# INDICE DU POINT FIXE SUR LES CÔNES ET APPLICATIONS

**Karima MEBARKI**

Département de Mathématiques, E.N.S.

B.P. 92 Kouba, Alger, Algérie.

e-mail : mebarki@hotmail.fr

**Version :**

1er août 2009

# Table des matières

# INTRODUCTION

Nous nous intéréssons dans ce travail aux questions d'existence de solutions positives à des problèmes aux limites associés aux E.D.O, ainsi que à des équations intégraux de type Hammerstein.

Nous présentons, dans les trois premières sections, quelques résultats préliminaires indispensables à la compréhension de la suite du chapitre. Ces résultats concerne essentiellement les notions suivantes : le degré topologique, les cônes et L'indice du point fixe. Nous avons rassemblé à la fin de la quatrième section quelques lemmes auxquels nous aurons à se référer tout au long de ce chapitre.

Dans la cinquième section, nous présentons quelques théorèmes de points fixes sur les cônes pour les opérateurs compacts qui entraînent l'existence de point fixe positif :
En 1960, Krasnosel'skii [20] a introduit le théorème de point fixe d'expansion et de compression d'un cône, puis Guo a donné la version de type norme de ce théorème. En 1980, Leggett et Williams [23] ont obtenu une généralisation du résultat original de Krasnosel'skii, puis Zima [30] a donné la version de type norme de ce dernier théorème. Avery et Anderson ont généralisé aussi le théorème d'expansion et de compression d'un cône de type norme au théorème d' expansion et de compression d'un cône de type fonctionnel.

Dans la sixième section, nous nous intéréssons à l'existence des points fixes multiples, d'un opérateur non linéaire complètement continu défini sur un cône dans un espace de Banach ordonné. Nous présentons dans cette section des théorèmes qui donnent des conditions suffisantes pour qu'un opérateur puisse avoir deux ou trois points fixes positifs. On commence tout d'abord par un résultat de multiplicité dû à H. Amann en 1972. Ensuite, nous présentons les méthodes qui sont développées par Leggett et Williams [22] pour améliorer le résultat d'Amann et les techniques de points fixes multiples qui sont formulées par Krasnosel'skii et Stecenko [21], pour certains problèmes aux limites et certains opérateurs intégraux de type Hammerstein. Dans la même section, nous présentons deux généralisations du théorème de points fixes triples de Leggett-Williams, avec la première généralisation dû à R.Avery en 1998 et la deuxième dû aussi à Avery en 2001. Enfin, nous terminons cette section, par la présentation du théorème des points fixes jumeaux de Avery et Henderson [6].

Dans la dernière section de ce chapitre, on étudiera quelques problèmes aux limites associés aux E.D.O du second ordre et on donnera quelques applications selon le type des problèmes.

## 0.1 Le degré topologique

Le lecteur peut trouver les résultats concernant ce chapitre avec plus de détails dans [11].

### 0.1.1 Le degré de Brouwer (en dimension finie)

On considère l'équation algèbrique non linéaire du type

$$(P) \quad f(x) = y_0, \quad x \in \Omega,$$

où $\Omega$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ et $y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$.

**Définition 0.1** *Soit $\mu : U \subset \mathbb{R} \to \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$, une $n-$forme différentielle de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact $K \subset \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$, contenant $y_0$ et telle que $\int_{\mathbb{R}^n} \mu = 1$. ($\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace des formes linéaires, continues et alternées). On définit le degré topologique de Brouwer par*

$$deg(f, \Omega, y_0) = \int_\Omega \mu \circ f.$$

On peut vérifier que cette définition est indépendante du choix de $\mu$ [11] et on va distinguer deux situations :

**Le cas régulier :** si $y_0 \notin f(\partial\Omega) \cup f(\mathcal{S}_f)$ ($y_0$ est dite valeur régulière), on montre que le degré s'écrit aussi sous la forme

$$deg(f, \Omega, y_0) = \sum_{x \in f^{-1}(y_0)} sgn\, Jf(x),$$

où

$$\mathcal{S}_f := \{x_0 \in \Omega, Jf(x_0) := detDf(x_0) = 0\}$$

est l'ensemble des points singulies et $Df$ dénote la matrice jacobienne de $f$.

**Le cas singulier :** si $y_0 \notin f(\partial\Omega)$, on pose

$$deg(f, \Omega, y_0) = deg(f, \Omega, y_1),$$

où $y_1$ est une valeur régulière proche de $y_0$.

L'existence de $y_1$ est assurée par le lemme suivant, dit lemme de Sard :

**Lemme 0.1** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert $f$ une application continûment dérivable. Alors l'ensemble $f(\mathcal{S}_f(\Omega))$ est de mesure de Lebesgue nulle.*

**Remarque 0.1** *Si $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, alors il existe $g \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ (Approximation des applications continues) telle que*

$$\|g - f\|_\infty < dist(y_0, f(\partial\Omega)).$$

*On pose, alors pour une fonction moins régulière*

$$deg(f, \Omega, y_0) = deg(g, \Omega, y_0).$$

### 0.1.2 Le degré de Schauder (en dimension infinie)

Soient $X, Y$ deux espaces de Banach, $\Omega \subset X$ un ouvert et $f : \Omega \to Y$ une fonction continue.

**Définition 0.2**

**1-** *$f$ est dite compacte, si $f(\overline{\Omega})$ est compacte.*

**2-** *$f$ est dite complètement continue, si $f$ est continue et l'image de tout borné est relativement compacte.*

**3-** *On appelle perturbation compacte de l'identité toute application de type $(I - K)$, où $K$ est une application compacte de $X$ dans $X$.*

**Remarque 0.2** **(a)** *Toute application compacte est complètement continue.*

**(b)** *Si $\Omega$ est borné, la réciproque est vraie.*

**Lemme 0.2 (Approximation des applications compactes)** *Soit $f : A \to X$ une application compacte avec $A \subset X$ un ensemble fermé et borné. Alors $f$ est une limite uniforme d'une suite $(f_n)_n$ d'applications compactes de rangs finis (i.e. à image dans un espace de dimension finie).*

**a- Définition du degré de Schauder** Soit $X$ un espace de Banach, $\Omega \subset X$ un ouvert borné, $f = I - K : \overline{\Omega} \to X$ une perturbation compacte de l'identité. Pour $y_0 \in X \setminus f(\partial\Omega)$, posons $\delta = dist(y_0, f(\partial\Omega)) > 0$. Soit $K_\epsilon : \overline{\Omega} \to X$ une application compacte (justifiée par le lemme 0.2) à valeurs dans un espace de dimension finie contenant $y_0$ et telle que

$$\sup_{x\in\overline{\Omega}} \|K_\epsilon(x) - K(x)\| \leq \frac{\delta}{2}.$$

**Définition 0.3** *On pose*

$$deg(I - K_\epsilon, \Omega, y_0) = deg(I - K_\epsilon|_{\overline{\Omega}\cap N_\epsilon}, \Omega \cap N_\epsilon, y_0),$$

*ce dernier est un degré de Brouwer.*

**Définition 0.4** *On définit le degré de Schauder par*

$$deg(I - K, \Omega, y_0) = deg(I - K_\epsilon, \Omega, y_0).$$

**Remarque 0.3** On peut vérifier que cette définition est indépendante du choix de $K_\epsilon$ [11].

**b- Propriétés du degré de Schauder** Dans ce paragraphe, on résume les propriétés les plus importantes du degré topologique de Leray-Schauder. On suppose que $\Omega$ est un ouvert borné de l'espace $X$. Alors

**1-**

$$deg(Id, \Omega, y_0) = \begin{cases} 1, & si\ y_0 \in \Omega, \\ 0, & si\ y_0 \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

**2-Résolution des équations algébriques.** Si $y_0 \notin f(\overline{\Omega})$, alors

$$deg(f, \Omega, y_0) = 0.$$

Ou encore,

$$deg(f, \Omega, y_0) \neq 0 \Rightarrow \exists\, x_0 \in \overline{\Omega}, f(x_0) = y_0.$$

**3- Continuité par rapport à $y_0$.** Si $y_1$ est dans un voisinage de $y_0$ (dans un sens à préciser), alors

$$deg(f, \Omega, y_0) = deg(f, \Omega, y_1).$$

**4- Invariance homotopique.** Soit $\{f_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ une famille d'applications appartenant à $\mathcal{C}(\overline{\Omega}, X)$ et dépendant continûment de $t$ et $\{y_0(t)\}_t$ une famille de points continus en $t$ telle que

$$y_0(t) \notin f_t(\partial\Omega),\ \forall\, t \in [0, 1].$$

Alors le degré $deg(f_t, \Omega, y_0(t))$ ne dépend pas de $t$.
Plus généralement, on a

**Théorème 0.1** *Soit $T = [t_1, t_2]$ un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et soit $W$ un sous ensemble ouvert de $X \times T$, où $X$ est un espace vectoriel normé. Si $H : \overline{W} \longrightarrow X$ est une application compacte telle que $H(t, x) \neq x$ pour tout $x \in \partial W_t$ et pour tout $t \in T$, où $W_t = \{x \in X : (x, t) \in W\}$. Alors $deg(I - h_t, W_t, y_0(t))$ est indépendant de $t \in T$, avec $h_t : W_t \to X$, $h_t(x) = H(t, x)$.*

**5- Invariance sur le bord.** Si $f|_{\partial\Omega} = g|_{\partial\Omega}$, alors pour tout $y_0 \notin f(\partial\Omega)$,

$$deg(f, \Omega, y_0) = deg(g, \Omega, y_0).$$

**6- Continuité par rapport à $f$.** Soit $r = dist(y_0, f(\partial\Omega)) > 0$ et soit $g \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^1(\Omega)$ telle que

$$\sup_{x \in \Omega} \|g - f\| < r.$$

Alors

$$deg(f, \Omega, y_0) = deg(g, \Omega, y_0).$$

**7-** Le degré topologique est constant sur les composantes connexes de $X \setminus f(\partial\Omega)$.

**8- Additivité.** Soit $y_0 \in X$ et $(\Omega_i)_i$ une famille d'ouverts deux à deux disjoints vérifiant l'une des assertions suivantes :

**(a)** $\Omega = \bigcup_i \Omega_i$ et $y_0 \notin f(\partial\Omega)$ ;

**(b)** $\bigcup_i \Omega_i \subset \Omega$ et $y_0 \notin f(\overline{\Omega} \setminus \bigcup_i \Omega_i)$.

Alors

$$deg(f, \Omega, y_0) = \sum_i deg(f, \Omega_i, y_0),$$

où seul un nombre fini de termes dans la somme est non nul.

**9- Excision.** Soit $K \subset \Omega$ fermé et $y_0 \notin f(K) \cup f(\partial\Omega)$. Alors

$$deg(f, \Omega, y_0) = deg(f, \Omega \setminus K, y_0).$$

### 0.1.3 Applications

• **Théorème du point fixe de Schauder**

Soit $C$ un sous-ensemble convexe, fermé, borné et non vide d'un espace de Banach $X$ et $K : C \to C$ une application compacte. Alors $K$ admet au moins un point fixe dans $C$.

• **Alternative non linéaire de Schauder**

Soit $\Omega$ un ouvert borné d'un espace de Banach $X$ et $f : \Omega \to X$ une application compacte. Alors, ou bien $f$ admet un point fixe dans $\Omega$, ou bien il existe $x \in \partial\Omega$, $t \in [0, 1] : x = tf(x)$.

## 0.2 Les cônes

**Définition 0.5** *Soit $X$ un espace de Banach et $K$ un sous-ensemble de $X$.*
*$K$ est appelé un cône ordonné positif si :*

**1-** *$K$ est fermé, non vide et $K \neq \{0\}$.*

**2-** *Si $a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0$ et $x, y \in K$, alors $ax + by \in K$.*

**3-** *$x \in K$ et $-x \in K$ impliquent $x = 0$.*

Nous pouvons alors introduire une relation d'ordre sur $X$ comme suit :

$$\begin{aligned} x \leq y \quad &\Leftrightarrow \quad y - x \in K. \\ x < y \quad &\Leftrightarrow \quad x \leq y \text{ et } x \neq y. \\ x \ll y \quad &\Leftrightarrow \quad y - x \in int(K). \\ x \nleq y \quad &\Leftrightarrow \quad y - x \notin K. \end{aligned}$$

Définissons le segment d'un cône par $[x, y] = \{z \in K : x \leq z \leq y\}$.

