

Systèmes dynamiques

Tout le catalogue sur
www.dunod.com



ÉDITEUR DE SAVOIRS

Jean-Louis Pac

Systèmes dynamiques

Cours et exercices corrigés

2^e édition

DUNOD

Illustration de couverture : © Fernando Cortés – Fotolia.com

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage. Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements	d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).
--	--



© Dunod, Paris, 2012, 2016

5 rue Laromiguière, 75005 Paris

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-074261-5

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos	VII
Chapitre 1. Généralités sur les systèmes différentiels	1
1.1 Introduction	1
1.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz	7
1.3 Symétries orbitales	14
Chapitre 2. Flot et conjugaison en temps continu	17
2.1 Flot d'un système dynamique	17
2.2 Conjugaison des systèmes dynamiques	21
2.3 Quelques propriétés générales du flot	30
Chapitre 3. Équilibres	33
3.1 Introduction	33
3.2 Stabilité des équilibres : exemple et définitions	33
3.3 Autres notions	40
Chapitre 4. Stabilité des systèmes linéaires	43
4.1 Réduction des endomorphismes	43
4.2 Flot et stabilité des systèmes linéaires	44
4.3 Stabilité structurelle et conjugaison	52
4.4 Trajectoires génératrices d'un système linéaire	56
Chapitre 5. Propriétés élémentaires en dimensions 1 et 2	65
5.1 Propriétés de base des systèmes de dimension 1	65
5.2 Portraits de phases d'un système linéaire de dimension 2	66
5.3 Courbure d'une trajectoire plane	69
5.4 Critère de Bendixson	71
5.5 Évolution d'un portrait de phases	73
Chapitre 6. Propriétés locales du flot	79
6.1 Introduction	79
6.2 Généralités et exemples	79
6.3 Théorie de Liapounov de la stabilité	83
6.4 Linéarisation autour des équilibres	88
6.5 Linéarisation autour des équilibres hyperboliques	90
Chapitre 7. Structuration du flot	97
7.1 Ensembles-limites	98
7.2 Orbites périodiques	104
7.3 Variétés remarquables	107

Systèmes dynamiques

Chapitre 8. Flots hors de $\mathbb{R}^n$	113
8.1 Dérivation hors de $\mathbb{R}^n$	113
8.2 Flot sur un cercle	114
8.3 Flot sur la sphère S^2	115
8.4 Flot sur la sphère S^n	117
8.5 Flot sur le tore	119
8.6 Thème d'étude : le pendule	121
Chapitre 9. Bifurcations locales	129
9.1 Introduction	129
9.2 Stabilité structurelle des équilibres	130
9.3 Bifurcations locales en dimension 1	133
9.4 Bifurcations locales en dimension supérieure à 1	137
Chapitre 10. Systèmes à temps discret : équilibres et cycles	141
10.1 Introduction	141
10.2 Notions de base	142
10.3 Équilibres	144
10.4 m -cycles	152
10.5 Exposant de Liapounov	155
10.6 Autres notions	157
Chapitre 11. Introduction au chaos en temps continu	159
11.1 Ensembles-limites en dimension 2	159
11.2 Théorème de Poincaré-Bendixson	168
11.3 Introduction au chaos	170
Chapitre 12. Introduction au chaos en temps discret	179
12.1 Les équilibres de la suite logistique pour $r > 0$	180
12.2 Les cycles de la suite logistique pour $3 < r \leq 4$	184
12.3 Le chaos dans un système à temps discret	191
Chapitre 13. Annexes	197
Annexe 1 : Systèmes et mécanique céleste	197
Annexe 2 : Topologie et autres structures	199
Annexe 3 : Théorème de Cauchy et déterminisme	207
Annexe 4 : Réduction des endomorphismes	210
Annexe 5 : Deux compléments mathématiques	215
Annexe 6 : Fractales	219
Annexe 7 : Schéma numérique	225
Chapitre 14. Corrigés des exercices et problèmes	227
Bibliographie	269
Index	271

AVANT-PROPOS

Le but de ce livre est de fournir les principales clés pour étudier le comportement d'un système dynamique, c'est-à-dire d'un ensemble mécanique, physique, économique, environnemental ou autre dont on connaît la loi d'évolution.

On s'intéresse principalement aux questions qualitatives : un système évolue-t-il vers un cycle-limite ? vers un équilibre ? vers un autre destin ? Ce livre fournit les outils méthodologiques qui permettent d'aborder ces questions. La recherche de solutions analytiques n'est pas un but en soi, mais celles-ci sont exploitées quand elles sont accessibles : c'est le cas des systèmes linéaires, dont on montre l'importance. On établit ensuite une classification des comportements à long terme d'un système. Ainsi est mis en évidence le cas complexe du chaos, qui donne lieu depuis plusieurs décennies à d'actives recherches.

Le cadre est celui des systèmes autonomes, c'est-à-dire non commandés. Aussi, le champ couvert est-il frontalier mais distinct de celui de la commande des systèmes.

Ce livre traite des systèmes à temps discret et des systèmes à temps continu ; nombre de méthodologies mises en œuvre au bénéfice des premiers sont directement transposables aux seconds.

Le très bon accueil réservé à l'édition initiale m'a conduit à garder la structure générale. Cette deuxième édition :

- accorde une plus large place aux systèmes à temps discret ;
- voit l'approfondissement de certains thèmes, dont la suite logistique qui constitue une introduction de choix au chaos en temps discret ;
- comporte un plus grand nombre d'exercices et problèmes : le choix d'une correction détaillée de chacun d'entre eux est maintenu.

