POLYNÔMES ORTHOGONAUX

LARABI ABDRAHMANE

Introduction : Il est facile de montrer par un calcul trigonométrique que :

$$2\cos(m\theta)\cos(n\theta) = \cos(n+m)\theta + \cos(m-n)\theta \tag{1}$$

pour obtenir la formule :

$$\int_0^{\pi} \cos(m\theta)\cos(n\theta) = 0, n \neq m \tag{2}$$

nous dirons que $\cos(n\theta)$ et $\cos(m\theta)$ sont orthogonales sur $[0,\pi]$ pour $n \neq m$
En général , nous dirons que $1, \cos\theta, \cos 2\theta, ...$ est une suite orthogonale sur $[0,\pi]$
Dans (2) le changement de variable $x = \cos\theta$ donne

$$\int_{-1}^{1} T_m(x)T_n(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx = 0, m \neq n \tag{3}$$

où on a posé :

$$T_n(x) = \cos(n\theta) = cos(ncos^{-1}x), pour - 1 \leq x \leq 1 \tag{4}$$

ce qui nous donne :

$$T_0(x) = 1$$
$$T_1(x) = x$$
$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

,......etc

1. DÉFINITION

les polynômes $T_n(x)$ de (3) sont appelés polynômes de tchebeyhev de 1^{re} espèce
On dit qu'il sont orthogonaux par rapport à la fonction $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$,
$-1 \leq x \leq 1$
En général , on considère les fonctions poids $w(x) > 0$ telles que
$\int_a^b w(x)dx > 0$
On définit les moments $(\mu_n)_{n\geq 0}$ par

$$\mu_n = \int_a^b x^n w(x)dx \tag{5}$$

donc s'il existe une suite polynomiale $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$,P_n de degré n tel que :

$$\int_a^b P_n(x)P_m(x)w(x)dx = 0, n \neq m \tag{6}$$

alors $\{P_n(x)\}$ est une suite de polynômes orthogonaux par rapport à la fonction poids $w(x)$ sur $[a, b]$, si on note pour une fonction integrable f :

$$L(f) = \int_a^b f(x)w(x)dx \tag{7}$$

alors (5) et (6) s'ecrivent

$$L(x^n) = \mu_n, pour n \geq 0 \tag{8}$$

$$L(P_n(x)P_m(x)) = 0, pour n \neq m \tag{9}$$

L est un opérateur linéaire pour un polynôme : $\pi(x) = \sum_{k=o}^{n} c_k x^k$ on a

$$L(\pi(x)) = L(\sum_{k=o}^{n} c_k x^k) = \sum_{k=o}^{n} c_k \mu_k \tag{10}$$

Remarques

(1) à la place (7) ,on peut considèrer une suite réelle ou complexes $(\mu_n)_n \geq 0$ et en utilisant (8) ,on peut définir une forme linéaire sur P(espace vectoriel des polynomes à valeurs réelles ou complexes)
(2) s'il existe une suite $\{P_n(x)\}_{n\geq n}$ qui vérifie (9) et la condition $L(P_n^2) \neq 0$,alors on dira que $\{P_n(x)\}$ est une suite orthogonale par rapport à L

Problème
est ce que toute suite de moments $(\mu_n)_n \geq 0$ donne une suite orthogonale $P_n(x)$?(le problème d'existence)

Definition 1.1. *soit $(\mu_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes et soit L la fonctionnelle linéaire définie sur P par :*
$L(x^n)$=μ_n ,$n \geq 0$ le nombre μ_n est appellé moment d'ordre n

Definition 1.2. *une suite $P_n(x)$ est appellé orthogonale par rapport à L si*

(1) $P_n(x)$ *est polynome de degré* n
(2) $L(P_n P_m) = 0, \forall n \neq m$
(3) $L(P_n^2) \neq 0, \forall n$

Remarques

(1) si de plus $L(P_n^2) = 1$ on dira que la suite est orthonormale par rapport à L nous avons dans ce cas :

$$L(P_n P_m) = \delta_n, m = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m \end{cases}$$

(2) En général, on a

$$L(P_n(x)P_m(x)) = K_n \delta_{n,m}$$

$K_n \neq 0$

(3) si $deg(P_0) = 0$ alors $L(P_0(x)) = \alpha\mu_0 \neq 0 \Rightarrow \mu_0 \neq 0$ donc si la fonctionnelle L est telle que :$L(x^0) = 0$ alors la suite des polynômes orthogonaux par rapport à L n'existe pas

