_2 uu' + ug|\, dx$. Appliquons successivement les inégalités de Cauchy-Schwartz et de Poincaré ; on obtient

$$\begin{aligned} \|u'\|_{L^2}^2 &\leq k_1\|u\|_{L^2}^2 + k_2\|u\|_{L^2}\|u'\|_{L^2} + \|u\|_{\mathcal{C}^0}\|g\|_{L^1} \\ &\leq k_1\|u'\|_{L^2}^2 + k_2\|u'\|_{L^2}^2 + \|u\|_{\mathcal{C}^0}\|g\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Mais $0 < k_1 + k_2 < 1$; alors $\|u'\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{1-k_1-k_2}\|u\|_{\mathcal{C}^0}\|g\|_{L^1}$. Utilisant de nouveau les inégalités de Cauchy-Schwartz et Poincaré, on obtient

$$\|u\|_{\mathcal{C}^0}^2 \leq \|u'\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{1-k_1-k_2}\|u'\|_{L^2}\|g\|_{L^1}.$$

Par conséquent, $\|u\|^2_{\mathcal{C}^0} \leq \|u'\|_{L^2} \leq \frac{1}{1-k_1-k_2}\|g\|_{L^1} : = r_0$, ce qui, avec l'hypothèse (H3) fournit l'estimation suivante :

$$|u''(x)| \leq c|u'(x)|^2 + h(x),\ p.p.\, x \in I;$$

et donc

$$\|u''\|_{L^1} \leq c\|u'\|^2_{L^2} + \|h\|_{L^1} \leq cr_0^2 + \|h\|_{L^1} := r_1.$$

Enfin, comme $u \in \mathcal{C}^1_0(I)$, il existe, en vertu du théorème de Rolle, $x_0 \in I$ tel que $u'(x_0) = 0$. Par suite,

$$\forall\, x \in I, |u'(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} u'(t)dt\right| \leq \|u''\|_{L^1} \leq r_1$$

et finalement,

$$\|u\|_{\mathcal{C}_1} \leq \max(r_0, r_1) := r.$$

(d) $4^{\text{ème}}$ étape :

En considérant la boule $B(0, r+1)$, on définit le degré de Schauder $\deg(I - K_t, B, 0)$ puis on déduit, par les mêmes arguments que précédemment, l'existence d'un point fixe pour l'opérateur K et donc une solution au problème de Picard.

3.2.2 Le problème de Bernstein

On considère le problème aux limites posé sur l'intervalle $I =]0, 1[$:

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} -u'' = f(x, u, u'),\ x \in I \\ -\alpha_0 u(0) + \beta_0 u'(0) = \gamma \\ \alpha_1 u(1) + \beta_1 u'(1) = \delta, \end{cases}$$

où $\alpha_i, \beta_i\, (i = 0, 1)$ et γ, δ sont des réels avec $\alpha_i > 0$, $\beta_i \geq 0$, $i = 0, 1$. La non linéarité f continue sur $I \times \mathbb{R}^2$ est supposée satisfaire les hypothèses suivantes, de signe et de croissance quadratique par rapport à la dérivée :

(H1) $\exists\, M > 0,\ yf(x, y, 0) > 0$, pour $|y| > M$ et $x \in \mathbb{R}$.

(H2) $\exists\, k_1, k_2 > 0$, $|f(x, y, z)| \leq k_1|z|^2 + k_2, \forall\, x \in I$ et $\forall\, (y, z) \in [-M_0, M_0]^2$ où $M_0 = \max(M, |\frac{\gamma}{\alpha_0}|, \frac{|\delta|}{\alpha_1})$.

Théorème 3.4 *Sous les hypothèses (H1)-(H2), le problème (P) admet au moins une solution* $u \in \mathcal{C}^2(\overline{I})$.

Démonstration

Dans l'espace $X = \mathcal{C}^1([0,1])$, on considère l'application K_t qui à u fait correspondre U la solution du problème

$$(\mathcal{P}_t) \quad \begin{cases} U'' = tf(x,u,u') \\ U \text{ vérifie les mêmes conditions aux limites} \end{cases}$$

(a) Estimations à priori

• Estimation de u : $|u|$ atteint son maximum > 0 en un point $x_0 \in [0,1]$:

- Si $x_0 \in]0,1[$, la fonction $|u|^2$ admet aussi un maximum en x_0 et donc $(|u|^2)''(x_0) \leq 0$, i.e $u(x_0)f(x_0, u(x_0), 0) \leq 0$ et donc, en vertu de l'hypothèse (H1) $|u(x_0)| \leq M$.

- Si $x_0 = 0$, alors $u(0)u'(0) \leq 0$ et donc $\beta_0 u(0)u'(0) = \alpha_0 u(0)[\frac{\gamma}{\alpha_0} + u(0)] \leq 0$. Par suite, $|u(0)| \leq \frac{|\gamma|}{\alpha_0}\cdot$

- Si $x_0 = 1$, on obtient de la même manière $|u(1)| \leq \frac{|\delta|}{\alpha_0}\cdot$ Par conséquent, dans tous les cas, on a : $|u(x)| \leq M_0 := \max(M, \frac{|\gamma|}{\alpha_0}, \frac{|\delta|}{\alpha_0})$.

• Estimation de u'' :

Utilisant l'estimation précédente et l'hypothèse (H2), on obtient :

$$|u''(x)| \leq k_1|u'(x)|^2 + k_2, \ \forall\, x \in I.$$

La fonction $\phi(s) = k_1 s^2 + k_2$ étant de type Nagumo-Bernstein, on déduit d'un lemme classique (voir le cours sur les problèmes aux limites associés aux E.D.O.), que $|u'(x)| \leq M_1 = M_1(M_0, k_1, k_2)$.

(b) La compacité de l'application K_t découle du lemme d'Ascoli-Arzela.

(c) Considérons enfin, dans l'espace X, la boule B ouverte de rayon $R = M_0 + M_1 + 1$; alors le degré topologique $deg(I - K_t, B, 0)$ est bien défini, et vaut par homotopie, $+1$. Le problème (P) admet donc au moins une solution $u \in X$ qui est aussi, par continuité de f, de classe $\mathcal{C}^2$.

Remarque 3.4 **(a)** *L'hypothèse (H2) est une condition de croissance de type Bernstein.*

(b) *Une condition suffisante pour (H1) est l'hypothèse*

$$\exists\, k > 0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) \geq k, \forall\, (x,y,z) \in [0,1] \times \mathbb{R}^2$$

dans le cas où f est supposée dérivable par rapport à y. En effet, pour tout $y > 0$, on a, d'après le théorème des accroissement finis, l'existence d'un point $\xi \in (0,y)$ tel que $f(x,y,0) = f(x,0,0) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi,0)$ et donc

$$yf(x,y,0) = yf(x,0,0) + y^2\frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi,0) \geq yf(x,0,0) + ky^2 > 0$$

si $|y| > \max_{0\leq x\leq 1} \frac{|f(x,0,0)|}{k} := M$.

Chapitre 4

L'INDICE DE SCHAUDER (degré des points isolés)

4.1 L'indice des applications différentiables

4.1.1 Définition

Soit X et Y deux espaces de Banach de dimensions finies et $\Omega \subset X$ un ouvert borné. On considère une application $f\colon \bar{\Omega} \to Y$ continue et $y_0 \notin f(\partial\Omega)$. Si $x_0 \in \Omega$ est une solution isolée de l'équation $f(x) = y_0$, alors il existe une boule B_{r_0} dans laquelle x_0 est la seule solution de l'équation $f(x) = y_0$. D'après la propriété de l'excision du degré topologique, l'égalité suivante a lieu :

$$\deg(f, B_{r_0}(x_0), y_0) = \deg(f, B_r(x_0), y_0), \quad \forall\, r :\, 0 < r < r_0.$$

Ce degré est donc localement constant et donne lieu à la

Définition 4.1 *On appelle indice de f au point x_0 relativement à y_0, l'entier*

$$i\,(f, x_0, y_0) = \deg(f, B_{r_0}(x_0), y_0).$$

Supposons $f \in C^1(\bar{\Omega})$ et $J_f(x_0) \neq 0$, où $J_f(x_0)$ désigne le jacobien de l'application f i.e. $J_f(x_0) = det\, D_f(x_0)$ où $D_f(x_0)$ est la matrice jacobienne ; alors d'après la définition 4.1, on a $i\,(f, x_0, y_0) = sgn\, J_f(x_0)$.

4.1.2 Calcul de l'indice

Supposons sans perte de généralité $x_0 = 0 \in \Omega$ et $f(0) = 0$. Alors, on a le

Théorème 4.1 *La formule suivante a lieu :*

$$i\,(f, 0, 0) = (-1)^{\beta}$$

où β désigne la somme des multiplicités des valeurs caractéristiques de l'opérateur $I - J_f(0)$ comprises strictement entre 0 et 1. S'il n'existe pas de valeur caractéristique comprise entre 0 et 1, on pose $\beta = 0$.

On entend par multiplicité d'une valeur caractéristique μ, celle de la valeur propre $\frac{1}{\mu}\cdot$ On a besoin du résultat préliminaire suivant

Lemme 4.1 *Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{M}(n \times m)$ une matrice régulière et $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ les valeurs propres strictement négatives de $\mathcal{A}$ et de multiplicités respectives $r_1, r_2, \cdots, r_m$. Alors $sgn\,(det\mathcal{A}) = (-1)^r$, où $r = \sum_{i=1}^{i=m} r_i$.*

Démonstration

Soit $\mu_{m+1}, \cdots, \mu_n$ les valeurs propres positives de la matrice $\mathcal{A}$ et de multiplicités respectives $k_{m+1}, k_{m+2}, \cdots, k_n$. Si $r = \sum_{i=1}^{i=m} r_i$, on a la formule

$$det(\mathcal{A}) = \Pi_{i=1}^{i=m} \lambda_i^{r_i}.\Pi_{i=m+1}^{i=n} \mu_i^{k_i} = \Pi_{i=1}^{i=m} (-1)^{r_i} |\lambda_i|^{r_i}.\Pi_{i=m+1}^{i=n} \mu_i^{k_i}.$$

Par suite $sgn\,(det\mathcal{A}) = (-1)^r$.

En remarquant que $\lambda > 1$ est une valeur propre de $I - A$ si et seulement si $1 - \lambda < 0$ est valeur propre de $\mathcal{A}$, on obtient immédiatement le

Corollaire 4.1 *Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{M}(n \times m)$ une matrice régulière et $T = I - \mathcal{A}$. Alors*

$$sgn\,(det\mathcal{A}) = (-1)^{\beta},$$

où $\beta = \sum_{\lambda > 1} r_\lambda(T)$, r_λ désignant la multiplicité de la valeur propre λ.

Démonstration du théorème 4.1

D'après le lemme 4.1, $i\,(f, 0, 0) = sgn\, J_f(0) = (-1)^r$ où r est la somme des multiplicités des valeurs propres, supérieures à 1 de la matrice $T = I - D_f(0)$, ou encore des valeurs caractéristiques μ $(0 < \mu < 1)$ de cette matrice.

4.2 L'indice des applications linéaires compactes

Soit X un espace de Banach de dimension finie et $L\colon X \to X$ un opérateur linéaire, compact. On désignera par μ une valeur caractéristique de L et par $m(\mu)$ son ordre de multiplicité. On se propose de montrer le résultat suivant :

Théorème 4.2 *La formule suivante a lieu :*

$$i\,(I-L,0,0) = (-1)^\beta$$

où $\beta = \sum_{0<\mu<1} m(\mu)$.

Démonstration
On sait (§6.3.2) que pour toute valeur caractéristique μ de l'opérateur L ($\mu \neq \infty$), il existe $p_\mu \in \mathbb{N}$ tel que $\bigcup_{p=1}^{\infty} Ker\,(\mu L - I)^p = Ker\,(\mu L - I)^{p_\mu}$ et que $m(\mu) = dim\,Ker\,(\mu L - I)^{p_\mu} < \infty$. Posons $X_1 = \bigcup_{0<\mu<1} Ker\,(\mu L - I)^{p_\mu}$, μ étant une valeur caractéristique de L. Comme l'ensemble des valeurs caractéristiques de L, comprises entre 0 et 1, est fini, l'espace X_i est de dimension finie ; soit X_2 son supplémentaire dans X. Par définition de X_1, l'assertion suivante a donc lieu

$$(\exists\, x \in X_2\colon\ (\mu L - I)x = 0) \ \Rightarrow\ (x = 0).$$

Notons $T = D_xL(0)$; alors T est un opérateur linéaire compact (cf lemme 6.4). De plus, il existe $r_0 > 0$ tel que $deg\,(I-L,B_{r_0},0) = deg\,(I-T,B_{r_0},0)$. En identifiant la somme directe $X_1 \bigoplus X_2$ et le produit cartésien $X_1 \times X_2$, on obtient, compte tenu de la propriété multiplicative du degré, la formule suivante

$$deg\,(I-T,B_{r_0},0) = deg\,(I-T_{|X_1},B_{r_0}\cap X_1,0).deg\,(I-T_{|X_2},B_{r_0}\cap X_2,0). \quad (4.1)$$

Afin de calculer $deg\,(I-T,B_{r_0},0)$, on considère la déformation $I - tL$ où $t \in [0,1]$; en effet, on peut remarquer que le degré $deg\,(I-tT_{|X_2},B_{r_0}\cap X_2,0)$ est bien défini et vaut par homotopie $deg\,(I,B_{r_0}\cap X_2,0) = 1$. De (4.1), on déduit que

$$deg\,(I-T,B_{r_0},0) = deg\,(I-T_{|X_1},B_{r_0}\cap X_1,0).$$

Mais X_1 est de dimension finie, alors, d'après le théorème 4.1, $deg\,(I-T_{|X_1},B_{r_0}\cap X_1,0) = (-1)^\beta$; d'où le résultat.

Corollaire 4.2 *Soit Ω un ouvert borné de X contenant l'origine et soit $\lambda \neq 0$ une valeur non caractéristique. Alors*

$$deg\,(I - \lambda L, \Omega, 0) = (-1)^{\beta},$$

où $\beta = \sum_{0<\mu<\lambda} m(\mu)$ ou bien $\beta = 0$ si L n'a pas de valeur caractéristique.

Démonstration
Posons $\tilde{L} = \lambda L$, alors μ est valeur caractéristique de $\tilde{L}$ si et seulement si $\lambda\mu$ est valeur caractéristique de L; d'où le résultat.

4.3 L'indice des perturbations compactes de l'identité

Soit X un espace de Banach, $\Omega \subset X$ un ouvert borné et $K\colon \bar{\Omega} \longrightarrow X$ un opérateur compact (non nécessairement linéaire). Considérons la perturbation compacte de l'identité $F = I - K$ et soit $u_0 \in \Omega$ une solution de l'équation $F(u) = 0$. On a alors le

Théorème 4.3 *Supposons que K soit Fréchet-différentiable au voisinage de u_0 et que 1 n'est pas valeur caractéristique de $K'(0)$. Alors u_0 est une solution isolée de l'équation $F(u) = 0$ et l'on a la formule du calcul de l'indice $i\,(I - K, u_0, 0) = (-1)^{\beta}$; où $\beta = \sum_{0<\mu<1} m(\mu)$, μ représentant une valeur caractéristique de l'opérateur $K'(0)$.*

Démonstration
Remarquons que l'on peut toujours, par translation, se ramener au cas où u_0 est nul. Écrivons alors $F(u) = F'(0).u + o(\|u\|)$ ou encore $Ku = K'(0)u + o(\|u\|)$ puis considérons la déformation $K_t u = K'(0)u + to(\|u\|)$; alors K_t est un opérateur linéaire compact, uniformément continu en t. Comme 1 n'est pas valeur caractéristique de $K'(0)$, il existe $r_0 > 0$ tel que pour tout $u \in B(0, r_0)$ et pour tout $t \in [0, 1]$ $u \neq K'(0)u + to(\|u\|)$. En effet, dans le cas contraire, pour tout $r > 0$, il existe $u_r \in B(0, r)$ et $t \in [0, 1]$ tel que $u = K'(0).u + t\|u\|\varepsilon(u)$, avec $\lim\limits_{s\to 0} \varepsilon(s) = 0$. On peut d'abord remarquer que, dans ce cas, $t > 0$ car 1 n'est pas valeur caractéristique ;

d'autre part, et pour cette même raison, l'opérateur $I - K'(0)$ est inversible et d'inverse continu (cf §6.3.2) ; l'égalité $I - K'(0).u = t\|u\|\varepsilon(u)$ s'écrit donc

$$u = (I - K'(0))^{-1} (t\|u\|\varepsilon(u)) = t\|u\| (I - K'(0))^{-1} \varepsilon(u).$$

En passant aux normes puis à la limite quand $r \to 0$, on obtient l'égalité

$$\frac{1}{t} (I - K'(0))^{-1} \varepsilon(0) = 0,$$

ce qui est absurde. Par conséquent 0 est une solution isolée de l'équation $F(u) = 0$ et l'on peut définir le degré $deg\,(I - K_t, B(0, r_0), 0)$ qui vaut, par homotopie, $deg\,(I - K, B_{r_0}, 0) = deg\,(I - K'(0), B(0, r_0), 0)$. La deuxième partie du lemme découle alors du théorème 4.2.

Remarque 4.1 *Le résultat sur le calcul de l'indice reste valable si l'on sait seulement que u_0 est un point isolé d'une application F supposée Fréchet-différentiable. Le résultat suivant est une conséquence du théorème 4.3.*

Corollaire 4.3 *Sous les hypothèses du théorème 4.3, pour tout λ qui n'est pas valeur carctéristique de $K'(0)$, on a la formule :*

$$i\,(I - \lambda K, u_0, 0) = (-1)^{\beta}; \tag{4.2}$$

où $\beta = \sum_{0<\mu<\lambda} m(\mu)$, μ représentant une valeur caractéristique de l'opérateur $K'(0)$.

On termine ce paragraphe par une formule utile pour le calcul du degré et qui résulte de la propriété additive du degré. Étant donné $y_0 \notin f(\partial\Omega)$, supposons que l'équation $f(x) = y_0$ admet un nombre fini de solutions $x_1, \cdots, x_N$. Alors, on a la

Proposition 4.1

$$deg\,(f, \Omega, y_0) = \sum_{i=1}^{i=N} i\,(f, x_i, y_0).$$

4.4 Application à une E.D.P. semi-linéaire

Dans cette section, nous verrons, sur un exemple, comment on peut calculer explicitement le degré par linéarisation et montrer qu'il est différent de 0.
Ω étant un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, on se propose d'étudier le problème suivant ([9])

$$\left\{\begin{array}{rcll} Au &=& g(u)+f, & \text{dans } \Omega \\ u &=& 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{array}\right. \tag{4.3}$$

où $A\colon\ H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ désigne l'opérateur divergentiel du second ordre uniformément elliptique et à coefficients L^∞ défini par

$$Au = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij})\frac{\partial u}{\partial x_j}\cdot$$

Hypothèses

Les fonctions f et g sont supposées vérifier les hypothèses suivantes :
• (H_1) $f \in L^2(\Omega)$.
• (H_2) $g\colon\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue vérifiant $\lim\limits_{|s|\to\infty} \frac{g(s)}{s} = \lambda$.

Théorème 4.4 *Si $\lambda \notin Sp(A)$, alors le problème (4.3) admet au moins une solution $u \in H_0^1(\Omega.)$*

Démonstration
Elle se fera essentiellement en deux étapes :
• **Première étape (Reformulation du problème)**
Afin de travailler dans un cadre général, nous allons considérer l'espace de Banach $X = L^2(\Omega)$ ainsi que l'application $K\colon\ X \times [0,1] \longrightarrow X$ définie par $K(u,t) = U$ où U est la solution du problème linéaire $Au = t\,(g(u)+f) + (1-t)(\lambda u + f) \equiv G(u)$, λ ayant été défini dans l'hypothèse (H_2). On a alors le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{G} & X & \xrightarrow{A^{-1}} & H_0^1 & \xrightarrow{i} & X \\ u & \longmapsto & G(u) & \longmapsto & U & \longmapsto & U \end{array}$$

où i est l'injection compacte de H_0^1 dans L^2 (cf §6.2.3). Si $K_t(u) = K(u,t)$, alors $K_t = i \circ A^{-1} \circ G$. On peut toujours supposer $g(0) = 0$ auquel cas la fonction g vérifie, grâce à l'hypothèse (H_2), la condition de croissance (5.2) ; d'après la proposition 5.4, l'application G envoie l'espace X dans lui-même et est continue, borné sur les bornés ; d'autre part, l'application A^{-1} est continue, compacte ([9]) ; par conséquent, K est une application compacte, uniformément continue en t. Afin de définir un degré, il suffit d'exhiber une boule contenant tous les points fixes possibles de l'application K_t.