**Proposition 0.1** *[propriétés de $\leq, <, \ll$] :*
*Pour tout $u, x, y, z \in X$ et tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a :*

1. *$x \leq x$.*
2. *$x \leq y$ et $y \leq z$ impliquent $x \leq z$.*
3. *$x \leq y$ et $y \leq x$ impliquent $x = y$.*
4. *$x \leq y$ et $0 \leq a \leq b$ impliquent $ax \leq by$.*
5. *$x \leq y$ et $u \leq z$ impliquent $x + u \leq y + z$.*
6. *$x \ll y$ et $y \ll z$ impliquent $x \ll z$.*
7. *$x \ll y$ et $y \leq z$ impliquent $x \ll z$.*
8. *$x \leq y$ et $y \ll z$ impliquent $x \ll z$.*
9. *$x \ll y$ et $a > 0$ impliquent $ax \ll az$.*
10. *Soit $(x_n)$ et $(y_n)$ deux suites de $X$ telles que $x_n \leq y_n$, $\forall\, n \geq 0$. Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n \leq \lim\limits_{n \to +\infty} y_n$.*

**Remarque 0.4** *Dans la définition d'un cône ordonné, la condition (2) est vraie si et seulement si $K$ est convexe et pour tout $x \in K$ et tout réel positif $a$ tels que $ax \in K$.*

**Définition 0.6** *[le cône naturel] Le cône ordonné $K$ est appelé naturel s'il existe une constante $N > 0$ telle que, pour tout $x, y \in K$ ; $0 \leq x \leq y$ implique $\|x\| \leq N \|y\|$.*

**Définition 0.7** *[le cône générateur] : Le cône ordonné $K$ est dit générateur s'il engendre tout l'espace $X$ :*

$$X = span(K) = \{ \ \sum_{i=1}^{i=m} a_i x_i : \ a_i \in \mathbb{R}, \ x_i \in K \ \}.$$
$$= \textit{toutes les combinaisons linéaires finies d'éléments de } K.$$

***Note :*** *$K$ est générateur si et seulement $X = K - K$, c'est-à-dire si chaque élément dans $X$ peut s'écrire comme la différence de deux éléments de $K$.*

**Définition 0.8** *Un espace de Banach ordonné est un espace de Banach contenant un cône ordonné $K$.*

**Remarque 0.5** • *Un sous-ensemble $C \subset X$ est appelé cône si :*

$$x \in C \text{ et } a > 0 \text{ implique } ax \in C.$$

• *Chaque cône ordonné est un cône, mais la réciproque est fausse.*

Dans ce qui suit, on désignera, pour simplifier, un cône ordonné positif par un cône.

**Exemple 1 :** Soit $X = \mathbb{R}^n$. Le sous-ensemble $K = \mathbb{R}^n_+$ est un cône ordonné, naturel, générateur d'intérieur non vide et tel que :

$$(\xi_1, \ldots, \xi_n) \leq (\eta_1, \ldots, \eta_n) \ \Leftrightarrow \ \xi_i \leq \eta_i \text{ pour tout } i.$$
$$(\xi_1, \ldots, \xi_n) \ll (\eta_1, \ldots, \eta_n) \ \Leftrightarrow \ \xi_i < \eta_i \text{ pour tout } i.$$

**Contre exemple 2 :** L'ensemble $K$ dans la Figure (1) est un cône dans $\mathbb{R}^2$. Mais ce n'est pas un cône ordonné car il existe un point $x \neq 0$ avec $x \in K$ et $-x \in K$.

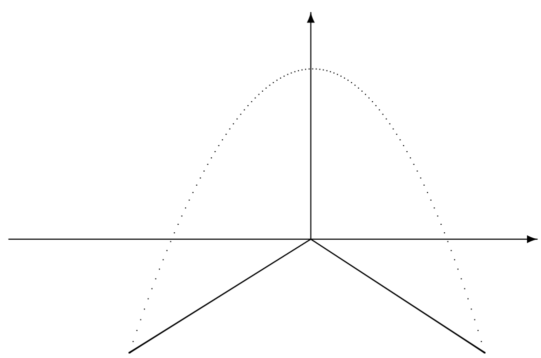

FIGURE 1 –

**Exemple 3** : Soit $X = C(\overline{M})$ où $M \subset \mathbb{R}^n$ est un domaine borné. Alors l'ensemble $K = C_+(\overline{M})$ est un cône ordonné, naturel (car la norme du max est croissante) et l'on a $(f \in int(C(\overline{M})) \Leftrightarrow f(x) > 0, \forall x \in \overline{M})$. De plus, on a

$$f \leq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x) \text{ pour tout } x \in \overline{M}.$$
$$f \ll g \Leftrightarrow f(x) < g(x) \text{ pour tout } x \in \overline{M}.$$

**Exemple 4** : $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ étant un ouvert, l'espace de Banach $L_p(\Omega), (1 \leq p \leq \infty)$ est un espace de Banach ordonné ; une relation d'ordre dans le cône positif est donnée par : $L_p^+(\Omega) = \{f \in L_p(\Omega) : f(x) \geq 0 \ p.p \text{ dans } \Omega\}$. Puisque la norme de $L_p$ est croissante, le cône $L_p^+(\Omega)$ est naturel, générateur mais d'intérieur vide, sauf pour le cône $L_\infty^+(\Omega)$ dont l'intérieur est non vide.

**Définition 0.9 (Opérateur monotone)** *Soit $X$ et $Y$ deux espaces de Banach ordonnés.*

**a-** *L'opérateur $T : D(T) \subset X \longrightarrow Y$ est appelé croissant si pour tout $x, y \in D(T)$, $x < y$ implique $Tx \leq Ty$.*

**b-** *L'opérateur $T$ est appelé strictement ou fortement croissant si le symbole " $\leq$ " est remplacé par " $<$ " ou " $\ll$ " respectivement.*

**c-** *L'opérateur $T : D(T) \longrightarrow Y$ est appelé décroissant si pour tout $x, y \in D(T)$, $x < y$ implique $Tx \geq Ty$.*

**d-** *L'opérateur $T$ est appelé strictement ou fortement décroissant si le symbole " $\geq$ " est remplacé par " $>$ " ou " $\gg$ " respectivement.*

**e-** *L'opérateur $T$ est appelé positif si, $T(0) > 0$ et pour tout $x \in D(T)$, $x > 0$ implique $Tx \geq 0$.*

**Proposition 0.2** *Si le cône ordonné est naturel, alors chaque segment est borné.*

# 0.3 L'indice du point fixe

## 0.3.1 Introduction

Un des outils les plus importants de l'analyse fonctionnelle, non linéaire est le degré topologique de Leray-Schauder pour le champs des vecteurs compacts, définis sur la fermeture des sous-ensembles ouverts bornés dans les espaces de Banach. Cependant, en relation avec les applications non linéaires dans les espace de Banach ordonnés, il est naturel de considérer aussi les applications qui sont définies sur les sous-ensembles ouverts d'un cône positif (ces sous-ensembles sont ouverts par rapport à la topologie induite de l'espace tout entier). Si le cône positif n'a pas de points intérieurs (la plupart des cônes de dimension infinie intéréssants -du point de vues des applications- ont ce défaut), le degré de Leray-Schauder n'est pas immédiatement applicable.

Mais à cause du fait que le cône positif est un rétracte de l'espace de Banach qui le contient, d'après le corollaire du théorème d'extension de Dugundji car, il est fermé convexe, il est possible de définir "L'indice du point fixe" pour les applications compactes, définies dans le cône positif. Cet indice du point fixe est une extension de la notion du degré de Leray-Schauder.

Dans ce qui suit, on donne les propriétés, les plus importantes de cet indice ; on indique en particulier que l'indice du point fixe peut être dérivé du degré bien connu de Leray-Schauder.

**Rappel 1-** Soit $X$ un espace de Banach. On dit que $Y \subset X$ est un rétracté de $X$ s'il existe une application continue $r : X \to Y$ telle que $r(x) = x$, $\forall\, x \in Y$.

**Rappel 2-** Toute partie convexe fermée de $X$ est une rétractée de $X$ ; en particulier tout cône $K \subset X$ est un rétracté de $X$.

### 0.3.2 Axiomes de L'indice du point fixe

**Théorème 0.2** (Définition axiomatique)
*Soit $X$ un rétracte de l'espace de Banach $E$. Pour chaque sous-ensemble ouvert $U$ de $X$ et chaque application $f : \overline{U} \longrightarrow X$ compacte sans point fixe sur $\partial\Omega$, il existe un nombre entier $i\,(f, U, X)$ satisfaisant les conditions suivantes :*

**(i) Normalisation.** $i\,(f, U, X) = 1 \quad si \quad f(x) = y_0 = cte \in U,\ \forall\, x \in \overline{U}$.

**(ii) Additivité.** *Pour toute paire de sous-ensembles ouverts disjoints $U_1, U_2$ de $U$ tel que $f$ n'admet pas de point fixe sur $\overline{U}\setminus(U_1 \cup U_2)$, on a*

$$i\,(f, U, X) = i\,(f, U_1, X) + i\,(f, U_2, X).$$

*où $i\,(f, U_k, X) := i\,(f|_{\overline{U_k}}, U_k, X),\ k = 1, 2$.*

**(iii) Invariance homotopique.** *L'indice $i\,(h(x,t), U, X)$ est indépendant du paramètre $t, 0 \leq t \leq 1$ où $h : \overline{U} \times [0,1] \longrightarrow X$ est une application compacte et $h(x,t) \neq x$ pour tout $x \in \partial U$ et $0 \leq t \leq 1$.*
*Plus généralement, on peut remplacer l'intervalle $[0,1]$ par un intervalle fermé de $\mathbb{R}$.*

**(iv) Permanence.** *Si $Y$ est une rétractée de $X$ et $f(\overline{U}) \subset Y$, alors*

$$i\,(f, U, X) = i\,(f, U \cap Y, Y).$$

*où $i\,(f, U \cap Y, Y) := i\,(f|_{\overline{U \cap Y}}, U, Y)$.*

*La famille $\{i\,(f, U, X)\}$ tel que $X$ rétractée de $E$, $U$ un ouvert dans $X$ et $f : \overline{U} \to X$ compacte sans des point fixe sur la frontière $\partial U\}$ est uniquement déterminée par les propriétés $(i) - (iv)$ avec l'entier $i\,(f, U, X)$ est appelé l'indice du point fixe de $f$ sur $U$ par rapport à $X$.*

**Esquisse de la démonstration**

Soit $\{i\,(f, U, X)\}$ une famille satisfaisant les conditions (i)-(iv). Pour le choix $X = E$, les conditions (i)-(iv) représentent les propriétés du degré de Leray-Schauder ; d'où la définition

$$i\,(f, U, E) = deg\,(I - f, U, 0). \tag{1}$$

Supposons maintenant que $X$ soit une rétractée de $E$ ; on note par $r : E \to X$ une rétraction. D'après la propriété de permanence, on a les égalités suivantes :

$$i\,(f, U, X) = i\,(f \circ r, r^{-1}(U), E) = deg\,(I - f \circ r, r^{-1}(U), 0).$$

En effet, d'une part, $r : E \to X$ est une rétraction, alors c'est une application continue ; par conséquent

• $U$ est un ouvert de $X$ implique que $r^{-1}(U)$ est un ouvert de $E$.

• $f \circ r : E \to X$ est une application compacte, n'admet pas un point fixe sur $\partial r^{-1}(U)$ et vérifie $[f \circ r](\,\overline{r^{-1}(U)}\,) \subset X$ car

$$\begin{array}{rcl} for \text{ et continue } \Rightarrow [f \circ r](\overline{r^{-1}(U)}) & \subset & \overline{[f \circ r](r^{-1}(U))} \\ & \subset & \overline{f(U)} \subset \overline{X} = X. \end{array}$$

D'après la propriété de permanence, on aura

$$\begin{array}{rcl} i\,(f \circ r, r^{-1}(U), E) & = & i\,(f \circ r, r^{-1}(U) \cap X, X) \\ & = & i\,(f \circ r, U, X) = i\,(f \circ r|_{\overline{U}}, U, X) \\ & = & i\,(f, U, X). \end{array}$$

D'autre part, l'égalité (1) implique que

$$i\,(f \circ r, r^{-1}(U), E) = deg\,(I - f \circ r, r^{-1}(U), 0).$$

Par conséquent,

$$i\,(f, U, X) = i\,(f \circ r, r^{-1}(U), E) = deg\,(I - f \circ r, r^{-1}(U), 0).$$

**Remarque 0.6** *D'après ce qui précède, on définit L'indice du point fixe d'un opérateur compact $f$sur $U$ par rapport à $X$ par :*

$$i\,(f, U, X) := deg\,(I - f \circ r, r^{-1}(U), 0). \tag{2}$$

*où $r : E \to X$ est une rétraction quelconque.*

Notons que la l'assertion (2) est indépendante du choix de la rétraction $r$. En effet, soit $r_1 : E \to X$ une autre rétraction. On pose $V := r^{-1}(U) \cap r_1^{-1}(U)$ et $r_0 := r$. D'après la propriété d'excision de degré de Leray-Schauder, on obtient :

$$deg\,(I - f \circ r_j, r_j^{-1}(U), 0) = deg\,(I - f \circ r_j, V, 0), \;\; j = 0, 1.$$

Introduisons l'opérateur compact $h : [1, 0] \times \overline{V} \to X$ par

$$h(\lambda, x) = r_0[(1-\lambda)f(r_\circ(x)) + \lambda f(r_1(x))].$$

On remarque que $h(\lambda, x) \neq x$, $\forall\,(\lambda, x) \in [0,1] \times \partial V$. i.e. le degré de Leray-Schauder $deg\,(I - h(\lambda, .), V, 0)$ est bien défini $\forall\,\lambda \in [0,1]$. La propriété d'invariance homotopique de degré de Leray-Schauder entraîne que :

$$deg\,(I - f \circ r_0, V, 0) = deg\,(I - f \circ r_1, V, 0).$$

Par conséquent, la définition de $i\,(f, U, X)$ est indépendante du choix de la $r$. Finalement, par la définition (2) et les propriétés de degré de Leray-Schauder, on peut vérifier les propriétés (i)-(iv). Voici quelques conséquences simples :

**Corollaire 0.1** *L'indice du point fixe vérifie les propriétés suivantes :*

**(v) Propriété d'excision.** *Soit $V \subset U$ un sous-ensemble ouvert tel que $f$ n'admet pas de point fixe dans $\overline{U} \backslash V$; alors*

$$i\,(f, U, X) = i\,(f, V, X).$$

**(vi) Propriété de l'existence.** *Si $i\,(f, U, X) \neq 0$, alors $f$ admet au moins un point fixe dans $U$, i.e. il existe $x_0 \in U$ tel que $fx_0 = x_0$.*

**Démonstration**

• Montrons la propriété d'excision. Soit $U_1 = U, U_2 = \emptyset$, alors par la propriété d'additivité de l'indice du point fixe, on a

$$i\,(f, U, X) = i\,(f, U_1, X) + i\,(f, U_2, X) = i\,(f, U, X) + i\,(f, \emptyset, X).$$

Ceci implique que $i\,(f, \emptyset, X) = 0$. Par conséquent, si on prend $U_1 = V \; et \; U_2 = \emptyset$, on obtient

$$i\,(f, U, X) = i\,(f, V, X) + i\,(f, \emptyset, X) = i\,(f, V, X).$$

• Montrons la propriété de l'existence. On suppose que $f$ n'admet pas un point fixe dans $U$. Soit $V = \emptyset$ dans la propriété d'excision, i.e $\overline{U} \backslash V = \overline{U}$, donc $f$ n'admet pas un point fixe dans $U \cup \partial U = \overline{U}$; d'où $(f, U, X) = i\,(f, \emptyset, X) = 0$, ce qui contredit le fait que $i\,(f, U, X) \neq 0$; d'où le résultat demandé. Nous terminons cette section, en démontrant le théorème de point fixe de Schauder en utilisant la notion de L'indice du point fixe.