(4) prenons $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = 1$ et $P_0(x) = a \neq 0$,$P_1(x) = bx + c$ avec $b \neq 0$
si $L(P_0 P_1) = L(abx + ac) = aL(bx + c) = aL(b\mu_1 + c\mu_0) = 0$ alors $b = -c$
et par suite
$L(P_1^2(x)) = L(b^2x^2 + c^2 + 2bcx) = b^2(\mu_2 - \mu_1 + \mu_0) = 0$

Théorème 1.1. *soit L une fonctionnelle définie par ses moments et soit $\{P_n(x)\}$ une suite de polynômes ,les trois propriétés suivantes sont equivalentes*
a) $\{P_n(x)\}$ est une suite de polynômes orthogonaux par rapport à L
b) $L(\pi(x)P_n(x)) = 0$ pour tous polynômes de degré $m < n$ et $L(\pi(x)P_n(x)) \neq 0$ si $m = n$
c) $L(x^m P_n(x)) = k_n \delta_n, m$, $k_n \neq 0$, m=0,1,...,n.

Preuve :
a) $\Rightarrow$ *b)*
soit $\{P_n(x)\}$ une suite de polynômes orthognaux par rapport à L alors
$degP_k(x) = k$,il est clair que $P_0, P_1, ..., P_m$ est une base de $\mathcal{P}_m$ (e.v. des polynômes de degré au plus m) si$\pi(x)$ est un polynôme de degré m alors :
$\pi(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k p_k(x)$, $c_m \neq 0$.
$\Rightarrow L(\pi(x)P_n(x)) = \sum_{k=0}^{m} c_k P_k(x)P_n(x)$,$c_m \neq 0$,
$\Rightarrow$

$$L(\pi(x)P_n(x)) = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ c_m L(p_m^2) \neq 0 & \text{si } n = m \end{cases}$$

Théorème 1.2. *soit* $\{P_n(x)\}$ *une suite de polynômes orthognaux par rapport à* L *alors pour tous polynôme* $\pi(x)$ *de degré* n *on a*
$\pi(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k p_k(x)$ *et* $c_m = \frac{L(\pi(x)P_n(x))}{L(P_m^2)}$

Preuve
$\pi(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k p_k(x)$
$\pi(x)P_m(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k P_k(x)P_m(x)$,$m = 0, ..., n$
$L(\pi(x)P_m(x)) = \sum_{k=0}^{m} c_k L(P_k(x)P_m(x)) = c_m L(P_m^2)$
alors $c_m = \frac{L(\pi(x)P_m(x))}{L(P_m^2)}$,$m = 0, ..., n$

Corollaire 1.1. *si* $\{P_n(x)\}$ *une suite de polynômes orthognaux par rapport à* L *et si* $\{Q_n(x)\}$ *une autre suite de polynômes orthognaux par rapport à* L *,alors* $\exists c_n \neq 0$ *tel que* $Q_n(x) = c_n P_n(x)$

Preuve :
si $\{Q_n(x)\}$ une autre suite de polynômes orthognaux par rapport à L ,alors
d'aprés le théorème (1.1) on a $L(P_k Q_n) = 0$ pour k<n
ensuite dans le théorème (1.2)
on pose $\pi(x) = Q_n(x)$
$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k p_k(x)$
donc $c_k = \frac{L(Q_n(x)P_k(x))}{L(P_k^2)} \forall k < n$
alors $Q_n(x) = c_n P_n(x)$
Existance de la suite des polynômes orthogonaux
Introduisant le determinant suivant

$$\triangle_n = det(\mu_{i+j})_{i,j=0}^{n} = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & & \mu_{n+1} \\ & & & \\ & & & \\ \mu_n & & & \mu_{2n} \end{vmatrix}.$$

(determinant de Hankel)

Théorème 1.3. *soit* L *une fonctionnelle linéaire définie sur* P *par* $L(x^n) = \mu_n$ *une condition nécessaire et suffisante pour l'existance d'une suite de polynômes orthogonaux par rapport à* L *est que* $\triangle_n \neq 0$ *,*$n = 0, 1, 2, ...$