• **Deuxième étape (estimations à priori)**

Montrons qu'il existe $R > 0$ tel que

$$\|(u,t)\|_{X\times[0,1]} < R, \qquad \text{pour tout point fixe } u \text{ de } K_t \text{ et } t \in [0,1]. \tag{4.4}$$

Raisonnons par l'absurde en supposant que

$$\forall\, R > 0, \quad \exists\, (u,t) \in X \times [0,1] \ \text{ tel que } \ \|(u,t)\|_{X\times[0,1]} > R$$

ou encore

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \exists\, (u_n,t_n) \in X \times [0,1] \ \text{ tel que } \ \|(u_n,t_n)\|_{X\times[0,1]} > n.$$

En remarquant que $|t_n| \leq 1$, on en déduit l'assertion suivante

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \exists\, u_n \in X \ \text{ tel que } \ \|u_n\|_X > n. \tag{4.5}$$

En posant $\tilde{u}_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_{L^2}}$ et en désignant par $\|.\|$ la norme L^2, on obtient

$$\|u_n\|.A\tilde{u}_n = t_n\,(g(\tilde{u}_n\|u_n\|) + f) + (1-t_n)(\lambda\|u_n\|\tilde{u}_n + f).$$

D'où

$$A\tilde{u}_n = t_n\frac{g(\|u_n\|\tilde{u}_n)}{\|u_n\|} + (1-t_n)\lambda\tilde{u}_n + \frac{f}{\|u_n\|} \equiv \tilde{G}(\tilde{u}_n). \tag{4.6}$$

Grâce à l'hypothèse (H_2), $|g(s)| \leq C(1+|s|)$; d'où l'inégalité

$$|g(u_n(x))|^2 \leq C^2(1+|u_n(x)|)^2.$$

En notant que $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, on tire l'estimation suivante

$$\int_\Omega |g(u_n(x))|^2\,dx \leq 2C^2\int_\Omega(1+|u_n(x)|^2)\,dx \leq C'\left(1+\int_\Omega |u_n(x)|^2\,dx\right),$$

où $C' = 2c^2 \max(1, |\Omega|)$. Par substitution, on obtient

$$\int_\Omega |g(\|u_n\|\tilde{u}_n(x))|^2\, dx \leq C'(1 + \|u_n\|)^2).$$

En utilisant (4.5), on trouve finalement

$$\int_\Omega \frac{|g(\|u_n\|\tilde{u}_n(x))|^2}{\|u_n\|^2}\, dx \leq C'\left(1 + \frac{1}{\|u_n\|^2}\right) \leq C'\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \leq 2C'.$$

D'autre part, $\|\tilde{u}_n\|^2 = 1$ et $\frac{\|f\|}{\|u_n\|} \leq \frac{\|f\|}{n} \leq \|f\|$; on déduit de (4.6) que $\tilde{G}(\tilde{u}_n)$ est borné dans $L^2(\Omega)$. Comme $\tilde{u}_n = (A^{-1} \circ \tilde{G})(\tilde{u}_n)$ où A^{-1} est compact et $\tilde{G}$ continue, la suite $(\tilde{u}_n)$ admet une sous-suite, encore notée $(\tilde{u}_n)$, convergeant fortement dans $L^2(\Omega)$ vers une fonction $\tilde{u}$ et p.p. dans Ω; la suite (t_n) converge vers t dans $[0,1]$. Or, $\|\tilde{u}_n\| = 1$ donc $\|\tilde{u}\| = 1$. Montrons enfin que la suite $\frac{|g(\|u_n\|\tilde{u}_n(x))|}{\|u_n\|}$ converge vers $\lambda\tilde{u}$ dans $L^2(\Omega)$ fort et ce, en appliquant le théorème de Lebesgue ; On a successivement les assertions suivantes :

(a) $\frac{g(\|u_n\|\tilde{u}_n)}{\|u_n\|} \in L^2(\Omega)$.

(b) $\frac{g(\|u_n\|\tilde{u}_n)}{\|u_n\|} = u_n \frac{|g(\|u_n\|\tilde{u}_n(x))|}{\|u_n\| u_n}$ converge vers $\lambda\tilde{u}$ p.p. dans Ω.

(c) $\frac{(\|u_n\|\tilde{u}_n(x))}{\|u_n(x)\|} \leq C\left(1 + \|u_n\|\frac{|\tilde{u}_n|}{\|u_n\|}\right) \leq C(1 + |\tilde{u}_n(x)|) \leq C$ car $\tilde{u}_n \xrightarrow{p.p.} \tilde{u}$.

L'opérateur A étant continu de L^2 dans L^2, on en déduit, par passage à la limite dans (4.6) que $A\tilde{u} = t\lambda\tilde{u} + (1-t)\lambda\tilde{u} = \lambda\tilde{u}$ avec $\tilde{u}_{|\partial\Omega} = 0$. Or, $\|\tilde{u}\| = 1$; alors $\tilde{u} \neq 0$ et $\lambda \in Sp(A)$, d'où la contradiction avec l'hypothèse du théorème. L'assertion (4.4) est donc prouvée ; on est alors en mesure de définir le degré $deg\,(I - K_t, B_R, 0)$ qui vaut $deg\,(I - \lambda A^{-1}, B_R, A^{-1}f)$. Pour la valeur $t = 0$, le problème linéaire

$$\begin{cases} Au &= \lambda u + f, \quad \text{dans } \Omega \\ u &= 0, \qquad\qquad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

admet une unique solution (noter que le problème homogène admet 0 pour unique solution) ; cette solution, étant isolée, le degré vaut, en vertu du corollaire 4.2, $(-1)^\beta = \pm 1 \neq 0$. L'existence d'une solution au problème (4.3) résulte des propriétés d'homotopie et de non nullité du degré.

4.5 Application au calcul du nombre de solutions d'un problème à croissance cubique

Dans cette section, on se propose de vérifier comment on peut utiliser les résultats précédents sur le calcul de l'indice pour non seulement prouver l'existence de solutions à des problèmes non linéaires mais aussi pour déterminer exactement leur nombre. Dans ce qui suit, nous traitons un exemple classique. Étant donné Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}^+$, on considère le problème semi-linéaire à valeur propre suivant (voir aussi le problème dans la section 2.6.2) :

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u - u^3, \quad \text{dans } \Omega \\ u &= 0, \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.7}$$

On note $X := C(\Omega)$ et on désigne par λ_1 et λ_2 les deux premières valeurs propres du Laplacien (6.10). Dans un premier temps, commençons par montrer une condition nécessaire d'existence :

Théorème 4.5 *Si $0 < \lambda \leq \lambda_1$, le problème (4.7) n'admet pas de solution non triviale*

Démonstration

Intégrons l'équation dans (4.7) sur Ω après l'avoir multipliée par u, on obtient l'identité suivante :

$$0 = \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \lambda \int_\Omega |u|^2\,dx + \int_\Omega |u|^4\,dx. \tag{4.8}$$

L'espace $H_0^1(\Omega)$ étant muni de la norme du gradient, la première valeur propre est caractérisée par l'estimation suivante (Lemme 6.10)

$$\lambda_1 \int_\Omega |u|^2\,dx \leq \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx.$$

Par suite,

$$\lambda_1 \int_\Omega |u|^2\,dx + \int_\Omega |u|^4\,dx - \lambda \int_\Omega |u|^2\,dx \leq 0.$$

Soit

$$(\lambda_1 - \lambda) \int_\Omega |u|^2\,dx + \int_\Omega |u|^4\,dx \leq 0.$$

On en déduit que $\lambda_1 < \lambda$; d'où le théorème.

En utilisant un résultat sur le calcul de l'indice, on va montrer le résultat suivant :

Théorème 4.6 *Si $\lambda \in]\lambda_1, \lambda_2[$, alors le problème (4.7) admet exactement trois solutions (y compris la solution triviale nulle).*

La démonstration, un peu longue, se fera en plusieurs étapes ; elle est basée sur quelques résultats préliminaires. Le premier fournit une estimation à priori.

Lemme 4.2 *Soit $u \in X$ une solution non triviale du problème (4.7). Alors il existe une constante positive C telle que*

$$\forall\, \lambda \in]\lambda_1, \lambda_2[, \quad \|u\|_X \leq C.$$

Démonstration

Soit u une solution non triviale ; utilisant (4.8) et appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$\int_\Omega |u|^4\, dx \leq \lambda \int_\Omega |u|^2\, dx \leq \lambda \left(\int_\Omega |u|^4\, dx \right)^{\frac{1}{2}} |\Omega|^{\frac{1}{2}}, \quad \forall\, \lambda > 0.$$

D'où les estimations

$$\begin{cases} \int_\Omega |u|^4\, dx & \leq \lambda^2 |\Omega| \\ \int_\Omega |u|^2\, dx & \leq \lambda |\Omega|. \end{cases}$$

Revenant à (4.7), on déduit l'inégalité

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \leq \lambda \int_\Omega |u|^2\, dx \leq \lambda^2 |\Omega|.$$

Par conséquent,

$$\|u\|_X = \sup_{u \in \Omega} |u(x)|^2 \leq |\Omega| \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \leq \lambda^2 |\Omega|^2 \leq \lambda_2^2 |\Omega|^2.$$

L'estimation demandée en découle.

Remarque 4.2 *L'estimation obtenue dans le lemme 4.2 demeure valide même pour $\lambda \in]\lambda_1, \lambda_n[$ avec n quelconque ; cependant, on verra dans la suite que la position de λ par rapport à λ_2 est essentielle.*

Nous allons maintenant reformuler le problème (4.7) en un problème de point fixe en introduisant l'application $K\colon\ X \longrightarrow X$ définie par $K(u) = U$ où U est la solution du problème linéaire

$$\begin{cases} -\Delta U &= \lambda u - u^3, \quad \text{dans } \Omega \\ \quad U &= 0, \qquad\qquad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Lemme 4.3 *L'application K est continue, compacte et Fréchet-différentiable en tout point fixe de K.*

Démonstration

Soit F l'opérateur de Nemytskii associé à la fonction $f(s) = \lambda s - s^3$, $L\colon\ = (-\Delta)^{-1}$ et i l'injection de C^2 dans C, alors il est clair que $K = i \circ L \circ F$. De plus, F est continue (Proposition 6.4) ; d'après l'estimation de Schauder (§6.2.1), L est également continu. Par le lemme d'Ascoli-Arzela, l'injection i est compacte ; d'où la première partie du lemme.

Étant donné un point fixe u_0 de l'application K, étudions la différentiabilité de K en u_0; pour tout $w \in X$, considérons la solution W du problème linéaire :

$$\begin{cases} -\Delta W &= \lambda w - 3u_0^2 w^3, \quad \text{dans } \Omega \\ \quad W &= 0, \qquad\qquad\quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

La fonction $V = K(u_0 + w)$ satisfait alors le problème

$$\begin{cases} -\Delta V &= \lambda(u_0 + w) - (u_0 + w)^3, \quad \text{dans } \Omega \\ \quad V &= 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

D'autre part, la fonction $Z = V - u_0 - W$ est solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta Z &= w^3 - 3u_0 w^2, \quad \text{dans } \Omega \\ \quad Z &= 0, \qquad\qquad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

De plus, $-w^3 - 3u_0 w^2 = o(\|w\|)$, quand $w \to 0$; par suite, de l'estimation de Schauder (§6.2.1), on en déduit que $\|Z\| = o(\|w\|)$, d'où l'égalité $K'(u_0).w = W$ puis le lemme.

Nous aurons également besoin du lemme suivant :

Lemme 4.4 *Soit u une solution non triviale associée à une valeur propre λ. Alors, pour toute fonction $w \in H_0^1(\Omega)$, on a la minoration suivante :*

$$\int_\Omega \left(|\nabla w|^2 + (u^2 - \lambda)w^2\right)\, dx \geq 0.$$

Démonstration

Soit u une solution associée à une valeur propre $\lambda > 0$. Considérons la fonctionnelle J définie dans $H_0^1(\Omega)$ par

$$J(w) = \int_\Omega |\nabla w|^2 \, dx + \int_\Omega (u^2 - \lambda) w^2 \, dx.$$

Utilisant un argument classique de minimisation des formes quadratiques, on peut montrer que le problème

$$\text{Trouver } z \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que } J(z) = \min_{w \in H_0^1(\Omega)} J(w)$$

admet au moins une solution. De plus, la dérivée au sens de Fréchet de la fonctionnelle J est définie par

$$\langle J'(w), v\rangle = 2 \int_\Omega \nabla w \nabla v \, dx + 2 \int_\Omega (u^2 - \lambda) wv \, dx,$$

le crochet désignant le produit de dualité entre $H^{-1}(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$. Le point critique z satisfait alors l'équation d'Euler $J'(z) = 0$ et donc le problème aux limites

$$\left\{ \begin{aligned} -\Delta z + (u^2 - \lambda) z &= 0, \quad \text{dans } \Omega \\ z &= 0, \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned} \right. \tag{4.9}$$

D'autre part, par multiplication de l'équation dans (4.9) par z puis par intégration par parties, on obtient l'équation $J(z) = 0$; puis le lemme par définition de J.

Le résultat qui suit permet de calculer explicitement l'indice :

Proposition 4.2 *Tout point fixe u_0 de l'opérateur K est un point isolé ; de plus on a les formules*

$$\forall\, \lambda \in]\lambda_1, \lambda_2[, \quad i\,(I - K, u_0, 0) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \textit{si } u_0 \neq 0 \\ -1, & \textit{si } u_0 = 0. \end{array} \right.$$

Démonstration

Afin d'appliquer le théorème 4.3, déterminons les valeurs caractéristiques de l'opérateur $K'(u_0)$. μ est valeur caractéristique de $K'(u_0)$ si et seulement s'il existe $w \neq 0$ tel que $\mu K'(u_0)w = w$. Raisonnant comme dans le lemme 4.4, on vérifie aisément que w est solution du problème aux limites

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\frac{\Delta w}{\mu} & = & \lambda w - 3u_0^2 w, & \text{dans } \Omega \\ w & = & 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{4.10}$$

En intégrant l'équation dans (4.10) sur Ω après l'avoir multipliée par w, on obtient l'identité

$$\frac{1}{\mu}\int_\Omega |\nabla w|^2\,dx - \lambda\int_\Omega w^2\,dx + 3\int_\Omega u_0^2 w^2\,dx.$$

Si μ est une valeur caractéristique inférieure ou égale à 1, on a

$$\int_\Omega |\nabla w|^2\,dx - \lambda\int_\Omega w^2\,dx + 3\int_\Omega u_0^2 w^2\,dx \leq 0. \tag{4.11}$$

Nous pouvons alors distinguer deux cas :

(i) $u_0 \neq 0$: D'après le lemme 4.4, on a la minoration

$$\int_\Omega |\nabla w|^2\,dx - \lambda\int_\Omega w^2\,dx + 3\int_\Omega u_0^2 w^2\,dx > \int_\Omega |\nabla w|^2\,dx - \lambda\int_\Omega w^2\,dx + \int_\Omega u_0^2 w^2\,dx \geq 0,$$

ce qui contredit (4.11) ; il n'existe donc aucune valeur caractéristique $\mu \leq 1$; alors $i\,(I-K, u_0, 0) = 1$ et toute solution non triviale est une solution isolée.

(ii) $u_0 \equiv 0$: en faisant $u_0 = 0$ dans (4.10), on obtient le problème aux limites

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\frac{\Delta w}{\mu} & = & \lambda w, & \text{sur } \Omega \\ w & = & 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{array}\right.$$

On en déduit d'une part que pour tout $\lambda \notin Sp(-\Delta)$, $\mu \neq 1$ et d'autre part $\lambda\mu \in Sp(-\Delta)$. Or, $0 < \mu < 1$ et $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$, d'où les inégalités

$$\lambda_1\mu < \lambda\mu < \lambda_2\mu < \lambda_2 \quad \text{et} \quad 0 < \lambda_1\mu < \lambda_1.$$

Par conséquent,

$$\lambda\mu \in Sp(-\Delta) \iff \lambda\mu = \lambda_1 \iff \mu = \frac{\lambda_1}{\lambda}\cdot$$

Comme $\frac{\lambda_1}{\lambda} < 1$, il existe alors une seule valeur caractéristique dans l'intervalle $(0,1)$ et elle est de multiplicité égale à 1. 0 est donc solution isolée et l'on a $i\,(I-K,0,0) = (-1)^1 = -1$.

Démonstration du théorème 4.6

Pour $t \in [0,1]$, considérons la déformation $K_t\colon\ X \longrightarrow X$ définie par $K_t(u) = U$ où U est la solution du problème linéaire

$$\begin{cases} -\Delta U &=& t(\lambda u - u^3), & \text{dans } \Omega \\ U &=& 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Les lemmes 4.2 et 4.3 nous permettent de définir le degré topologique $deg\,(I - K_t, B_{c+1}, 0)$ qui vaut, par homotopie, $deg\,(I, B_{c+1}, 0) = 1$, lequel est différent de 0. Ceci assure, d'une part l'existence d'au moins une solution au problème (4.7) et d'autre part, nous permet d'utiliser les propositions 4.1 et 4.2 pour arriver aux égalités $1 = deg\,(I - K_0, B_{c+1}, 0) = (-1) + N(1)$, où N désigne le nombre de solutions non triviales ; par suite, $N = 2$, ce qui complète la démonstration du théorème 4.6.

4.6 Application à un problème de bifurcation

Soit X et Y deux espaces de Banach, $J = (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta) \subset \mathbb{R}$ avec $(\lambda_0, \delta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, $\Omega \in X$ un voisinage de $x = 0$ et $F\colon\ J \times \Omega \longrightarrow Y$ une application continue telle que $F(\lambda_0, 0) = 0$.

Définition 4.2 $(\lambda_0, 0)$ *est appelé point de bifurcation s'il existe une suite* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ *et une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Omega \setminus \{0\}$ *telle que* $(\lambda_0, 0) = \lim\limits_{n\to\infty} (\lambda_n, x_n)$.

Proposition 4.3 *Si* $\frac{\partial F}{\partial x}(\lambda_0, 0)$ *existe et est un homéomorphisme local, alors* $(\lambda_0, 0)$ *n'est pas un point de bifurcation.*

Démonstration

En vertu du théorème des fonctions implicites, l'équation $F(\lambda, x) = 0$ admet $(\lambda_0, 0)$ comme solution unique dans un voisinage de ce point ; d'où la proposition.

Dans la suite, on supposera $X = Y$ et $F(\lambda, x) = x - \lambda L x - H(\lambda, x)$ où L est un opérateur linéaire compact et H une application compacte vérifiant $H(\lambda, x) =$

$o(\|x\|)$ quand $x \to 0$ uniformément en λ borné. Si $(\lambda_0, 0)$ est un point de bifurcation, la proposition 4.3 entraîne que 1 est valeur propre de $\frac{\partial H}{\partial x}(\lambda_0, 0)$.

Voici, à présent, une condition suffisante

Proposition 4.4 *Si $(\lambda_0, 0)$ est un point de bifurcation, alors λ_0 est une valeur caractéristique de l'opérateur L.*

Démonstration
Dans le cas contraire, l'opérateur $I - \lambda_0 L$ est inversible et donc il existe $k > 0$ tel que $\|(I - \lambda_0 L)x\| \geq kx$, pour tout $x \in \Omega$. Alors, pour tout $(\lambda, x) \in J \times \Omega$, on a les estimations suivantes

$$\begin{aligned}
\|x - \lambda Lx - H(\lambda, x)\| &= \|(I - \lambda_0 L)x + (\lambda_0 - \lambda)Lx - H(\lambda, x)\| \\
&\geq \|(I - \lambda_0 L)x\| - \|(\lambda_0 - \lambda)Lx - H(\lambda, x)\| \\
&\geq \|(I - \lambda_0 L)x\| - \|(\lambda_0 - \lambda)Lx\| - \|H(\lambda, x)\|.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\|x - \lambda Lx - H(\lambda, x)\| &\geq k\|x\| - |\lambda - \lambda_0|\|Lx\| + k'\|x\|^2, \quad (k' > 0) \\
&\geq \|x\|\,(k + k'\|x\|) - \|L\||\lambda - \lambda_0|.
\end{aligned}$$

Le terme de droite est strictement positif si $\|x\| \neq 0$ et $|\lambda - \lambda_0|$ sont assez petits. Par conséquent, l'équation $x = \lambda Lx + H(\lambda, x)$ admet 0 pour unique solution et $(\lambda_0, 0)$ n'est pas un point de bifurcation.

Remarque 4.3 *La réciproque de la proposition 4.4 est fausse ; en effet, si $X = Y = \mathbb{R}^2$ et si $F(\lambda, x) = (1 - \lambda)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2^2 \\ -x_2^3 \end{pmatrix}$ alors $L = I$ et 1 est valeur caractéristique de L ; pourtant $(\lambda_0, x_0) = (1, (0, 0))$ n'est pas un point de bifurcation car $F(\lambda, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Toutefois, notons que, sur cet exemple, la multiplicité de 1 est égale à 2. Cependant, lorsque la multiplicité algébrique de λ_0 est impaire, la réciproque de la proposition 4.4 est vraie ; c'est l'objet du résultat suivant dont la démonstration requiert justement la notion d'indice de Schauder.*

Théorème 4.7 *Si λ_0 est une valeur caractéristique de L, de multiplicité impaire, alors $(\lambda_0, 0)$ est un point de bifurcation.*

Démonstration
L'ensemble des valeurs caractéristiques de L étant dénombrable, soit λ_1 et λ_2 deux réels strictement positifs assez proches de λ_0 et tels que $[\lambda_1, \lambda_2] \cap \sigma(L) = \{\lambda_0\}$. Raisonnons, par l'absurde, en supposant que $(\lambda, 0)$ n'est pas point de bifurcation. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ et λ proche de λ_0 tels que $deg\,(F(., \lambda), B_\varepsilon(0), 0)$ est bien défini et est, en vertu de la propriété d'invariance par homotopie, indépendant de λ. De plus, pour tout λ qui n'est pas valeur caractéristique de L, on a, d'après le théorème 4.2

$$deg\,(F(., \lambda), B_\varepsilon(0), 0) = (-1)^\beta$$

où $\beta(\lambda) = \sum_{0<\mu<1,\, \mu \text{ v.c. de } \lambda L} m(\mu) = \sum_{0<\lambda\mu<\lambda,\, \lambda\mu \text{ v.c. de } L} m(\mu)$. Or, par définition de λ_1 et de λ_2, $\beta(\lambda_2) - \beta(\lambda_1)$ est égal à la multiplicité de λ_0. Comme, par hypothèse, cet entier est impair, on a

$$deg\,(F(., \lambda_1), B_\varepsilon(0), 0) = deg\,(F(., \lambda_2), B_\varepsilon(0), 0),$$

ce qui est contraire à la propriété d'invariance homotopique du degré.
Lorsque $(\lambda_0, 0)$ est un point de bifurcation, la notion de degré topologique permet encore de prouver le résultat important suivant très utile pour les applications ; pour la démonstration assez technique, nous renvoyons par exemple à [2], théorème 2.9.1.

Théorème 4.8 *Soit* $S = \{(\lambda, x) \in J \times \Omega\colon\ F(\lambda, x) = 0,\ x \neq 0\}$ *et* C *la composante connexe de* $\bar{S}$ *contenant* $(\lambda_0, 0)$. *Alors, on a l'alternative :*

(a) *Ou bien* C *est non bornée.*

(b) *Ou bien* C *contient un point* $(\lambda_1, 0)$ *où* λ_1 *est valeur caractéristique de* L, *différente de* λ_0.