J'invite le lecteur qui aurait des questions ou remarques liées au sujet de ce livre à m'en faire part par mail à l'adresse : jeanlouispac@yahoo.fr

Jean-Louis Pac

GÉNÉRALITÉS SUR LES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS

1

1.1 INTRODUCTION

Un **système dynamique** est un ensemble mécanique, physique, économique, environnemental ou de tout autre domaine dont l'**état** (ensemble de grandeurs suffisant à qualifier le système) évolue en fonction du temps. L'étude de l'évolution d'un système nécessite donc la connaissance :

- de son état initial, c'est-à-dire son état à l'instant t_0 ;
- de sa loi d'évolution.

Un système peut être :

- **à temps continu** : ce livre accorde une part importante à ce cas, qui est le plus fréquent ;
- **à temps discret** : les systèmes à temps discret font l'objet des chapitres 10 et 12. Il faut noter que toute simulation numérique d'un système à temps continu implique une discrétisation du temps.

Il peut également être :

- **autonome**, si sa loi d'évolution ne dépend pas du temps (la loi est alors dite stationnaire) ;
- **non autonome** ; sa loi d'évolution dépend alors du temps.
- **Un premier exemple : l'oscillateur harmonique** est un exemple de système autonome à temps continu.

Le déplacement horizontal ξ d'une masse fixée à l'extrémité d'un ressort est régi par l'équation différentielle : $\frac{d^2\xi}{dt^2} + \omega^2\xi = 0$, où ω dépend des paramètres du problème. Cet exemple simple est instructif car il permet déjà de cerner ce qu'on va appeler **état** et qu'on notera x .

Nous allons mettre en effet la loi d'évolution du système sous la forme :

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

Cette forme est suffisamment générale pour englober un grand nombre de systèmes que l'ingénieur, le physicien ou l'économiste aura à étudier.

Chapitre 1 • Généralités sur les systèmes différentiels

L'équation de l'oscillateur harmonique est d'ordre 2 ; elle n'est donc pas sous la forme souhaitée. On l'amène à cette forme en remplaçant $\xi \in \mathbb{R}$ par $x \in \mathbb{R}^2$, ce qui la réduit de l'ordre 2 à l'**ordre 1**. La transformation est la suivante : on pose

$$x(t) = \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{pmatrix}$$

où $\dot{\xi}$ désigne la dérivée de ξ par rapport au temps.

On obtient ainsi effectivement l'équation de l'oscillateur sous la forme de l'équation différentielle vectorielle **d'ordre 1** :

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} x(t)$$

On a diminué l'ordre au prix de l'augmentation de la dimension ($x \in \mathbb{R}^2$, alors que ξ appartenait à $\mathbb{R}$).

Plus généralement, on passera de (dimension 1, ordre n) à (dimension n , ordre 1) en écrivant l'équation différentielle :

$$\frac{d^n \xi}{dt^n} = g\left(\xi, \frac{d\xi}{dt}, \frac{d^2\xi}{dt^2}, \dots, \frac{d^{n-1}\xi}{dt^{n-1}}\right)$$

sous la forme d'une équation différentielle vectorielle $\dot{x} = f(x)$, où x est le vecteur de $\mathbb{R}^n$ suivant :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ d\xi/dt \\ \vdots \\ d^{n-2}\xi/dt^{n-2} \\ d^{n-1}\xi/dt^{n-1} \end{pmatrix}$$

En effet, on a :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

À l'image des exemples précédents, l'**espace des états** est dans de nombreux cas un **domaine** Ω de l'espace $\mathbb{R}^n$. On l'appelle aussi **espace des phases**, terminologie introduite par Poincaré. Nous rappelons qu'un domaine est un ouvert connexe, c'est-à-dire composé « d'un seul morceau ». La pertinence de cette hypothèse est justifiée par le

fait que si Ω comportait plusieurs composantes connexes (plusieurs « morceaux »), le système se décomposerait en autant de sous-systèmes n'interagissant pas, donc analysables individuellement.

Mais $\mathbb{R}^n$ peut ne pas suffire pour modéliser certains systèmes pourtant très simples (à l'image du pendule) qui par exemple mettent en jeu des angles, donc des éléments de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (ou $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$). Cette situation est illustrée par l'exemple ci-après.

• Un deuxième exemple de système autonome : le pendule simple à tige rigide

L'état d'un tel pendule est composé de sa position angulaire et de sa vitesse angulaire. Son espace d'état est donc :

- $\mathbb{R}^2$ si on traduit la position angulaire par un réel. Ce choix, qui revient à « compter les tours », s'imposerait dans le cas du repérage angulaire d'un pendule de torsion.
- le produit d'un cercle par la droite réelle, donc un cylindre, si on traduit la position angulaire par un réel à $2k\pi$ près.

Dans le cas d'une dimension n quelconque, on parle de **variété**, entité géométrique localement assimilable à une portion de $\mathbb{R}^n$ comme le précise l'annexe 2, paragraphe « variétés ». Tout système mécanique dont un élément est mobile autour d'un axe ou d'un point répond à la même logique ; la robotique peut fournir des exemples complexes.

• Systèmes non-autonomes

On peut encore utiliser le procédé d'extension d'état pour transformer un système non-autonome en système autonome. En effet, la non-autonomie se traduit par une équation de la forme $\dot{x} = f(x, t)$. Il suffit dès lors d'ajouter l'état $x_{n+1} = t$, ce qui réhabilite la forme $\dot{x} = f(x)$, avec cette fois $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ et l'équation supplémentaire $\dot{x}_{n+1} = 1$.