Preuve
Posons $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_{nk} x^k$
par la condition d'orthogonalité
$L(x^m P_m(x)) = \sum_{k=0}^{n} c_{nk} \mu k^m = K_n \delta_{n,m} (k_n \neq 0, m \leq n) \cdots (3, 2)$

(3,2) est équivalente au système suivant

$$\begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & . & . & . & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & . & . & . & \mu_{n+1} \\ \\ \\ \mu_n & . & . & . & . & \mu_{2n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_{n0} \\ c_{n1} \\ \\ \\ c_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \\ \\ k_n \end{vmatrix}.$$

donc si une suite de polynômes orthogonaux par rapport à L existe
elle est uniquement determiner par la constante k_n et d'aprés (3,2) le système doit avoir une solution unique donc $\triangle_n \neq 0$
inversement si $\triangle_n \neq 0$, alors pour $k_n \neq 0$, le système a une solution unique et par suite $P_n(x)$ qui vérifie (3,2) existe .

Exercice :

1) montrer que $c_{nn} = \frac{k_n \triangle_n - 1}{\triangle_n}$,$n \geq 1$

2) montrer :si $\{P_n(x)\}$ est une suite de polynômes orthogonaux par rapport à L et $\pi_n(x)$ de degré n ,alors
$L(\pi_n(x)P_n(x)) = \frac{a_n k_n \triangle_n}{\triangle_n - 1}$,$\triangle_{-1} = 1$
avec $a_n = l_d(\pi_n)$ et $b_n = l_d(P_n)$
l_d indique le coefficient dominant (de plus haut degré)

Solution :

1) il est clair que le systeme equivalent à (3,2) est de cramer donc
$c_{nn} = \frac{k_n \triangle_n - 1}{\triangle_n}$,$n \geq 1$

2)montrons que $L(\pi_n(x)P_n(x)) = \frac{a_n b_n \triangle_n}{\triangle_n - 1}$,$\triangle_{-1} = 1$
$\pi_n(x) = a_n x^n + \pi_{n-1}(x)$
$L(\pi_n(x)P_n(x)) = a_n L(x^n P_n)$
et comme $L(x^n P_n) = k_n$ et d'aprés la première question on a
$k_n = \frac{b_n \triangle_n}{\triangle_{n-1}}$

donc

$L(\pi_n(x)P_n(x)) = \frac{a_n b_n \triangle_n}{\triangle_{n-1}}$

Definition 1.3. *une forme linéaire L est dite définie positive si* $L(\pi(x)) > 0$ $\forall \pi$ *polynôme tel que* $\pi(x) \geq 0$,$\forall x \in \mathbb{R}$

Construction d'une suite de polynômes orthogonaux

On pose :$P_0(x) = \mu_0^{-\frac{1}{2}}$ donc $L(P_0^2(x)) = \mu_0^{-1} L(1) = 1$
on pose ensuite
$\widetilde{P_1}(x) = x - aP_0(x)$, alors $L(P_0 \widetilde{P_1}) = L(xP_0) - aL(P_0^2)$
et si on prend $a = L(xP_0)$
et posons $P_1(x) = \{L(\widetilde{P_1}^2)\}^{-\frac{1}{2}}$

dans ce cas
$L(P_0P_1) = 0$ et $L(P_1^2) = 1$
par recurrence supposons que $P_0, P_1, ..., P_n$ soient construites de sorte que

$$\begin{cases} deg(P_i) = i \\ L(P_iP_j) = \delta_{i,j} \quad i, j = 0, 1, ...n \end{cases}$$

si on pose $\widetilde{P}_{n+1}(x) = x^{n+1} - \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(x)$
et $a_k = L(x^{n+1}P_k(x))$
alors $\widetilde{P_{n+1}}$ est de degré $(n+1)$ et
$L(P_j\widetilde{P}_{n+1}) = L(x^{n+1}P_j) - \sum_{k=0}^{n} a_k L(P_jP_k) = a_j - a_j = 0$
ensuite on pose
$P_{n+1} = \{L(\widetilde{P_1}^2\}^{-\frac{1}{2}}\widetilde{P}_{n+1}$
alors

$$\begin{cases} L(P_{n+1}^2) = 1 \\ L(P_iP_{n+1}) = \delta_{i,n+1} \end{cases}$$

Conclusion :
si L est definie positive alors la suite des polynômes orthogonaux par rapport à L existe et de plus elle est orthonormale à coefficients réels ,et les moments de L sont réels