4.7 Application à un problème de Sturm-liouville non linéaire

Soit l'opérateur de Sturm-Liouville linéaire défini par $\mathcal{L}u\colon = -(pu')' + qu$ où $p \in C^1([0, \pi])$ est une fonction strictement positive et $q \in C^0([0, \pi])$. Considérons le problème aux limites

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = \lambda a(x)u + f(x,u,u',\lambda), \quad 0 < x < \pi \\ a_0u(0) + b_0u'(0) = 0; \quad a_1u(\pi) + b_1u'(\pi) = 0 \end{cases} \tag{4.12}$$

où $a \in C^0([0,\pi])$ est une fonction strictement positive et où $f \in C^0([0,\pi]) \times \mathbb{R}^3)$ vérifie l'hypothèse $f(x,y,z,\lambda) = o(\|(y,z)\|)$, lorsque $\|(y,z)\|) \to 0$, uniformément par rapport à x et à λ dans les intervalles bornés.
Soit l'ensemble $E = \{u \in C^1([0,\pi]) : \ u$ vérifie les conditions aux bords dans (4.12)$\}$; le problème revient à chercher des solutions dans l'espace $E \times \mathbb{R}$ à l'équation $F(\lambda,u) = 0$ où $F(\lambda,u) = u - \lambda\mathcal{L}^{-1}(au) + \mathcal{L}^{-1}f$. Afin d'appliquer le théorème 4.8, nous allons déterminer les valeurs caractéristiques de l'opérateur $\mathcal{L}^{-1}(a)$. On a :
μ est valeur caractéristique de $\mathcal{L}^{-1}(a)$ si et seulement s'il existe $v \neq 0, \quad \mu\mathcal{L}^{-1}(av) = v$ ou encore si et seulement si

$$\begin{cases} \mu a v &= \mathcal{L}v, \quad 0 < x < \pi \\ a_0u(0) + b_0u'(0) &= 0; \quad a_1u(\pi) + b_1u'(\pi) = 0. \end{cases} \tag{4.13}$$

Ce problème admet une suite croissante de valeurs propres simples $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$; on déduit alors du théorème (4.8) que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(\mu_n, 0)$ est un point de bifurcation. Soit C_n la branche de bifurcation au point $(\mu_n, 0)$. La fonction propre ϕ_n possède $(n-1)$ zéros ; par application du principe du maximum, on peut vérifier que cela reste vrai pour C_n; par suite, C_n ne pouvant rencontrer un autre point de bifurcation $(\mu_m, 0)$, est alors bornée.

4.8 Application à une E.D.P. non linéaire

Considérons le problème aux limites

$$\begin{cases} \ell u &= \lambda a(x)u + f(x,u,\nabla u,\lambda), \quad \text{dans } \Omega \\ u_{|\partial\Omega} &= 0 \end{cases} \tag{4.14}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert borné, régulier et où

$$\ell u : \ = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x;u,\nabla u)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i,j=1}^{n} b_i(x;u,\nabla u)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x;u,\nabla u)u(x)$$

est un opérateur uniformément elliptique ; les coefficients a_{ij}, b_i, c, a $(a > 0)$ ainsi que la fonction f sont supposés de classe C^1. Supposons, en outre, que $f(x, y, z, \lambda) = o(\|(y, z)\|)$ lorsque $(y, z) \to (0, 0)$ uniformément en $x \in \bar{\Omega}$ et en λ dans les intervalles bornés. Soit $E = \{u \in C^{1,\alpha} \colon\ u_{|\partial\Omega} = 0\}$ avec $0 < \alpha < 1$ et soit $K \colon\ \mathbb{R} \times E \longrightarrow E$ l'application qui à (λ, U) associe la solution v du problème linéaire

$$\left\{\begin{array}{rcl} \ell_u v & = & \lambda a(x)u + f(x, u, \nabla u, \lambda), \qquad \text{dans } \Omega \\ v_{|\partial\Omega} & = & 0 \end{array}\right. \tag{4.15}$$

où

$$\ell_u v \colon = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x; u, \nabla u)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i,j=1}^{n} b_i(x; u, \nabla u)\frac{\partial v}{\partial x_i}\cdot$$

K est une application compacte (voir problème 5, question 2). La linéarisation du problème autour de $u = 0$ conduit au problème

$$\left\{\begin{array}{rl} \ell_0 \phi & = \lambda a(x)u + c(x, 0, 0)\phi = \mu a(x)\phi, \qquad \text{dans } \Omega \\ \phi_{|\partial\Omega} & = 0. \end{array}\right. \tag{4.16}$$

Grâce au théorème de Krein-Rutman (exercice 3.10), la première valeur propre μ_1 est simple et lui correspond une fonction propre ϕ_1 positive ; d'après le théorème 4.8, $(\mu_1, 0)$ est un point de bifurcation auquel correspond une composante connexe C_1. Utilisant le principe du maximum, on montre que toute fonction $v \in C_1$ est de signe constant dans Ω. Par conséquent, C_1 n'est pas bornée.

4.9 Exercices non résolus

Exercice 1

Soit i l'injection canonique de $C^2([0, a])$ dans $C([0, a])$ $(a > 0)$ et L l'application de $C([0, a])$ dans $C^2([0, a])$ définie par $L(f) = u$ où u est la solution du problème linéaire

$$\left\{\begin{array}{rcl} -u'' & = & f, \quad 0 < x < a \\ u(0) = u(a) & = & 0. \end{array}\right.$$

(1) Vérifier que l'opérateur $K = i \circ L$ est un opérateur compact.

(2) Exprimer en fonction de a les valeurs propres $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de l'opérateur $-u''$.

(3) Montrer que si $\lambda \in (\lambda_n, \lambda_{n+1})$, alors $deg\,(I - \lambda L, B_R(0), 0) = (-1)^n$, $\forall\, R > 0$.

Exercice 2

On considère le problème aux limites linéaire

$$\begin{cases} -u'' + \mu u &= 0, \quad 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) &= 0. \end{cases}$$

(1) Déterminer les valeurs propres de ce problème.

(2) Montrer que $deg\,(I - \lambda L, B_R(0), 0) = \begin{cases} 1, & \text{si } -\infty < \lambda < \pi^2 \\ (-1)^n, & \text{si } n^2\pi^2 < \lambda < (n+1)^2\pi^2. \end{cases}$

Exercice 3

Soit X et Y deux espaces de Banach, $B = B(0, R)$ une boule de rayon R dans X et $K\colon\ B \longrightarrow Y$ une application compacte. On suppose K asymptotiquement linéaire, c'est-à-dire qu'il existe un opérateur linéaire $L\colon\ B \longrightarrow Y$ tel que $\|Kx - Lx\| = o(\|x|)$, quand $\|x\| \to +\infty$ (on notera $L = K'(\infty)$).

(1-a) Montrer que L est un opérateur compact.

(1-b) Supposons que 1 ne soit pas valeur propre de L. Montrer que l'équation $Kx = x$ admet au moins une solution.

(2) Supposons K Fréchet-différentiable et vérifiant $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty} \|Kx - x\| = +\infty$. Si de plus 1 n'est pas valeur propre de $K'(x)$ $(x \in X)$, montrer que l'équation $Kx = x$ admet au moins une solution.

Exercice 4

Soit $A \in \mathcal{M}(n \times n)$ une matrice régulière et f une fonction continue possédant le comportement asymptotique suivant $f(x) = Ax + o(\|x\|^2)$, quand $x \to 0$. Montrer que $i\,(f, 0, 0) = (-1)^k$ où k désigne le nombre de valeurs propres négatives de la matrice A, comptées avec leur ordre de multiplicité.

Exercice 5

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ une fonction telle qu'il existe $\alpha > 0$ vérifiant

$$\nabla f(x) \neq 0, \qquad \text{pour tout } x,\ |x| \geq \alpha.$$

(1) Montrer qu'il existe $r_0 > 0$ tel que l'indice

$$i\,(\nabla f, 0, 0) = i(\nabla f) = deg\,(\nabla f, B_{r_0}(0), 0)$$

soit constant.

(2) Calculer l'indice $i(\nabla f)$ dans les cas suivants

(a) $f(x) = x.b$, pour $b \in \mathbb{R}^n$.

(b) $f(x) = \frac{1}{2}Ax.x$ où A est une matrice symétrique, non singulière.

(c) f est homogène.

(3) Montrer que si f est paire, l'indice $i(\nabla f)$ est impair.

(4) Supposons que $\lim\limits_{|x|\infty} f(x) = -\infty$. Montrer que $i(\nabla f) = (-1)^n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6

Ω étant un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, supposons $n \leq 4$. Soit λ_1 la première valeur propre du Laplacien et $\lambda \in]0, \lambda_1[$ un nombre réel. Considérons le problème aux limites :

$$(\Pi) \quad \begin{cases} -\Delta u - \lambda u + u^3 &= f, \qquad \text{dans } \Omega \\ u &= 0, \qquad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

(1) Montrer que le problème (Π) a une solution.

(2) Montrer qu'il existe une constante positive C telle que pour tout $f \in L^2$ vérifiant $|f|_{L^2(\Omega)} \leq C$, le problème (Π) admet une unique solution.

Exercice 7

Soit λ_1 la première valeur propre du laplacien et u_1 le vecteur propre correspondant et vérifiant $\int_\Omega u_1^2(x)\,dx = 1$. Montrer que le problème

$$\begin{cases} -\Delta u &= (u - u_1^+)^2, \qquad \text{dans } \Omega \\ u &= 0, \qquad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

admet au moins deux solutions, où $f^+ = \sup(f, 0)$ désigne la partie positive de f.

Exercice 8

On considère le problème aux limites

$$\begin{cases} u'' + \lambda f(u) &= 0, \quad 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) &= 0, \end{cases}$$

où $\lambda \geq 0$ et $f\colon \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction localement lipschitzienne vérifiant $f(x) = kx + o(x)$, quand $x \to 0^+$ et $k > 0$.

(1) Établir l'existence d'un continuum non borné C bifurquant aux points $(\frac{\pi^2}{k}, 0)$.

(2) Supposons qu'il existe $k' > 0$ tel que $f(x) \geq k'x$, pour tout $x > 0$. Montrer que C est bornée dans la direction λ.

(3) Supposons qu'il existe $x_0 > 0$ tel que $f(x_0) = 0$. Montrer que C est bornée dans la direction x.

Exercice 9

Soit X un espace de Banach et $F\colon \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$ une application définie par $F(\lambda, x) = x - K(\lambda, x)$ où K est une application compacte. Soit $\underline{\lambda} \leq \overline{\lambda}$ deux réels et $\underline{x}$ (respectivement $\overline{x}$) une solution de l'équation $F(\underline{\lambda}, \underline{x}) = 0$ (respectivement $F(\overline{\lambda}, \overline{x}) = 0$.) Montrer que si les indices de Schauder $i\,(F(\underline{\lambda}, .), \underline{x}, 0)$ et $i\,(F(\overline{\lambda}, .), \overline{x}, 0)$ sont différents, alors l'équation $F(\lambda, x) = 0$ admet au moins un point de bifurcation $(\lambda, x) = 0$ admet au moins un point de bifurcation (λ, x) tel que $\underline{\lambda} < \lambda < \overline{\lambda}$.

Exercice 10

On considère les problèmes à valeurs propres

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u + u^2 &= f, \quad \text{dans } \Omega \\ u &= 0, \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} -\Delta u + \lambda u + u^3 &= f, \quad \text{dans } \Omega \\ u &= 0, \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Étudier les points de bifurcation puis représenter les branches de bifurcation correspondantes.

Chapitre 5

PROBLÈMES RÉSOLUS

5.1 Problème 1 (genre d'un ensemble fermé et symétrique)

Soit E un espace de Banach réel. On désigne par $s(E)$ l'ensemble des parties fermées symétriques de E ne contenant pas l'origine. Pour toute partie $A \in S$, on appelle genre de A, et on note $\gamma(A)$, l'entier défini par

$$\gamma(A) = \inf\{n \in \mathbb{N}^* \colon \exists\, \phi \colon A \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ continue et impaire}\}.$$

On pose $\gamma(\emptyset) = 0$ et $\gamma(A) = \infty$ s'il n'existe pas de tel entier.
(1-a) Vérifier que

$$\gamma(A) = \inf\{n \in \mathbb{N}^* \colon \exists\, \phi \colon A \to S^{n-1} \text{ continue et impaire}\}.$$

(1-b) Montrer que $\gamma(S^{n-1}) = n$.
(2) Soit $(A, B) \in s(E)^2$. Établir les propriétés suivantes du genre :

(a) S'il existe une fonction continue, impaire de A vers B, alors $\gamma(A) \leq \gamma(B)$.

(b) S'il existe un homémorphisme, impaire de A vers B, alors $\gamma(A) = \gamma(B)$.

(c) $A \subset B \implies \gamma(A) \leq \gamma(B)$ (le genre est croissant).

(d) $\gamma(A \cup B) \leq \gamma(A) + \gamma(B)$ (le genre est sous-additif).

(e) Si A est compact, alors $\gamma(A) < \infty$.

(f) Si A est compact, il existe un voisinage fermé de A ayant le même genre que A, i.e.

$$\exists\, \varepsilon > 0 \text{ tel que si } A_\varepsilon = \{x \in E:\ d(x, A) \leq \varepsilon\},\ \text{alors } \gamma(A_\varepsilon) = \gamma(A).$$

(g) Si $\gamma(B) < \infty$, alors $\gamma(\overline{A \setminus B}) \geq \gamma(A) - \gamma(B)$.

(3) Soit $f\colon\ S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction continue, impaire. On considère l'ensemble $A = \{x \in S^{n-1}:\ f(x) = 0\}$ et on suppose $n > m$.

(a) Vérifier que $A \neq \emptyset$.

(b) Montrer que $\gamma(A) \geq n - m$.

(c) Conclure.

(4) Si $A \in s(E)$, considérons l'entier

$$m = \inf\{p \in \mathbb{N}^*:\ A \subset \bigcup_{i=1}^{i=p} A_i,\ A_i \in S(E) \text{ et } \gamma(A_i) = 1,\ \forall\, i = 1, \cdots, p\}.$$

Montrer que $\gamma(A) = m$.

Corrigé

(1-a) Notons

$$E\colon = \{n \in \mathbb{N}^*:\ \exists\, \phi\colon\ A \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ continue et impaire}\}$$

et

$$F\colon = \{n \in \mathbb{N}^*:\ \exists\, \phi\colon\ A \to S^{n-1} \text{ continue et impaire}\}.$$

Alors $E = F$. En effet, il suffit de remarquer que si $\phi\colon\ A \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est une fonction continue, impaire et si $P = P_{|S^{n-1}}$ désigne la projection radiale sur S^{n-1} ($P(x) = \frac{x}{\|x\|}$ est l'intersection de la demi-droite $[0, x)$ avec la sphère S^{n-1}), alors l'application $(P \circ \phi)\colon\ A \to S^{n-1}$ est continue, impaire. Réciproquement, si $\phi\colon\ A \to S^{n-1}$ est une fonction continue, impaire, alors l'application $(I_{|S^{n-1}} \circ \phi)\colon\ A \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est une fonction continue, impaire.

(1-b) L'application identité $I_{|S^{n-1}}\colon\ S^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ étant une fonction continue, impaire, $\gamma(S^{n-1}) \leq n$. Si $\gamma(S^{n-1}) < n$, alors il existe une fonction continue, impaire $\phi\colon\ S^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. D'après le théorème de Borsuk-Ulam, il existe $x \in S^{n-1}$ tel que $\phi(x) = 0$, ce qui est absurde.

(2) Soit A et B deux éléments de $s(E)$.

(a) Si $\gamma(B) = \infty$, il n' y a rien à montrer ; sinon $\gamma(B) = n$ et il existe alors une fonction continue, impaire $\phi\colon\ B \to S^{n-1}$. Considérons une fonction continue, impaire $f\colon\ A \longrightarrow B$; la fonction $(\phi \circ f)$ est donc continue, impaire de A vers S^{n-1}; par conséquent, $\gamma(A) \leq n = \gamma(B)$.

(b) Découle de (a).

(c) Il suffit de considérer l'injection canonique de A sur B et d'appliquer la question (1-a).

(d) Si $\gamma(A)$ ou $\gamma(B)$ est infini, il n'y a rien à démontrer ; sinon, il existe deux fonctions continues, impaires

$$\phi\colon\ A \to S^{n-1} \text{ et } \phi\colon\ B \to S^{n-1}.$$

Par le théorème d'extension de Tietze-Uryshon, on peut prolonger ces fonctions en des fonctions $\tilde{\phi}$ et $\tilde{\psi}$ continues sur E; quitte à prendre les parties impaires de ces fonctions, on peut supposer ces extensions impaires. La fonction $h\colon\ E \to \mathbb{R}^{m+n}$ définie par $h(x) = (\tilde{\phi}(x), \tilde{\psi}(x))$ est une fonction continue, impaire et vérifie $h(x) \neq 0$, $\forall\, x \in A \cap B$. Il en résulte que $\gamma(A \cup B) \leq m + n$.

(e) Soit $x_0 \in A$ et $r < |x_0|$ un nombre réel ; alors $\bar{B}(x_0, r) \cap \bar{B}(-x_0, r) = \emptyset$. De plus, $\gamma\left(\bar{B}(x_0, r) \cup \bar{B}(-x_0, r)\right) = +1$; en effet, il suffit de prendre $\phi(x) = +1$ si $x \in \bar{B}(x_0, r)$ et $\phi(x) = -1$ si $x \in \bar{B}(-x_0, r)$ dans la définition du genre. La famille de boules $\{B(x_0, r) \cup B(-x_0, r),\ x_0 \in A\}$ recouvre l'ensemble A; ce dernier, étant compact, il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{i=n} \left\{B(x_0^i, r) \cup B(-x_0^i, r), \right\}.$$

En vertu des propriétés d'additivité et de croissance du genre, on déduit que $\gamma(A) \leq n_0$; d'où le résultat.

(f) L'ensemble A étant compact, posons $n = \gamma(A)$ puis considérons une fonction continue, impaire $\phi\colon\ A \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$; par le théorème de Tietze-Uryshon, la fonction

ϕ est prolongeable à E tout entier par une fonction continue, impaire $\tilde{\phi}$. Montrons l'assertion suivante :

$$\exists\, \varepsilon > 0 \;\text{ tel que }\; \tilde{\phi}(x) \neq 0, \;\; \forall\, x \in A_\varepsilon. \tag{5.1}$$

Dans le cas contraire, il existe $x_n \in E$ tel que $\tilde{\phi}(x_n) = 0$ et $d(x_n, A) \leq \frac{1}{n}\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$. A étant compact, la distance $d(x_n, A)$ est, pour tout entier n, atteinte :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\; \exists\, y_n \in A : \; d(x_n, y_n) = d(x_n, A).$$

Autrement dit

$$\exists\, x_n \in E,\; \exists\, y_n \in A : \; d(x_n, A) \leq \frac{1}{n},\; \forall\, n \in \mathbb{N}^*. \tag{5.2}$$

De plus, la suite (y_n) admet une sous-suite (y_{n_k}) convergente vers $y \in A$. Par passage à la limite dans (5.2), on obtient $\lim\limits_{k\to\infty} d(x_{n_k}, y) = 0$ et donc $\lim\limits_{k\to\infty} \tilde{\phi}(x_{n_k}) = \tilde{\phi}(y)$. Enfin, $\tilde{\phi}(x_{n_k}) = 0$ entraîne $\tilde{\phi}(y) = 0$. Comme $y \in A$ alors $\phi(y) = 0$, ce qui est contradictoire. On déduit alors de (5.1), l'inégalité

$$\gamma(A_\varepsilon) \leq n. \tag{5.3}$$

En vertu de la question (c), on a

$$A \subset A_\varepsilon \implies n \leq \gamma(A_\varepsilon). \tag{5.4}$$

De (5.3) et (5.4), on obtient finalement la formule $\gamma(A_\varepsilon) = n$.
(g) Utilisant les propriétés (c) et (d) du genre, on obtient l'implication

$$A \subset B \cup (\overline{A \setminus B}) \implies \gamma(A) \leq \gamma\Big(B \cup (\overline{A \setminus B})\Big) \leq \gamma(B) + \gamma(\overline{A \setminus B});$$

d'où le résultat demandé.
(3-a) D'après le théorème de Borsuk-Ulam, l'ensemble A est non vide.
(b) D'après la question (1-f), il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\gamma(A_\varepsilon) = \gamma(A)$. Considérons l'ensemble

$$B_\varepsilon = \{x \in S^{n-1} : \; |f(x)| \geq \varepsilon\}.$$

La fonction $f\colon\ B_\varepsilon \longrightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ est continue, impaire ; donc

$$\gamma(B_\varepsilon) \leq m. \tag{5.5}$$

Montrons à présent l'assertion suivante

$$\exists\, \varepsilon_0 \ \text{ tel que } \ \overline{S^{n-1} \setminus B_\varepsilon} \subset A_\varepsilon, \ \forall\, \varepsilon \in]0, \varepsilon_0]. \tag{5.6}$$

Par l'absurde, supposons l'existence de deux suites $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_*^+$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^{n-1}$ telles que $\lim\limits_{n_to\infty} \varepsilon_n = 0$, $|f(x_n)| \leq \varepsilon_n$ et $d(x_n, A) \geq \varepsilon$. S^{n-1} étant compacte, il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente vers $x \in S^{n-1}$ telle que $f(x) = 0$, ce qui contredit la définition de A. On déduit alors de la question (2-g), de (5.5) et de (5.6), les inégalités

$$\gamma(A) = \gamma(A_\varepsilon) \geq \gamma\left(\overline{S^{n-1} \setminus B_\varepsilon}\right) \geq \gamma(S^{n-1}) - \gamma(B_\varepsilon) \geq \gamma(S^{n-1}) - m = n - m.$$

Ce résultat montre que l'ensemble A est non vide, ce qui permet de généraliser le théorème de Borsuk-Ulam ; il donne également une information sur la taille ou plutôt sur le genre de cet ensemble A.

(4) Nous aurons besoin de l'assertion suivante que nous montrerons plus loin. Soit $A \in s(E)$ un ensemble de genre n ; alors

$$\exists\, A_i \in s(E) \ \text{ tel que } \ \gamma(A_i) = 1, \ \forall\, i \in \{1, \cdots, n\} \ \text{ et } \ A \subset \bigcup_{i=1}^{i=n} A_i. \tag{5.7}$$

Pour montrer la quatrième question, nous procédons en deux étapes :

(a) S'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A \subset \bigcup_{i=1}^{i=p} A_i$ avec $\gamma(A_i) = 1$, pour tout i, alors d'après la formule d'additivité $\gamma(A) \leq p$ et en passant à l'infinimum, on obtient $\gamma(A) \leq m$.

(b) D'après (5.7), il existe des ensembles $a_i \in s(E)$ tel que $\gamma(A_i) = 1$, pour tout i et $A \subset \bigcup_{i=1}^{i=\gamma(A)} A_i$. Par définition de m, on déduit que $m \leq \gamma(A)$ et finalement, $\gamma(A) = m$.