Exemple

Soit le système non-autonome (donc de loi non-stationnaire) $\ddot{\xi} = a\dot{\xi} + b\xi + \varphi(t)$.

$$\text{Avec } x = \begin{pmatrix} \xi \\ \dot{\xi} \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \text{ on a : } \dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \ddot{\xi} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi(x_3) \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a donc transformé le système initial non-autonome d'ordre 2 en un système autonome d'ordre 3 sur $\mathbb{R}^3$, de la forme $\dot{x} = f(x)$.

Généralisons encore : ce qui a été fait pour les équations différentielles s'applique aux **systèmes différentiels**, autonomes ou non. On se reportera à l'exercice 1.1.

Intermède historique : Poincaré, un grand précurseur

Henri Poincaré (mathématicien, physicien et philosophe français, 1854-1912), un des plus grands scientifiques de tous les temps, a éclairé de son génie la fin du XIX^e siècle. Comme pour d'autres grands mathématiciens, la mécanique céleste a été l'une des motivations de ses travaux et l'a conduit à modéliser les systèmes différentiels autour de la notion d'« espace des phases », que nous appelons aujourd'hui espace des états... et que nous retrouvons tout au long de ces pages. L'usage a gardé partiellement cette dénomination initiale dans l'expression de « portrait de phases ».

Poincaré a fait un certain nombre de découvertes fondamentales, certaines très en avance sur son temps. Leur ampleur et leur variété justifieront un nouvel intermède historique dans ce document. À suivre donc...

Exercice 1.1 Mise de systèmes différentiels sous la forme $\dot{x} = f(x)$

1. Mettre le système différentiel :
$$\begin{cases} \ddot{u} = a\dot{u} + bu + c\dot{v} + dv \\ \ddot{v} = e\dot{v} + fv + g\dot{u} + hu \end{cases}$$
 sous la forme d'un système linéaire $\dot{x} = A \cdot x$, où x est un vecteur de dimension n convenable et A une matrice carrée $n \times n$.
2. Mettre le système différentiel :
$$\begin{cases} \ddot{u} = a\dot{u} + bu + c\dot{v} + dv + \alpha(t) \\ \ddot{v} = e\dot{v} + fv + g\dot{u} + hu + \beta(t) \end{cases}$$
 (non autonome) sous la forme d'un système autonome $\dot{x} = f(x)$, où x est un vecteur de dimension convenable.
3. Mettre le système différentiel :
$$\begin{cases} \dot{u} = uv - \sin u \cos v = h(u, v) \\ \ddot{v} = u\dot{v} + 2uv + u^3\dot{v} + e^v = k(u, v, \dot{v}) \end{cases}$$
 sous la forme d'un système $\dot{x} = g(x)$, où x est un vecteur de dimension convenable.

Hypothèses pour la suite : nous allons étudier le système différentiel S suivant :

$$\boxed{\dot{x} = f(x)} \quad (S)$$

dans lequel f est une fonction de classe C^1 définie sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Nous relâcherons assez souvent cette hypothèse en supposant f seulement localement lipschitzienne, pour des raisons qui apparaîtront au paragraphe 1.2.1.

L'application $x \in \Omega \mapsto f(x) \in \mathbb{R}^n$ représente un **champ de vecteurs** (c'est le « champ des vitesses » du vecteur d'état x), expression qu'on pourra substituer au mot système. On adoptera quelques variantes dans le vocabulaire en nommant l'équation ci-dessus, indifféremment :

- **équation d'évolution du système** (sous-entendu : équation vectorielle régissant l'évolution d'un système physique, mécanique, économique, etc.) ;
- **équation du système** ;
- **système** (sous-entendu : système d'équations différentielles scalaires).

On appelle :

- **trajectoire** une solution du système différentiel ;
- **orbite** du système dynamique la courbe de $\mathbb{R}^n$ image de l'ensemble des temps par une trajectoire.

De façon imagée : alors que la trajectoire est une courbe graduée en t , l'orbite est une courbe non graduée.

On utilise souvent une notion intermédiaire en pourvoyant une orbite de flèche(s) indiquant le sens croissant du temps. Un ensemble d'orbites fléchées est appelé **portrait de phases** : voir la figure 1.1.

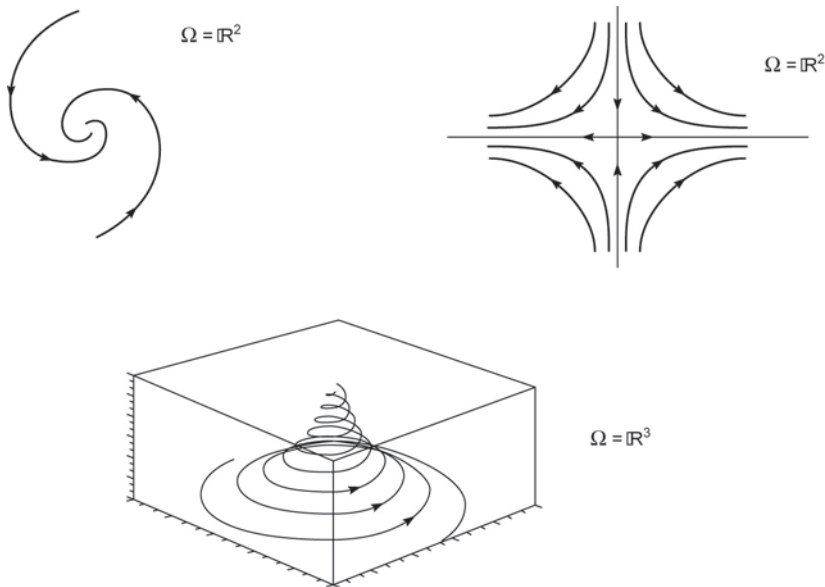


Figure 1.1- Trois portraits de phases.