**Théorème 0.3 (Théorème de point fixe de Schauder)** *Soit $C$ un sous-ensemble convexe, fermé, borné et non vide d'un espace de Banach $X$ et $f : C \to C$ une application compacte. Alors $f$ admet au moins un point fixe dans $C$.*

**Démonstration**
On suppose que $f(x) \neq x, \ \forall x \in \partial C$; sinon le théorème est démontré. Par le théorème d'extension Dugundji (voir l'annexe), $C$ est un rétracté de $X$ ; l'indice du point fixe $i\,(f, C, C)$ est donc bien défini. On se fixe $x_0 \in int(C)$ et on définit l'application compacte $h : [0, 1] \times C \to C$ par :

$$h(\lambda, x) = (1 - \lambda) f(x) + \lambda x_0.$$

L'application $h$ est bien définie car $C$ est convexe. Les propriétés de l'invariance homotopique et de l'existence donnent finalement

$$i\,(f, C, C) = i\,(x_0, C, C) = 1$$

et alors l'application $f$ admet au moins un point fixe.

**Remarque 0.7** *On peut démontrer le même résultat si $C$ est seulement un rétracté de $X$ en utilisant la définition (2), en considérant une boule qui contient $\overline{f(C)}$ et en appliquant la propriété de l'invariance homotopique de degré du Leray-Schauder pour la déformation homotopique $h(x, t) = x - t[f o r](x)$, $0 \leq t \leq 1$ où $r$ est une rétraction quelconque.*

### 0.3.3 Lemmes fondamentaux

Dans tout ce qui suit, on considère $X$ un espace de Banach, $K \subset X$ un cône et $U$ un ouvert de $X$.

**Définition 0.10** *Soit $K \subset X$ un cône. Pour $r > 0$ on introduit les ensembles*

$$K_r = K \cap \overline{B}(0,r) = \{x \in K : \|x\| \leq r\},$$

$$\partial K_r = \{x \in K : \|x\| = r\}.$$

**Lemme 0.3** *Soit $0 \in U$ et $F : K \cap \overline{U} \to K$ un opérateur compact satisfaisant l'hypothèse :*

$$Fx \neq \lambda x,\ \forall\, x \in K \cap \partial U,\ \forall\, \lambda \geq 1.$$

*Alors, l'indice du point fixe $i\,(F, K \cap U, K) = 1$.*

**Démonstration**

On définit la déformation homotopique $H : [0,1] \times K \cap \overline{U} \to K$ par $H(t,x) = tFx$. Alors $H$ est un opérateur compact et n'admet pas un point fixe sur $K \cap \partial U$, $\forall\, t \in [0,1]$; autrement

• Pour $t = 0$, on obtient l'existence d'un point $x_0 \in K \cap \partial U$ tel que $x_0 = 0$, d'où la contradiction.

• Pour $t \in ]0,1]$, on obtient l'existence d'un point $x_0 \in K \cap \partial U$ tel que $tFx_0 = x_0$ ; donc $Fx_0 = \frac{1}{t}x_0$, où $\frac{1}{t} \geq 1$ d'où la contradiction avec l'hypothèse. Alors, d'après les propriétés de l'invariance homotopique et de la normalisation de l'indice du point fixe, on en déduit que

$$i\,(F, K \cap U, K) = i\,(0, K \cap U, K) = 1.$$

**Lemme 0.4** *Soit $0 \in U$ et $F : K \cap \overline{U} \to K$ un opérateur compact satisfaisant :*

$$\|Fx\| \leq \|x\| \text{ et } Fx \neq x \text{ pour tout } x \in K \cap \partial U.$$

*Alors, $i\,(F, K \cap U, K) = 1$.*

**Démonstration**

Il suffit de montrer que la condition du lemme implique la condition du lemme 0.3. En effet, si on suppose par l'absurde qu'il existe $x_0 \in K \cap \partial U$ et $\lambda_0 \geq 1$ tel que $Fx_0 = \lambda_0 x_0$, alors, de deux chose l'une

• Si $\lambda_0 > 1$, on aura $\|Fx_0\| = \lambda_0\|x_0\| > \|x_0\|$, d'où la contradiction.

• Si $\lambda_0 = 1$, on aura $Fx_0 = x_0$, d'où la contradiction. Le lemme est donc démontré.

**Lemme 0.5** *Soit* $0 \in U$ *et* $F : K \cap \overline{U} \to K$ *un opérateur compact satisfaisant la condition* $Fx \ngeq x$, $\forall\, x \in K \cap \partial U$. *Alors,* $i\,(F, K \cap U, K) = 1$

**Démonstration**

On pose $H(t,x) = tFx,\ 0 \leq t \leq 1$. S'il existe $x_0 \in K \cap \partial U$, tel que $x_0 = tFx_0$, alors $t \neq 0$ car $0 \in U$. Par conséquent, $Fx_0 = \frac{1}{t}x_0 \geq x_0$ car $\frac{1}{t} \geq 1$, ce qui contredit le fait que $Fx \ngeq x$, $\forall\, x \in K \cap \partial U$. D'après les propriétés de l'invariance homotopique et la normalisation de l'indice du point fixe, on obtient le résultat demandé.

**Remarque 0.8** *Par une autre méthode, on peut démontrer que la condition du lemme implique que* $Fx \neq \lambda x$, $\forall\, x \in K \cap \partial U$ *et* $\forall\, \lambda \geq 1$.

En effet, si on suppose par l'absurde qu'il existe $x_0 \in K \cap \partial U$ tel que $Fx_0 = \lambda x_0$, on obtient que $Fx_0 \geq x_0$, d'où la contradiction. Ceci entraîne que $i\,(F, K \cap U, K) = 1$.

**Lemme 0.6** *Soit* $F : K \cap \overline{U} \to K$ *un opérateur compact et soit* $S : K \cap \partial U \to K$ *un opérateur compact. Supposons que :*

**(i)** $\inf\limits_{x \in \partial U \cap K} \|Sx\| > 0$;

**(ii)** $x - Fx \neq tSx$ *pour tout* $t \geq 0$ *et tout* $x \in \partial U \cap K$.

*Alors, l'indice du point fixe* $i\,(F, K \cap U, K) = 0$.

**Démonstration**

***Etape 1 :***

Nous pouvons d'abord étendre l'opérateur $S$ à un opérateur compact (qu'on note aussi par $S$) $S : K \cap \overline{U} \to K$ tel que $S(K \cap \overline{U}) \subset \overline{Conv(S(K \cap \partial U))}$ ($Conv A$ est le plus petit convexe qui contient $A$.) Posons $L = S(K \cap \partial U)$ et $M = Conv(S(K \cap \partial U))$ et montrons que $\inf\limits_{x \in K \cap \overline{U}} \|Sx\| > 0$. Pour cela il suffit de montrer que $\inf\limits_{y \in \overline{M}} \|y\| > 0$ car

$$\inf_{x \in K \cap \overline{U}} \|Sx\| = \inf_{y \in S(K \cap \overline{U})} \|y\| \geq \inf_{y \in M} \|y\|.$$

Puisque l'opérateur $S$ est compact, l'ensemble $L$ est relativement compact. Soit $X_0 = Span(L) = \{\sum_{i=1}^{i=m} a_i x_i : a_i \in \mathbb{R},\ x_i \in L\}$; c'est un sous-espace de $X$ séparable et $K_0 = X_0 \cap K$ est un cône dans $X$. Alors, $L \subset K_0$ et $\overline{Conv(L)} \subset K_0$. On note par

$X_0^*$ l'espace dual de $X_0$. Appliquons le théorème de Hahn-Banach avec $A = \{0\}$ et $B = K_0$; on obtient l'existence de $f_0 \in X_0^*$ tel que $f_0(y) > 0 \; \forall \, y \in K_0$ et $y \neq 0$. Si $f_1 = \frac{f_0}{\|f_0\|}$, alors $\|f_1\| = 1$ et l'on a $\inf\limits_{y \in L} f_1(y) := \sigma > 0$ car $L \in K_0$. De plus l'ensemble $\overline{M} = \overline{Conv(L)}$ est compact car $\overline{L}$ est compact ; d'où l'existence de $z_0 \in \overline{M}$ tel que $\inf\limits_{y \in \overline{M}} \|y\| = \|z_0\|$. Ensuite, $\|f_1\| = 1 = \sup\limits_{z \in X_0} \frac{\|f_1(z)\|}{\|z\|} \geq \sup\limits_{z \in \overline{M}} \frac{\|f_1(z)\|}{\|z\|} \geq \frac{f_1(z_0)}{\|z_0\|}$ et donc $\inf\limits_{y \in \overline{M}} \|y\| \geq \sigma > 0$; d'où le résultat demandé.

***Etape 2 :***

Montrons que $i\,(F, K \cap U, K) = 0$. On suppose par l'absurde que $i\,(F, K \cap U, K) \neq 0$ et considérons la déformation linéaire $H(x,t) = Fx + tSx, \; \forall \, t \geq 0$. L'indice du point fixe $i\,(H(.,t), K \cap U, K)$ est bien défini pour tout $t \geq 0$. En effet, pour tout $t \geq 0$ si on suppose qu'il existe $x_0 \in K \cap \partial U$ tel que $x_0 = Fx_0 + tSx_0$, on obtient que $x_0 - Fx_0 = tSx_0$ puis on aboutit à une contradiction avec l'hypothèse (ii). D'après la propriété de l'invariance homotopique de l'indice, on a

$$i\,(F + tS, K \cap U, K) \neq 0, \;\; \forall \; t \geq 0.$$

Posons $b \colon = \sup\limits_{x \in K \cap \overline{U}} \|x\|, \; c := \sup\limits_{x \in K \cap \overline{U}} \|Fx\|, \; \alpha := \inf\limits_{x \in K \cap \overline{U}} \|Sx\| > 0.$

Avec le choix de $t_1 > \frac{b+c}{\alpha}$, on obtient

$$i\,(F + t_1 S, K \cap U, K) \neq 0.$$

Par conséquent, le principe d'existence entraîne qu'il existe $x_1 \in K \cap U$ vérifiant $Fx_1 + t_1 Sx_1 = x_1$, on obtient donc

$$t_1 = \frac{\|x_1 - Fx_1\|}{Sx_1} \leq \frac{\|x_1\| + \|Fx_1\|}{\alpha} \leq \frac{b+c}{\alpha} < t_1;$$

ce qui est une contradiction ; par conséquent

$$i\,(F, K \cap U, K) = 0$$

**Lemme 0.7** *Soit* $F : K \cap \overline{U} \to K$ *un opérateur compact. Supposons qu'il existe* $u_0 > 0\,(u \in K \backslash \{0\})$ *tel que*

$$x - Fx \neq \lambda u_0 \;\; \textit{pour tout } x \in K \cap \partial U \;\; \textit{et} \;\; \lambda \geq 0.$$

*Alors, l'indice du point fixe* $i\,(F, K \cap U, K) = 0$

**Démonstration**

$1^{\text{ère}}$ **méthode.**

C'est un cas particulier du lemme 0.6 en prenant $Sx = u_0$ pour tout $x \in K \cap \overline{U}$, on vérifie immédiatement que les deux conditions du lemme 0.6 sont satisfaites et le résultat demandé en découle.

$2^{\text{ème}}$ **méthode.**

Dans le cas où l'ouvert $U$ est une boule de rayon $r$ et de centre 0on pose : $K \cap \overline{U} = K_r$. Soit $\mu := \sup\{\|Fx\|,\ x \in K_r\}$ et soit $\lambda > \frac{(r+\mu)}{\|u_0\|}$. On définit l'application $H : [0,1] \times K_r \to K$ par :

$$H(t,x) = tFx + (1-t)(Fx + \lambda u_0).$$

Alors, $H$ est une application compacte et n'admet pas un point fixe sur $\partial K_r := K \cap \partial B(0,r)$ car sinon il existerait $x_0 \in \partial K_r$ et $t_0 \in [0,1]$ tels que $x_0 - Fx_0 = (1-t_0)\lambda u_0$ où $(1-t_0)\lambda \geq 0$, ce qui contredit l'hypothèse. D'après la propriété de l'invariance homotopique de l'indice du point fixe, on a

$$i(F, K_r, K) = i(F + \lambda u_0, K_r, K).$$

Si on suppose que $i(F, K_r, K) \neq 0$, il existe un élément $x \in K_r$ tel que

$$x = Fx + \lambda u_0.$$

Par conséquent, $\|x\| \geq \lambda\|u_0\| - \|Fx\| \geq \lambda\|u_0\| - \mu > r$, ce qui est impossible. D'où $i(F, K_r, K) = 0$.