Vérifions à présent l'assertion (5.7). On peut vérifier que la sphère S^{n-1} peut être recouverte par des fermés antipodaux B_i $(1 \leq i \leq n)$. Si $f\colon\ A \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ est une fonction continue, impaire et si $P = P_{|S^{n-1}}$ désigne la projection radiale sur S^{n-1}, alors les ensembles $A_i = (P \circ f)^{-1}(B_i)$ répondent à la question.

5.2 Problème 2 (mesure de non compacité de Kuratowski)

Soit X un espace de Banach et $A \subset X$ une partie bornée. On définit le réel $\alpha(A) = \inf D$ où

$$D = \{d > 0 : A \quad \text{admet un recouvrement fini} \\ \text{par des ensembles de diamètre inférieur ou égal } d\}.$$

Ce nombre s'appelle *m*esure de non compacité de Kuratowski[1].

(1) Montrer que si A et B sont deux parties bornées de X, alors

(a) $0 \leq \alpha(A) \leq diam(A)$.

(b) $A \subset B \implies \alpha(A) \leq \alpha(B)$ (α est croissante).

(c) $\alpha(A \cup B) = \max(\alpha(A), \alpha(B))$.

(d) $\alpha(A + B) \leq \alpha(A) + \alpha(B)$ (α est sous-additive.).

(e) $\alpha(A + x) = \alpha(A)$, $\forall\, x \in X$ (α est invariante par translation).

(f) $\alpha(Conv\, A)) = \alpha(A)$.

(g) $\alpha(A) = \alpha(\bar{A})$.

(h) $\alpha(A) = 0 \iff A$ est relativement compacte.

(i) α est une semi-norme sur $\mathcal{P}(X)$.

(2-a) Supposons l'espace X de dimension infinie et soit $B(0, 1)$ la boule unité dans X. Montrer que $\alpha(B) = \alpha(\bar{B}) = \alpha(\overset{\circ}{B}) = \alpha(\partial B) = 2$.

(2-b) Si $B(x_0, R)$ désigne la boule ouverte de centre x_0 et de rayon R, en déduire les mesures $\alpha(B(x_0, R))$ et $\alpha(\partial B(x_0, R))$.

(3) Soit (X, d) un espace métrique complet et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fermés, bornés non vide de X telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha(F_n) = 0$.

(a) Montrer que $\cap_{n\in\mathbb{N}} F_n = F_\infty$ est un ensemble compact, non vide.

(b) Retrouver le théorème des intervalles emboités puis étudier les cas particuliers où X est quelconque et $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0$ puis $X = \mathbb{R}^n$.

[1]Kuratowski, K. (1930). Sur les espaces complets. Fund. math. 15, pp. 301-309.

Corrigé

(1)

(a) Soit $\{A_i\}_{1\leq i\leq n}$ un recouvrement de l'ensemble A; alors

$$\alpha(A) \leq d(A_i) \leq d(A), \quad \forall\, i \in [1, n].$$

(b) Tout recouvrement de l'ensemble B est un recouvrement de A.

(c) Posons $C = A \cup B$; d'après (b), on a les implications

$$A \subset A \cup B \implies \alpha(A) \leq \alpha(A \cup B) \quad et\ B \subset A \cup B \implies \alpha(A) \leq \alpha(A \cup B).$$

Par suite, $\max(\alpha(A), \alpha(B)) \leq \alpha(A \cup B)$. Réciproquement, par définition de $\alpha(A)$ et de $\alpha(B)$, les assertions suivantes ont lieu :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\,(A_i)_{1\leq i\leq n},\ \exists\,(B_i)_{1\leq i\leq m} \text{ tels que } A \subset \bigcup_{i=1}^{i=n} A_i,\ B \subset \bigcup_{i=1}^{i=n} B_i, \text{ et}$$
$$d(A_i) \leq \alpha(A) + \tfrac{\varepsilon}{2},\ d(B_i) \leq \alpha(B) + \tfrac{\varepsilon}{2},\ \forall\, i \in [1, n],\ \forall\, j \in [1, m].$$

Comme les ensembles $C_i = \{A_i \cup B_i\}_{1\leq i\leq n;\, 1\leq j\leq m}$ recouvrent l'ensemble $A \cup B$, on a pour tout $\varepsilon > 0$, $d(C_i) \leq \max(\alpha(A), \alpha(B) + \varepsilon)$; d'où l'inclusion réciproque puis l'égalité demandée.

(d) Si $\{A_i\}_{1\leq i\leq n}$ et $\{B_i\}_{1\leq i\leq m}$ sont deux recouvrements respectifs des ensembles A et B, les ensembles $\{A_i + B_j\}_{1\leq i\leq n,\, 1\leq j\leq m}$ recouvrent la somme $A + B$. Or, $d(A_i + B_j) \leq d(A_i) + d(B_j)$, pour tout $(i, j) \in [1, n] \times [1, m]$; d'où le résultat.

(e) Écrivant $A = (A + x) - x$ et utilisant (d), on obtient successivement

$$\alpha(A + x) \leq \alpha(A) + \alpha(x) \ \text{ et } \ \alpha(A) \leq \alpha(A + x) + \alpha(-x).$$

Or, $\alpha(x) = \alpha(-x) = 0$; d'où l'égalité $\alpha(A) = \alpha(A + x)$, pour tout x dans A.

(f) (i) Comme $A \subset Conv(A)$, $\alpha(A) \leq \alpha\,(Conv(A))$.

(ii) Réciproquement, écrivons

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\,\{A_i\}_{1\leq i\leq n} \text{ tel que } A \subset \bigcup_{i=1}^{i=n} A_i \text{ et } d(A_i) \leq \alpha(A) + \varepsilon,\ \forall\, i \in [1, n].$$

Comme, pour tout i, $d(A_i) = d(Conv(A_i))$, on peut supposer les ensembles A_i convexes. De plus, la réunion de toutes les combinaisons convexes des ensembles A_i est aussi un ensemble convexe contenant l'ensemble A et contient donc l'enveloppe convexe de A ; il existe alors un ensemble d'indices J tel que

$$Conv(A) \subset \bigcup_{j\in J,\, 0<\lambda_{ij<1}} \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_{ij} A_i.$$

L'ensemble à droite étant compact, il existe un entier p tel que

$$Conv(A) \subset \bigcup_{j=1,\, 0<\lambda_{ij<1}}^{j=p} \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_{ij} A_i + \bar{B}(0,\varepsilon).$$

Par conséquent,

$$\alpha(Conv\, A) \leq \max_{1\leq j\leq p} \left(\alpha\left(\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_{ij} A_i \right)\right) + \alpha\left(\bar{B}(0,\varepsilon)\right).$$

En utilisant la propriété (1-d), la définition de A et de la question (2-b), on obtient

$$\alpha(Conv\, A) \leq \max_{1\leq j\leq p} \left(\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_{ij}\alpha(A_i) \right) + 2\varepsilon \leq \alpha(A) + \varepsilon + 2\varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ étant choisi de façon arbitraire, on a l'inclusion réciproque puis l'égalité demandée.

(g)

1. (i) $A \subset \bar{A} \Longrightarrow \alpha(A) \leq \alpha(\bar{A})$.
2. (ii) Réciproquement, on l'assertion suivante

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \{A_i\}_{1\leq i\leq n} \text{ tel que } A \subset \bigcup_{i=1}^{i=n} A_i \text{ et } d(A_i) \leq \alpha(A) + \varepsilon,\ \forall\, i \in [1, n].$$

Comme $\bar{A} \subset \bigcup_{i=1}^{i=n} \bar{A}_i$ et $d(A_i) = d(\bar{A}_i)$, pour tout i, on a l'inclusion réciproque $\alpha(\bar{A}) \leq \alpha(A)$ puis l'égalité demandée.

(h) A est relativement compacte si et seulement si

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \{A_i\}_{1\leq i\leq n} \text{ tel que } A \subset \bigcup_{i=1}^{i=n} A_i \text{ et } d(A_i) \leq \varepsilon,\ \forall\, i \in [1, n]$$

si et seulement si $\alpha(A) = 0$.

(i) En vertu de la question (1-d), il reste à vérifier que $\alpha(\lambda A) = |\lambda|\alpha(A)$ laquelle découle de la définition.

(2)

(a) D'après la question (1-a), $\alpha(B) \leq d(B) = 2$. Supposons, par l'absurde que $\alpha(B) < 2$; alors il existe $\{B_i\}_{1\leq i\leq n}$ tel que $B \subset \bigcup_{i=1}^{i=n} B_i$ et $d(B_i) < 2$, pour tout $i \in [1, n]$. De plus, on peut choisir les ensembles A_i fermés. Si F est un espace de dimension n, les ensembles $\{B_i \cap F\}_{1\leq i\leq n}$ recouvrent la boule unité $B\cap F$. Or, d'après le théorème de Ljusternik-Schnirelman (exercice 11, chapitre 1), pour couvrir $\partial B_r(0)$ dans $\mathbb{R}^n$, on a besoin d'au moins $(n + 1)$ ensembles antipodaux. Il existe alors $x \in E$ et $i_0 \in \{1, n\}$ tel que $x \in B_{i_0} \cap F$. Par suite

$$2 \leq d(B_{i_0} \cap F) \leq d(B_{i_0} < 2 + \varepsilon,\ \forall\, \varepsilon > 0,$$

ce qui est absurde.

(b) $\alpha(B_R\alpha(x_0)) = \alpha(RB_1(0)) = R\alpha(B_1(0)) = 2R.$

(3) Soit B un ensemble compact de X et $A = F^{-1}(B)$. Alors

$$\alpha(A) = \alpha(A - B + B) \leq \alpha(A \setminus B) + \alpha(B) = \alpha(A \setminus B).$$

Or, $F = I - K$, alors $B \setminus A \supset -K(B)$. Par suite, $\alpha(A) \leq \alpha(K(B)) = 0$ car $K(B)$ est relativement compact donc compacte car fermé comme l'image d'un fermé par l'application propre (donc fermée) F.

(4)

(a) Remarquons d'abord que la suite (F_n) étant décroissante, on a $\alpha(F_\infty) \leq \alpha(F_n)$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Comme de plus $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0$, alors $\alpha(F_\infty) = 0$; par suite F_∞ est relativement compact donc compact car fermé. Il reste donc à vérifier que cet ensemble est non vide. Interprétons l'hypothèse $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0$:

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} :\ n \geq N_\varepsilon \implies \alpha(F_n) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.8}$$

De plus, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\exists\, N_n \in \mathbb{N}$, $\exists\, (A_i)_{1\leq i\leq N_n}$,

$$F_{N_\varepsilon} \subset \bigcup_{i=1}^{i=N_n} A_i \text{ et } d(A_i) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En particulier, en utilisant (5.8), on a

$$\begin{array}{c}\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,N_\varepsilon\in\mathbb{N},\ \forall\,n\geq N_\varepsilon,\ \exists\,P_{N_\varepsilon},\ \exists\,{A_i^{N_\varepsilon}}_{1\leq i\leq P_{N_\varepsilon}},\\ F_n\subset\bigcup_{i=1}^{i=P_{N_\varepsilon}}A_i^{N_\varepsilon}\ \text{ et }\ d(A_i^{N_\varepsilon})<\alpha(F_n)+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.\end{array}\tag{5.9}$$

Comme, pour tout $n\in\mathbb{N}$, les ensembles F_n sont non vides, on a

$$\forall\,n\geq N_\varepsilon,\ \exists\,x_n\in F_n.$$

Utilisant (5.9), on obtient ainsi une suite d'élements (x_n) telle que

$$(x_n)_{n\geq N_\varepsilon}\subset\bigcup_{i=1}^{i=P_{N_\varepsilon}}A_i^{N_\varepsilon}.$$

Choisissons alors $\varepsilon=1$. L'ensemble des indices $n\geq N_1$ étant infini, il existe $i_1\in\{1,\cdots,P_{N_1}\}$ et il existe un ensemble infini d'indices $j_1\subset[N_1,+\infty[$ tels que

$$x_j\in A_{i_1}^{N_1},\quad\forall\,j\in J_1.$$

De même, pour $\varepsilon=2$, il existe $J_2\subset J_1$, $i_2\in\{1,\cdots,P_{N_2}\}$ tels que

$$x_j\in A_{i_2}^{N_2},\quad\forall\,j\in J_2.$$

Par récurrence, pour $\varepsilon=\frac{1}{k+1}$, on obtient un ensemble d'indices $J_{k+1}\subset J_k$ ainsi que $i_{k+1}\in\{1,\cdots,P_{N_{k+1}}\}$ tel que

$$x_j\in A_{i_{k+1}}^{N_{k+1}},\quad\forall\,j\in J_{k+1}.$$

On a donc montré l'assertion suivante

$$\begin{array}{c}\text{Pour tout }\ k\in\mathbb{N}^*,\ \text{ il existe }\ N_k\in\mathbb{N}\\ \text{et une suite décroissante d'ensembles d'indices }\ J_k\subset[N_k,+\infty[\cap\mathbb{N}\\ \text{tels que }\ x_j\in A_{i_k}^{N_k},\ \forall\,j\in J_k.\end{array}\tag{5.10}$$

Construisons maintenant une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ de la manière suivante : considérant un entier $n_k\in J_k$, on choisit un entier $n_{k+1}\in J_{k+1}$ tel que $n_{k+1}>n_k$; alors $n_{k+1}\in J_k$ et la suite (x_{n_k}) est une sous-suite extraite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. De plus,

$$n_j>n_k\implies n_j\in J_j\subset J_k\implies x_{n_k},x_{n_j}\in A_{i_k}^{N_k}.$$

Il résulte alors de (5.9) et (5.10) que

$$d(x_{n_k}, x_{n_j}) < \frac{1}{k}, \quad \forall\, k > 0.$$

La suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ ainsi construite est donc une suite de Cauchy ; l'espace X étant complet, cette suite converge vers un élement $x \in X$. Par construction même de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, la limite $x \in F_\infty$.

(b) Si $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0$, alors $\cap_n F_n = \{x\}$ car à ce moment $\delta(F_\infty) = 0$. Si l'espace $X = \mathbb{R}^n$, l'ensemble F_n étant fermé, borné est compact ; par suite $\alpha(F_n) = 0$. On en déduit que toute suite décroissante de fermés, bornés est d'intersection non vide.

5.3 Problème 3 (Théorèmes de point fixe de Darbo, Sadovski)

Définition 5.1 *Soit (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces métriques et $f\colon E_1 \longrightarrow E_2$ une fonction continue. Si A est une partie de E_1, $\alpha(A)$ désigne la mesure de non compacité de Kuratowski (Problème 2).*

(a) *On dit que f est une contraction d'ensembles si f est bornée et s'il existe $k \geq 0$ telle que $\alpha(f(A)) \leq k\alpha(A)$, pour toute partie bornée A de E_1.*

(b) *f est dite $k-$contraction d'ensembles stricte si $k < 1$.*

(c) *f est condensante si elle est bornée et si $\alpha(f(A)) < \alpha(A)$, pour toute partie bornée A de E_1 vérifiant $\alpha(A) > 0$.*

Dans ce qui suit, $E = E_1 = E_2$ et un espace de Banach.

(1) Montrer que

(a) Si f est $k-$lipschitzienne, c'est une $k-$contaction d'ensembles.

(b) f est une $0-$contraction d'ensembles si et seulement si f est compacte.

(2) Soit $F \subset E$ une partie fermée, bornée de E et $f\colon F \longrightarrow E$ une application condensante.

(a) Montrer que l'application $(I-f)$ est propre et fermée.

(b) En déduire que ce résultat reste vrai si f est une $k-$contraction stricte.

(3) Soit $f, g\colon\ E \longrightarrow E$ deux fonctions continues.

(a) Supposons f une k_1-contraction et g une k_2-contraction. Montrer que la somme $f+g$ est une k_1+k_2-contraction et que $f\circ g$ est une $k_1.k_2-$contraction d'ensembles.

(b) Étudier la composée d'une application compacte et d'une $k-$contraction d'ensembles puis la somme d'une application compacte et d'une application contractante.

(4) Soit $C \subset E$ une partie convexe, fermée, bornée non vide de E et soit $f\colon\ C \longrightarrow C$ une fonction continue.

(a) Supposons que f soit une $k-$contraction stricte et considérons la suite récurrente définie par

$$\begin{cases} C_0 &= 0 \\ C_{n+1} &= \overline{Conv}(f(C_n)), \quad n \geq 0. \end{cases}$$

(i) Montrer que $\tilde{C} = \cap_n C_n$ est un espace compact, convexe, non vide.

(ii) Montrer que la fonction $f\colon\ \tilde{C} \longrightarrow \tilde{C}$ admet au moins un point fixe dans $\tilde{C}$.

(b) En supposant f condensante, en déduire que f admet au moins un point fixe dans C (c'est le théorème de Darbo[2], Sadoski[3]).

Corrigé

(1)

[2]Darbo G. (1955), Punti uniti in transformazioni a codiminio non compatto. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 24, pp. 84-92.

[3]Sadovski B.N. (1972) Limit-compact and condensing operators. Russ. Math. Surveys 27, pp. 85-155.

(a) Soit A un ensemble borné de E et de mesure $\alpha(A) = \mu$; alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini $\{A_i\}_{1 \leq i \leq N}$ de A tel que

$$d(A_i) \leq \mu + \frac{\varepsilon}{k}, \quad \forall\, i \in [1, N].$$

Comme f est $k-$lipschitzienne, $d(f(A_i)) \leq kd(A_i)$, pour tout $i \in [1, N]$. Par suite, pour tout $\varepsilon > 0$, $(f(A_i))_{1 \leq i \leq N}$ est un recouvrement de $f(A)$ et l'on a

$$d(f(A_i)) \leq k\mu + \varepsilon, \quad \forall\, i \in [1, N].$$

Par conséquent, $\alpha(f(A)) \leq k\alpha(A)$.

(b) D'après le problème 2, question (1-h), la fonction f est une $0-$contraction d'ensembles si et seulement si pour toute partie bornée A, $\alpha(f(A)) = 0$; ce qui équivaut à dire que $f(A)$ est relativement compacte.

(2)

(a) Soit K un compact de F et $L = (I - f)^{-1}(K)$, alors $L - f(L) = K$, c'est-à-dire $L = f(L) + K$. D'après la question (1-d) du problème 2, on a l'égalité

$$\alpha(L) \leq \alpha(f(L)) + \alpha(K) = \alpha(f(L)).$$

Si L n'était pas compact, $\alpha(f(L)) < \alpha(L)$ et donc $\alpha(L) < \alpha(L)$; d'où la contradiction. Enfin, notons que toute application propre est une application fermée.

(b) Découle du fait que toute $k-$contraction stricte est une application condensante.

(3)

(a) Découle de la définition.

(b) D'après les questions (2-a) et (1-a,b), la composée d'une application compacte et d'une $k-$contraction d'ensembles est une application compacte alors que la somme d'une application compacte et d'une application contractante et une $k-$contraction stricte.

(4)

(a) **(i)** Vérifions, par récurrence, que la suite $(C_n)_{n\mathbb{N}}$ est décroissante ; en effet, si $C_n \subset C_{n-1}$, alors $f(C_n) \subset f(C_{n-1})$ et donc

$$Conv\,(f(C_n)) \subset Conv\,(f(C_{n-1}))\,;$$

d'où $C_{n+1} \subset C_n$. D'autre part, en vertu de la $k-$contraction stricte de la fonction f et des questions (1-f), (1-g) du problème 2, il existe $0 < k < 1$ tel que

$$0 \le \alpha(C_{n+1}) \le k\alpha(C_n) < k^{n+1}\alpha(C_0),$$

ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha(C_n) = 0$. En vertu de la question (4-a) du problème 2, on déduit finalement que $\tilde{C}$ est un compact, convexe, non vide.

(ii) De la relation limite $\tilde{C} = \overline{Conv}\, f(\tilde{C})$, on déduit que f envoie $\tilde{C}$ dans lui-même ; par le théorème de Schauder, $\tilde{f}$ admet au moins un point fixe dans $\tilde{C}$.

(b) – *P*remière méthode. Considérons la suite $k_n = 1 - \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$; alors, pour tout n, la fonction $g_n = k_n f$ est une k_n-contraction stricte ; grâce à la question (a-ii), elle admet au moins un point fixe $x_n \in \tilde{C} : x_n = k_n f(x_n)$. C étant compact, la suite (x_n) admet une sous-suite (x_{n_k}) convergente vers un élément x_0; à la limite, on obtient $x_0 = f(x_0)$ avec $x_0 \in \tilde{C} \subset C$; d'où le résultat.

– *D*euxième méthode. L'ensemble C étant non vide, considérons $x_0 \in C$ puis posons $S = \{f^n(x_0); \quad n \in \mathbb{N}^*\}$. Alors $S \neq \emptyset \implies f(S) \neq \emptyset$; de plus, on peut vérifier que $S = f(S) \cup \{x_0\}$. On en déduit que, d'une part $\alpha(f(S)) \le f(S)$ et d'autre part $\alpha(S) \le \max(\alpha(f(S)), \alpha(x_0)) = \alpha(f(S))$. Par suite, $\alpha(f(S)) = \alpha(S)$. Comme f est condensante, nécessairement $\alpha(S) = 0$, ce qui montre que S est relativement compacte. Il existe donc une sous-suite $(f^m(x_0))$ convergente vers $f(y)$: $\lim\limits_{m\to\infty} f^{m+1}(x_0) = f(y)$; par conséquent $f(y) = y$.

5.4 Problème 4 (Théorème de Kneser, 1893 - Fukuhara, 1928)

Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' &= f(t,x), \quad -a < t < a \\ x(0) &= 0 \end{cases} \tag{5.11}$$

où $f\colon [-a,a] \times \bar{B}_b(0) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction continue ($a,\ b > 0$). On note R le rectangle $[-a,a] \times \bar{B}_b(0)$ puis on pose $M = \sup_R |f(t,x)|$ et $\alpha = \inf(a, \frac{b}{m})\cdot$ Le problème (5.11) admet au moins une solution locale définie sur l'intervalle $[-\alpha,\alpha]$. Montrer que l'ensemble de ces solutions est connexe. En particulier, pour tout $t \in [-\alpha,\alpha]$, l'ensemble

$$C_t = \{x(t)\colon \quad x \text{ est solution de (5.11) sur } [-\alpha,\alpha]\}$$

est connexe.