Definition 1.4. *L est dite quasi définie si $\triangle_n \neq 0$,$\forall n \geq 0$*

Lemme 1.1. *$\pi(x) \geq 0$,$\forall x \in \mathbb{R}$,ils existent $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\pi(x) = P^2 + Q^2$*

Preuve :
$\pi(x)$ est à coefficients réels , les racines sont réelles ou complexes conjugués, et puisque $\pi(x) \geq 0$, les racines réelles sont de multiplicité paire $\pi(x) = r^2(x)\prod_{k=1}^{n}(x - (\alpha_k + i\beta_k))(x - (\alpha_k - i\beta_k))$
posons $\prod_{k=1}^{n}(x - (\alpha_k - i\beta_k)) = A(x) + iB(x)$
donc $\pi(x) = r^2(x)(A^2 + B^2) = P^2 + Q^2$

Théorème 1.4. *L est définie positive si et seulement si $\mu_n \in \mathbb{R}$ et $\triangle_n > 0, n \geq 0$*

Preuve :
1) si $\mu_n \in \mathbb{R}$ et $\triangle_n > 0$ alors
$L(P_n^2) = l_d^2(p_n)\frac{\triangle_n}{\triangle_{n-1}} > 0$
de plus d'aprés le système (3,2) et puisque $\mu_n \in \mathbb{R}$ on a P_n est à coefficients réels et si A est un polynôme à coefficients réels tel que $A(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k P_k$, $a_k \in \mathbb{R}$
alors $L(A^2) = \sum_{j,k=0}^{m} a_j a_k L(P_jP_k)$
$= \sum_{k=0}^{m} a_k^2 L(P_k^2) > 0$

si $\pi(x) \geq 0 \Rightarrow \pi(x) = A^2(x) + B^2(x) \Rightarrow L(\pi(x)) = L(A^2) = L(B^2) > 0$
ce qui implique que L est définie positive
2) inversement
si L est définie positive alors $\mu_n \in \mathbb{R}$
$0 < L(P_n^2) = l_d^2(P_n)\frac{\triangle_n}{\triangle n-1}$ avec $\triangle_{-1} = 1 \Rightarrow \triangle_n > 0, \forall n$
Relation de recurrence

Théorème 1.5. *soit L une forme quasi-définie et soit* $\{P_n\}$ *la suite des polynômes orthogonaux par rapport à L alors il existe* $c_n \in \mathbb{C}$ *et* $\lambda_n \neq 0$ *tels que :*
1) $P_n = (x - c_n)P_{n-1} - \lambda_n P_{n-2}, n = 1, 2, 3, ...$
$P_{-1}(x) = 0$
2)de plus si L est définie positive ,alors $c_n \in \mathbb{R}$ *et* $\lambda_{n+1} > 0$ *pour* $n \geq 1$
(λ_1 *est arbitraire)*

Preuve :

xP_n est de degré $(n + 1)$
$xP_n = \sum_{k=0}^{n+1} a_{nk}P_k,$
$a_{nk} = \frac{L(xP_nP_k)}{L(P_k^2)}$
comme $deg(xP_k) = k + 1$
alors $a_{nk} = 0$ pour $k + 1 < n$
donc $a_{nk} = 0, \forall k < n - 1$
de plus xP_n est unitaire , donc
$a_{n,n+1} = 1$
$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + a_{nn}P_n(x) + a_{n,n-1}P_{n-1}(x)$,$n \geq 1$
$P_{n+1}(x) = (x - a_{nn})P_n(x) - a_{n,n-1}P_{n-1}$
$P_n(x) = (x - c_n)P_{n-1}(x) - \lambda_n P_{n-2}(x)$
$P_{-1} = 0$,$n \geq 1$

$P_1(x) = (x - c_1)P_0 = x - c_1$,il suffit de prendre $c_1 = -P_1(0)$
2) $L(x^{n-2}P_n(x)) = L(x^{n-1}P_{n-1}) - c_nL(x^{n-2}P_{n-1}) - \lambda_nL(x^{n-2}P_{n-2})$
$0 = L(x^{n-1}P_{n-1}) - \lambda_nL(x^{n-2}P_{n-2})$

$\forall n \geq 1$,$\lambda_{n+1} = \frac{L(x^nP_n(x))}{L(x^{n-1}P_{n-1})}(x) = \frac{\triangle_n\triangle_{n-2}}{\triangle_{n-1}^2}$, $\triangle_{-1} = 1$