La pratique montre une certaine souplesse dans la terminologie : dans de nombreux documents, orbite et trajectoire sont synonymes. Dans tous les cas, il convient de bien noter le sens des termes.

Exercice 1.2 Des portraits de phases

Tracer les portraits de phases des systèmes suivants, dont l'état est défini sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:

1. **Croissance d'une population** : en environnement infini, une population x croît selon $\dot{x} = \alpha x$ où $\alpha > 0$ (croissance malthusienne).

Si l'environnement est fini (aire, ressources, ...), la population x ne peut pas dépasser une certaine valeur. Moyennant un choix convenable des unités, elle satisfait l'équation logistique proposée par l'économiste François Verhulst : $\dot{x} = x(1 - x)$, avec $\Omega =]0, 1[$. On tracera le portrait de phases de l'équation logistique sans la résoudre analytiquement, avec $\Omega = \mathbb{R}$ (noter que seul $\Omega = \mathbb{R}_+$ a une interprétation démographique).

2. **Un système unidimensionnel** :

$$\dot{x} = x(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) \text{ avec } \Omega = \mathbb{R}.$$

3. **Deux systèmes bidimensionnels** [avec $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$] :

$$(a) \quad \dot{z} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} z, \text{ avec } \Omega = \mathbb{R}^2$$

$$(b) \quad \dot{z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} z, \text{ avec } \Omega = \mathbb{R}^2$$

4. **Un système 2-D** : $\begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(1 - \rho) \\ 1 \end{pmatrix}$
(représentation dans $\mathbb{R}^2$, en coordonnées polaires).

Exercice 1.3 Toute orbite est connexe

Soit S un système dynamique $\dot{x} = f(x)$, avec f localement lipschitzienne sur Ω , domaine de $\mathbb{R}^n$. Montrer que toute orbite est connexe.

Exercice 1.4 Un système unidimensionnel a-t-il des orbites périodiques ?

On rappelle que les deux seules variétés connexes de dimension 1 sont $\mathbb{R}$ et le cercle (ou tore T^1).

Soit S un système dynamique $\dot{x} = f(x)$ sur Ω , variété de dimension 1. On suppose f continue.

1. Pour $\Omega = \mathbb{R}$, montrer que S ne possède aucune solution périodique non triviale (c'est-à-dire non constante).
2. Pour $\Omega = T^1$, montrer que S peut posséder une solution périodique non triviale.

1.2 THÉORÈME DE CAUCHY-LIPSCHITZ

1.2.1 Le théorème

Le théorème de Cauchy (ou de Cauchy-Lipschitz) indique que pour toute solution initiale $x_0 \in \Omega$ le système différentiel $\dot{x} = f(x)$ a une **solution unique**.

Il fait l'objet de l'annexe 3 et s'exprime ainsi :

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Soit (E) l'équation différentielle $\dot{x} = f(x)$, où f est une fonction localement lipschitzienne sur un domaine Ω de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Alors, pour tout $x_0 \in \Omega$, il existe une solution maximale unique de (E) satisfaisant $x(0) = x_0$.

- Notons que l'hypothèse (que nous ferons souvent) que f est de classe C^1 est plus exigeante que celle du théorème de Cauchy, car :
 f de classe $C^1 \implies f$ localement lipschitzienne (voir l'exercice 1.5).
- Qu'est-ce qu'une solution maximale ? Pour chaque condition initiale x_0 , on peut choisir un intervalle de temps ouvert $J(x_0)$ **maximal** au sens de l'inclusion, donc hors duquel la solution $x(t)$ sort de Ω ou n'est pas définie. On peut appeler $J(x_0)$ **plage temporelle** de x_0 . La solution $x(t)$ correspondante est elle-même dite maximale. Dans de nombreux cas, $J = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}_+$.
- On dit que deux trajectoires x_1 et x_2 **se coupent** s'il existe un temps τ tel que $x_1(\tau) = x_2(\tau)$. Mais dans ce cas-là, le caractère autonome du système permet dans le théorème de Cauchy de remplacer $x(0) = 0$ par $x(\tau) = 0$, ce qui montre que deux trajectoires qui se coupent sont identiques. L'exercice 1.6 montre que ce résultat est faux si f n'est pas localement lipschitzienne.
- Pour les systèmes linéaires, f étant alors un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, on a $\Omega = \mathbb{R}^n$. Les solutions étant des exponentielles matricielles (chapitres suivants), on a : $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, $J(x_0) = \mathbb{R}$. Pour des systèmes non-linéaires, des contre-exemples simples (on en donne un ci-après) montrent que $J(x_0)$ peut être distinct de $\mathbb{R}$.
- On peut exprimer le théorème de Cauchy d'une façon différente en disant qu'à un présent donné correspondent un passé unique et un avenir unique, ce qui définit le **déterminisme**. On se reportera à l'annexe 3.