Corrigé

On considère l'espace de Banach $E = C\left([-\alpha,\alpha];\bar{B}_b(0)\right)$ et $T\colon E \longrightarrow E$ l'application définie par $Kx(t) = \int_0^t f(s,x(s))\,ds$. La fonction f étant bornée sur R, K est une application compacte. De plus, tout point fixe x de cette application vérifie, pour tout $t \in [-\alpha,\alpha]$, l'estimation $\|x(t)\| \le \alpha M \le b$. Par suite, si Ω désigne l'ouvert $\{x \in E\colon \ \|x\| < b+1\}$, le degré $\deg(I-K,\Omega,0)$ est bien défini et vaut, par homotopie $\deg(I,\Omega,0) = 1$.
Supposons maintenant que l'ensemble C des solutions ne soit pas connexe ; alors il existe deux ouverts U et V de Ω tels que

$$C \subset U \cup V,\ C \cap U \neq \emptyset,\ C \cap V \neq \emptyset \text{ et } \bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset.$$

On a donc, d'après les propriétés d'additivité et d'excision du degré

$$\deg(I-K,\Omega,0) = \deg(I-K,U,0) + \deg(I-K,V,0). \tag{5.12}$$

Comme $C \cap V \neq \emptyset$, l'application K admet au moins un point fixe $v \in V$. D'autre part, K admet au plus un point fixe dans $\bar{\Omega}$; en effet, supposons dans le cas contraire, l'existence de deux solutions x_1 et x_2 puis posons $z = x_1 - x_2$; alors

$$\begin{aligned} z(t) = K(x_1) - K(x_2)(t) \quad &= \int_0^t f(s, x_1(s))\, ds - \int_0^t f(s, x_2(s))\, ds \\ &= \int_0^t \left(f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))\right)\, ds. \end{aligned}$$

Quitte à approcher la fonction f, on peut la supposer de classe C^1, et donc localement lipschitzienne ; par suite

$$\|z(t)\| \leq \int_0^t k(s)\|z(s)\|\, ds.$$

Il en résulte, d'après le lemme de Grönwall que $\|z(t)\| \leq 0$ et finalement $z(t) \equiv 0$. Comme déjà $K(v) = v$, alors l'application K n'a aucun point fixe dans U, ce qui entraîne, d'après la propriété de non nullité du degré, que $\deg(I - K, U, 0) = 0$. On montre, de la même manière, que $\deg(I - K, V, 0) = 0$ ce qui contredit l'égalité (5.12).

5.5 Problème 5 (Théorème de Leray - Schauder, 1934)

Soit X un espace de Banach et $T\colon \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$ une application compacte vérifiant $T(0, x) = 0$, pour tout $x \in X$. On s'intéresse aux solutions (λ, x) de l'équation

$$T(\lambda, x) = x \tag{5.13}$$

lorsque $(0, 0)$ est la seule solution dans $\{0\} \times X$. Si $T(\lambda, x) = \lambda K(x)$ où K est une application compacte, le théorème du point fixe de Schauder assure l'existence de point fixe lorsque $|\lambda|$ est assez petit ; mais on peut aussi obtenir un résultat d'existence globale. Dans ce qui suit, $\mathcal{C}$ désigne la composante connexe de solutions contenant $(0, 0)$ dans $\mathbb{R} \times X$.

(1) Montrer que

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-$$

où $\mathcal{C}^+$ (resp. $\mathcal{C}^-$) est non borné dans $\mathbb{R}^+ \times X$ (resp. dans $\mathbb{R}^- \times X$) et $\mathcal{C}^+ \cap \mathcal{C}^- = \{0\}$.
(2) Application : considérons le problème aux limites

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = F(x, u, \nabla u, \lambda) & \text{dans } \Omega \\ u_{|\Omega} = 0 \end{cases} \tag{5.14}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert borné, régulier et

$$\mathcal{L}u = -\sum_{i,j=1}^{i,j=n} a_{ij}(x; u, \nabla u)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{i=n} b_i(x; u, \nabla u)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x; u, \nabla u)u$$

est un opérateur uniformément elliptique ; les coefficients a_{ij}, b_i, c ainsi que la fonction F sont supposés de classe C^1 et $c \geq 0$. Supposons, en outre que $f(x, y, z, 0) = 0$, $\forall\,(x, y, z) \in \Omega \times \mathbb{R}^2$ ce qui est en particulier vrai si $F(x, y, z, \lambda) = \lambda G(x, y, z)$.
Étudier la structure de l'ensemble des solutions au problème (5.14).

Corrigé

(1) Soit $S \subset \mathbb{R} \times X$ l'ensemble des solutions de l'équation (5.13). Raisonnons par l'absurde en supposant $\mathcal{C}^+$ borné dans $\mathbb{R}^+ \times X$. On va utiliser l'assertion suivante, dont on diffère la démonstration :

$$\text{Il existe } \mathcal{O} \text{ ouvert de } \mathbb{R}^+ \times X \text{ tel que } \mathcal{C}^+ \subset \mathcal{O} \text{ et } \partial\mathcal{O} \cap S = \emptyset. \tag{5.15}$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, considérons l'ouvert

$$\mathcal{O}_\lambda = \{x \in X : \ (\lambda, x) \in \mathcal{O}\}.$$

Par définition de $\mathcal{O}$, le degré topologique $\deg\,(I - T(\lambda, .), \mathcal{O}_\lambda, 0)$ est bien défini et est indépendant de λ. Pour $\lambda = 0$, $T(0, 0) = 0$ et donc ce degré vaut 1; d'autre part, pour λ suffisamment grand, ce degré est nul car à ce moment $\mathcal{O} = \emptyset$; d'où une contradiction.
Montrons à présent (5.15) en considérant un voisinage $\mathcal{C}_\varepsilon$ d'ordre ε de $\mathcal{C}^+$ dans $\mathbb{R}^+ \times X$ ($\varepsilon > 0$ fixé). $S \cap \overline{\mathcal{C}}_\varepsilon$ est un espace métrique compact ; les ensembles $A = \mathcal{C}^+$ et $B = S \cap \partial\mathcal{C}_\varepsilon$ sont compacts, disjoints dans $S \cap \overline{\mathcal{C}}_\varepsilon$. Il existe alors deux compacts $K_1 \supset A$ et $K_2 \supset B$ tels que $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ et $S \cap \overline{\mathcal{C}}_\varepsilon = K_1 \cup K_2$. Soit

$\delta = \inf\left(d(K_1, K_2), d(K_1, \partial\mathcal{C}_\varepsilon)\right) > 0$ et $\mathcal{O}$ le voisinage d'ordre $\frac{\delta}{2}$ de K_1 dans $\mathbb{R}^+ \times X$; ce voisinage vérifie bien (5.15).

(2) Soit $X = \{u \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})\colon\ u_{|\partial\Omega} = 0\}$ avec $0 < \alpha < 1$ et $T\colon\ \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$ l'application qui à (λ, u) associe la solution v du problème linéaire

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\sum_{i,j=1}^{i,j=n} a_{ij}(x; u, \nabla u)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} & & \\ & + & \sum_{i=1}^{i=n} b_i(x; u, \nabla u)\frac{\partial v}{\partial x_i} + c(x; u, \nabla u)v \\ & = & F(x, u, \nabla u, \lambda) \quad \text{ dans } \Omega \\ v_{|\Omega} & = & 0. \end{array}\right.$$

Si $u \in X$, alors d'après l'estimation de Schauder, $v \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ lequel s'injècte de manière compacte dans $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$; l'application T est alors compacte. En vertu de la question (1), la composante connexe de solutions $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R} \times X$ contenant $(0,0)$ est telle que $\mathcal{C} = \mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-$ où $\mathcal{C}^+$ (resp. $\mathcal{C}^-$) est non borné dans $\mathbb{R}^+ \times X$ (resp. dans $\mathbb{R}^- \times X$) et que $\mathcal{C} \cap^+ \mathcal{C}^- = \{(0,0)\}$.

5.6 Problème 6 (un problème de Cauchy dans un espace de Banach)

Soit X un espace de Banach, $I = [0, a]$ et $f\colon\ I \times X \longrightarrow X$ une fonction continue. On considère le problème de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & f(t, x) \quad t \in I \\ x(t_0) & = & x_0. \end{array}\right. \tag{5.16}$$

Si f est localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable x, le problème (5.16) admet une unique solution maximale définie sur un intervalle $J \subset I$. Supposons que f est une application complètement continue vérifiant l'hypothèse de croissance

$$\exists\, k > 0, \quad \|f(t, x)\| \leq k(1 + \|x\|) \quad \text{ sur } I \times X. \tag{5.17}$$

Montrer que le problème (5.16) admet au moins une solution globale en temps.

Corrigé

Considérons l'espace de Banach $E = C(I \times X)$ et l'application $F\colon E \longrightarrow E$ définie par

$$Fx(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds.$$

On a les assertions suivantes :

(a) Tout point fixe de F appartient à une boule fermée de E. En effet,

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| + k \int_{t_0}^{t} (1 + \|x\|)\ ds \leq k' + k \int_{t_0}^{t} \|x\|\, ds.$$

Par le lemme de Grönwall, on en déduit que

$$\forall\, t \in I, \quad \|x(t)\| \leq k' \exp(kt) \leq k' \exp(ka) = C.$$

Pour tout $R > C$, le degré $\deg(I - F, B_R(0), 0)$ est donc bien défini (ainsi d'ailleurs que $\deg(I - tF, B_R(0), 0)$, pour tout $t \in [0, 1]$).

(b) F est compacte. En effet, si (x_n) est une suite bornée de E, alors $(., x_n(.))$ est bornée dans $I \times X$; comme f est compacte, la suite $f(., x_n(.))$ admet une sous-suite $f(., x_{n_k}(.))$ convergente dans X. De plus, f étant continue sur le compact I, y est uniformément continue ; par conséquent $f(., x_{n_k}(.))$ converge uniformément sur I; d'où la convergence uniforme sur I de la suite (Fx_{n_k}). Par conséquent, pour tout $t \in I$, $(Fx_n)(t)$ est relativement compacte dans X. Enfin, la suite (Fx_n) est une famille équicontinue. En effet, raisonnant comme en (a), on obtient sans difficulté l'estimation suivante :

$$\begin{array}{rcl} |Fx_n(t) - Fx_n(t')| & = & |\int_t^{t'} f(s, x_n(s))\, ds| \\ & \leq & k \int_t^{t'} (1 + \|x_n(s)\|)\ ds \leq kk'|t - t'|. \end{array}$$

Grâce au lemme d'Ascoli-Arzela, la famille (Fx_n) est relativement compacte ; d'où la compacité de F.

(c) Utilisant la propriété d'invariance homotopique du degré, on a

$$\deg(I - tF, B_R(0), 0) = \deg(I, B_R(0), 0) = 1 \neq 0.$$

L'équation $(I - F)(x) = 0$, et donc le problème (5.16), admet au moins une solution $u \in C(I, X) \cap B_R(0)$. D'après le théorème de prolongement des solutions, c'est une solution globale en temps.

5.7 Problème 7 (un problème différentiel abstrait)

Soit E un espace de Banach et F un espace vectoriel normé. Considérons un espace vectoriel normé X, appelé espace pivot dans le diagramme suivant où les injections i et j sont respectivement continue et compacte :

$$E \xrightarrow{i} X \xrightarrow{j} F.$$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $L \in \mathcal{L}(E, F)$ un opérateur différentiel. On considère le problème aux limites

$$\begin{cases} Lu &= f(u) \qquad \text{dans } \Omega \\ Bu &= 0 \qquad\quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{5.18}$$

où $f\colon F \longrightarrow F$ est une fonction continue et où B est un opérateur de dérivation au bord de Ω tel que l'opérateur L associé à B soit injectif.
Soit u solution du problème (5.18). Supposons satisfaite les hypothèses suivantes :

(H1) $\exists\, C > 0, \quad \|u\|_E \leq C\|Lu\|_F.$

(H2) $\exists\, k > 0,\ \exists\, \delta \in [0, 1[, \quad \|f(u)\|_F \leq k\|u\|_F^\delta.$

Montrer que le problème (5.18) admet au moins une solution.

Remarque 5.1 **(a)** *L'opérateur L peut représenter un opérateur différentiel du second ordre du type $Lu = u'' + b(t)u' + c(t)u$ alors que B peut être une condition aux bords quelconque.*

(b) *$L \in \mathcal{L}(E, F)$ étant injectif, l'opérateur inverse L^{-1} existe et est, d'après l'hypothèse (H1), continue, borné.*

(c) *L'hypothèse (H2) est une hypothèse de croissance alors que la première est une hypothèse de régularité.*

Corrigé

(1) Formulation du problème.

Considérons, pour tout $t \in [0, 1]$, l'application $K_t\colon X \longrightarrow X$ définie par

$K_t(u) = U$, où U est la solution du problème linéaire :

$$\begin{cases} LU = tf(u) & \text{dans } \Omega \\ BU = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.19}$$

Cette application est bien définie d'après la partie (b) de la remarque 5.1.

(2) Estimations à priori.

Soit u_t un point fixe de K_t; d'après les hypothèses (H1) et (H2) et la continuité de l'injection j, on a les estimations suivantes dans lesquelles on a omis le paramètre t

$$\|u\|_E \leq C\|Lu\|_F = C\|f(u)\|_F \leq Ck\|u\|_F^\delta \leq Ck\|u\|_X^\delta.$$

En vertu de la continuité de l'injection i, il en résulte que

$$\|u\|_E \leq Ckk'\|u\|_E^\delta.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Appliquons l'inégalité de Young avec $p = \frac{1}{\delta}$, on obtient l'existence d'une constante positive C_ε telle que

$$\|u\|_E \leq \varepsilon\|u\|_E + C_\varepsilon$$

et finalement, pour ε assez petit

$$\|u\|_E \leq \frac{C_\varepsilon}{1 - C_\varepsilon} \equiv R. \tag{5.20}$$

(3) K_t est compacte.

Soit $\Omega = B_{R+1}(0)$ la boule ouverte de rayon $R + 1$ dans E. Pour tout élement u bornée dans X,, on a d'après les hypothèses (H1) et (H2) et la continuité de l'application j, les estimations suivantes :

$$\|u\|_E \leq C\|Lu\|_F \leq Ck\|u\|_X^\delta < +\infty.$$

U est alors bornée dans E et par conséquent $i(U) = U$ est relativement compacte dans X en vertu de la compacité de l'injection i; d'où le résultat.

(4) K_t est continue.

Soit (u_n) une suite convergente vers une limite u dans X, donc dans F; la fonction f étant continue, la suite $f(u_n)$ converge vers $f(u)$ dans F et l'on a

$$\lim_{n\to\infty} \|L(U_n) - LU\|_X = 0.$$

D'autre part

$$\|U_n - U\|_X \leq C'\|U_n - U\|_E \leq CC'\|L(U_n - U)\|_F \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par conséquent, la suite (U_n) converge vers U dans X.

(5) Conclusion.

Le degré topologique $\deg(I - tL^{-1}f, \Omega, 0)$ est donc bien défini et vaut 1 par homotopie ; d'où l'existence d'au moins une solution au problème (5.18).

5.8 Problème 8 (un problème d'ondes progressives)

On se propose d'étudier le problème suivant, dit de Fisher, sur un intervalle borné de $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} -u'' + cu' &= u(1-u) \quad 0 < x < a \\ u'(0) &= cu(0), \quad u(a) = 1. \\ u(0) &= \gamma \end{cases} \tag{5.21}$$

où $0 < \gamma < 1$ est une constante donnée tandis que $c \geq 0$ est considérée comme inconnue au même titre que u (valeur propre du problème) ; ceci justifie la présence d'une condition supplémentaire en 0. Il est possible d'étendre l'étude de ce problème à $\mathbb{R}^+$ ou même à $\mathbb{R}$ tout entier.[4] Mais nous nous contentons ici de prouver un résultat d'existence sur un intervalle $[0, a]$.

Montrer que, pour tout $a \geq 1$, le problème (5.21) admet au moins une solution $(u, c) \in C^2([0, a] \times \mathbb{R}^*_+$.

[4]Berestycki H., Nicolaenko B. et Scheurer B. Traveling wave solutions to combustion models and their singular limits. SIAM J. Math. Anal., 16, 1207-1242 (1985)

Corrigé

(a) Estimation à priori de la solution u.

Soit (u, c) $(c \geq 0)$ une solution du problème (5.21) ; alors on a les estimations ponctuelles suivantes :

$$0 \leq u \leq 1,\ 0 < u' < c,\ 0 < c. \tag{5.22}$$

Pour montrer la positivité de u, on raisonne par l'absurde en supposant l'existence d'un point $x_0 \in]0, a[$ tel que $u(x_0) < 0$, $u'(x_0) = 0$ et $u''(x_0) \geq 0$; alors $u(x_0)(1 - u(x_0)) > 0$ ce qui est contradictoire. On montre de façon similaire que $u \leq 1$; par conséquent $u(1 - u) \geq 0$ sur $]0, a[$ et, vu la condition en a, $u'(a) \geq 0$. Écrivons l'équation dans (5.21) sous la forme

$$-\left(u'e^{-cx}\right)' = u(1-u)e^{-cx} \geq 0$$

puis intégrons cette inéquation entre $x < a$ et a ; on obtient

$$u'(x)e^{-cx} \geq 0, \quad \forall\, x \in [0, a].$$

D'autre part, la fonction $(-u' + cu)$ est une fonction croissante ; par suite

$$(-u' + cu)(x) \geq 0, \quad \forall\, x \in [0, a] \implies u'(x) \leq cu \leq c, \quad \forall\, x \in [0, a].$$

Supposons, par l'absurde, que $c = 0$. Alors $u'' = -u(1-u)$; d'où la décroissance de la fonction dérivée de u. Comme $u'(0) = 0$, il en résulte que $u'(x) \leq 0$, $\forall\, x \in [0, a]$, ce qui contredit la condition $u(a) = 1$ et $u \leq 1$.

(b) Estimation de la valeur propre c.

Multiplions l'équation dans (5.21) successivement par 1, u et par u' puis intégrons entre 0 et a; on obtient les identités suivantes :

$$-u'(a) + c = \int_0^a u(1-u)(x)\,dx \tag{5.23}$$

$$-u'(a) + \frac{c}{2}(1+\gamma^2) + \int_0^a |u'(x)|^2\,dx = \int_0^a u^2(1-u)(x)\,dx \tag{5.24}$$

$$-\frac{1}{2}|u'(a)|^2 + \frac{1}{2}c^2\gamma^2 + c\int_0^a |u'(x)|^2\,dx = \int_\gamma^1 s(1-s)\,ds. \tag{5.25}$$

Notant que $0 \leq u \leq 1$, on déduit de (5.23), (5.24) la majoration suivante :

$$\int_0^a |u'(x)|^2\,dx \leq \frac{c}{2}(1-\gamma^2)$$

laquelle insérée dans (5.25) fournit à son tour la minoration de la constante c :

$$\int_\gamma^1 s(1-s)\,ds \leq \frac{c^2}{2} \iff c \geq \sqrt{2\int_\gamma^1 s(1-s)\,ds}. \tag{5.26}$$

Pour majorer c, on introduit le problème linéaire suivant

$$\begin{cases} -v'' + cv' &= 1 \\ v'(0) &= cv(0) \\ v(a) &= 1. \end{cases}$$

Par un argument de comparaison, on déduit que $u(x) \leq v(x),\ \forall\, x \in [0,1]$; de plus, un calcul simple montre que $v(x) = k_1 + k_2 e^{cx} + \frac{x}{c}$ où k_1 et k_2 sont données par les formules $k_1 = \frac{1}{c^2}$ et $k_2 = \left(1 - \frac{a}{c} - \frac{1}{c^2}\right)e^{-ac}$. Par conséquent, l'inégalité $u(0) \leq v(0) \iff \gamma \leq k_1 + k_2$ s'écrit

$$0 < \gamma \leq \frac{1}{c^2}\left(1 - e^{-ac}\right) + \left(1 - \frac{a}{c}\right)e^{-ac}$$

et donc

$$0 < \gamma \leq \frac{1}{c^2} + e^{-ac}. \tag{5.27}$$

A présent, nous allons établir l'estimation suivante

$$0 < c \leq \max\left(\sqrt{\frac{2}{\gamma}}, \ln\left(\frac{2}{\gamma}\right)\right). \tag{5.28}$$

En effet, si $c > \sqrt{\frac{2}{\gamma}}$ alors $\frac{1}{c^2} < \frac{\gamma}{2}$ ce qui, avec (5.27), donne $\frac{\gamma}{2} < e^{-ac}$ puis $0 < c < -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{2}{\gamma}\right) < -\ln\left(\frac{\gamma}{2}\right)$ pour tout $a \geq 1$; d'où (5.28).

(c) Définition et calcul d'un degré topologique.

Considérons l'espace de Banach $X = C^1([0,a]) \times \mathbb{R}$ muni de la norme du sup et soit $K_t\colon X \longrightarrow X$ l'application définie, pour tout $t \in [0,1]$ par $K_t(u,c) = (U, c - u(0) + \gamma)$ où U est la solution du problème linéaire

$$\begin{cases} -U'' + cU' &= t(1-u)u, \quad 0 < x < a \\ U'(0) &= cU(0) \\ U(a) &= 1. \end{cases} \tag{5.29}$$

Les estimations développées dans les deux premières étapes tiennent encore pour un point fixe quelconque de l'application K_t ; par suite, en vertu de (5.22), (5.27) et (5.28), l'ouvert suivant contient toutes les solutions possibles

$$\Omega = \{(u,c) \in X;\ \|u\|_{C^1([0,a])} < 1 + c \text{ et } \underline{c} < c < \bar{c}\}.$$

D'autre part, on peut vérifier que l'application K_t est continue ; de plus, sa compacité résulte de celle de l'injection $H^2(]0,a[\hookrightarrow C^1([0,a])$. En effet, si u est bornée dans $C^1([0,a])$, U est bornée dans $H^2(]0,a[$.
Le degré topologique $\deg(I - K_t, \Omega, 0)$ est donc bien défini et vaut, par homotopie $\deg(I - K_0, \Omega, 0)$ avec

$$(I - K_0)(u,c) = \left(u - e^{c(x-a)}, e^{-ac} - \gamma\right).$$

La première composante est homotope à l'application identité ; son degré vaut donc 1; quant à la seconde, elle est strictement décroissante ; son degré est égal à -1. Grâce à la propriété multiplicative du degré, on déduit finalement que $\deg(I - K_0, \Omega, 0) = -1$. L'application K_t, et en particulier K_1, admet donc au moins un point fixe dans Ω, donc solution du problème (5.21).

5.9 Problème 9 (un problème aux limites linéaire)

On considère le problème aux limites linéaire :

$$(\Pi) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} -u'' + b(x)u' + c(x)u & = & f(x) \\ u(0) = u(1) & = & 0 \end{array} \right.$$

où c, $f \in C([0,1])$ et $b \in C^1([0,1])$.