**Lemme 0.8** *Soit $F : K \cap \overline{U} \to K$ un opérateur compact. Supposons que :*

**(a)** $\inf\limits_{x \in \partial U \cap K} \|Fx\| > 0$;

**(b)** *$Fx \neq \mu x$ pour tout $x \in \partial U \cap K$ et $0 < \mu \leq 1$.*

*Alors, L'indice du point fixe $i\,(F, K \cap U, K) = 0$.*

**Démonstration**

$1^{\text{ère}}$ **méthode.**

Dans le lemme 0.6, on prend $S = F$ et la première condition de ce lemme est donc vérifiée. Il en va de même pour la seconde condition car sinon existerant $x_0 \in K \cap \partial U$ et $t_0 \geq 0$ avec $x_0 - Fx_0 = t_0 Fx_0$; alors

$$x_0 = (1 - t_0)Fx_0 \Leftrightarrow Fx_0 = \frac{1}{1 + t_0}x_0,$$

d'où une contradiction avec l'hypothèse (b) car $\frac{1}{1+t_0} \leq 1$.

**$2^{\text{ème}}$ méthode.**

On prend $U$ la boule ouvert de rayon $r$, $B(0,r)$. Grâce au théorème d'extension de Dugundji, on peut toujours considerer l'application compacte $F_1 : X \to Conv(F(\partial K_r))$ telle que $F_1 x = Fx$ sur $\partial K_r$. D'autre part, le fait que ($0 \notin C \subset K$ et $C$ est compact $\Rightarrow$ $0 \notin Conv(C)$) permet de dire que :

$$\inf\{\|F_1 x\| : \ x \in X\} = \alpha > 0.$$

En effet, $0 \notin F(\partial K_r)$ par hypothèse et $F(\partial K_r)$ est compact ; donc $0 \notin Conv(F(\partial K_r))$. Maintenant, on considère la déformation homotopique :

$$H(\mu, x) = (1 - \mu)Fx + \mu k F_1 x, \ \mu \in [0,1].$$

Par l'hypothèse $0 \notin F(\partial K_r)$, on obtient que l'indice du point fixe $i\,(H(\mu,.), K_r, K)$ est bien défini, $\forall\, \mu \in [0,1]$. Choisissons ensuite $k > 1$ et la propriété de l'invariance homotopique entraîne que $i\,(F, K_r, K) = i\,(kF_1, K_r, K)$. Alors, si on suppose que $i\,(F, K_r, K) \neq 0$, on obtient l'existence de $x \in K_r$ tel que $x = kF_1 x$ ; ceci implique que $k \leq \frac{r}{\alpha}$. Nous avons finalement

$$i\,(kF_1, K_r, K) = 0 \ \text{ pour } k > \max\{1, \frac{r}{\alpha}\}\cdot$$

Le résultat demandé en découle.

**Lemme 0.9** *Soit $F : K \cap \overline{U} \to K$ un opérateur compact satisfaisant :*

$$\|Fx\| \geq \|x\| \ \text{ et } \ Fx \neq x \ \text{ pour tout } x \in K \cap \partial U.$$

*Alors, l'indice du point fixe $i\,(F, K \cap U, K) = 0$.*

**Démonstration**

Montrons que $\|Fx\| \geq \|x\|$, $Fx \neq x$ pour tout $x \in K \cap \partial U$ implique qu'il existe

$u_0 > 0$ tel que $x - Fx \neq \lambda u_0$ pour tout $x \in K \cap \partial U$ et $\lambda \geq 0$. Par l'absurde, supposons qu'il existe $x_0 \in K \cap \partial U$ et $\lambda_0 \geq 0$ tel que

$$x_0 - Fx_0 = \lambda_0 u_0.$$

- Si $\lambda_0 = 0$, on obtient $x_0 = Fx_0$ qui est une contradiction avec $Fx \neq x$, $\forall x \in K \cap \partial U$.
- Si $\lambda_0 > 0$, on obtient $\|x_0\| > \|Fx_0\|$ qui une contradiction avec $\|Fx\| \geq \|x\|$, $\forall x \in K \cap \partial U$. Le lemme est donc démontré.

**Lemme 0.10** *Soit $F : \overline{K_r} \to K$ un opérateur compact vérifiant*

$$Fx \nleq x, \ \ \forall x \in \partial K_r.$$

*Alors, l'indice du point fixe $i\,(F, K_r, K) = 0$.*

**Démonstration**
Supposons que $i\,(F, K_r, K) \neq 0$. Comme $F$ est borné sur $\overline{K_r}$, il existe $a > 0$ tel que

$$\|Fx\| \leq a, \ \forall x \in \overline{K_r}.$$

Soit $x_0 \in K$ tel que $\|x_0\| > r + a$ et considérons l'homotopie :

$$H(x, t) = Fx + tx_0, \ \ 0 \leq t \leq 1.$$

Supposons que $H(x, t) = x$ pour un certain élément $x \in \partial K_r$, alors

$$x = Fx + tx_0 \Leftrightarrow x - Fx = tx_0 \in K \Leftrightarrow x \geq Fx.$$

Ceci contredit le fait que $Fx \nleq x, \ \ \forall x \in \partial K_r$.
Par la propriété de l'invariance homotopique, on déduit que :

$$i\,(F + x_0, K_r, K) \neq 0.$$

Le principe d'existence entaîne que l'application $H(., 1)$ admet un point fixe dans $K_r$; d'où l'existence de $x_1 \in K_r$ tel que $x_1 = Fx_1 + x_0$; alors

$$\|x_0\| \leq \|x_1\| + \|Fx_1\| \Rightarrow \|x_0\| \leq r + a,$$

en contredisant la construction de $x_0$. On en déduit que $i(F, K_r, K) = 0$.

Dans la section suivante, nous nous intéréssons à quelques théorèmes de point fixe sur les cônes.

## 0.4 Théorème de point fixe de Krasnosel'skii

On commence par le Théorème principal suivant, appelé théorème de point fixe d'expansion et de compression d'un cône (dû à Krasnosel'skii, 1960 [20]) :

**Théorème 0.4** *Soit $K$ un cône dans un espace de Banach $X$. Soit $F : K \to K$ un opérateur compact vérifiant l'une des conditions suivantes :*

**(a)** $Fx \ngeq x, \ \forall\, x \in \partial K_r$ *et* $Fx \nleq x, \ \forall\, x \in \partial K_R$.

**(b)** $Fx \nleq x, \ \forall\, x \in \partial K_r$ *et* $Fx \ngeq x, \ \forall\, x \in \partial K_R$.

*Alors, $F$ admet au moins un point fixe $x \in K$ tel que $r \leq \|x\| \leq R$.*

**Démonstration**
Par l'utilisation des lemmes 0.5 et 0.10 la propriété d'additivité de l'indice du point fixe, on obtient que $i\left(F, K_R \backslash \overline{K_r}, K\right) = \pm 1$ et la propriété d'existence entaîne, pour $F$, l'existence d'un point fixe $x \in K$ tel que $r \leq \|x\| \leq R$.

**Remarque 0.9** *Dans le théorème précédent*
- *Si l'opérateur $F$ vérifie l'hypothèse (a) on dit que $F$ est l'expanseur du cône $K$.*
- *Si l'opérateur $F$ vérifie l'hypothèse (b) on dit que $F$ est le compresseur du cône $K$.*

**Théorèmes d'expansion d'un cône**
Les théorèmes qui suivent donnent l'existence de point fixe dans l'ensemble

$$\overline{K_{r,R}} = \{x \in K : \ r \leq \|x\| \leq R\}$$

appelé **coquille conique** dont les frontières supérieur et inférieur sont du type

$$\{x \in K : \ \|x\| = \rho\} \ \text{ où } \ \rho = r \vee R.$$

**Théorème 0.5** *Soit $F : \overline{K}_R \to K$ un opérateur compact vérifiant les conditions suivantes :*

**(a)** $Fx \ngeq x, \ \forall\, x \in \partial K_r$.

**(b)** $Fx \nleq x, \ \forall\, x \in \partial K_R$.

*Alors $F$ admet au moins un point fixe $x \in \overline{K_{r,R}}$.*

**Théorème 0.6** *Soit* $F : \overline{K}_R \to K$ *un opérateur compact. Supposons que les conditions suivantes soient satisfaites :*

**(1)** *Il existe* $u_0 > 0$ *tel que* $x - Fx \neq \lambda u_0$ *pour tout* $x \in \partial K_r$ *et* $\forall\, \lambda \geq 0$.

**(2)** $Fx \neq \lambda x,\ \forall\, x \in \partial K_r$ *et* $\forall\, \lambda \geq 1$.

*Alors* $F$ *admet au moins un point fixe dans* $\overline{K}_{r,R}$

**Démonstration**
Il se montre de la même manière que dans la preuve du théorème 0.10 en utilisant les lemmes 0.3 et 0.7.

**Théorème 0.7** *Soit* $F : \overline{K}_R \to K$ *un opérateur compact vérifiant les conditions suivantes :*

**(a)** $Fx \neq \lambda x$, *pour* $\|x\| = r$ *et* $\lambda \geq 1$.

**(b)** $Fx \neq \mu x$ *pour* $\|x\| = R$ *et* $0 < \mu \leq 1$.

**(c)** $\inf\{\|Fx\| :\ \|x\| = R\} > 0$.

*Alors* $F$ *admet au moins un point fixe dans* $x \in \overline{K_{r,R}}$.

**Démonstration**
Le résultat est assuré par les lemmes 0.3 et 0.8.

**Théorème 0.8** *Soit* $F : \overline{K}_R \to K$ *un opérateur compact vérifiant :*

**(1)** $Fx \neq \lambda x,\ \forall\, x \in \partial K_r$ *et* $\forall\, \lambda \geq 1$.

**(2)** $\|Fx\| \geq \|x\|$ *et* $Fx \neq x,\ \forall\, x \in \partial K_R$.

*Alors* $F$ *admet au moins un point fixe dans* $\overline{K}_{r,R}$.

**Démonstration**
Il se montre de la même manière que dans la preuve du théorème 0.10 en utilisant les lemmes 0.3 et 0.9.

**Théorème 0.9** *Soit* $F : \overline{K}_R \to K$ *un opérateur compact satisfaisant :*

**(1)** $\|Fx\| \leq \|x\|$ *et* $Fx \neq x,\ \forall\, x \in \partial K_r$.

**(2)** *Il existe $u_0 > 0$ tel que $x - Fx \neq \lambda u_0$ pour tout $x \in \partial K_R$ et $\lambda \geq 0$.*

*Alors $F$ admet au moins un point fixe dans $\overline{K}_{r,R}$.*

**Démonstration**

Elle est basé sur les lemmes 0.4 et 0.7.

**Remarque 0.10** *Dans les théorèmes précédents, on peut obtenir la même conclusion si la première condition est vérifiée sur $\partial K_R$ et la deuxième vérifiée sur $\partial K_r$. Dans ce cas on appelle ces types de théorèmes : "Théorèmes de compression d'un cône."*

### 0.4.1 Théorèmes de point fixe d'expansion et de compression d'un cône de type norme

La version de type norme du théorème d'expansion et de compression d'un cône de Krasnosel'skii est obtenue par Guo (voir [15]).

**Théorème 0.10** *Soit $X$ un espace de Banach. Supposons $U_1$ et $U_2$ deux ouverts bornés de $X$ tels que $0 \in U_1$, $\overline{U_1} \subset U_2$ et $K \subset X$ un cône. Soit $F : K \cap \overline{U_2} \setminus U_1 \to X$ un opérateur compact vérifiant l'une des conditions suivantes :*
*(i) $\|Fx\| \leq \|x\|$, $\forall\, x \in K \cap \partial U_1$ et $\|Fx\| \geq \|x\|$, $\forall\, x \in K \cap \partial U_2$.*
*(ii) $\|Fx\| \geq \|x\|$, $\forall\, x \in K \cap \partial U_1$ et $\|Fx\| \leq \|x\|$, $\forall\, x \in K \cap \partial U_2$.*
*Alors $F$ admet au moins un point fixe dans $K \cap (\overline{U_2} \setminus U_1)$.*

**Démonstration**

Nous allons prouver ce théorème sous la condition (i), la preuve étant semblable quand la condition (ii) est satisfaite. On commence tout d'abord par étendre l'opérateur $F$ à $K \cap \overline{U_2}$, grâce au théorème d'extension de Dugundji. On peut supposer sans restriction de généralité que $Fx \neq x$ sur $K \cap \partial U_1$ et
$Fx \neq x$ sur $K \cap \partial U_2$, sinon le théorème est démontré.Dans ces conditions d'après les lemmes 0.4 et 0.9, nous avons

$$i\,(F, K \cap U_1, K) = 1 \;\text{ et }\; i\,(F, K \cap U_2, K) = 0.$$

La propriété d'additivité de l'indice du point fixe permet de

$$i\,(F, K \cap (U_2 \setminus \overline{U_1}), K) = 1.$$

On en déduit que $F$ admet au moins un point fixe dans $(\overline{U_2}\backslash U_1)$. D'une manière analogue, nous obtenons la même conclusion si la condition (ii) est vérifiée. Le théorème est donc démontré.