Théorème 1.6. (a) $\lambda_{n+1} = \frac{L(P^2)}{L(P^2)} = \frac{\Delta_{n-2}\Delta_n}{\Delta_{n-1}^2}$

(b) $L(P_n^2) = \lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_{n+1}$ *avec* $\lambda_1 = \mu_0 = \Delta_0$

(c) $c_n = \frac{L(xP_{n-1}^2)}{P_{n-1}^2}$

(d) *le coefficient de* x^{n-1} *dans* P_n *est* $-(c_1+c_2+\cdots+c_n)$

Preuve

(a) $L(P_n^2)=L(P_nP_n)=l_d^2(P_n)\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}=\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$ alors $L(P_{n-1}^2)=\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}}$ et donc $\frac{L(P_n^2)}{L(P_{n-1}^2)}=\frac{\Delta_{n-2}\Delta_n}{\Delta_{n-1}^2}=\lambda_{n+1}$

(b)

$$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n+1}=\Delta_0\frac{\Delta_{-1}\Delta_1}{\Delta_0^2}\frac{\Delta_0\Delta_2}{\Delta_1^2}\cdots\frac{\Delta_{n-2}\Delta_n}{\Delta_{n-1}^2}=\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}=L(P_n^2)$$

(c) $P_n=(x-c_n)P_{n-1}-\lambda_nP_{n-1}P_{n-2}$
$P_{n-1}P_n=xP_{n-1}^2-c_nP_{n-1}^2-\lambda_nP_{n-1}P_{n-2}$
$L(P_{n-1}P_n)=L(xP_{n-1}^2)-c_nL(P_{n-1}^2)-\lambda_nL(P_{n-1}P_{n-2})$
alors $c_n=\frac{L(xP_{n-1}^2)}{L(P_{n-1}^2)}$

(d) soit d_n le coefficient de x^{n-1} dans P_n alors
$d_n=d_{n-1}-c_n$
$=d_{n-2}-(c_n+c_{n-1})$
.
.
.
$=-(c_1+c_2+\cdots+c_n)$

Remarque Dans le cas où la suite $\{P_n\}$ n'est pas unitaire,elle vérifie une relation de type
$P_{n+1}=(A_nx+B_n)P_n-c_nP_{n-1}$
si $k_n=l_d(P_n)$ alors :
$P_n(x)=k_n\tilde{P_n}(x)$le polynome unitaire
nous trouvons

$$\left\{\begin{array}{r}A_n=\frac{k_{n+1}}{k_n}\\ B_n=\frac{-c_{n+1}k_{n+1}}{k_n}\\ c_n=\lambda_{n+1}\frac{k_{n+1}}{k_{n-1}},n\geq 0,etk_{-1}=1\end{array}\right.$$

Exemple : Tchebychev de 1[re] espèce

$$\left\{\begin{array}{c}T_n(x)=cosn\theta,x=cos\theta\\ cos(n+1)\theta+cos(n-1)\theta=2cosn\theta cos\theta\end{array}\right. \quad onaT_{n+1}=2xT_n-T_{n-1},n\geq 1$$

On sait que $l_d(T_n)=2^{n-1}$
alors la suite unitaire est définie par $\tilde{T_0}=T_0,\tilde{T_n}=2^{1-n}T_n,n\geq 1$
ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{c}\tilde{T_2}=x\tilde{T_1}-\frac{1}{2}\tilde{T_0}\\ \tilde{T_n}=x\tilde{T_{n-1}}-\frac{1}{4}\tilde{T_{n-2}}\end{array}\right.$$

Definition 1.5. *L est dite symétrique si :*
les moments d'ordre impair sont nuls

Exemple
$L(\cdot) = \int_{-1}^{1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^1}} dx$
$\mu_{2n+1} = L(x^{2n+1}) = \int_{-1}^{1} \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^1}} dx = 0$

Théorème 1.7. *soit P_n la S.P.O/L (P_n est unitaire),les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *L est symétrique*

(b) $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x), n \geq 0$

(c) *dans la relation :$P_n = (x - c_n)P_{n-1} - \lambda_n P_{n-2}, n \geq 1 on a c_n = 0.$*