1-(a) Montrer que si $c(x) \geq 0$, $\forall x \in [0,1]$, le problème (Π) admet une unique solution $u \in C^2([0,1])$.

1-(b) Vérifier, sur un contre-exemple, que ce résultat est faux si la fonction c est de signe quelconque.

2- La fonction c étant de signe quelconque, on suppose que

$$(\mathcal{H}) \quad \alpha :\ = \min\left(c(x) - \frac{1}{2}b'(x)\right) \geq -\frac{8}{\pi}$$

puis on considère la famille d'applications $K_\lambda\colon C^1(0,1) \to C^1(0,1)$, paramètrées par $\lambda \in [0,1]$, où U est la solution du problème

$$(\Pi_\lambda) \quad \begin{cases} -U'' + \lambda b(x)U' + \lambda c(x)U &= \lambda f(x) \\ U(0) = U(1) &= 0. \end{cases}$$

Dans la suite u désignera un point fixe de K_λ.

2-(a) Établir l'estimation suivante : $\forall\, \varepsilon > 0$,

$$\int_0^1 |u'(x)|^2\, dx + \lambda\alpha \int_0^1 |u(x)|^2\, dx \le \varepsilon \int_0^1 |u(x)|^2\, dx + \frac{1}{4\varepsilon} \int_0^1 |f(x)|^2\, dx.$$

2-(b) En déduire que, pour tout $0 < \varepsilon < \frac{8}{\pi} + \alpha$, on a, pour $\alpha' = \min(0, \alpha)$:

(i) $\int_0^1 |u(x)|^2\, dx \le \frac{1}{4\varepsilon(\frac{8}{\pi} + \alpha' - \varepsilon)} \int_0^1 |f(x)|^2\, dx$

(ii) $\exists\, k > 0, \quad \int_0^1 |u'(x)|^2\, dx \le k \int_0^1 |f(x)|^2\, dx$

(iii) $\|u\|_\infty \le \sqrt{k \int_0^1 |f(x)|^2\, dx}$

2-(c) Montrer l'existence de deux constantes positives k_1, k_2 telles que

(i) $\|u'\|_\infty \le k_1 \|f\|_\infty$

(ii) $\|u''\|_\infty \le k_2 \|f\|_\infty$.

2-(d)

(i) Montrer que le degré topologique $deg(I - K_\lambda, \Omega, 0)$, où $\Omega \subset C^1(0,1)$ est un ouvert à déterminer, est bien défini.

(ii) En déduire que le problème linéaire (Π) admet au moins une solution $u \in C^2([0,1])$.

Indication. On pourra utiliser, après vérification, l'inégalité de Poincaré améliorée

$$\int_0^1 |u(x)|^2\, dx \le \frac{\pi}{8} \int_0^1 |u'(x)|^2\, dx,$$

sachant que $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\, ds = \frac{\pi}{8}$.

Corrigé

1-(a) Si $c \geq 0$ sur (a, b), l'existence de solutions au problème (Π) est une conséquence du principe de maximum et de l'Alternative de Fredholm.

1-(b) Considérons le problème aux limites :

$$(\Pi_0) \quad \begin{cases} -u'' + \pi^2 u &= \sin(\pi x),\ 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) &= 0. \end{cases}$$

Le problème homogène associé admet la famille de solutions $u(x) = k\sin(\pi x)$, $(k \in \mathbb{R})$ et donc le problème (Π_0) admet une solution si et seulement si, d'après l'Alternative de Fredholm, $\int_0^1 \sin^2(\pi x)\, dx = 0$, ce qui est impossible.

2-(a) Multiplions l'équation dans (Π_λ) par u puis intégrons par parties ; il vient :

$$\int_0^1 |u'(x)|^2\, dx \; - \; \tfrac{1}{2}\int_0^1 |b'(x)u'(x)|^2\, dx \; + \; \int_0^1 |c(x)u'(x)|^2\, dx = \int_0^1 f(x)u(x)\, dx$$

et donc, en utilisant la définition de α ainsi que l'inégalité de Young (6.5), on obtient l'estimation

$$\int_0^1 |u'(x)|^2\, dx + \lambda\alpha \int_0^1 |u(x)|^2\, dx \leq \varepsilon \int_0^1 |u(x)|^2\, dx + \frac{1}{4\varepsilon}\int_0^1 |f(x)|^2\, dx.$$

2-(b) (i) Utilisant l'inégalité de Poincaré améliorée, on obtient

$$\left(\frac{8}{\pi} + \lambda\alpha - \varepsilon\right)\int_0^1 |u(x)|^2\, dx \leq \frac{1}{4\varepsilon}\int_0^1 |f(x)|^2\, dx.$$

Or, pour $\alpha' = \min(0, \alpha)$, la minoration $\frac{8}{\pi} + \lambda\alpha - \varepsilon \geq \frac{8}{\pi} + \alpha' - \varepsilon$ a lieu pour tout $\lambda \in [0, 1]$; d'où le résultat demandé.

(ii) De l'estimation dans **2-(a)**, on obtient, avec **2-(b)-(i)**, les majorations

$$\begin{aligned} \int_0^1 |u'(x)|^2\, dx &\leq (\varepsilon - \lambda\alpha)\int_0^1 |u(x)|^2\, dx + \tfrac{1}{4\varepsilon}\int_0^1 |f(x)|^2\, dx \\ &\leq \left[(\varepsilon + |\alpha|)\tfrac{1}{4\varepsilon\left(\frac{8}{\pi} + \alpha' - \varepsilon\right)} + \tfrac{1}{4\varepsilon}\right]\int_0^1 |f(x)|^2\, dx :\; = k\int_0^1 |f(x)|^2\, dx. \end{aligned}$$

(iii) Comme $u(x) = \int_0^x u'(t)\, dt$, alors, par l'inégalité de Cauchy-Schwartz et la partie **(ii)**, on arrive à

$$\|u\|_\infty \leq \sqrt{k}\|f\|_\infty \leq \sqrt{k\int_0^1 |f(x)|^2\, dx}.$$

2-(c) (i) D'après les conditions aux bords, il existe $x_0 \in]0,1[$ tel que $u'(x_0) = 0$; multiplions alors l'équation dans (Π_λ) par le facteur intégrant $B(x) = exp\left(-\lambda \int_{x_0}^x b(t)\,dt\right)$, on obtient $(u'B)' = (\lambda cu - f)B$ qu'on intègre de x_0 à x pour avoir

$$u'(x) = \frac{1}{B(x)} \int_{x_0}^x (\lambda cu - f)(s)B(s)\,ds,$$

puis l'estimation

$$\|u'\|_\infty \le \frac{1}{\underline{B}}(\|c\|_\infty \|u\|_\infty + \|f\|_\infty)\overline{B} \le \frac{\overline{B}}{\underline{B}}\left(\|c\|_\infty \sqrt{k} + 1\right)\|f\|_\infty :\ = k_1\|f\|_\infty$$

où l'on a posé $\overline{B} :\ = e^{+\lambda\|b\|_\infty}$ et $\underline{B} :\ = e^{-\lambda\|b\|_\infty}$.

(ii) L'estimation suivante découle de l'équation dans (Π_λ) :

$$\begin{aligned} \|u''\|_\infty &\le \|b\|_\infty\|u'\|_\infty + \|c\|_\infty\|u\|_\infty + \|f\|_\infty \\ &\le (k_1\|b\|_\infty + k_0\|c\|_\infty + 1)\|f\|_\infty :\ = k_2\|f\|_\infty. \end{aligned}$$

2-(d) (i) Dans l'espace de Banach $X :\ = C^1([0,1])$ muni de la norme du max : $\|u\|_X = \max(\|u\|_\infty, \|u'\|_\infty)$, considérons l'ouvert $\Omega = B(0,R)$ avec $R :\ = (k_0 + k_1 + 1)\|f\|_\infty$; on peut vérifier que l'application K_λ est comme complètement continue ; le degré $deg(I - K_\lambda, \Omega, 0)$ est donc bien défini.

(ii) Par homotopie, $deg(I - K_\lambda, \Omega, 0) = deg(I, \Omega, 0) = 1 \neq 0$. Il en résulte l'existence d'un point fixe pour K_1, donc solution du problème (Π); il est clair que cette solution est de classe C^2.

Démonstration de l'inégalité de Poincaré améliorée.

Ecrivons $u(x) = \int_0^x u'(t)\,dt$ et $u(x) = -\int_x^1 u'(t)\,dt$; alors, par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient les deux estimations :

$$\begin{aligned} |u(x)| &\le \sqrt{x}\left(\int_0^1 |u'(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \\ |u(x)| &\le \sqrt{1-x}\left(\int_0^1 |u'(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}; \end{aligned}$$

puis, par multiplication membre à membre,

$$|u(x)|^2 \le \sqrt{x(1-x)} \int_0^1 |u'(t)|^2\,dt$$

qu'on intègre de nouveau, pour obtenir

$$\int_0^1 |u(x)|^2 \leq \int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,dx.\int_0^1 |u'(t)|^2\,dt$$

et, en utilisant la formule $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,dx = \frac{\pi}{8}$,

$$\int_0^1 |u(t)|^2\,dt \leq \frac{\pi}{8}\int_0^1 |u'(t)|^2\,dt.$$

5.10 Problème 10 (un problème à valeur propre non linéaire)

On se propose d'étudier le problème aux limites à valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$:

$$(\mathcal{P}_\lambda) \quad \left\{\begin{array}{rcl} u'' + \lambda u &=& u^3, \quad 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) &=& 0. \end{array}\right.$$

On lui associe la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des valeurs propres du problème de Dirichlet :

$$(E_n) \quad \left\{\begin{array}{rcl} -\varphi_n'' &=& \lambda_n\varphi_n \\ \varphi_n(0) &=& \varphi_n(1) = 0. \end{array}\right.$$

Partie I : Existence de solutions.

1- Première méthode :

En appliquant le théorème de Fučik (voir le cours sur les problèmes aux limites associés aux E.D.O. du second ordre), montrer que le problème $(\mathcal{P}_\lambda)$ admet, pour tout $\lambda > 0$, au moins une solution.

2- Deuxième méthode :

On considère l'espace de Banach $X\colon = C([0,1];\mathbb{R})$ muni de la norme du sup et, pour tout $t \in [0,1]$, l'application $K_t\colon X \to X$ définie par $K_t(u) = U$ où U est la solution du problème linéaire :

$$\left\{\begin{array}{rcl} U'' &=& t(u^3 - \lambda u), \quad 0 < x < 1 \\ U(0) &=& U(1) = 0. \end{array}\right.$$

2-(a) Montrer que l'application K_t est complètement continue.

2-(b) Montrer que

$$\forall\, u \in X, \quad \text{point fixe de } K_t, \ \|u\|_X \leq \lambda.$$

2-(c) En utilisant la notion de degré topologique de Leray-Schauder, en déduire l'existence d'au moins une solution au problème $(\mathcal{P}_\lambda)$.

Note : La solution obtenue dans cette partie peut être la solution triviale. Dans la partie qui suit, on montre l'existence de solutions non triviales.

Partie II : Existence de solutions multiples.

Dans cette partie, on suppose $\lambda > \lambda_1$ et on se propose de montrer que le problème $(\mathcal{P}_\lambda)$ admet au moins trois solutions (y compris la solution triviale).

1- Construire une fonction positive v, multiple de la fonction propre φ_1, qui soit sous-solution sur l'intervalle $(0, 1)$.

2- Considérer une autre fonction propre ψ_1 définie sur un intervalle $(\alpha, \beta) \supset (0, 1)$ puis construire une fonction positive w, multiple de ψ_1, qui soit sur-solution sur l'intervalle $(0, 1)$.

3- En déduire l'existence d'au moins une solution $u > 0$ sur $]0, 1[$ et donc au moins trois solutions au problème $(\mathcal{P}_\lambda)$.

Partie III : Non existence de solution.

Dans cette partie, on suppose $0 < \lambda \leq \lambda_1$ et on se propose de montrer, par deux méthodes différentes, que le problème $(\mathcal{P}_\lambda)$ n'a pas de solution non triviale.

1- Première méthode : $(0 < \lambda \leq \lambda_1)$

En utilisant la caractérisation suivante de la première valeur propre de l'opérateur $(-u'')$ (lemme 6.10) :

$$\lambda_1 = \min_{v \in H_0^1(0,1);\, v \not\equiv 0} \frac{\int_0^1 |v'(x)|^2\, dx}{\int_0^1 |v(x)|^2\, dx},$$

et en raisonnant directement sur l'équation $(\mathcal{P}_\lambda)$, montrer que celui-ci n'a pas de solution non triviale.

2- Deuxième méthode : $(0 < \lambda < \lambda_1)$

2-(a) Vérifier l'existence de deux constantes $\alpha \leq 0 < 1 \leq \beta$ tel que le problème aux limites linéaire :

$$\begin{cases} w'' + \lambda w &= 0, \quad 0 < x < 1 \\ w(0) = w(1) &= 0. \end{cases}$$

admette une solution non triviale w strictement positive sur l'intervalle $]\alpha, \beta[$.

2-(b) La solution w étant obtenue en **2-(a)**, soit z une fonction définie sur $[0,1]$ telle que la fonction $u = zw$ soit solution du problème $(\mathcal{P}_\lambda)$. Écrire l'équation satisfaite par z puis montrer que $z \equiv 0$ sur $(0,1)$.

2-(c) En déduire que le problème $(\mathcal{P}_\lambda)$ n'admet pas de solution non triviale pour $0 < \lambda < \lambda_1$.

Corrigé

Partie I : Existence de solutions.

1- Première méthode :

La fonction $f(u) = u^3$ étant croissante, le problème $(\mathcal{P}_\lambda)$ admet, en vertu du théorème de Fučik, une solution si et seulement s'il existe une fonction $\psi \in C^1([0,1])$ vérifiant $\psi(0) = \psi(1) = 0$ et $\int_0^1 \psi^3(x)\,dx = 0$. Il suffit de prendre $\psi \equiv 0$ sur $(0,1)$.

2- Deuxième méthode :

2-(a) Soit F l'opérateur de Nemytskii associé à la fonction $f(s) = t(-\lambda s + s^3)$, L l'opérateur inverse $Lu = (u'')^{-1}$ et i l'injection de $C^2(0,1) \hookrightarrow C(0,1)$. Alors $K_t = i \circ L \circ F$. L'opérateur F est continue car f l'est ; L set continue d'après les estimations classiques de Schauder. Enfin, i est compacte d'après le théorème d'Ascoli-Arzela. Par suite, K_t est compacte, continu ; il est aussi uniformément continu par rapport à t.

2-(b) Soit u un point fixe de K_t. Multiplions l'équation dans $(\mathcal{P}_\lambda)$ par u puis intégrons sur $(0,1)$; il vient :

$$(\mathcal{I}) \quad -\int_0^1 |u'(t)|^2\,dt + \lambda t \int_0^1 |u(t)|^2\,dt = t \int_0^1 |u(t)|^4\,dt.$$

Utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit que

$$t\int_0^1 |u(t)|^4\,dt \leq \lambda t\int_0^1 |u(t)|^2\,dt \leq t\lambda\left(\int_0^1 |u(t)|^4\,dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

D'où, l'estimation

$$t\left(\int_0^1 |u(t)|^4\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \lambda,$$

puis, en appliquant encore une fois l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$t\int_0^1 |u(t)|^2\,dt \leq t\left(\int_0^1 |u(t)|^4\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \lambda.$$

En revenant à l'identité $(\mathcal{I})$, on obtient finalement l'estimation

$$\int_0^1 |u'(t)|^2\,dt \leq \lambda t\int_0^1 |u(t)|^2\,dt \leq \lambda^2.$$

Écrivant $u(x) = \int_0^x u'(t)\,dt$, on en déduit succesivement

$$|u(x)|^2 \leq \int_0^1 |u'(t)|^2\,dt \leq \lambda^2 \text{ et } \|u\|_X = \sup_{x\in(0,1)} |u(x)| \leq \lambda.$$

2-(c) En considérant la boule ouverte $B = B(0,\lambda+1)$, le degré topologique $deg(I - K_t, B, 0)$ est donc bien défini et vaut, par homotopie, $deg(I, B, 0) = 1$. L'application K_t, et en particulier K_1, admet donc au moins un point fixe dans X, donc une solution au problème $(\mathcal{P}_\lambda)$.

Partie II : Existence de solutions multiples $(\lambda > \lambda_1)$

1- Posons $v = k\varphi_1$. Alors, si $0 < k^2 < \frac{\lambda-\lambda_1}{\varphi_1^2}$, on a :

$$\begin{cases} v'' + \lambda v &= k(\varphi_1'' + \lambda\varphi_1) \\ &= k\left(\varphi_1'' + \lambda_1\varphi_1 + (\lambda-\lambda_1)\varphi_1\right) \\ &= k(\lambda-\lambda_1)\varphi_1 \geq k^3\varphi_1^3. \end{cases}$$

Comme φ_3 est majorée par 1, il suffit de choisir $0 < k < \sqrt{\lambda-\lambda_1}$ pour que v soit sous-solution au problème $(\mathcal{P}_\lambda)$.

2- Soit ψ_1 la fonction propre associée à la première valeur propre du problème

$$\begin{cases} \psi_1'' + \lambda_1'\psi_1 &= 0 \\ \psi_1(\alpha) = \psi_1(\beta) &= 0 \end{cases}$$

avec $\alpha < 0 < 1 < \beta$, ce qui est possible si $0 < \lambda'_1 < \lambda_1 < \lambda$. Alors $w = k'\psi_1$ vérifie, sur $]0,1[$ l'inégalié

$$w'' + \lambda w = k'(\lambda - \lambda'_1)\psi_1 \leq k'^3\psi_1^3$$

pourvu que $k' > 0$ et $k'^2 > \frac{\lambda-\lambda'_1}{\psi_1^2}\cdot$ La fonction ψ_1 étant strictement positive sur $]0,1[$, il suffit de choisir

$$k' > \frac{\sqrt{\lambda - \lambda'_1}}{\min_{(0,1)}\psi_1} > \frac{\sqrt{\lambda - \lambda'_1}}{\psi_1}$$

pour que w soit sur-solution positive du problème $(\mathcal{P}_\lambda)$.

3- La non-linéarité u^3 ne dépendant pas de la dérivée u', on déduit des deux premières questions l'existence d'au moins une solution u comprise entre v et w, donc positive. La fonction $(-u)$ ainsi que 0 étant également solutions, on obtient en fin de compte au moins trois solutions au problème $(\mathcal{P}_\lambda)$.

Partie III : Non-existence de solution $(0 < \lambda \leq \lambda_1)$

1- Première méthode : $(0 < \lambda \leq \lambda_1)$

Écrivons l'identité $(\mathcal{I})$ pour $t = 1$:

$$-\int_0^1 |u'(t)|^2\,dt + \lambda\int_0^1 |u(t)|^2\,dt = \int_0^1 |u(t)|^4\,dt.$$

Grâce à la caractérisation de la première valeur propre (lemme 6.10), on a

$$\lambda\int_0^1 |u(t)|^2\,dt \leq \lambda_1\int_0^1 |u(t)|^2\,dt \leq \int_0^1 |u'(t)|^2\,dt,$$

et donc

$$\int_0^1 |u(t)|^4\,dt + \int_0^1 |u'(t)|^2\,dt \leq \int_0^1 |u'(t)|^2\,dt;$$

d'où $0 \leq \int_0^1 |u(t)|^4\,dt \leq 0$ puis $u \equiv 0$ sur $(0,1)$.

2- Deuxième méthode : $(0 < \lambda < \lambda_1)$

2-(a) On sait que le problème

$$\left\{\begin{array}{rcl} w'' + \lambda w & = & 0 \\ w(\alpha) = w(\beta) & = & 0 \end{array}\right.$$

admet une solution positive, fonction propre principale, définie sur (α,β) si et seulement si $\lambda = \lambda_1^{(\alpha,\beta)} = \frac{\pi^2}{(\beta-\alpha)^2}\cdot$ Par conséquent, si $0 < \lambda < \lambda_1^{(\alpha,\beta)} = \pi^2$, alors $\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} > 1$ et donc il existe $\alpha < 0 < 1 < \beta$ tel que $\beta - \alpha = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$; notons que si $\lambda = \lambda_1$, alors on prend $\alpha = 0$ et $\beta = 1$.

2-(b) La fonction z vérifie sur $(0,1)$ l'équation suivante

$$wz'' + 2w'z' + zw'' + \lambda zw - z^3w^3 = 0.$$

Or, $-\lambda zw = zw''$; on obtient donc, après division par $w > 0$ sur l'intervalle $(0,1)$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} z'' + \frac{2}{w}w'z' - z(z^2w^2) & = & 0 \\ z(0) = z(1) & = & 0. \end{array}\right.$$

D'après le principe du maximum, on en déduit que $z \equiv 0$ sur $(0,1)$.

2-(c) Si le problème $(\mathcal{P}_\lambda)$ admet une solution u, alors en posant $z = \frac{u}{w}$, on obtiendrait, d'après **2-(b)**, $z \equiv 0$ puis $u \equiv 0$.

Chapitre 6

ANNEXES

6.1 Quelques rappels d'E.D.P.

Plus de détails peuvent être trouvées dans [A,L,LU,S].
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à frontière régulière et $u\colon\ \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, notons

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \partial_i u \quad \text{la ième dérivée partielle de } u \quad (1 \leq i \leq n)$$

et

$$\partial^\alpha u = \partial_2^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \cdots \partial_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha| u}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \cdots \partial^{\alpha_n} x_n}$$

l'opérateur différentiel d'ordre $|\alpha| = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_j$.

6.1.1 Définitions

(1) Un opérateur linéaire à coefficients $a_\alpha \in C^\infty(\bar{\Omega})$ et d'ordre m, $P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha$, est dit elliptique si le polynôme associé (ou partie principale), $P(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$, ne s'annule pas pour $x \in \bar{\Omega}$ et $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (m est alors un entier pair) ; on notera $\xi^\alpha = \Pi_{i=1}^{i=n} \xi_i^{\alpha_i}$.
(2) L'opérateur P est dit uniformément elliptique s'il existe une constante $c > 0$ telle que $P(x, \xi) \geq c|\xi|^m, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$. Par exemple, le Laplacien $\triangle = \sum_{i=1}^{i=n} \partial_i^2$, pour lequel $P(\xi) = |\xi|^2$, est un opérateur uniformément elliptique.

(3) On dit qu'un opérateur différentiel P est écrit sous forme divergentielle si $P(x,D) = \sum_{|\alpha|,\,|\beta|\leq m} D^{\alpha}\left(a_{\alpha\beta}(x)D^{\beta}\right)$.