### 0.4.2 Généralisations du théorème de Krasnosel'skii (dû à Leggett-Williams [23] et Zima [30])

En 1980, Leggett et Williams ont généralisé le théorème original d'expansion et de compression d'un cône de Krasnosel'skii (voir [23], théorème 2). Soit $P$ un cône dans un espace de Banach $E$. Pour $u_0 \in P-\{0\}$, soit $P(u_0) = \{x \in P : \exists\, \lambda > 0,\ \lambda u_0 \leq x\}$. Notons, de plus $\overline{P}_R = \{x \in P : \|x\| \leq R\}$ et $\partial P_R = \{x \in P : \|x\| = R\}$.

**Théorème 0.11** *Soit $F : \overline{P}_R \to P$ un opérateur complètement continu avec $F(0) = 0$. Supposons qu'il existe $r$, $0 < r < R$ et $u_0 \in P - \{0\}$ tels que :*

$$Fx \nleq x \text{ si } x \in P(u_0) \text{ et } \|x\| = r.$$

*Supposons de plus que pour tout $\epsilon > 0$*

$$(1+\epsilon)x \nleq Fx \text{ si } x \in P \text{ et } \|x\| = R.$$

*Alors $F$ admet un point fixe dans $\overline{P}_{r,R}$.*

**Démonstration**

Supposons que $F$ n'admet pas un point fixe sur $\partial P_r$ et $\partial P_R$, sinon le théorème est démontré.

• Montrons que l'hypothèse ($Fx \nleq x$ si $x \in P(u_0)$ et $\|x\| = r$) implique l'existence d'un point $u_0 > 0$ tel que $x - Fx \neq \lambda u_0$ pour tout $x \in \partial P_r$ et $\forall\, \lambda \geq 0$. Par l'absurde, on suppose qu'il existe $x_0 \in \partial P_r$ et $\lambda_0 \geq 0$ tel que $x_0 - Fx_0 = \lambda_0 u_0$.

Remarquons que $\lambda_0 u_0 \leq \lambda_0 u_0 + Fx_0$, ce qui entraîne que $x_0 \in P(u_0)$; d'autre part $x_0 - Fx_0 \in P$, i.e. $Fx_0 \leq x_0$; d'où une contradiction. Le lemme 0.9 donne alors

$$i\,(F, P_r, P) = 0$$

• Montrons que l'hpothèse ($\forall\,\epsilon > 0 : (1+\epsilon)x \not\leq Fx$ si $x \in P$ et $\|x\| = R$) implique que $Fx \neq \lambda x,\ \forall\, x \in \partial P_R$ et $\forall\,\lambda \geq 1$. Supposons par l'absurde, qu'il existe $x_0 \in \partial P_R$ et $\lambda_0 > 1$ tel que $Fx_0 = \lambda_0 x_0$. Si on prend $\lambda_0 = \lambda_1(1+\epsilon_0)$ avec $\epsilon_0 > 0$ et $\lambda_1 \geq 1$, on obtient que $Fx_0 \geq (1+\epsilon_0)x_0$; d'où une contradiction. Le lemme 0.3 donne alors $i\,(F, P_R, P) = 1$. Finalement, la propriété d'additivité de l'indice du point fixe compléte la démonstration du théorème. Dans [10] et [15], on peut trouver quelques raffinements du théorème 0.11. En voici un :

**Théorème 0.12** *([10], théorème 1.3) Soit $P$ un cône dans un espace de Banach $E$ et $r_1, r_2 > 0, r_1 \neq r_2$ avec $R = \max\{r_1, r_2\}$ et $r = \min\{r_1, r_2\}$. Soit $F : \overline{P}_R \to P$ un opérateur complètement continu vérifiant :*

**(i)** *$x \not\leq Fx$ pour $x \in P$ et $\|x\| = r$,*

**(ii)** *Il existe $u_0 \in P - \{0\}$ tel que $Fx \not\leq x$ pour tout $x \in P(u_0)$ et $\|x\| = r_2$.*

*Alors, $F$ admet au mois un point fixe $x^* \in \overline{P}_{r,R}$.*

On remarque que l'hypothèse (i) peut être remplace par

$$\textbf{(iii)} \quad \|Fx\| \leq \|x\| \text{ pour } x \in P \text{ et } \|x\| = r_1.$$

Dans le théorème suivant, nous remplaçons la condition (ii) par une condition du type norme. Nous rappelons que $P$ est un cône naturel s'il existe un nombre positif $\gamma$ tel que

$$0 \leq x \leq y \text{ implique } \|x\| \leq \gamma\|y\|. \tag{3}$$

Le plus petit $\gamma$ qui satisfait (3) est appelé constante naturelle de $P$. Évidement, pour tout cône naturel, nous avons $\gamma \geq 1$. Maintenant, on présente un théorème de point fixe de type Leggett-Williams (dû à Zima [30]).

**Théorème 0.13** *Soit $E$ un espace de Banach, $P \subset E$ un cône naturel et soit $\gamma$ la constante naturelle de $P$. Supposons que $\Omega_1$ et $\Omega_2$ sont deux ouverts bornés de $E$ tels que $0 \in \Omega_1$, $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$. Soit $F : P \cap \overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1 \to P$ un opérateur complètement continu et $u_0 \in P\setminus\{0\}$. Alors, si l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

**(vi)** *$\gamma\|x\| \leq \|Fx\|$, pour $x \in P(u_0) \cap \partial\Omega_1$ et $\|Fx\| \leq \|x\|$ pour $x \in P \cap \partial\Omega_2$,*

**(vii)** *$\|Fx\| \leq \|x\|$ pour $x \in P \cap \partial\Omega_1$ et $\gamma\|x\| \leq \|Fx\|$, pour $x \in P(u_0) \cap \partial\Omega_2$.*

*$F$ admet au moins un point fixe dans $P \cap (\overline{\Omega_2} \backslash \Omega_1)$.*

**Démonstration**

On peut supposer que $F$ n'admet pas de point fixe sur $P \cap \partial\Omega_1$ et $P \cap \partial\Omega_2$. Sinon le théorème est démontré.

• Supposons que la condition (vi) soit satisfaite. Il est bien connu, d'après le lemme 0.4 que, si $\|Fx\| \leq \|x\|$ pour $x \in P \cap \partial\Omega_2$, alors $i\,(F, P \cap \Omega_2, P) = 1$. Ensuite, nous prouverons que pour $t \geq 0$ et $x \in P \cap \partial\Omega_1$

$$x - Fx \neq t(u_0 + Fx). \tag{4}$$

Supposons par l'absurde qu'il existe $x_0 \in P \cap \partial\Omega_1$ et $t_0 \geq 0$ tels que :

$$x_0 - Fx_0 = t_0(u_0 + Fx_0). \tag{5}$$

Remarquons que $t_0 u_0 \leq t_0(u_0 + Fx_0) + Fx_0$, ce qui entraîne, d'après l'équation (5), que $x_0 \in P(u_0)$. De plus $0 \leq x_0 - Fx_0 - t_0 Fx_0$, soit $0 \leq (1 + t_0)Fx_0 \leq x_0$. Puisque $P$ est un cône naturel, on aura $\|(1 + t_0)Fx_0\| \leq \gamma\|x_0\|$. Par conséquent, $\|Fx_0\| \leq \gamma\|x_0\|$, ce qui contredit l'hypothèse (vi). D'autre part, pour $x \in P \cap \partial\Omega_1$, on a $0 < u_0 \leq u_o + Fx$, donc $0 < \|u_0\| \leq \gamma\|u_0 + Fx\|$. Par conséquent,

$$\inf_{x \in P \cap \partial\Omega_1} \|u_0 + Fx\| > 0. \tag{6}$$

On prend dans le lemme 0.6 $Sx = u_0 + Fx$ pour $x \in P \cap \partial\Omega_1$. Les expressions (4) et (6) entaînent que $i\,(F, P \cap \Omega_1, P) = 0$. La propriété d'additivité de point fixe donne $i\,(F, P \cap (\Omega_2 \backslash \overline{\Omega_1}), P) = 1$, ce qui entraîne que $F$ admet un point fixe dans $P \cap (\overline{\Omega_2} \backslash \Omega_1)$.

• Si la condition (vii) est satisfaite, la preuve est similaire.

### 0.4.3 Théorèmes de point fixe d'expansion et de compression d'un cône de type fonctionnel (dû à Avery et Anderson [9])

**I- Introduction** Dans cette section nous comptons généraliser le théorème de point fixe d'expansion et de compression d'un cône de type norme. Cette généralisation permet de choisir deux fonctionnelles satisfaisant certaines conditions qui seront utilisées à la place de la norme dans le théorème de Krasnosl'skii, la flexibilité d'utiliser des fonctionnelles au lieu des normes permet d'utiliser le théorème dans un nombre plus grand de situations. En particulier, dans les problèmes aux limites, ces fonctionnelles permettent d'améliorer des conditions suffisantes assurant l'existence de solutions positives multiples. Donnons d'abord quelques définitions utiles pour la suite :

**Définition 0.11** **-** *La fonction $\alpha$ est dite fonctionnelle continue positive sur le cône $K$ si $\alpha : K \to [0, \infty)$ est continue.*
**-** *Soient $\alpha$ et $\gamma$ deux fonctionnlles continues positives sur $K$. Pour $r, R$ deux nembres réels strictement positifs, définissons les ensembles :*

$$K(\gamma, R) = \{x \in K : \gamma(x) < R\} \tag{7}$$

$$K(\gamma, \alpha, r, R) = \{x \in K : r < \alpha(x) \text{ et } \gamma(x) < R\}. \tag{8}$$

Le théorème suivant est une généralisation du théorème de point fixe d'expansion et de compression d'un cône de type norme et donne au moins un point fixe dans la coquille conique $\overline{K}(\gamma, \alpha, r, R) = \{x \in K : r \leq \alpha(x) \text{ et } \gamma(x) \leq R\}$ dont les frontières supérieure et inférieure sont du type :

$$\{x \in K : \alpha(x) = r\} \text{ et } \{x \in K : \gamma(x) = R\}.$$

## II- Résultat principal

**Théorème 0.14** *Soit $K$ un cône dans un espace de Banach réel $X$ et soit $\alpha$, $\beta$ deux fonctionnelles continues positives sur $K$. Supposons que l'ensemble $K(\gamma, \alpha, r, R)$, définie par (1.8), est non vide, borné et*

$$F : \overline{K(\gamma, \alpha, r, R)} \to K$$

*un opérateur complètement continu vérifiant :*

$$\inf_{x \in \partial K(\gamma, \alpha, r, R)} \|Fx\| > 0,$$

*et*

$$\overline{K(\alpha, r)} \subseteq K(\gamma, R).$$

*Supposons de plus que l'une des conditions suivantes soit satisfaite :*
***(H1) :*** *$\alpha(Fx) \leq r$ pour $x \in \partial K(\alpha, r)$, $\gamma(Fx) \geq R$ pour $x \in \partial K(\alpha, R)$. Et pour $y \in \partial K(\alpha, r)$, $z \in \partial K(\gamma, R)$, $\lambda \geq 1$ et $\mu \in (0, 1]$, on a :*

$$\alpha(\lambda y) \geq \lambda\alpha(y),\ \gamma(\mu z) \leq \mu\gamma(z),\ \textit{et}\ \alpha(0) = 0.$$

*Ou* ***(H2) :*** *$\alpha(Fx) \geq r$ pour $x \in \partial K(\alpha, r)$, $\gamma(Fx) \leq R$ pour $x \in \partial K(\gamma, R)$. Et pour $y \in \partial K(\alpha, r)$, $z \in \partial K(\gamma, R)$, $\lambda \in (0, 1]$ et $\mu \geq 1$, on a :*

$$\alpha(\lambda y) \leq \lambda\alpha(y),\ \gamma(\mu z) \geq \mu\gamma(z),\ \textit{et}\ \gamma(0) = 0.$$

*Alors $F$ admet au moins un point fixe positif $x^*$ tel que*

$$r \leq \alpha(x^*)\ \textit{et}\ \gamma(x^*) \leq R.$$

**Démonstration**
• S'il existe $x \in \partial K(\gamma, \alpha, r, R)$ tel que $Fx = x$, le théorème est démontré.
• Supposons que $Fx \neq x$ pour tout $x \in \partial K(\gamma, \alpha, r, R)$. Grâce au théorème d'extension de Dugundji (voir l'annexe A), $F$ admet une extension complètement continue

$$F : \overline{K(\gamma, R)} \to K.$$

On suppose que la condition $(H1)$ est satisfaite ; la preuve quand la condition $(H2)$ est satisfaite est identique et sera omis.
• $Fy \neq \lambda y$ pour tout $y \in \partial K(\alpha, r)$ et $\lambda \geq 1$. En effet, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $y_0 \in \partial K(\alpha, r)$ et $\lambda_0 > 1$ puisque $F$ n'a aucun point fixe sur les bords tel que $Fy_0 = \lambda_0 y_0$. Alors

$$\alpha(Fy_0) = \alpha(\lambda_0 y_0) \geq \lambda_0\alpha(y_0) > \alpha(y_0) = r,$$

ce qui contredit la première partie de $(H1)$. Notons que $0 \in K(\alpha, r)$ par hypothèse, donc le lemme 0.3 entraîne que $i\,(F, K(\alpha, r), K) = 1$.
• $Fz \neq \mu z$ pour tout $z \in \partial K(\gamma, R)$ et $\mu \in (0, 1]$. En effet, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $z_0 \in \partial K(\gamma, R)$ et $\mu \in ]0, 1]$, tel que $Fz_0 = \mu_0 z_0$. Alors

$$\gamma(Fz_0) = \gamma(\mu_0 z_0) \leq \mu_0\gamma(z_0) < \gamma(z_0) = R,$$

ce qui contredit la deuxième partie de $(H1)$. Puisque par hypothèse, on a

$$\inf_{x\in\partial K(\gamma,\alpha,r,R)} \|Fx\| > 0,$$

le lemme 0.8 entraîne que

$$i\,(F, K(\gamma, R), K) = 0.$$

Par la propriété d'additivité de l'indice du point fixe, on aura

$$i\,(F, K(\gamma, \alpha, r, R), K) = i\,(F, K(\gamma, R), K) - i\,(F, K(\alpha, r), K) = -1 \neq 0,$$

ce qui nous permet de dire que l'opérateur $F$ admet au moins un point fixe positif $x^*$ tel que

$$r \leq \alpha(x^*) \text{ et } \gamma(x^*) \leq R.$$

**III- Commentaires**

• Les théorèmes d'expansion et les théorèmes de compression d'un cône sont des généralisations du théorème des valeurs intermédiaires dans $\mathbb{R}$ qui affirme que si $f : [\bar{y}, \hat{y}] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, où $[\bar{y}, \hat{y}] \subset \mathbb{R}$ est un intervalle non vide, vérifiant $(f(\bar{y}) - \bar{y})(\hat{y} - f(\hat{y})) > 0$, alors $f$ admet un point fixe dans $(\bar{y}, \hat{y})$.