Intermède historique : Cauchy, un mathématicien prolifique

Augustin Cauchy, mathématicien français (1789-1857), a apporté une contribution fondamentale à tous les secteurs des mathématiques de son temps. Nous lui devons la

première définition rigoureuse de la continuité (quel que soit ε , il existe η tel que...), de l'intégrale définie : les sommes dites de Riemann auraient pu porter son nom. La théorie des fonctions holomorphes lui doit ses fondements. Quant aux systèmes différentiels, l'importante notion de déterminisme est étroitement associée au théorème de Cauchy – Lipschitz, dont la formulation initiale date de 1820. Toujours dans le domaine des systèmes dynamiques, Cauchy a apporté sa contribution à la théorie des perturbations, donc à l'analyse d'un problème phare pour les mathématiciens et astronomes depuis le XVIII^e siècle : la stabilité du système solaire.

Un exemple de $J(x_0)$ borné : le système non-linéaire suivant : $\dot{x} = 1 + x^2$ fournit un exemple très simple (la dimension de l'espace d'états est $n = 1$) d'intervalle $J(x_0)$ borné. On a en effet :

$$\frac{dx}{1+x^2} = dt ; \int_{x_0}^x \frac{dx}{1+x^2} = t - t_0 \text{ et, si } t_0 = 0 :$$

$\arctan x - \arctan x_0 = t$. D'où : $x = \tan(t + \arctan x_0)$. Il apparaît ainsi que :

$$J(x_0) =] -\pi/2 - \arctan x_0, \pi/2 - \arctan x_0[.$$

Par exemple, $J(0) =] -\pi/2, \pi/2[$ et $J(-1) =] -\pi/4, 3\pi/4[$ (ce qui correspond à $\arctan x_0 = -\pi/4$). Le caractère borné de J provient ici de la nature de la fonction $x(t)$: il s'agit d'une fonction tangente, prenant toute valeur réelle lorsque la variable décrit un intervalle ouvert de longueur π . A la borne supérieure de J , le module de x tend vers l'infini : on dit que la solution explose, ou qu'elle connaît une **mort explosive**.

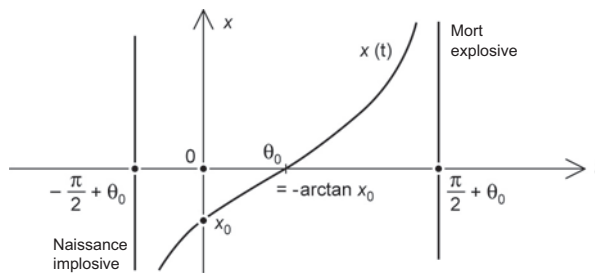


Figure 1.2 - Un système monodimensionnel explosif.

On peut aussi qualifier le comportement du système lorsque $t \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2} + \theta_0\right)^+$ de **naissance implosive**.

On peut généraliser l'emploi des deux adjectifs par les définitions suivantes, dans lesquelles $a \in \overline{\Omega}$, les temps t_i initial et t_f final, étant **finis** :

- il y a naissance implosive si $\lim_{t \rightarrow t_i^+} \|x(t)\| = +\infty$;

- il y a mort explosive si $\lim_{t \rightarrow t_f^-} \|x(t)\| = +\infty$;
- il y a naissance explosive si $\lim_{t \rightarrow t_i^+} \|x(t) - a\| = 0$ et $\lim_{t \rightarrow t_i^+} \|\dot{x}(t)\| = +\infty$;
- il y a mort implosive si $\lim_{t \rightarrow t_f^-} \|x(t) - a\| = 0$ et $\lim_{t \rightarrow t_f^-} \|\dot{x}(t)\| = +\infty$.

On trouvera un exemple bidimensionnel de ces deux derniers cas en exercice 8.1, placé au chapitre 8 car on se situe alors hors de $\mathbb{R}^2$.

Le paragraphe 1.2.3 traitera *a contrario* d'un système, linéaire de surcroît (l'oscillateur harmonique), qui, lorsque t croît de $-\infty$ à $+\infty$, prend des valeurs appartenant à un ensemble borné.

Problème 1.1 Un critère de mort explosive

Aucun système $\dot{x} = f(x)$ linéaire (donc avec f polynôme homogène de degré 1) n'explose, mais le système unidimensionnel $\dot{x} = x^2$ a une mort explosive. Le but de l'exercice est de mieux dessiner les limites entre ces deux types de comportement. Tous les systèmes évoqués dans l'exercice sont localement lipschitziens.

1. On considère le système $\dot{x} = x^\alpha$, où $x \in \Omega = \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
 - (a) Donner pour $\alpha \neq 1$ (le cas $\alpha = 1$ correspondant au cas classique d'un système linéaire) l'expression analytique de la solution $x(t)$ obtenue pour $x(0) = x_0$.
 - (b) Montrer que pour $\alpha > 1$, le système connaît une mort explosive à un instant $t_f(x_0)$ qu'on exprimera en fonction de x_0 et α .
2. On considère le système $\dot{x} = x(\ln x)^\beta$, où $x \in \Omega =]1, +\infty[$ et $\beta \in \mathbb{R}$.
Discuter l'existence d'une mort explosive en fonction des valeurs de β .
3. Gardant $\Omega =]1, +\infty[$, on considère maintenant le système $\dot{x} = x^\alpha (\ln x)^\beta$, où α et β sont des réels quelconques.
 - (a) Pour $x_0 \in \Omega$, identifier $Orb^+(x_0)$ (partie d'orbite correspondant à $t \geq 0$).
 - (b) Généraliser au nouveau système considéré les résultats des questions précédentes.
 - (c) Proposer une application à des systèmes d'ordre n quelconque.