6.1.2 Théorème de Lax-Milgram

Soit P un opérateur divergentiel uniformément elliptique d'ordre 2 et B un opérateur de dérivation au bord d'ordre 1. Alors, pour toute fonction $f \in L^2(\Omega)$, il existe une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$ au problème

$$\begin{cases} Pu + u &= f, \qquad \text{dans } \Omega \\ Bu &= 0, \qquad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{6.1}$$

De plus, l'opérateur $(I+P)^{-1}$ est continu, compact de $L^2(\Omega)$ dans lui-même.

6.2 Résultats de régularité

Soit P un opérateur linéaire uniformément elliptique d'ordre m à coefficients réguliers et soit B un opérateur de dérivation au bord tel que le problème homogène

$$\begin{cases} Pu &= 0, \qquad \text{dans } \Omega \\ Bu &= 0, \qquad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

admette la solution triviale $u \equiv 0$ pour unique solution, i.e ; $KerP = \{0\}$. Si l'on considère le problème différentiel linéaire non homogène

$$\begin{cases} Pu &= f, \qquad \text{dans } \Omega \\ Bu &= 0, \qquad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

les estimations suivantes ont lieu :

6.2.1 Estimation de Schauder

Si $f \in C^{k+\alpha}(\bar{\Omega})$, alors toute solution du problème (6.1) est telle que $u \in C^{k+m+\alpha}(\bar{\Omega})$. De plus, on a la majoration suivante :

$$\exists\, C > 0, \quad \|u\|_{k+m+\alpha} \leq C\|f\|_{k+\alpha}.$$

6.2.2 Estimation d'Agmond-Douglis-Niremberg (A.D.N.)

Si $f \in W^{k,p}(\Omega)$, alors toute solution du problème (6.1) est telle que $u \in C^{k+m+\alpha}(\bar{\Omega})$. De plus, on a la majoration suivante :

$$\exists\, C > 0, \quad \|u\|_{k+m,p} \leq C\|f\|_{k,p}.$$

Notons que si P n'est pas injectif, on a l'estimation plus générale

$$\exists\, C > 0, \quad \|u\|_{k+m,p} \leq C\left(\|f\|_{k,p} + |u\|_{L^1(\Omega)}\right).$$

6.2.3 Théorèmes de Sobolev et de Rellich-Kondrachov

(a) Soit Ω un ouvert borné, régulier de $\mathbb{R}^n$. Soit j $(0 \leq j < m)$ un entier tel que $0 < \frac{1}{q}\colon = \frac{1}{p}\frac{m-j}{n} \leq 1$; alors l'inclusion

$$W^{m,p} \hookrightarrow W^{j,q}$$

est continue. De plus, si $q' < q$, l'inclusion $W^{m,p} \hookrightarrow W^{j,q}$ est compacte.

(b) Soit j $(0 \leq j < m)$ un entier tel que $0 < \alpha\colon = m\frac{n}{p}j < 1$; alors l'inclusion

$$W^{m,p} \hookrightarrow C^{j+\alpha}$$

est continue. De plus, si $\alpha \leq 1 - \frac{n}{p}$, l'inclusion $W^{m,p} \hookrightarrow C^{m-1,\alpha(\bar{\Omega})}$ est compacte.

6.2.4 Quelques inégalités utiles

(a) Inégalité de Poincaré

Soit p un entier supérieur ou égal à 1 ; alors il existe une constante positive C telle que

$$\forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad \|u\|_p \leq C\|\nabla u\|_p. \tag{6.2}$$

(b) Inégalité de Hölder

Soit f, g deux fonctions respectivement dans $L^p(\Omega)$ et dans $L^q(\Omega)$, avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$. Alors, le produit fg est dans L^r et l'on a

$$\left(\int_\Omega |fg|^r\,dx\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\int_\Omega |f|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{6.3}$$

(c) Inégalité de Minkowski

Soit $p > 1$ et f, g deux fonctions dans $L^p(\Omega)$. Alors, la somme $f+g$ est aussi dans L^p et l'on a

$$\left(\int_\Omega |f+g|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_\Omega |f|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |g|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{6.4}$$

(d) Inégalité de Young

Soit p, q deux réels vérifiant $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Alors

$$\forall\,(a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\,c_\varepsilon \in \mathbb{R} \quad \text{tel que } ab \leq \varepsilon a^p + c_\varepsilon b^q. \tag{6.5}$$

(e) Une inégalité utile

Soit a_i $(1 \leq i \leq N)$ des réels strictement positifs et $p \geq 1$ un entier naturel. Alors

$$\left(\sum_{i=1}^{i=N} a_i\right)^p \leq 2^{(N-1)(p-1)} \sum_{i=1}^{i=N} a_i^p. \tag{6.6}$$

(d) Formule de Green

On considère un ouvert Ω de classe C^1 et on se donne deux fonctions u et v de classe $C^2(\mathbb{R}^n)$ et à support compact. Alors

$$-\int_\Omega v(x)\triangle u(x)\,dx = \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(s)v(s)\,ds. \tag{6.7}$$

6.3 Applications compactes

6.3.1 Application linéaire compacte

Définition 6.1 *Soit X et Y deux espaces vectoriels normés et $f\colon X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire. On dit que f est compacte si l'image par f de tout borné de X est relativement compacte Y.*

Proposition 6.1 *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est compacte.*

(ii) *L'image de la boule unité est relativement compacte.*

(iii) *De toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ borné dans X, on peut extraire une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $f(x_{n_k})$ converge dans X.*

Démonstration

• *(i) $\Rightarrow$ (ii) : Trivial.*

• *(ii) $\Rightarrow$ (i) : Si B est un borné de X, il existe $r > 0$ tel que $B \subset B(0,R)$; de plus $f(B) \subset f(B(0,R))$ entraîne $\overline{f(B)} \subset \overline{f(B(0,R))}$. Il suffit donc de vérifier que $f(B(0,1))$ est relativement compacte. Montrons que $f(B(0,R)) = Rf(B(0,1))$. En effet, d'après la linéarité de f, on a*

$$\begin{aligned} y \in f(B(0,1)) &\iff \exists\, x \in B(0,R), \quad y = f(x) \\ &\iff \exists\, x'(=\tfrac{x}{R}) \;\text{ tel que }\; \|x'\| \leq 1 \;\text{ et }\; y = Rf(x') \\ &\iff y \in Rf(B(0,1)). \end{aligned}$$

• *(i) $\Rightarrow$ (iii) : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de X donc incluse dans une boule B. La suite $(f(x_n))$ est donc à valeur dans $f(B)$ qui est relativement compacte ; par suite $(f(x_n))$ admet une sous-suite convergente.*

• *(iii) $\Rightarrow$ (i) : Soit B un borné de X et (y_n) une suite dans $f(B)$. Il existe alors une suite $x_n \in B$ telle que $y_n = f(x_n)$. D'après (iii), il existe une sous-suite (x_{n_k}) telle que $(f(x_{n_k}))$ soit convergente ; $f(B)$ est alors relativement compacte.*

Remarque 6.1 *Toute application linéaire compacte f est continue. En effet, l'image $f(B(0,1))$ est bornée car relativement compacte ; f est donc continue. La réciproque* *est fausse car si X est de dimension infinie ; l'application identité est une application linéaire continue qui n'est pas compacte d'après le théorème de Riesz.*

Proposition 6.2 *Si f est de rang fini (*$\dim f(X)$ *finie), l'implication suivante a lieu :*

$$f \text{ continue } \Longrightarrow f \text{ compacte.}$$

Démonstration
Soit B un borné de X. La fonction f étant continue, $f(B)$ est bornée dans Y. L'ensemble $\overline{(f(B)}$ est donc fermé, borné dans un espace de dimension finie ; c'est donc un compact de Y.

Proposition 6.3 *Si l'espace X est de dimension finie, tout endomorphisme linéaire sur X est continu, compact.*

Démonstration
Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ une base de X. Pour tout $x \in X$, $x = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i e_i$, choisissons sur X la norme $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{i=n} |\lambda_i|$. Alors

$$\|f(x)\| = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i f(e_i)\| \leq \sum_{i=1}^{i=n} |\lambda_i| \|f(e_i)\|.\|x\|_1.$$

f est donc une application linéaire continue donc compacte d'après la proposition 6.2.

6.3.2 Analyse spectrale d'opérateurs linéaires compacts

Théorie de Riesz-Schauder

Soit X un espace de Banach et $L\colon X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire, compact. Dans ce qui suit, nous énonçons brièvement quelques notions fondamentales d'analyse spectrale. Plus de détails peuvent être trouvés dans [AG,B,DS].

(a) $\mu \in \mathbb{R}$ est appelé valeur caractéristique de L s'il existe $x \in X^*$ tel que $x = \mu L x$ (μ est donc l'inverse d'une valeur propre) ; on convient de prendre $\mu = 0$ si $\lambda = \infty$.

(b) L'ensemble des valeurs caractéristiques de L est au plus dénombrable et admet $+\infty$ pour seule valeur d'accumulation ; par suite, l'ensemble des valeurs caractéristiques comprises entre 0 et 1 est fini.

(c) Soit $\mu \neq \infty$ une valeur caractéristique de L. Alors, il existe un entier n_0 tel que $Ker(\mu L - I)^{n_0} = Ker(\mu L - I)^n$, $\forall\, n \geq n_0$. De plus, cet espace, appelé espace caractéristique associé à μ est de dimension finie. Sa dimension est appelé ordre de multiplicité de μ, soit

$$m(\mu) = \dim[\bigsqcup_{n=1}^{\infty} Ker(\mu L - I)^n].$$

(d) Si μ n'est pas valeur caractéristique de L, alors $\mu L - I$ est inversible et d'inverse continu.

Lemme 6.1 *(Lemme de Riesz-Schauder) Soit E un espace de Hilbert et $u \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur compact. Alors, pour $\lambda \neq 0$, le sous-espace propre $E_\lambda(u) = ker(u - \lambda I)$ est de dimension finie.*

Démonstration

Soit B la boule unité dans l'espace E_λ. Pour tout $x \in B$, $u(x) = \lambda x$; on en déduit que $u(B)$ est une boule ouverte ; de plus, $u(B)$ est localement compact car u est compact. Par suite, B est localement compact et E_λ est de dimension finie d'après le théorème de Riesz-Fisher.

Lemme 6.2 *Soit A un opérateur complètement continu et $\rho > 0$ un réel strictement positif. Alors l'ensemble des vecteurs propres de A, linéairement indépendants et correspondant à des valeurs propres de modules supérieurs à ρ, est fini.*

Démonstration

On sait que le spectre $Sp(u)$ d'un opérateur continu u non nécessairement compact est un ensemble compact inclus dans la boule fermé $\bar{B}(0, \|u\|)$. De plus, u étant compact, $Sp(u)$ est discret ([AG]) ; c'est donc un ensemble fini.

Lemme 6.3 *Soit $C \subset X$ une partie fermée, bornée et $f\colon\ C \longrightarrow X$ une application. Alors, f est compacte si et seulement si f est limite uniforme d'une suite (f_n) d'applications compactes de rang fini.*

Démonstration

(a) La condition est suffisante

Si f est compacte, alors $\overline{f(\Omega)}$ est compact. On peut donc, pour $\varepsilon > 0$, couvrir $\overline{f(\Omega)}$ par un nombre fini de boules ouvertes $B_1, \cdots, B_{N(\varepsilon)}$ de centre $x_1, \cdots, x_{N(\varepsilon)}$ dans $\overline{f(\Omega)}$ et de rayon ε. Soit maintenant $\psi_i(x)$ une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement, c'est-à-dire

$$\psi_i(x) \geq 0, \qquad \sum_{i=1}^{i=N(\varepsilon)} \psi_i(x) = 1 \text{ si } x \in \overline{f(\Omega)} \text{ et } \psi_i(x) = 0 \text{ sinon.}$$

La fonction

$$f_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{i=N(\varepsilon)} \psi_i(f(x))x_i$$

est continue et appartient à l'enveloppe convexe de l'ensemble $\{x_i,\ 1 \leq i \leq N(\varepsilon)\}$. De plus

$$\|f(x) - f_\varepsilon(x)\| = \| \sum_{i=1}^{j(\varepsilon)} \psi_i(f(x))[x_i - f(x)]\| < \varepsilon.$$

Par définition des fonctions ψ_i et des boules B_i, les implications suivantes ont lieu

$$\begin{aligned} \psi_i(f(x)) > 0 \quad &\Longrightarrow f(x) \in B_i \\ &\Longrightarrow \|x_i - f(x)\| < \varepsilon \\ &\Longrightarrow \|f - f_\varepsilon\| < \varepsilon, \quad \text{uniformément en } x. \end{aligned}$$

(b) La condition est nécessaire

Si $f_n \colon C \longrightarrow X$ est une suite d'applications compactes telles que $\sup\limits_{x \in C} \|f(x) - f_n(x)\|_X \overset{n \to \infty}{\to} 0$, alors

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad (n \geq n_0 \Longrightarrow \|f_n(x) - f(x)\|_X \leq \frac{\varepsilon}{2},\ \forall\, x \in C).$$

Enfin, l'image $f_n(C)$ étant compacte, peut être recouverte par un nombre fini de boules de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$. Par suite, pour $n \geq n_0$, on a l'assertion

$$\forall\, x \in C, \quad \|f(x)\|_X \leq \|f_n(x) - f(x)\|_X + \|f_n(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On en déduit que l'application f est aussi compacte.

Lemme 6.4 *Soit X et Y deux espaces de Banach, $\Omega \subset X$ et $f\colon X \longrightarrow Y$ une application compacte différentiable au voisinage d'un point $x_0 \in \Omega$. Alors, l'application $Df(x_0)\colon X \longrightarrow Y$ est un opérateur linéaire compact.*

Démonstration
Par l'absurde, supposons que $A = Df(x_0)$ n'est pas compact. Alors, il existe une suite (x_i) vérifiant $\|x_i\| \leq 1$ et il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $\|Ax_i - Ax_j\| > \varepsilon, \quad \forall\, i, j \in \mathbb{N}$. La fonction f étant différentiable au voisinage de 0, il existe $\delta > 0$ suffisamment petit tel que $\|f(x_0 + \delta x_i) - f(x_0) - \delta A x_i\| \leq \varepsilon \frac{\delta}{4}\cdot$ En supposant, sans perte de généralité $x_0 = 0$, on en déduit les minorations suivantes

$$\begin{array}{rcl} \frac{\varepsilon\delta}{2} & \geq & \|f(\delta x_i) - f(\delta x_j) - \delta A x_i + \delta A x_j\| \\ & \geq & \|\delta A x_i - \delta A x_j\| - \|f(\delta x_i) - f(\delta x_j)\|. \end{array}$$

Ou encore

$$\frac{\varepsilon\delta}{2} \geq \delta\varepsilon - \|f(\delta x_i) - f(\delta x_j)\|.$$

Enfin

$$\|f(\delta x_i) - f(\delta x_j)\| \geq \frac{\varepsilon\delta}{2},$$

ce qui contredit la compacité de f.

6.4 Deux opérateurs remarquables

6.4.1 L'opérateur de Nemytskii

Définition 6.2 *On dit qu'une application $f\colon \Omega \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory si l'application $(x, s) \longmapsto f(x, s)$ est continue en s et mesurable en x. L'opérateur $u \longmapsto Fu$ défini par $(Fu)(x) = f(x, u(x))$ est appelé opérateur de Nemytskii.*

Proposition 6.4 *Supposons que f vérifie la condition de croissance suivante*

$$|f(x, u)| \leq |a(x)| + b \sum_{i=1}^{i=N} |u_i|^{\frac{p_i}{q}}, \quad \forall\, u \in \mathbb{R}^n \ \ \text{et p.p. } x \in \Omega \tag{6.8}$$

où $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in L^q(\Omega; \mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^+$ et $1 \leq q$, p_i, $\forall\, i \in [1, N]$. Alors

(a) *F est continue, bornée de l'espace $\Pi_{i=1}^{i=N} L^{p_i}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$.*

(b) *De plus, on a l'estimation suivante*

$$\exists\, C > 0,\ \forall\, u \in \Pi_{i=1}^{i=N} L^{p_i}(\Omega), \quad \|Fu\|_{L^q} \leq \|a\|_{L^q} + C \left(\sum_{i=1}^{i=N} \|u_i\|^{p_i}_{L^{p_i}(\Omega)} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Démonstration

On déduit de l'hypothèse de croissance (6.8) la majoration suivante :

$$|f(x,u(x))|^q \leq \left(|a(x)| + b \sum_{i=1}^{i=N} |u_i|^{\frac{p_i}{q}} \right)^q$$

et donc

$$\begin{aligned} \|Fu\|_{L^q(\Omega)} &= \left(\int_\Omega |f(x,u(x))|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\int_\Omega \left(|a(x)| + b \sum_{i=1}^{i=N} |u_i|^{\frac{p_i}{q}} \right)^q dx \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

L'estimation suivante résulte alors de l'inégalité de Minkowski (6.4)

$$\|Fu\|_{L^q(\Omega)} \leq \left(\int_\Omega |a(x,u(x))|^q\, dx \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_\Omega b^q \left(\sum_{i=1}^{i=N} |u_i|^{\frac{p_i}{q}} \right)^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Utilisant l'inégalité dans (6.6), on obtient l'estimation suivante

$$\|Fu\|_{L^q(\Omega)} \leq \|a\|_{L^q(\Omega)} + b2^{(N-1)(q-1)} \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^{i=N} |u_i|^{p_i}\, dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

et donc, pour tout $u \in \Pi_{i=1}^{i=n} L^{p_i}(\Omega)$, l'estimation suivante a lieu

$$\|Fu\|_{L^q(\Omega)} \leq \|a\|_{L^q(\Omega)} + b2^{(N-1)(q-1)} \left(\sum_{i=1}^{i=N} \|u_i\|^{p_i}_{L^{p_i}(\Omega)}\, dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Pour montrer la continuité de F, on considère une suite (u_n) convergente vers u dans $L^p(\Omega)$; elle admet une sous-suite (u_{n_k}) convergente p.p. dans Ω vers u et il existe $\bar{u} \in L^p(\Omega)$ telle que $|u_{n_k}(x)| \leq \bar{u}(x)|$ p.p. $x \in \Omega$. La fonction f étant continue en la seconde variable, $f(x, u_{n_k}(x))$ converge, quand $k \to \infty$, vers $f(x,u(x))$ p.p. $x \in \Omega$. De plus, grâce à l'inégalité dans (6.6), on obtient les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} \|Fu_{n_k} - Fu\|^q_{L^q(\Omega)} &\leq 2^{q-1} \int_\Omega (|f(x,u_{n_k}(x)|^q + |f(x,u(x)|^q)\, dx \\ &\leq 2^{N(q-1)}(2 \int_\Omega |a(x)|^q\, dx + b^q [\sum_{i=1}^{i=N} \int_\Omega |u_i|^{p_i}\, dx \\ &+ \sum_{i=1}^{i=N} \int_\Omega |(u_{n_k})_i|^{p_i}\, dx]) \\ &\leq C \left(\|a\|^q_{L^q(\Omega)} + \sum_{i=1}^{i=N} \|u_i\|^{p_i}_{L^{p_i}(\Omega)} + \sum_{i=1}^{i=N} \|(u_{n_k})_i\|^{p_i}_{L^{p_i}(\Omega)} \right) \leq C'. \end{aligned}$$

où C et C' sont deux constantes indépendantes de n. De plus,

$$\|Fu_{n_k}\| \leq \|Fu\|_{L^q(\Omega)} + \|Fu_{n_k} - Fu\|_{L^q(\Omega)}.$$

La suite (Fu_{n_k}) est donc bornée indépendamment de n dans $L^q(\Omega)$. En vertu du théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on obtient finalement la convergence dans L^q de la suite (Fu_{n_k}) vers Fu.

Cas particulier important

Dans le cas $N = 1$ et $q = \frac{p}{q-1}$,

(1) F s'exprime par le produit de dualité

$$\langle Fu, u\rangle_{L^p,L^q} = \int_\Omega f(x, u(x))u(x)\, dx.$$

(2) De plus, on peut montrer les résultats suivants :

- **(a)** Si f est monotone par rapport à la seconde variable, F l'est aussi.
- **(b)** Si f est positive ($f(x, u).u \geq 0$), alors F l'est aussi.
- **(c)** Si f est coercive ($f(x, u).u \geq \alpha|u|^p + g(x)$ avec $\alpha > 0$ et $g \in L^p(\Omega)$), alors F l'est également.

6.4.2 L'opérateur de Hammerstein

Définition 6.3 *La fonction f étant une fonction de Carathéodory, on suppose Ω compact et on considère un noyau de Green G associé à la fonction f. Alors, l'opérateur H défini par $H(u)(x) = \int_\Omega G(x, y)f(y, u(y)\, dy$ est appelé opérateur de Hammerstein.*

Exemple 6.1 *Si Ω est un domaine de $\mathbb{R}^n$, une solution u du problème semi-linéaire*

$$\begin{cases} \Delta u &= f(x, u) \qquad \textit{dans } \Omega \\ u &= 0 \qquad \textit{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

peut se mettre sous la forme intégrale $u(x) = \int_\Omega G(x,y)f(y,u(y))\,dy$ *où* G *est le noyau de Green défini par* $G(x,y) = 0$ *si* $x \in \partial\Omega$ *et*

$$G(x,y) = \begin{cases} \frac{\ln|x-y|}{2\pi} + \beta(x,y) & si\ n = 2 \\ \frac{|x-y|^{2-n}}{(2-n)|\Omega|} + \beta(x,y) & si\ n > 2 \end{cases}$$

où β *est une fonction harmonique en* y *et où* $\mid \Omega \mid$ *désigne la mesure de Lebesgue de* Ω.

Proposition 6.5 *Si* f *vérifie la condition de croissance (6.8) avec* $N = 1$ *et si* $\int_\Omega \int_\Omega |G(x,y)|^p\,dxdy < \infty$, *alors l'opérateur* H *est continu, compact de* L^p *vers* L^p.

Démonstration

Il suffit de remarquer que $H = G \circ F$ où F est l'opérateur de Nemytskii associé à f et où G est l'opérateur linéaire de Hilbert-Schmidt défini par $G(u)(x) = \int_\Omega G(x,y)u(y)\,dy$. L'opérateur H est alors compact de L^p vers L^p comme composition de l'opérateur continu $F\colon\ L^q \to L^q$ (Proposition 6.4) et de l'opérateur compact $G\colon\ L^q \to L^p$. Vérifions cette dernière assertion.