• Comme simple généralisation du théorème des valeurs intermédiaire dans $\mathbb{R}$, il semble naturel de remplacer l'intervalle $[\bar{y}, \hat{y}]$ par un intervalle ordonné (c'est un ensemble de la forme $\{x \in K : \ \bar{y} \leq x \leq \hat{y}\}$) au lieu d'une coquille conique. En effet, si on suppose que la fonction $f : [\bar{y}, \hat{y}] \to \mathbb{R}$ est compacte et croissante. Alors l'existence d'un point fixe de $f$ est assuré par le théorème de point fixe de Schauder à condition que $\bar{y} \leq f(\bar{y})$ et $f(\hat{y}) \leq \hat{y}$. L'avantage de ce théorème et qu'on doit vérifier seulement deux conditions, permettant à $f$ de transformer les points $\bar{y}, \hat{y}$ dans l'intervalle ordonné $[\bar{y}, \hat{y}]$. C'est un problème beaucoup plus facile que de vérifier les hypothèses du théorème de la compression d'un cône. D'autre part, on peut donner un exemple où la fonction $f$ qui transforme les points $\bar{y}, \hat{y}$ en dehors de $[\bar{y}, \hat{y}]$ n'a pas toujours un point fixe dans l'intervalle ordonné $[\bar{y}, \hat{y}]$. Par conséquent, il ne paraît pas être possible de généraliser le résultat obtenu en dimension une, par l'expansion d'un intervalle ordonné au cas de dimension supérieure.

## 0.5 Existence des points fixes multiples

### 0.5.1 Théorème des points fixes multiples (dû à H. Amann)

Dans cette section, nous montrons que sous certaines propriétés supplémentaires, il est possible de généraliser le théorème des valeurs intermédiaires dans un espace de Banach quelconque en utilisant les intervalles ordonnés. Un résultat de multiplicité est basé sur le théorème général suivant dû à H.Amann [2] :

**Théorème 0.15** *Soit $X$ un espace de Banach, $D \subset X$ un rétracté et $F : D \to D$ un opérateur compact. Supposons que $D_1$, $D_2$ sont deux rétractés disjoints de $D$, $\Omega_i \subset D_i$ un ouvert de $D$ pour $i = 1, 2$. Supposons aussi que $F(D_i) \subset D_i$ et $Fix(F) \cap (D_i \backslash \Omega_i) = \emptyset$ pour $i = 1, 2$. Alors $F$ admet au moins trois points fixes distincts $x, x_1, x_2$ avec*

$$x_i \in \Omega_i,\ i = 1, 2 \ \textit{ et } \ x \in D\backslash(D_1 \cup D_2).$$

**Démonstration**

• Grâce au théorème de point fixe de Schauder, $F$ admet un point fixe $x_i$ dans $\Omega_i$ pour $i = 1, 2$.

• Par la propriété d'additivité de l'indice du point fixe, on a

$$i\,(F, D, D) = i\,(F, \Omega_1 \cup \Omega_2, D) + i\,(F, D\backslash\overline{\Omega_1 \cup \Omega_2}, D)$$

et $i\,(F, \Omega_1 \cup \Omega_2, D) = i\,(F, \Omega_1, D) + i\,(F, \Omega_2, D)$. La propriété de permanence implique que $i\,(F, \Omega_i, D) = i\,(F, \Omega_i, D_i)$ et la propriété d'excision donne $i\,(F, \Omega_i, D_i) = i\,(F, D_i, D_i), \quad i = 1, 2$. Par conséquent, $i\,(F, D\backslash\overline{\Omega_1 \cup \Omega_2}, D) = i\,(F, D, D) - \sum_{i=1}^{i=2} i\,(F, D_i, D_i)$. D'après la remarque 0.7, on a $i\,(F, D, D) = i\,(F, D_1, D) = i\,(F, D_2, D) = 1$ soit $i\,(F, D\backslash\overline{\Omega_1 \cup \Omega_2}, D) = -1$. Par la propriété d'existence, $F$ admet donc un point fixe $x \in D\backslash(D_1 \cup D_2)$.

**Corollaire 0.2** *Soit $X$ un espace de Banach, $K \subset X$ un cône avec $int(K) \neq \emptyset$. Considérons l'existence de quatre points $\bar{y}_i, \hat{y}_i \in X$, $i = 1, 2$ avec*

$$\bar{y}_1 < \hat{y}_1 < \bar{y}_2 < \hat{y}_2.$$

*Et supposons que* $f : [\bar{y}_1, \hat{y}_2] \to X$ *est un opérateur compact et fortement croissant tel que* $\bar{y}_1 \leq f(\bar{y}_1),\ \ f(\hat{y}_1) < \hat{y}_1,\ \ \bar{y}_2 < f(\bar{y}_2),\ \ f(\hat{y}_2) \leq \hat{y}_2$. *Alors* $f$ *admet au moins trois points fixes distincts* $x, x_1, x_2$ *tels que*

$$\bar{y}_1 \leq x_1 \ll \hat{y}_1,\ \ \bar{y}_2 \ll x_2 \leq \hat{y}_2 \quad \textit{et}\ \bar{y}_2 \not\leq x \not\leq \hat{y}_1.$$

**Démonstration**
Soit $D := [\bar{y}_1, \hat{y}_2]$ et $D_i := [\bar{y}_i, \hat{y}_i]$; $i = 1, 2$. On a donc
• $D, D_1$ et $D_2$ sont des rétractés de $X$ avec $D_i \subset D$ et $D_1 \cap D_2 = \emptyset$.
• Puisque $F$ est croissant, nous obtenons $f(D) \subset D,\ \ f(D_i) \subset D_i$, $i = 1, 2$.
• De plus, puisque $f$ est fortement croissant et $f(\hat{y}_1) < \hat{y}_1$, $f$ admet un point fixe maximal $\hat{x}_1 \in D_1$ et $\hat{x}_1 \ll \hat{y}_1$. La même discussion donne un point fixe minimal de $f$, $\bar{x}_2$ dans $D_2$ avec $\bar{x}_2 \gg \bar{y}_2$. Par conséquent, $D_i$ a l'intérieur non vide $\Omega_i$ dans $D$ tel que $f$ n'admet pas un point fixe sur $D_i \backslash \Omega_i$ pour $i = 1, 2$. Le théorème 0.15 est donc applicable.

**Remarque 0.11** ***(a)*** *Le théorème précédent fournit une généralisation d'un résultat représenté au cas* $X = \mathbb{R}$ *par la figure*(2).
***(b)*** *Évidemment, le résultat du corollaire précédent reste vrai sans "fortement" lorsque on peut montrer que* $\hat{x}_1 \ll \hat{y}_1$ *et* $\bar{x}_2 \gg \bar{y}_2$ *par d'autres considérations. De plus l'hypothèse "*$F$ *est croissant" peut être éliminée, si on peut montrer que* $F(D) \subset D$ *et* $F(D_i) \subset D_i$, $i = 1, 2$ *et* $F$ *n'a pas de point fixe sur la frontière de* $D_i$ *dans* $D$. *Par exemple, l'existence de majorant et de minorant de l'opérateur* $F$ *de croissance forte est suffisante.*

Puisque l'usage d'intervalle ordonné ne peut pas être toujours approprié, on peut prouver aussi un résultat de multiplicité semblable, pour un opérateur complètement continue, sur une coquille conique dont la frontière supérieure est encore donnée par $\{x \in K : \|x\| = r\}$, mais la frontière inférieure est du type $\{x \in K : \varphi(x) = \varrho\}$ avec $\varphi : K \to \mathbb{R}_+$ est une fonctionnelle continue et concave.

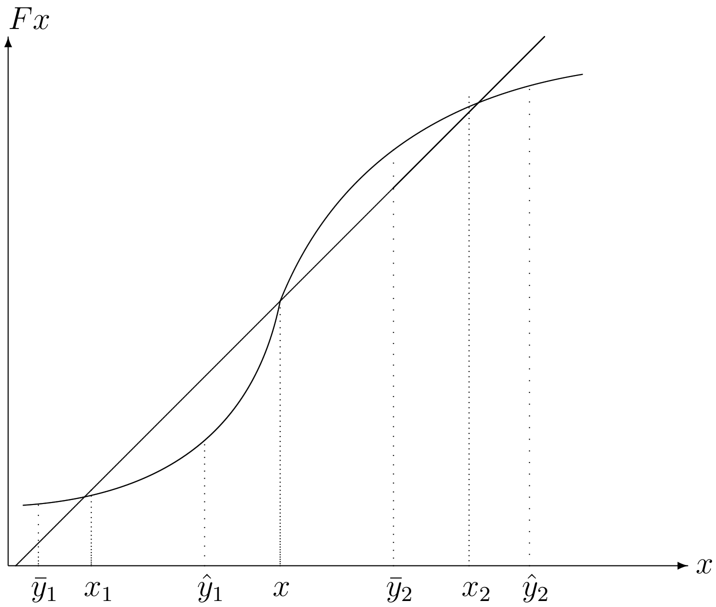


FIGURE 2 –

### 0.5.2 Théorèmes des points fixes multiples (dû à Leggett-Williams [22])

**I-Introduction** Dans cette section, nous nous intéréssons à l'existence de points fixes positifs multiples d'un opérateur non linéaire, complètement continu défini sur un cône $K$ d'un espace de Banach ordonné $X$. Les résultats principaux donnent des conditions suffisantes pour qu'un opérateur puisse avoir deux ou trois points fixes positifs.

Les méthodes développées ici améliorent les techniques de points fixes multiples qui sont formulées par Krasnosel'skii et Stecenko [21] pour certains problèmes aux limites et certains opérateurs intégraux de type Hammerstein. Ces auteurs ont considéré un opérateur $A$ borné sepèrieurement et infèrieurement par deux opérateurs convenables $A_1$ et $A_2$. Ils ont montré que, si $A_1$ et $A_2$ sont des sections alternativement de croissance rapide et lente, c'est possible de trouver quelquefois des intervalles disjoints invariants par $A$.

Dans cette section, nous cherchons des points fixes multiples d'un opérateur qui n'a pas besoin d'être "fortement croissant" et de satisfaire les hypothèses de la croissance imposées par les méthodes dans [21] et par H. Amann [1] et [2].

Pour étudier l'existence des points fixes multiples de l'opérateur $F$, qui peut être non croissant sur le cône $K$, nous allons considérer (comme un analogue des intervalles ordonnés) des ensembles de la forme :

$$S(\alpha, a, b) = \{x \in K : \ \alpha(x) \geq a \text{ et } \|x\| \leq b\},$$

où $\alpha$ est une fonctionnelle positive, concave définie sur $K$. Un point important de cette méthode est que les ensembles n'ont pas besoin d'être invariants par l'opérateur $F$. Ceci induit une généralité et une grande facilité d'application des résultats abstraits qui ne sont pas possibles avec l'approche de Krasnosek'skii et Stecenko [21].

**II-Définitions**

Dans cette section, on considère un opérateur complètement continu de l'ensemble $K_c, \ 0 < c \leq \infty$ où

$$K_c = \{x \in K : \ \|x\| \leq c\}, \, 0 < c < \infty \ \text{ et } K_\infty = K.$$

Nous avons été amenés, par les études de plusieurs opérateurs intégraux intervenant dans les problèmes appliqués, à considérer l'opérateur $F : K_c \to K$ satisfaisant la propriété suivante :

($\mathfrak{B}$) $F$ admet une extension continue $F_1 : K \to K$ tel que $ImgF_1 = ImgF$ et $F_1$ n'admet pas un point fixe dans $K \backslash K_c$.

Dans ce qui suit, nous donnons un exemple simple d'un opérateur vérifiant la propriété ($\mathfrak{B}$).

**Exemple 0.1**

**(a)** On suppose $A : K_c \to K$ est un opérateur complètement continu vérifiant $A(K_c) \subset K_c$. Définissons $A_1 : K \to K$ par

$$A_1 x = \begin{cases} Ax, \text{ si } x \in K_c \\ A(\frac{cx}{\|x\|}), \text{ si } x \in K \backslash K_c. \end{cases}$$

Alors, $ImgA_1 = ImgA$ et $A_1$ est continu et tout les points fixes de $A_1$ doivent être dans $K_c$. La condition $(\mathfrak{B})$ est donc satisfaite.