Une conséquence importante du théorème de Cauchy-Lipschitz

Deux orbites distinctes sont disjointes (ne se coupent pas), ce qu'on énonce parfois « deux trajectoires ne se coupent jamais ». En effet, si deux orbites ont un point commun, on les reconstitue grâce au théorème de Cauchy de façon unique à partir de ce point. Ceci n'exclut pas un schéma de trajectoires du type suivant, qu'il convient simplement d'interpréter correctement.

Ce schéma ne représente pas deux fragments de trajectoires qui se coupent en E , mais cinq fragments de trajectoires : C_1 , C_2 , C_3 , C_4 et E . Ce dernier est ce que nous appellerons un **équilibre** (f est nulle en ce point) et constitue à lui seul une trajectoire.

C_1 (resp. C_2) peut faire partie de la même orbite que C_3 (resp. C_4) si ces deux fragments se raccordent.

Le nombre d'orbites représentées est en tout état de cause supérieur à 2.

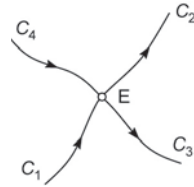


Figure 1.3-

Exercice 1.5 Classe C^1 et Lipschitz

Montrer qu'une fonction f de classe C^1 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ est localement lipschitzienne.

1.2.2 Compléments sur les espaces de t , de x et de $\dot{x}$

Espace de t : nous avons vu que pour un état initial donné x_0 , il existe une plage temporelle $J(x_0)$ de définition du temps, intervalle ouvert contenant 0. Mais on peut aussi imposer une condition du type $x(t_0) = x_0$ avec $t_0 \neq 0$. Nous noterons alors $J(t_0, x_0)$ la plage temporelle. Dans ce cas là, l'« état initial » au sens strict $x(0)$ peut ne pas exister. Par exemple, pour le système $\dot{x} = 1 + x^2$, la condition $x(2) = 0$ conduit à $J(t_0, x_0) = J(2, 0) =]2 - \pi/2, 2 + \pi/2[$, qui ne contient pas le temps nul : on a donc une naissance à un instant strictement positif, et l'on peut sans difficulté imaginer un exemple exhibant une mort à un instant strictement négatif.

Espace de x : nous avons déjà remarqué que dans le cas du pendule simple, x , variable angulaire, n'appartient pas à $\mathbb{R}$ mais à l'ensemble des réels définis modulo 2π : cet ensemble a la topologie du cercle et non celle de la droite : c'est une **variété différentielle** de dimension 1 et non un ouvert de $\mathbb{R}$. Pour toute modélisation à n variables d'état dont au moins l'une est un angle, Ω sera une variété de dimension n et non un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Nous en verrons quelques exemples au chapitre 8. Notons qu'une liberté courante de langage peut amener à désigner comme « vecteur d'état » le n -uplet définissant l'état.

Espace de $\dot{x}$: si $x \in \mathbb{R}^n$, on a aussi $\dot{x} \in \mathbb{R}^n$. Mais si ce n'est pas le cas, par exemple si x est (ou contient) un angle, il reste possible de définir une dérivée $\dot{x} \in \mathbb{R}^n$ moyennant un formalisme adéquat, que nous évoquerons en annexe 2.

Dans le cas où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, une autre question se pose : de quelle structure doit-on munir $\mathbb{R}^n$? Au sens strict, $\mathbb{R}^n$ est un espace **vectoriel**. Mais dans de nombreux cas (exemple : $\dot{x} = 1$ sur $\Omega = \mathbb{R}$), aucun point de Ω n'a un statut privilégié et la structure d'espace **affine** est plus naturelle. Bien souvent encore, essentiellement quand

on traite de questions de nature topologique (continuité, limite), la structure d'espace *topologique* suffit. À l'opposé de cette logique, on peut légitimement munir Ω d'une structure *euclidienne*. Par exemple, dans le cas de l'oscillateur harmonique (premier exemple du § 1.2.3), il existe une structure euclidienne de l'espace des états pour laquelle les orbites sont des cercles, ce qui offre l'avantage de renforcer la compréhension du système en exploitant notre intuition géométrique.

1.2.3 Deux exemples

1) Un exemple linéaire : l'oscillateur harmonique

Nous avons déjà introduit au paragraphe 1.1 l'oscillateur harmonique, dont l'équation est :

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} x(t)$$

Pour $\omega = 1$, cette équation traduit l'orthogonalité des vecteurs x et $\dot{x}$ dans le plan de phases. Ceci implique que les trajectoires sont des cercles de centre 0. Le retour à un ω quelconque se traduit pour les trajectoires par une affinité, qui transformera donc les cercles en ellipses. Le point 0, qui constitue en lui-même une orbite, est ici appelé **centre** ou **point elliptique**, ainsi qu'on le verra plus loin lors de l'étude des équilibres.

Retenons donc que pour l'oscillateur harmonique, les trajectoires dans l'espace d'état sont des ellipses de centre 0, toutes décrites avec la même période $2\pi/\omega$.

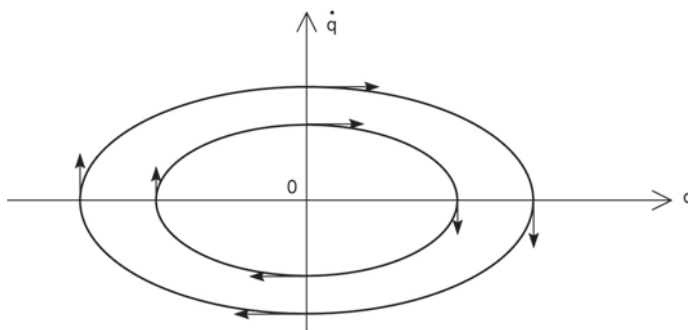


Figure 1.4 - Oscillateur harmonique.