(a) Si $u \in L^q$, alors d'après l'inégalité de Hölder, on a les estimations

$$\begin{aligned} |G(u)(x)|^p &= \left|\int_\Omega G(x,y)u(y)\,dy\right|^p \\ &\leq \left(\int_\Omega |G(x,y)|^p\,dy\right)\left(\int_\Omega |u(x)|^q\,dy\right)^{\frac{p}{q}} \\ &\leq C\int_\Omega |G(x,y)|^p\,dy. \end{aligned}$$

On en déduit, grâce à l'hypothèse de la proposition, l'estimation suivante :

$$\int_\Omega |G(u)(x)|^p\,dx \leq C\int_\Omega\int_\Omega |G(x,y)|^p\,dxdy < \infty$$

(b) G est continu : si (u_n) est une suite convergente vers u dans L^q, alors de l'inégalité

$$|G(u_n)(x) - G(u)(x)|^p \leq \left(\int_\Omega |G(x,y)|^p\,dy\right)\left(\int_\Omega |u_n - u|^q\,dy\right)^{\frac{p}{q}}$$

on déduit la convergence presque pour tout $x \in \Omega$ de $G(u_n(x))$ vers $G(u(x))$; d'où le résultat.

(c) Enfin, G est compact, car si (u_n) est une suite bornée dans L^q, alors en vertu de la proposition 6.4, $G(u_n)$ est bornée dans L^p. il existe alors une sous-suite (u_{n_k}) telle que $G(u_{n_k})$ converge presque partout vers $G(u)$ et il existe une fonction $h \in L^p$ telle que $|G(u_{n_k})(x)| \leq |h(x)|$ p.p. dans Ω. La convergence fort de $G(u_{n_k})$ vers $G(u)$ résulte du théorème de la convergence dominée de Lebesgue.

Proposition 6.6 *Soit $K\colon\ E = [a,b] \times [-R,R] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, où $(a,\, b,\, R) \in \mathbb{R}^3$ et $R > 0$ et soit $B = \{x \in C([a,b];\mathbb{R}) :\ \|x\| \leq R\}$. Alors, les applications $S,\, T\colon\ B \longrightarrow C([a,b];\mathbb{R})$ définies par*

$$Sx(t) = \int_a^t K(t,s,x(s))\,ds \quad et \quad Tx(t) = \int_a^b K(t,s,x(s))\,ds$$

sont compactes.

Démonstration

Faisons les détails pour l'application S.

(1) S est continue. Soit $(x_n) \in B$ une suite telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$. Alors

$$\|Sx - Sx_n\|_0 = \sup_{a\leq t\leq b} |Sx(t) - Sx_n(t)| = \sup_{a\leq t\leq b} \left| \int_a^t K(t,s,x(s)) - K(t,s,x_n(s))\,ds \right|.$$

K étant uniformément continue sur E, on a l'assertion suivante

$$\begin{gathered} \forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\,\delta > 0,\ \exists\,n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall\,n \in \mathbb{N},\ \forall\,s \in [a,b] \\ n \geq n_0 \implies |x_n(s) - x(s)| \leq \delta \implies |K(t,s,x_n(s) - K(t,s,x(s)| \leq \tfrac{\varepsilon}{b-a}. \end{gathered}$$

Alors $\|Sx - Sx_n\|_0 \leq \varepsilon,\ \forall\,\varepsilon > 0,\ \forall\,n \geq n_0$.

(2) $S(B)$ est relativement compacte. Appliquons le lemme d'Ascoli-Arzela :

(a) Pour tout $t \in [a,b]$, $S(B)(t)$ est relativement compacte car $|Sx(t)| \leq k(b-a)$ si $|K(s,t,x)| \leq k,\ \forall\,(s,t,x) \in E$.

(b) $S(B)$ est équicontinue : pour tout $t_1,\ t_2 \in [a,b]$, on a

$$\begin{aligned} & |Sx(t_2) - Sx(t_1)| \\ = \ & \left| \textstyle\int_a^{t_1} [K(t_1,s,x(s)) - K(t_2,s,x(s))]\ ds - \int_{t_1}^{t_2} K(t_2,s,x(s))\,ds \right| \\ \leq \ & \textstyle\int_a^{t_1} |K(t_1,s,x(s)) - K(t_2,s,x(s))|\ ds + \int_{t_1}^{t_2} |K(t_2,s,x(s))|\,ds. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $0 < \varepsilon' < \frac{\varepsilon}{b-a}$; d'après l'uniforme continuité de K, il existe $\delta_1 > 0$ tel que $|t_1 - t_2| \leq \delta_1$ entraîne $|K(t_1) - K(t_2)| < \varepsilon'$. Soit $0 < \delta_2 < \frac{\varepsilon - \varepsilon(b-a)}{k}$ et $\delta\colon = \inf(\delta_1, \delta_2)$. Alors $|t_1 - t_2 \leq \delta$ et donc $|Sx(t_2) - Sx(t_1)| \leq \varepsilon'(b-a) + k\delta \leq \varepsilon$.

6.5 Extension et rétraction dans les espaces de Banach

Définition 6.4 *Soit X un espace topologique et $A \subset X$ une partie non vide. On dit que $A \subset X$ est une rétractée de X (ou un rétracte de X) s'il existe une application continue $r\colon X \longrightarrow A$ telle que $r(x) = x$, $\forall\, x \in A$; ou encore si $I_{|A}$ admet une extension à X. L'application r est alors appelée rétraction.*

Exemple 6.2 *Dans $\mathbb{R}^n$, la boule $B_n = B(x_0, R)$ est une rétractée de l'espace $\mathbb{R}^n$. Il suffit pour cela de considérer l'application définie par*

$$r(x) = \begin{cases} x, & si\ \|x - x_0\| \leq R; \\ x_0 + R\frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}, & si\ \|x - x_0\| \geq R. \end{cases}$$

Proposition 6.7 *A est une rétractée de X si et seulement si pour tout espace topologique Y, toute application continue $f\colon\ A \longrightarrow Y$ admet une extension continue $\tilde{f}\colon\ X \longrightarrow Y$.*

Démonstration

(a) Soit $r\colon\ X \longrightarrow A$ une rétraction et $f\colon\ A \longrightarrow Y$ une application continue. Alors l'application composée $f \circ r\colon\ X \longrightarrow Y$ est une extension continue de l'application f.

(b) Réciproquement, si toute application continue $f\colon\ A \longrightarrow Y$ admet une extension à l'espace X, alors l'application identité $I_{|A}\colon\ A \longrightarrow A$ possède une extension $r\colon\ X \longrightarrow A$.

Théorème 6.1 *Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble compact et $f\colon K \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Alors f peut être prolongée continûment à $\mathbb{R}^n$.*[1]

Démonstration

K étant compact, il existe une partie $\{a_1, \cdots, a_n\}$ de K dénombrable et partout dense. Si on considère la suite régularisante définie par

$$\phi_i(x) = \max\{2 - \frac{|x-a_i|}{d(x,K)}, 0\} \quad \text{pour } x \notin K,$$

alors, on peut prendre comme prolongement de f

$$\tilde{f} = \begin{cases} \left(\sum_{i\geq 1} 2^{-i}\phi_i(x)\right)^{-1} \sum_{i\geq 1} 2^{-i}\phi_i(x) f(a_i) & x \notin K \\ f(x), & x \in K. \end{cases}$$

Ce résultat important admet en dimension quelconque les généralisations suivantes dont les démonstrations peuvent être trouvées dans [D].

Théorème 6.2 *Soit X et Y deux espaces vectoriels normés, $A \subset X$ une partie fermée de X et $f\colon A \longrightarrow Y$ une application continue. Alors f admet une extension continue $\tilde{f}\colon X \longrightarrow Y$ telle que $\tilde{f}(X) \subset Conv(f(A))$.*[2]

On a enfin deux conséquences immédiates.

Corollaire 6.1 *Soit X et Y deux espaces vectoriels normés, $A \subset X$ une partie fermée, bornée de X et $f\colon A \longrightarrow Y$ une application compacte. Alors f admet une extension continue $\tilde{f}\colon X \longrightarrow Y$ telle que $\tilde{f}(X) \subset Conv(f(A))$.*

Corollaire 6.2 *Toute partie convexe, fermée d'un espace normé en une rétractée.*

6.6 Quelques lemmes utiles

Lemme 6.5 *(Approximation des fonctions continues) Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble compact et $f \in C^0(K)$. Alors*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, g_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ telle que } \sup_K \|f(x) - g_\varepsilon(x)\| \leq \varepsilon.$$

[1] Tietze, H. Uber Funktionen die auf einer abgeschlossenen Menge Sletig Sind. J. Reine Angew. Math. 145, pp. 9-14 (1915)

[2] Dugundji, J. (1951). An extension of Tietze's Theorem, Pacific J. Math., I, 351-367

Démonstration

Considérons, pour tout α réel strictement positif, la famille régularisante de fonctions $(\phi_\alpha)_{\alpha>0}$ définies de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$ par

$$\phi_1 = \begin{cases} k\exp\left(\frac{-1}{1-|x|^2}\right), & \text{si } |x|<1 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

puis

$$\phi_\alpha(x) = \alpha^{-n}\phi_1\left(\frac{x}{\alpha}\right)\cdot$$

Alors $\phi_\alpha \in C^\infty$, $\int_{\mathbb{R}^n}\phi_\alpha(x)\,dx = 1$ et

$$Supp\,\phi_\alpha = \{\overline{x\in\mathbb{R}^n:\ \phi_\alpha(x)\neq 0}\} = B_\alpha(0), \quad \forall\,\alpha>0.$$

D'après le théorème d'extension de Tietze-Uryshon (Théorème 6.1), la fonction f admet une extension $\tilde{f}$. Posons

$$f_\alpha(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\tilde{f}(t)\phi_\alpha(t-\alpha)\,dt, \qquad \text{pour } x\in\mathbb{R}^n \text{ et } \alpha>0.$$

On en déduit que $f_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et que $f_\alpha(x)$ converge, quand $\alpha\to 0$, uniformément sur K vers $f(x)$. On en déduit que $g = f_\alpha$ pour α assez petit.

Lemme 6.6 *(Lemme de Sard, 1942) Soit $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ un ouvert borné et $f\in C^1(\Omega)$. Alors l'ensemble image $f(\mathcal{S}_f(\Omega))$ est de mesure de Lebesgue nulle dans $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration

Faisons-la en dimension une d'espace en posant $\Omega =]a,b[$ et $S = S_f(]a,b[)$:
Étant donné $\varepsilon>0$, soit $U = \{x\in[a,b]:\ |f'(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}\}\cdot$ Par continuité de la fonction f', l'ensemble U est un ouvert ; il s'écrit donc comme réunion dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints : $U = \cup_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Comme S est un compact de U, il existe un sous-recouvrement fini : $S = \cup_{n=1}^{n=p} I_n$. Alors, $f(S)\subset\cup_{n=1}^{n=p} f(I_n)$ où $f(I_n)$ est, pour tout $n\in\{1,...,p\}$, un intervalle. Montrons que $\sum_{n=1}^{n=p}\mu(f(I_n))<\varepsilon$, où μ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Pour cela, fixons un entier $n\in\{1,p\}$ et considérons $(y,y')\in f(I_n)^2$; alors, il existe $(x,x')\in I_n^2$ tel que :

$$|y-y'| = |f(x)-f(x')| \leq |x-x'|\sup_{x\in I_n}|f'(x)| \leq |x-x'|\sup_{x\in U}|f'(x)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}d(I_n).$$

Alors :

$$d(f(I_n)) \leq \frac{\varepsilon}{b-a} d(I_n) \text{ et } \sum_{n=1}^{n=p} d(f(I_n)) \leq \frac{\varepsilon}{b-a} d(S) \leq \varepsilon.$$

Lemme 6.7 *(Lemme de Lions) Soit X, Y, Z trois espaces de Banach tel que les injections $X \subset Y \subset Z$ soient continues et l'injection $X \subset Y$ compacte. Alors, pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C(\varepsilon)$ telle que pour tout $x \in X$,*

$$\|x\|_Y \leq \varepsilon \|x\|_X + C(\varepsilon).\|x\|_Z.$$

Démonstration

Par l'absurde, supposons l'existence d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ telle que $\|x_n\|_Y > \varepsilon\|x_n\|_X + C(\varepsilon)\|x_n\|_Z$. Alors, la suite $y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|_X}$ vérifie $\|y_n\|_X = 1$ et $\|y_n\|_Y > \varepsilon + n\|y_n\|_Z$. D'autre part, il existe une suite, encore notée (y_n), convergeant fortement vers un élément y dans Y et donc dans Z. Or, $\|y\|_X = 1$ et $\|y\|_Y > \epsilon$, $\forall\, \varepsilon > 0$; d'où la contradiction.

Lemme 6.8 *(Lemme de Grönwall) Soit $u\colon\ I \subset \mathbb{R} \longrightarrow E$ une application continue, positive. On suppose qu'il existe λ et μ deux fonctions continues ($\lambda \geq 0$) satisfaisant*

$$u(t) \leq \mu(t) + \int_{t_0}^{t} \lambda(s) u(s)\, ds, \quad \forall\, t \in [t_0, b]. \tag{6.9}$$

Alors, u satisfait l'estimation suivante

$$u(t) \leq \mu(t) + \int_{t_0}^{t} \lambda(s) u(s) \exp\left(\int_{s}^{t} \lambda(y)\, dy\right) ds.$$

Dans le cas particulier $\mu(t) \equiv C$, on obtient la majoration suivante :

$$u(t) \leq C \exp\left(\int_{t_0}^{t} \lambda(s)\, ds\right).$$

Démonstration

Multiplions les deux membres de (6.9) par $\lambda(t)$ puis posons $\phi(t) = \int_{t_0}^{t} \lambda(s)u(s)\, ds$. Alors ϕ vérifie l'inéquation suivante

$$\phi'(t) \leq \lambda(t)\mu(t) + \lambda(t)\phi(t), \quad \forall\, t \geq t_0$$

ou encore

$$\left(\phi(t) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \lambda(s)\, ds\right)\right)' \leq \lambda(t)\mu(t) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \lambda(s)\, ds\right).$$

D'où, par intégration entre t_0 et t

$$\phi(t)\exp\left(-\int_{t_0}^{t}\lambda(s)\,ds\right) \leq \int_{t_0}^{t}\lambda(s)\mu(s)\exp\left(-\int_{t_0}^{s}\lambda(y)\,dy\right)\,ds;$$

puis, successivement

$$\phi(t) \leq \exp\left(\int_{t_0}^{t}\lambda(s)\,ds\right)\int_{t_0}^{t}\lambda(s)\mu(s)\exp\left(-\int_{t_0}^{s}\lambda(y)\,dy\right)\,ds$$

et

$$\phi(t) \leq \int_{t_0}^{t}\lambda(s)\mu(s)\exp\left(\int_{s}^{t}\lambda(y)\,dy\right)\,ds.$$

Enfin, en revenant à (6.9), on aboutit à

$$u(t) \leq \mu(t) + \int_{t_0}^{t}\lambda(s)\mu(s)\exp\left(\int_{s}^{t}\lambda(y)\,dy\right)\,ds.$$

La seconde partie du lemme est immédiate.

Lemme 6.9 *(Lemme de projection de Stampacchia) Soit C un convexe fermé non vide d'un espace de Hilbert H. Alors*

(a) $\forall\, u \in H,\ \exists\, u_0 \in C$ *tel que* $\|u-u_0\| = \inf_{v\in C}\|u-v\|$,

(b) $\forall\, v \in C,\ \langle u-u_0, v-u_0\rangle \leq 0$;

où $u_0 = Pr_C u$ *désigne la projection de u sur C.*

Démonstration

(1) Étant donné u dans H, posons $\delta = d(u,C)$. Par définition de δ, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty}\|u-u_n\| = \delta$. Montrons que (u_n) est une suite de Cauchy. Par la formule de la médiane, nous avons

$$\|u_p-u_q\|^2 = 2\|u-u_p\|^2 + \|u-u_q\|^2 - 4\|u-\frac{1}{2}(u_p+u_q)\|^2.$$

L'ensemble C étant convexe, $\frac{1}{2}(u_p+u_q) \in C$; d'où $\lim\limits_{p,q\to\infty}\|u_p-u_q| = 0$. Enfin, C étant complet dans H, il existe $u_0 = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ satisfaisant $\|u_0-u\| = \delta$. L'unicité de u_0 découle également de l'identité de la médiane.

(2) De l'inégalité $\|u-u_0\| \leq \|u-v\|,\ \forall\, v \in C$, résulte la majoration suivante :

$$\|u-u_0\|^2 \leq \|u-u_0-t(v-u_0)\|^2,\ \forall\, v \in C \text{ et } \forall\, t \in [0,1],$$

soit, après développement du second membre

$$2\langle u-u_0, v-u_0\rangle \leq t\|v-u_0\|^2, \quad \forall\, t>0.$$

Le résultat demandé se déduit alors par passage à la limite.

Lemme 6.10 *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$.
(1) Il existe une base orthonormale (u_n) *de* $L^2(\Omega)$ *et une suite croissante* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de nombres réels positifs vérifiant*

$$\begin{cases} -\Delta u_n = \lambda_n u_n & \text{dans } \Omega \\ u_n \in H_0^1(\Omega)\cap C^\infty(\bar{\Omega}). \end{cases}$$

Soit, pour $v \neq 0$, *le quotient de Rayleigh donné par*

$$R(v) = \frac{\|v\|^2_{H_0^1(\Omega)}}{\|v\|^2_{L^2(\Omega)}}\cdot$$

Alors, on a la caractérisation suivante :

$$\lambda_1 = R(u_1) = \min_{w\in H_0^1(\Omega),\, v\neq 0} R(v)$$

et plus généralement

$$\lambda_n = R(u_n) = \min \max_{v\in H_0^1(\Omega),\, \dim W=n,\, v\in W} R(v) = \max_{v\in[u_1,\cdots,u_n]} R(v).$$

(2) Si $w \in H_0^1(\Omega)$ *est tel que* $R(w)=\lambda_1$, *alors* w *est un vecteur associé à la valeur propre* λ_1.

6.7 Références bibliographiques pour l'Annexe

[A] Agmond S., *Lectures on Elliptic Boundary Value Problems,* Van Nostrand Mathematical Studies N° 2, 1965.

[AG] Akhiezer N.I. & Glasman I.M., *Theory of Linear Operators in Hilbert Spaces,* Pitman, V. 1, 1981.

[B] Brezis H., *Analyse Fonctionnelle : Théorie et Aplications,* Masson, Paris, 1983.

[D] Dugundji J., *Topology,* Allyn and Bacon, Inc. Boston, 1966.

[DS] Dunford N. & Schwartz J., *Linear Operators Parts I and II,* Interscience, New York, 1958 & 1963.

[GT] Gilbar D. & Trudinger N.S., *Elliptic Partial Differential Equations of second order,* Springer Verlag, Heidelberg, 1983.

[JB] Joshi M.S. & Bose R.K., *Some Topics in Nonlinear Functional Analysis,* Wiley Eastern Limited, 1985

[Ke] Kesavan S., *Topics in functional Analysis and Applications,* Wiley Eastern Limited, 1981.

[Kr] Krall A.M., *Linear Methods in Applied Analysis,* Addinson-Wesley, Publishing Company, Massachussets, 1973.

[LU] Ladyzenskaya O. & Ural'ceva N.N., *Linear and Quasilinear Elliptic Partial Differential Equations,* Academic Press, Paris, New York, 1968.

[L] Lions J.L., *Quelques méthodes de Résolution de Problèmes aux Limites non Linéaires,* Dunud, Paris, 1969.

[S] Stampacchia G., *Équations Elliptiques du Second Ordre à Coefficients Discontinus,* Presses de l'université de Montréal, 1965.

Bibliographie

[1] Berger M.S., *Nonlinearity and Functional Analysis,* Academic Press, New York, San Fransisco, London, 1977.

[2] Deimling K., *Nonlinear Functional Analysis,* Springer Verlag, Berlin, New York. Oxford, 1985.

[3] Dugundji J. & Granas A., *Fixed point Theory. Vol I,* Monograf, Mat, N° 61, PWN-Polish Scientific Pub. Warzawa, 1982.

[4] Dunford N. & Schwartz J.T., *Linear Operators. Part I : General Theory,* Interscience, New York, 1967.

[5] Fonseca I. & Gangbo W., *Degree Theory in Analysis and Applications,* Clarendon Press. Oxford, 1995.

[6] Fučik S. & Kufner A., *Nonlinear Differential Equations,* Elsevier Scientific publishing Company, 1980.

[7] Guenther R.B., *Problèmes aux Limites non Linéaires pour certaines Classes d'E.D.O.,* Presses de l'Université de Montréal, 1985.

[8] Joshi M.S. & Bose R.K., *Some topics in Nonlinear Functional Analysis,* Wiley Eastern Limited, New Delhi, 1985.

[9] Kavian O., *Introduction à la théorie des points critiques et Applications aux Problèmes Elliptiques,* Springer Verlag, Math. et Appl., Vol 13, 1993.

[10] Kesavan S., *Topics in Functional Analysis and Applications,* John Wiley and Sons, New York, 1989.

[11] Krasnoselskii M.A., *Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral equations,* Pergamon Press, 1963.

[12] Krasnoselskii M.A. & Zabreiko P.P., *Geometrical Methods of Nonlinear Analysis,* Springer Verlag, 1984.

[13] Lloyd N.G., *Degree Theory*, Cambridge University Press, 1978.

[14] Mawhin J., *Topological Degree Methods in Nonlinear Boundary Value Problems*, Expository Lectures from the CBMS Regional Conference, 1979.

[15] Mawhin J., *Points fixes, points critiques et problèmes aux limites*, Presses de l'Université de Montréal, 1985.

[16] Niremberg L., *Topics in Nonlinear Functional Analysis*, New York University, 1974.

[17] Rabinowitz P.H., *Théorie du Degré Topologique et Applications à des Problèmes aux Limites non Linéaires (notes rédigées par H. Berestycki),* Lecture Notes 75010, Univ. Paris VI, 1976.

[18] Schwartz J.T., *Nonlinear Functional Analysis,* Gordon and Breach, New York, 1969.

[19] Smart D.R., *Fixed point Theorems,* Cambridge University Press, 1980.

[20] Zeidler E., *Nonlinear Functional Analysis and its Aplications. Vol. I : Fixed Point Theorems.*, Springer Verlag, New York, 1986.