**(b)** Plus généralement, on suppose que $A : K_c \to K$ est un opérateur complètement continu tel que $Ax \in K_c$ pour tout $x \in K_c$ avec $\|x\| = c$, puis définissons $A_1$ comme dans **(a)**. Il est clair que $rangA_1 = rangA$ et $A_1$ est continu. Si $x \in K \backslash K_c$ alors $A_1 x = A(\frac{cx}{\|x\|}) \in K_c$ car $\|\frac{cx}{\|x\|}\| = c$, soit $A_1 x \neq x$ ; la condition $(\mathfrak{B})$ est donc satisfaite. Le point central de ces résultats est la notion de fonctionnelle concave dans le cône $K$ ; c'est, la fonction continue positive $\alpha : K \to [0, \infty)$ qui vérifie

$$\alpha(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda\alpha(x) + (1-\lambda)\alpha(y),\ 0 \leq \lambda \leq 1.$$

*Par exemple :*

- Si $x_0 \in int(K)$, la fonction $\alpha : K \to [0, \infty)$ définie par :

$$\alpha(x) = \max\{t :\ tx_0 \leq x\}$$

est une fonction concave sur $K$.

- Considérons le cône $K = C_+(\Omega)$, avec $\Omega$ est un ensemble compact de $\mathbb{R}^n$. Soit $\Omega_1$ un sous-ensemble fermé de $\Omega$. Alors les fonctions définies par :

$$\alpha(x) = \min_{t\in\Omega_1} x(t)$$

et

$$\alpha(x) = \int_{\Omega_1} x(t)dt$$

sont des fonctionnelles concaves sur $K$. Si la fonctionnelle $\alpha$ est concave positive sur le cône $K$, l'ensemble de la forme

$$S(\alpha, a, b) = \{x \in K :\ \alpha(x) \geq a \ \text{ et } \ \|x\| \leq b\}$$

est fermé, borné et convexe dans $K$. Dans les preuves d'existence de points fixes multiples des opérateurs non monotones sur un cône, les ensembles $S(\alpha, a, b)$ remplacent souvent les intervalles ordonnés utilisés avec les opérateurs de monotonie.

**III-Résultats principaux**

Le premier résultat donne des conditions suffisantes pour que l'opérateur $F : K_c \to K$ ait au moins un point fixe non trivial.

**Théorème 0.16** *Soit $F : K_c \to K$ un opérateur complètement continu. On suppose qu'il existe une fonctionnelle concave $\alpha$ vérifiant $\alpha(x) \leq \|x\|$ pour tout $x \in K$ ainsi que des reéls $c \geq b > a > 0$ satisfaisant les conditions suivantes :*

1. *$\{x \in S(\alpha, a, b) : \ \alpha(x) > a\} \neq \emptyset$ et $\alpha(Fx) > a$ si $x \in S(\alpha, a, b)$.*
2. *$Fx \in K_c$ si $x \in S(\alpha, a, c)$.*
3. *$\alpha(Fx) > a$ pour tout $x \in S(\alpha, a, c)$ avec $\|Fx\| > b$.*

*Alors $F$ admet au moins un point fixe $x$ dans $S(\alpha, a, c)$.*

**Démonstration**

Soit l'ensemble $U = \{x \in S(\alpha, a, c) : \ \alpha(x) > a\}$ ; $U$ est alors l'intérieur de $S(\alpha, a, c)$ dans $K_c$. Supposons que $x \in \partial U$ soit un point fixe de $F$ ; alors $\alpha(x) = a$ avec : ou bien $x \in S(\alpha, a, b)$, ou bien $\|x\| > b$.

- Si $x \in S(\alpha, a, b)$, alors $\alpha(x) = \alpha(Fx) > a$, d'où la contradiction.
- Si $\|x\| > b$, alors $\|Fx\| > b$ et $\alpha(x) = \alpha(Fx) > a$, d'où la contradiction.

Il existe, donc un nombre entier $i\,(F, U, K_c)$ satisfaisant les propriétés (i)-(vi) du théorème 0.2. On choisit $x_0 \in S(\alpha, a, b)$ tel que $\alpha(x_0) > a$ et on définit l'opérateur complètement continu $H : [0,1] \times \overline{U} \to K_c$ par

$$H(t, x) = (1-t)Fx + tx_0.$$

Supposons, qu'il existe $(t, x) \in [0,1] \times \partial U$ tel que $H(t, x) = x$. Alors $\alpha(x) = a$ et si $\|Fx\| > b$, par la condition (3), on obtient $\alpha(Fx) > a$ ; donc

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \alpha((1-t)Fx + tx_0) \\ &\geq (1-t)\alpha(Fx) + t\alpha(x_0) > a; \end{aligned}$$

d'où la contradiction.

- Si $\|Fx\| \leq b$, alors $\|x\| = \|(1-t)Fx + tx_0\| \leq (1-t)\|Fx\| + t\|x_0\| \leq b$.

Donc, $x \in S(\alpha, a, b)$ et par la condition (1), on aura $\alpha(Fx) > a$ et encore nous arrivons au contradiction $\alpha(x) > a$. L'indice du point fixe $i\,(H(t, .), U, K_c)$ est donc bien défini $\forall\, t \in [0,1]$. Par conséquent, les propriétés (i) et (iii) du théorème 0.2 entraînent que

$$i\,(F, U, K_c) = i\,(x_0, U, K_c) = 1.$$

L'opérateur $F$ admet donc au moins un point fixe dans $U$.

**Remarque 0.12** *La condition (3) du théorème* 0.16 *sera satisfaite si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

**(i)** $\alpha(Fx) \geq \frac{a}{b}\|Fx\|, \quad x \in S(\alpha, a, c);$

**(ii)** $\|Fx\| - \alpha(Fx) \leq b - a, \quad x \in S(\alpha, a, c).$

*Dans les applications du théorème* 0.16 *et des résultats qui le suivent il est souvent plus facile d'établir la validité de (i) ou (ii), que d'établir directement la condition plus générale (3).*

Dans les deux théorèmes suivants, nous mettons des restrictions supplémentaires sur l'opérateur $F$ de théorème 0.16 puis nous établirons l'existence d'au moins trois points fixes de $F$.

**Théorème 0.17** *Soit $F : K_c \to K_c$ un opérateur complètement continu. On suppose qu'il existe une fonction concave $\alpha$ vérifiant $\alpha(x) \leq \|x\|$ pour tout $x \in K$ et des nombres $a, b$ et $d$ avec $0 < d < a < b \leq c$ satisfaisant les conditions suivantes :*

1. $\{x \in S(\alpha, a, b) : \ \alpha(x) > a\} \neq \emptyset$ *et* $\alpha(Fx) > a$ *si* $x \in S(\alpha, a, b)$.
2. $\|Fx\| < d \quad$ *si* $\ x \in K_d$.
3. $\alpha(Fx) > a \quad$ *pour tout* $\ x \in S(\alpha, a, c) \quad$ *avec* $\|Fx\| > b$.

*Alors $F$ admet au moins trois points fixes $x_1, x_2, x_3$ dans $K_c$ tels que*

$$\|x_1\| < d, \ \ \alpha(x_2) > a \quad \text{et} \ \ \|x_3\| > d \ \ \text{avec} \ \ \alpha(x_3) < a.$$

**Démonstration**

Soit $U_1 = \{x \in K_c : \ \|x\| < d\}$ et $U_2 = \{x \in S(\alpha, a, c) : \ \alpha(x) > a\}$. Alors, $U_1$ et $U_2$ sont deux ensembles ouverts, convexes dans $K_c$ et $F$ n'admet pas des points fixes sur $\partial U_1 \cup \partial U_2 = \partial(U_1 \cup U_2)$. En effet,

- S'il existe $x \in \partial U_1$ tel que $Fx = x$, on obtient une contradiction avec la condition (2).

- S'il existe $x \in \partial U_2$ tel que $Fx = x$, on obtient aussi une contradiction (voir la preuve du théorème précédent). D'après la condition (2), on aura $F(U_1) \subset U_1$.

• Par le théorème de point fixe de Schauder, $F$ admet un point fixe $x_1 \in U_1$.

• Par le théorème 0.16, $F$ admet un point fixe $x_2 \in U_2$.

• Montrons l'existence d'un troisième point fixe.

D'après la propriété d'additivité de l'indice du point fixe, on a que :

$$i\,(F, K_c \backslash \overline{(U_1 \cup U_2)}, K_c) = i\,(F, K_c, K_c) - \sum_{i=1}^{i=2} i\,(F, U_i, K_c).$$

Soit $V$ est un sous-ensemble ouvert, convexe de $K_c$ tel que $F : \overline{V} \to \overline{V}$ n'admet pas un point fixe sur $\partial V$. Puisque $\overline{V}$ est un rétracté de $K_c$ ; par la propriété de permanence de l'indice du point fixe, on aura $i\,(F, V, K_c) = i\,(F, V, \overline{V})$. D'autre part, on peut montrer que $i\,(F, V, \overline{V}) = 1$, en raisonnant comme dans la preuve du théorème de point fixe de Schauder (théorème 0.3). Or, $F(U_1) \subset U_1$ et $F(K_c) \subset K_c$, alors

$$i\,(F, U_1, K_c) = 1 = i\,(F, K_c, K_c).$$

Notons que $F$ n'admet pas un point fixe sur le bord de $U_1$ dans $K_c$ et le bord de $K_c$ dans $K_c$ est l'ensemble vide. Comme dans la preuve du théorème 0.16, on a $i\,(F, U_2, K_c) = 1$. Par conséquent, nous obtenons

$$i\,(F, K_c \backslash \overline{(U_1 \cup U_2)}, K_c) = 1 - 2 = -1.$$

La propriété (vi) du théorème 0.2 entraîne que $F$ admet un point fixe $x_3$ dans $K_c \backslash \overline{(U_1 \cup U_2)}$. Le résultat demandé est donc démontré.

**Théorème 0.18** *Soit $F : K_c \to K$ un opérateur complètement continu satisfaisant la propriété ($\mathfrak{B}$). On suppose qu'il existe une fonctionnelle concave positive $\alpha$ vérifiant $\alpha(x) \leq \|x\|$ pour tout $x \in K$ ainsi que des nombres $a, b$ et $d$ avec $0 < d < a < b \leq c$ satisfaisant les conditions suivantes :*

1. *$\{x \in S(\alpha, a, b) : \alpha(x) > a\} \neq \emptyset$ et $\alpha(Fx) > a$ si $x \in S(\alpha, a, b)$.*
2. *$\|Fx\| \leq d$ si $x \in K_d$.*
3. *$\alpha(Fx) > a$ si $x \in K_c$ et $\|Fx\| > b$.*

*Alors, $F$ admet au moins trois points fixes $x_1$, $x_2$, $x_3$ dans $K_c$ tels que*

$$\|x_1\| < d, \;\; \alpha(x_2) > a \;\;\text{ et }\;\; \|x_3\| > d \;\;\text{avec}\;\; \alpha(x_3) < a.$$

**Démonstration**
Soit $F_1$ l'extension de $F$ décrite dans la propriété ($\mathfrak{B}$) et choisissons $r \geq c$ tel que $F_1(K_r) \subset K_r$. Notons que l'opérateur $F_1$ satisfait les conditions (1) et (2) du théorème 0.16.
Si $x \in S(\alpha, a, r)$ et $\|F_1 x\| > b$, alors $F_1 x = Fx$ pour tout $x \in K_c$ et $\alpha(F_1 x) = \alpha(Fx) > a$, car $\|Fx\| > b$, la condition (3) du théorème 0.16 est donc satisfaite pour l'ensemble $K_r$ et l'opérateur $F_1$. Par conséquent, $F_1$ admet au moins trois points fixes dans $K_r$. Puisque $F_1$ n'admet pas un point fixe dans $K \backslash K_c$, ces points fixes sont dans $K_c$ ; d'où le résultat demandé.

**Remarque 0.13** *L'usage de l'indice du point fixe dans les théorèmes* 0.17, 0.18 *est semblable à la preuve du théorème* 0.15 *dû à Amann. Cependant, dans le dernier théorème, Amann suppose que le domaine $D$ et les deux disjoints sous-ensembles convexes de $D$ restent invariants par l'opérateur $F$. Dans le théorème* 0.17*, nous avons supposé l'invariance du domaine $K_c$ et de l'ensemble $K_d \subset K_c$. Et dans le théorème* 0.18*, nous supposons l'invariance de seulement le plus petit ensemble $K_d$.*

Il est possible d'obtenir deux points fixes de $F$ même s'il ne satisfait pas la propriété ($\mathfrak{B}$). Dans ce cas, la condition (3) du théorème 0.16 doit être remplacée par des conditions plus fortes, comme signalé dans la remarque 0.12.

**Théorème 0.19** *Soit $F : K_c \to K$ un opérateur complètement continu. On suppose qu'il existe une fonction concave positive $\alpha$ vérifiant $\alpha(x) \leq \|x\|$ pour tout $x \in K$ et des nombres $a, b$ et $d$ avec $0 < d < a < c$ satisfaisant les conditions suivantes :*

1. *$\{x \in S(\alpha, a, c) : \alpha(x) > a\} \neq \emptyset$ et $\alpha(Fx) > a$ si $x \in S(\alpha, a, c)$.*
2. *$\|Fx\| < d$ si $x \in K_d$ ainsi que*
3. *ou bien $\|Fx\| - \alpha(Fx) \leq c - a$ pour tout $x \in K_c$ tel que $\|Fx\| > c$.*
4. *ou bien $\alpha(Fx) > \frac{a}{c}\|Fx\|$ pour tout $x \in K_c$ et $\|Fx\| > c$.*

*Alors, $F$ admet au moins deux points fixes $x_1, x_2$ dans $K_c$ tels que*

$$\|x_1\| < d \quad et \quad \|x_2\| > d \quad avec \quad \alpha(x_2) < a.$$

**Démonstration**

• Grâce au théorème de point fixe de Schauder, $F$ admet un point fixe $x_1$ dans $K_d$.