Preuve : $(a) \Rightarrow (b)$
$\pi(x) = x^n + \cdots + a_0.$
$\pi(-x) = (-x)^n + \cdots + a_0.$
$L(\pi(-x)) = (-1)^n L(x^n) + (-1)^{n-1} a_{n-1} L(x_{n-1}) + \cdots + L(a_0).$
si $n = 2p$, alors
$L(\pi(-x)) = L(x^n) + a_{n-2} L(x_{n-2}) + \cdots + L(a_0) = L(\pi(x)).$
si $n = 2p + 1$,alors
$L(\pi(-x)) = a_{n-1} L(x^{n-1}) + a_{n-3} L(x_{n-3}) + \cdots + L(a_1) = L(\pi(x)).$
donc on a $L(\pi(-x)) = L(\pi(x))$
alors $L(\pi_n(x)\pi_m(x)) = L(\pi_n(-x)\pi_m(-x))$
donc $P_n(-x)$ est aussi orthogonale par rapport à L ,donc
$P_n(-x) = b_n P_n(x)$

$$\begin{cases} P_n(-x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} a_{n-1} x_{n-1} + \cdots + a_0. \\ b_n P_n(x) = b_n x^n + b_n a_{n-1} x_{n-1} + \cdots + a_0 b_n. \end{cases}$$

et $L(P_n(-x)) = b_n L(P_n(x))$
si $n = 2p$
$\mu_n + a_{n-2}\mu_{n-2} + \cdots + a_0\mu_0 = b_n\mu_n + b_n a_{n-2}\mu_{n-2} + \cdots + b_n a_0 \mu_0$
ce qui donne $b_n = 1 = (-1)^n$
si $n = 2p + 1$
$b_n = (-1) = (-1)^n$
alors $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$
$(b) \Rightarrow (a)$
si $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ on a
$P_n(-x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} a_{n-1} x_{n-1} + \cdots + a_0 = (-1)^n x^n + (-1)^n a_{n-1} x_{n-1} + \cdots +$

$a_0(-1)^n$
si $n = 2p+1$
$-x^n + a_{n-1}x_{n-1} - a_{n-2}x^{n-2} + \cdots - a_1x + a_0 = -x^n - a_{n-1}x_{n-1} - a_{n-2}x^{n-2} - \cdots - a_1x - a_0$
$\Rightarrow a_{n-1} = a_{n-3} = \cdots = a_0.$
donc pour n impair ,P_n ne contient que des puissances impaires
et par suite :$P_1(x) = x, P_3(x) = x^3 + a_1x$
et comme $P_0(x) = 1$, on a
$L(P_0P_1) = 0 = L(P_1) = L(x) = \mu_1$
$L(P_0P_3) = 0 = L(P_3) = \mu_3 + a_1\mu_1 = \mu_3 = 0$
et ainsi de suite :$\mu_{2n+1} = 0$
$(b) \Rightarrow (c)$
$P_n(x) = (-1)^nP_n(-x)$
$P_n(x) = (x - c_n)P_{n-1}(x) - \lambda_nP_{n-2}(x), n \geq 1$
posons
$Q_n(x) = (-1)^nP_n(-x)$
$(-1)^nP_n(-x) = (-x - c_n)(-1)^nP_{n-1}(-x) - \lambda_n(-1)^nP_{n-2}(-x)$
$\Rightarrow Q_n(x) = (x + c_n)Q_{n-1} - \lambda P_{n-2}$ Or $Q_n(x) = P_n(x)$
donc $(x + c_n)P_{n-1} - \lambda P_{n-2} = (x - c_n)P_{n-1}(x) - \lambda_nP_{n-2}(x)$
$\Rightarrow 2c_nP_{n-1}(x) = 0$
$\Rightarrow c_n = 0$
$(c) \Rightarrow (b)$
si $c_n = 0$
$P_n(x) = xP_{n-1} - \lambda_nP_{n-2}$
$(-1)^nP_n(-x) = (-1)^n(-x)P_{n-1}(-x) - (-1)^n\lambda_nP_{n-2}(-x)$
$Q_n(x) = xQ_{n-1} - \lambda_nQ_{n-2}(x)$
la suite Q_n vérifie la même relation que P_n est
$P_{-1} = Q_{-1} = 0, P_0 = Q_0 = 1$
$\Rightarrow P_n(x) = (-1)^nP_n(-x)$