Portrait de phases de l'oscillateur harmonique : l'abscisse représente la position q de la masse oscillante, l'ordonnée sa vitesse $\dot{q}$ (que nous avons nommées ξ et $\dot{\xi}$ au paragraphe 1.1).

2) Un exemple non-linéaire : le pendule simple

Un pendule simple non amorti repéré par l'angle θ d'écart de sa tige (rigide) par rapport à la verticale descendante, a une énergie totale constante. Ceci se traduit, T représentant l'énergie cinétique et V l'énergie potentielle, par :

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgz = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_T + \underbrace{mgl(1 - \cos \theta)}_V = Cte$$

(m étant la masse, v sa vitesse, l la longueur de la tige de masse nulle), soit encore :

$$\frac{1}{2}ml^2 \dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta = Cte,$$

d'où par dérivation par rapport au temps :

$$ml^2 \cdot \dot{\theta} \cdot \ddot{\theta} + mgl \sin \theta \dot{\theta} = 0.$$

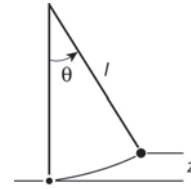


Figure 1.5 - Le pendule.

Cette équation se simplifie et devient : $\ddot{\theta} = -(g/l) \sin \theta$, soit encore $\boxed{\ddot{\theta} = -\sin \theta}$ en unités convenables. Ici aussi, l'espace des états est de dimension 2.

$$\text{Avec } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}, \text{ on obtient } \dot{x} = f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\sin x_1 \end{pmatrix}$$

Remarque

Dans le cas où les forces appliquées à une masse ponctuelle dérivent d'un potentiel, l'équation fondamentale de la dynamique est du type :

$$\frac{d^2 q}{dt^2} = -\nabla V(q)$$

avec $q \in \mathbb{R}$ (cas de l'oscillateur harmonique ou du pendule simple), ou $q \in \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ (cas d'une masse ponctuelle dans un champ de gravitation, ou d'une charge électrique dans un champ électrique, ou plus généralement $q \in \mathbb{R}^n$). La procédure d'extension d'états vue au paragraphe 1.1 conduit alors à ajouter au vecteur $q \in \mathbb{R}^n$ le vecteur vitesse $\dot{q} \in \mathbb{R}^n$, pour former un vecteur d'état $(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{2n}$.

Le système est dit **conservatif**, ce terme signifiant la conservation au cours du temps de l'énergie totale, ou hamiltonien. Nous donnerons plus loin une interprétation supplémentaire de l'adjectif « conservatif ». Le champ des vecteurs d'état est dit **hamiltonien**, notion sur laquelle nous reviendrons au chapitre 6.

- Pour l'oscillateur harmonique, l'équation déjà vue :

$$\frac{d^2 q}{dt^2} = -\omega^2 q \quad \text{s'écrit aussi} \quad \frac{d^2 q}{dt^2} = -\nabla V(q) \quad \text{avec} \quad V(q) = \frac{(\omega \cdot q)^2}{2}$$

- Pour le pendule simple également, on a bien une équation du type $\frac{d^2 q}{dt^2} = -\nabla V(q)$ avec $q = \theta$ et, moyennant un choix approprié des unités physiques, $V(q) = -\cos q$.

1.2.4 Excursion momentanée loin de Lipschitz

Le caractère localement lipschitzien de f est la « ligne jaune » au-delà de laquelle on peut perdre l'unicité de la solution, et où tout devient donc plus complexe. C'est donc l'hypothèse minimale que l'on fait généralement dans l'étude des systèmes. On fait même très souvent l'hypothèse que f est de classe C^k ($k \geq 1$), qui implique le caractère localement lipschitzien de f (voir exercice 1.5) et permet d'établir de nouveaux résultats impliquant les dérivées.

Exercice 1.6 Des trajectoires sécantes

On considère le système $\dot{x} = 2\sqrt{|x|}$, avec $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$.

Montrer que ce système admet une infinité de solutions telles que :

$$x_0 = x(0) = 0.$$

En d'autres termes, il existe une infinité de trajectoires qui se coupent au point $(t, x) = (0, 0)$.

Exercice 1.7 L'unicité de la trajectoire n'exige pas Lipschitz

Le théorème de Cauchy nous indique que si le système $\dot{x} = f(x)$ est tel que f soit localement lipschitzienne, tout couple (t, x) appartient à une trajectoire unique.

Le but de l'exercice est de montrer par un exemple simple que la condition imposée à f n'est pas nécessaire pour assurer l'unicité de l'orbite contenant x . Soit le système $\dot{x} = 1 + \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(x)$, où $x \in \mathbb{R}$.

1. Vérifier que f n'est pas lipschitzienne.
2. Montrer que tout couple $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ appartient à une trajectoire unique définie pour tout temps réel.

L'exercice suivant met à jour un curieux phénomène : une simple roue peut effectuer un nombre entier de tours, puis s'arrêter pour une durée *arbitraire*, repartir pour une nouvelle série de tours, s'arrêter à nouveau, et poursuivre indéfiniment cette étrange errance. Malgré son apparent libre arbitre, ce système mécanique respecte rigoureusement son équation d'évolution.

Problème 1.2 Quand Lipschitz n'est pas là, les trajectoires dansent

Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on considère un axe horizontal Ox et un axe vertical descendant Oy . Un cercle matériel Γ sans masse de rayon 1 et de centre I roule sans glisser sur la droite Ox , à laquelle il est tangent en J . Il ne peut se déplacer (ce que certains mécanismes sans frottement permettent) que vers la droite (les « x » croissants).

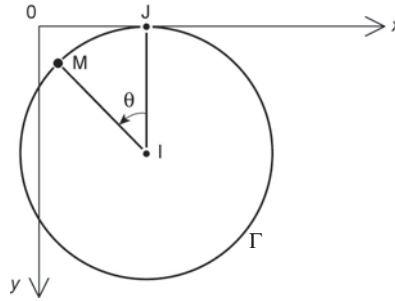


Figure 1.6 - La cinématique de M .

Ce cercle, soumis à la liaison indiquée, est à l'instant initial $t = 0$ tangent à Ox en O . Il porte sur sa circonférence une masse ponctuelle unité située en M qui lui est solidaire ; $M = O$ à $t = 0$. Le dispositif est placé dans un champ gravitationnel $\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc dirigé vers le bas.

La position de Γ (donc de M) est définie par l'angle $\theta = (\vec{IJ}, \vec{IM}) \in \mathbb{R}$, repéré positivement lorsque J est sur la demi-droite Ox . Le couple $(\theta(t), \dot{\theta}(t))$ détermine l'état à l'instant t .

1. Exprimer en fonction de θ et $\dot{\theta}$ la position $\vec{OM}$ et la vitesse $\vec{V}$ de M .
2. On se place désormais dans le cas où $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$ pour $t = 0$.
Montrer que la constance de l'énergie totale (énergie cinétique + énergie potentielle) entraîne $\dot{\theta} = 1$ pour $\theta \neq 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
3. Montrer que l'état du système ainsi réduit à la dimension 1 peut être représenté soit par θ seul, soit par x seul.
4. Ecrire l'équation du système sous la forme $\dot{x} = f(x)$. Montrer que f est continue, mais non localement lipschitzienne.
5. Identifier les équilibres et leur nature. Tracer un portrait de phases, et montrer qu'il existe une infinité de trajectoires telles que $x(0) = 0$.
Quelle est la nature des orbites de M dans le plan Oxy ?

1.3 SYMÉTRIES ORBITALES

L'identification des symétries du système $\dot{x} = f(x)$ (où $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$) en facilite l'analyse. La symétrie peut concerner seulement les orbites, mais aussi la façon dont elles sont décrites, comme on le précise ci-après.

Appelons A un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$, dont la dimension est comprise entre 0 (A est alors un point) et $n-1$ (A est alors un hyperplan), et désignons par $\widehat{a}$ le symétrique de a par rapport à A . Nous adoptons cette convention, que a soit un point, une partie de Ω ou un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

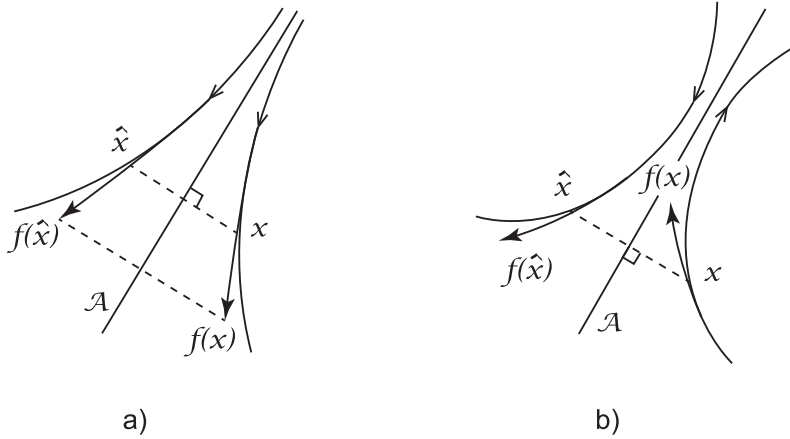


Figure 1.7 - Symétries orbitales.

a) flot symétrique

b) flot antisymétrique.

Supposons que Ω soit symétrique par rapport à A (c'est-à-dire $\widehat{\Omega} = \Omega$) et que l'ensemble des éléments de contact (les directions de $f(x)$) des orbites soit symétrique par rapport à A , en d'autres termes que $f(\widehat{x}) \parallel \widehat{f(x)}$; nous écartons, au prix d'une éventuelle restriction de Ω , le cas des équilibres. Alors, pour tout x dans Ω , *l'orbite du symétrique est le symétrique de l'orbite* : $Orb(\widehat{x}) = \widehat{Orb(x)}$.

On dira qu'il y a **symétrie orbitale**. Les symétries orbitales peuvent être classées selon trois cas :

- **Premier cas : symétrie du flot** : $\forall x \in \Omega, f(\widehat{x}) = \widehat{f(x)}$. Il y a alors conjugaison des trajectoires par symétrie, au sens suivant : $\phi(\widehat{x}, t) = \widehat{\phi(x, t)}$ pour tout t appartenant à la plage temporelle de x (figure 1.7a). Les descendants du symétrique sont les symétriques des descendants. On a la même assertion pour les ascendants (les notions de descendant et d'ascendant, dont le sens intuitif nous suffit ici, seront définies plus tard).

Exemple

Si $A = 0 \in \mathbb{R}^n$, on a $\widehat{x} = -x$. Donc, pour tout système linéaire, $f(\widehat{x}) = f(-x) = -f(x) = \widehat{f(x)}$: tout système linéaire présente donc une symétrie orbitale par rapport à l'origine, avec symétrie du flot.