Théorème 1.8. *Théorème de Favarel*
soient $\{c_n\}_{n\geq1}$ et $\{\lambda_n\}_{n\geq1}$deux suites de nombres complexes et soit P_n définie par $\begin{cases} P_n(x) = (x - c_n)P_{n-1} - \lambda_nP_{n-2} \\ P_{-1} = 0; P_0 = 1 \end{cases}$ *il existe une forme linéaire L telle que*

(1) $L[1] = \lambda_1, L(P_nP_m) = 0, \forall n \neq m$

(2) *L est quasi définie et $\{P_n(x)\}$ est la S.P.O/L unitaire ssi $\lambda_n \neq 0$*

(3) *L est définie positive $\Leftrightarrow c_n \in \mathbb{R} et \lambda_n \geq 0, n \geq 1$*

Preuve
$L(1) = \lambda_1 et L(P_nP_m) = 0 (\forall n \neq m)$
On définit L par $L[1] = \mu_0 = \lambda_1$ et $L(P_n) = 0 n = 1, 2, \cdots$

$P_1(x) = x - c_1 \Rightarrow L(P_1) = 0 \Leftrightarrow \mu_1 - c_1\mu_0 = 0 \Leftrightarrow \mu_1 = c_1\mu_0$
$P_2(x) = (x - c_2)P_1 - \lambda_2 P_0 = x^2 - (c_1 + c_2)x + c_1c_2 - \lambda_2$
la relation de récurrence s'écrit
$xP_n = P_{n+1} + c_{n+1}P_n + \lambda_{n+1}P_{n-1} \cdots\cdots (1), n \geq 1$
$\Rightarrow L(xP_n) = 0 \cdots\cdots (2)\ (n \geq 2)$
multiplions (1) par x et utilisons(2)
$\Rightarrow L(x^2P_n) = 0,(n \geq 3)$
et $L(x^kP_n) = 0$ pour $0 \leq k < n$
$L(x^nP_n) = \lambda_{n+1}L(x^{n-1}P_{n-1})\ ,(n \geq 1)$
donc pour $n \neq m$ on a
$L(P_nP_m) = 0$
de plus :$L(P_n^2) = L(x^nP_n) = \lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_{n+1},(n \geq 0)$
alors L est quasi définie et P_n est la S.P.O/L $\Leftrightarrow \lambda_n \neq 0, (n \geq 1)$

Théorème 1.9. *Identité de CHRISTOFFEL-DARBOUX*
soit $\{P_n\}$ vérifiant la relation de récurrence avec $\lambda_n \neq 0, n \geq 1$
$\sum_{k=0}^{n} \frac{P_k(x)P_k(y)}{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{k+1}} = (\lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_{n+1})^{-1} \frac{P_{n+1}(x)P_n(y)-P_n(x)P_{n+1}(y)}{x-y}$

Preuve
multiplier la relation de récurrence $P_n(x)$,ensuite par $P_{n+1}(y)$,on obtient :
$xP_nP_n(y) = P_{n+1}(x)P_n(y) + c_{n+1}P_n(x)P_n(y) + \lambda_{n+1}P_{n-1}(x)P_n(y)$
la différence
$(x-y)P_n(x)P_n(y) = P_{n+1}(x)P_n(y) - P_{n+1}(y)P_n(x) - \lambda_{n+1}[P_n(x)P_{n-1}(y) - P_n(y)P_{n-1}(x)]$
Ensuite vérifier que :
$\frac{P_n(x)P_n(y)}{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n+1}} = \frac{P_{n+1}(x)P_n(y)-P_{n+1}(y)P_n(x)}{(x-y)(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n+1})} - \frac{\lambda_{n+1}[P_n(x)P_{n-1}(y)-P_n(y)P_{n-1}(x)]}{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n+1}(x-y)}$
ensuite faire la somme de 0 à n

Corollaire 1.2. $\sum_{k=0}^{n} \frac{P_k^2(x)}{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{k+1}} = \frac{P'_{n+1}(x)P_n(x)-P'_n(x)P_{n+1}(x)}{(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n+1})}$

Preuve :
$P_{n+1}(x)P_n(y) - P_{n+1}(y)P_n(x) = (P_{n+1}(x) - P_{n+1}(y))P_n(x) - (P_n(x)P_n(y))P_{n+1}(x)$
Ensuite ,remplaçant et faire $y \to x$

Corollaire 1.3. *si L est définie positive alors*
$(P'_{n+1}P_n - P'_nP_{n+1})(x) > 0$