• Pour prouver l'existence d'un second point fixe de $F$ dans $K_c$, on définit l'opérateur $B : K_c \to K_c$ par

$$Bx = \begin{cases} Fx, & \text{si } \|Fx\| \leq c; \\ F(\frac{cFx}{\|Fx\|}), & \text{si } \|Fx\| > c. \end{cases}$$

Il est clair que l'opérateur $B$ est complètement continu et $\|Bx\| < d$ si $x \in K_d$ Supposons $x \in S(\alpha, a, c)$.

- Si $\|Fx\| \leq c$, alors $\alpha(Bx) = \alpha(Fx) > a$.

- Si $\|Fx\| > c$, alors $\alpha(Bx) \geq \frac{c}{\|Fx\|}\alpha(Fx)$. En effet

$$\begin{aligned} \alpha(Bx) &= \alpha(\frac{cFx}{\|Fx\|}) = \alpha(\frac{c}{\|Fx\|}Fx + (1 - \frac{c}{\|Fx\|})0) \\ &\geq \frac{c}{\|Fx\|}\alpha(Fx) + (1 - \frac{c}{\|Fx\|})\alpha(0) \geq \frac{c}{\|Fx\|}\alpha(Fx). \end{aligned}$$

Par conséquent, si $\|Fx\| > c$ et la condition (3) est satisfaite, on obtient

$$\begin{aligned} \|Bx\| - \alpha(Bx) &\leq c[1 - \frac{\alpha(Fx)}{\|Fx\|}] \\ &= c\|Fx\|^{-1}[\|Fx\| - \alpha(Fx)] \\ &\leq c\|Fx\|^{-1}(c - a) < c - a. \end{aligned}$$

Donc, $\alpha(Bx) > \|Bx\| + a - c = a$. Si $\|Fx\| > c$ et la condition (4) est satisfaite, on obtient

$$\alpha(Bx) \geq c\alpha(Fx)\|Fx\|^{-1} > c\|Fx\|^{-1}[ac^{-1}\|Fx\|] = a.$$

Les hypothèses du théorème 0.16 sont maintenant satisfaites (avec $b = c$) pour l'opérateur $B$. D'après la preuve du théorème 0.16, $B$ admet un point fixe $x_2 \in K_c \backslash (K_d \cup S(\alpha, a, c))$. Par conséquent, $\alpha(x_2) < a$.

- Si $\|Fx_2\| > c$ et la condition (3) est vérifiée, alors

$$\begin{aligned} a &> \alpha(x_2) = \alpha(Bx_2) \geq c\|Fx_2\|^{-1}\alpha(Fx_2) \\ &\geq c\|Fx_2\|^{-1}[\|Fx_2\| + a - c] = c - c\|Fx_2\|^{-1}(c - a) \\ &\geq c - (c - a) = a, \end{aligned}$$

ce qui est une contradiction. Finalement
- Si $\|Fx_2\| > c$ et la condition (4) est vérifiée, alors

$$\begin{aligned} a &> \alpha(x_2) = \alpha(Bx_2) \geq c\|Fx_2\|^{-1}\alpha(Fx_2) \\ &> c\|Fx_2\|^{-1}[ac^{-1}\|Fx_2\|] = a, \end{aligned}$$

ce qui est une contradiction. Donc $\|Fx_2\| \leq c$ et $Fx_2 = Bx_2 = x_2$.

### 0.5.3 Généralisations du Théorème de point fixe de Leggett-Williams ([4], [8] dûs à Avery)

Dans cette section, nous généralisons le théorème de point fixe triple de Leggett-Williams [22]. La généralisation est un résultat de changement de l'ordre dans lequel l'existence de points fixes est déterminée, avec la constitution des sous-ensembles d'un cône et des fonctionnelles continues satisfaisant certaines propriétés sur le même cône. Tout d'abord, donnons une :

**Définition 0.12** *Soit $E$ un espace de Banach réel et $P \subset E$ un cône. Supposons que sur $P, \gamma, \beta$ et $\theta$ des fonctionnelles continues, positives et convexes et $\alpha, \psi$ des fonctionnelles continues, positives et concaves. Alors, pour les nombres positives $h, a, b, d$ et $c$, on définit les ensembles convexes suivants :*

$$\begin{aligned} P(\gamma, c) &= \{x \in P : \ \gamma(x) < c\}, \\ P(\gamma, \alpha, a, c) &= \{x \in P : \ a \leq \alpha(x), \ \gamma(x) \leq c\}, \\ Q(\gamma, \beta, d, c) &= \{x \in P : \ \beta(x) \leq d, \ \gamma(x) \leq c\}, \\ P(\gamma, \theta, \alpha, a, b, c) &= \{x \in P : \ a \leq \alpha(x), \ \theta(x) \leq d, \ \gamma(x) \leq c\}, \\ Q(\gamma, \beta, \psi, h, d, c) &= \{x \in P : \ h \leq \psi(x), \ \beta(x) \leq d, \ \gamma(x) \leq c\}, \\ R(\gamma, \psi, a, d) &= \{x \in P : \ a \leq \psi(x), \ \gamma(x) \leq d\}. \end{aligned}$$

Les théorèmes suivants sont des généralisations du théorème de point fixe de Leggett-Williams dûs à Avery dans ([4], [8]) :

I- 1 $^{\text{ère}}$ Généralisation

**Théorème de point fixe des cinq fonctionnelles :**

**Théorème 0.20** *[4] Soit $P \subset E$ un cône dans l'espace de Banach réel $E$. Soit $\gamma, \beta$ et $\theta$ sont des fonctions continues, positives et convexes et $\alpha, \psi$ sont des fonctionnelles continues, positives et concaves sur le cône $P$, tels que pour $c$ et $M$ des nombres positifs quelconques, on a*

$$\alpha(x) \leq \beta(x) \quad et \quad \|x\| \leq M\gamma(x), \quad pour\ tout\ \ x \in \overline{P(\gamma, c)}.$$

*Supposons que*

$$F : \overline{P(\gamma, c)} \to \overline{P(\gamma, c)}$$

*soit un opérateur complètement continu et qu'il existe des nombres positifs $a, b, d, h$ avec $0 < d < a$ tels que :*

**(i)** $\{x \in P(\gamma, \theta, \alpha, a, b, c) : \ \alpha(x) > a\} \neq \emptyset$ *et* $\alpha(Fx) > a$ *pour* $x \in P(\gamma, \theta, \alpha, a, b, c)$,

**(ii)** $\{x \in Q(\gamma, \beta, \psi, h, d, c) : \ \beta(x) < d\} \neq \emptyset$ *et* $\beta(Fx) < d$ *pour* $x \in Q(\gamma, \beta, \psi, h, d, c)$,

**(iii)** $\alpha(x) > a$ *pour* $x \in P(\gamma, \alpha, a, c)$ *avec* $\theta(Fx) > b$,

**(iv)** $\beta(Fx) < d$ *pour* $x \in Q(\gamma, \beta, d, c)$ *avec* $\psi(Fx) < h$.

*Alors $F$ admet au moins trois points fixes positifs non triviaux $x_1, x_2, x_3 \in \overline{P(\gamma, c)}$ tels que*

$$\beta(x_1) < d, \ \ \alpha(x_2) > a \ \ et \ \beta(x_3) > d, \ \ avec \ \ \alpha(x_3) < a.$$

**Démonstration**

Soit

$$X = \overline{P(\gamma, c)},$$

$$U = \{x \in P(\gamma, \alpha, a, c) : \ \alpha(x) > a\},$$

$$V = \{x \in Q(\gamma, \beta, d, c) : \ \beta(x) < d\}.$$

Alors, on a : **(a)** $U$ et $V$ sont deux sous-ensembles ouverts, bornés car $\|x\| \leq M\gamma(x) \leq Mc$ pour tout $x \in X$.

**(b)** Par la condition (i), on peut choisir $z_1 \in P(\gamma, \theta, \alpha, a, b, c)$ tel que $\alpha(z_1) > a$ Soit $H_1 : [0,1] \times \overline{U} \to X$ défini par :

$$H_1(t, x) = tz_1 + (1-t)Fx.$$

On a les assertion suivantes :

• $H_1 : [0,1] \times \overline{U} \to X$ est un opérateur complètement continu.

• $H_1(t, x) \neq x$ pour tout $(t, x) \in [0,1] \times \partial U$. En effet, supposons par, l'absurde qu'il existe $(t_1, x_1) \in [0,1] \times \partial U$ tels que

$$H_1(t_1, x_1) = x_1.$$

$1^{\textbf{er}}$**cas :** $\theta(Fx_1) > b$

D'après la condition (iii), on a $\alpha(Fx) > a$ ; d'où

$$\alpha(x_1) = \alpha(t_1 z_1 + (1-t_1)Fx_1) \geq t_1 \alpha(z_1) + (1-t_1)\alpha(Fx_1) > a;$$

et ceci contredit le fait que $x_1 \in \partial U$, ce qui donne $\alpha(x_1) = a$.

$2^{\textbf{ème}}$**cas :** $\theta(Fx_1) \leq b$ :

Par définition, nous avons $x_1 \in P(\gamma, \theta, \alpha, a, b, c)$ ; puisque $\alpha(x_1) = a$ et

$$\theta(x_1) = \theta(t_1 z_1 + (1-t_1)Fx_1) \leq t_1 \theta(z_1) + (1-t_1)\theta(Fx_1) \leq b.$$

Par conséquent, $\alpha(Fx) > a$ d'après la condition (i) ; ce qui est la même contradiction trouvée dans le cas précédent.

Les propriétés d'invariance homotopique et de normalisation de l'indice du point fixe entraînent que :

$$i\,(F, U, X) = i\,(z_1, U, X) = 1.$$

De la propriété d'existence de l'indice du point fixe, on déduit que $F$ admet un point fixe $x_2$ dans $P(\gamma, \alpha, a, c)$.

**(c)** Maintenant, on considère la déformation homotopique $H_2 : [0,1] \times \overline{V} \to X$ définie par $H_2(t, x) = tz_2 + (1-t)Fx$ où $z_2 \in Q(\gamma, \theta, \psi, h, d, c)$ avec $\beta(z_2) < d$. Comme précédemment, on obtient que $i\,(F, V, X) = 1$. En utilisant les hypothèses (ii) et (iv), $F$ admet donc un point fixe $x_1$ dans $Q(\gamma, \beta, d, c)$. Puisque $F : X \to X$

et $X$ est un sous-ensemble non vide, fermé, borné, convexe d'un espace de Banach, nous avons, d'après la preuve du théorème 0.3 que $i\,(F, X, X) = 1$.
La propriété d'additivité de l'indice du point fixe, entraîne que :

$$i\,(F, X, X) = i\,(F, U \cup V, X) + i\,(F, X - \overline{(U \cup V)}, X)$$

$$\text{et} \quad i\,(F, U \cup V, X) = i\,(F, U, X) + i\,(F, V, X),$$

donc

$$i\,(F, X - \overline{(U \cup V)}, X) = -1 \neq 0.$$

Donc $F$ admet un point fixe $x_3$ dans $X - \overline{(U \cup V)}$. Par conséquent, il existe trois points fixes positifs $x_1, x_2, x_3 \in \overline{P(\gamma, c)}$ tels que :

$$\beta(x_1) < d, \;\; \alpha(x_2) > a \quad \text{et} \quad \beta(x_3) > d, \;\; \text{avec} \;\; \alpha(x_3) < a.$$

## II- $2^{\text{ème}}$ Généralisation : Le théorème de point fixe des trois fonctionnelles

**Théorème 0.21** *[8] Soit $P$ un cône dans un espace de Banach réel $E$. Soient $\gamma$ et $\theta$ sont des fonctionnelle continues, positives et convexes sur $K$, $\alpha$ une fonction continue, positive et concave sur le cône $P$ et soit $\psi$ est une fonctionnelle continue, positive sur le cône $P$ vérifiant $\psi(\lambda x) \leq \lambda\psi(x)$ pour $0 \leq \lambda \leq 1$. Supposons que pour $d$ et $M$ deux nombres positifs quelconques, on a*

$$\alpha(x) \leq \psi(x) \;\; \textit{et} \;\; \|x\| \leq M\gamma(x), \;\; \textit{pour tout} \;\; x \in \overline{P(\gamma, d)}.$$

*Supposons que*

$$F : \overline{P(\gamma, d)} \to \overline{P(\gamma, d)}$$

*soit un opérateur complètement continu et qu'il existe des nombres positifs $a, b$ et $c$ avec $a < b$ tels que :*

**(i)** $\{x \in P(\gamma, \theta, \alpha, b, c, d) : \; \alpha(x) > a\} \neq \emptyset$ *et* $\alpha(Fx) > b$ *pour* $x \in P(\gamma, \theta, \alpha, b, c, d)$.

**(ii)** $\alpha(Fx) > b$ *pour* $\{x \in P(\gamma, \alpha, b, d)$ *avec* $\;\theta(Fx) > c$.

**(iii)** $0 \notin R(\gamma, \psi, a, d)$ *et* $\psi(Fx) < a$ *pour* $x \in R(\gamma, \psi, a, d)$ *avec* $\psi(x) = a$.

*Alors $F$ admet au moins trois points fixes positifs $x_1, x_2, x_3 \in \overline{P(\gamma, d)}$ tels que*

$$\gamma(x_i) \leq d, \quad pour \quad i = 1, 2, 3;$$

$$\alpha(x_1) > b; \quad \psi(x_2) > a \quad avec \quad \alpha(x_2) < b \quad et \quad \psi(x_3) < a.$$

**Démonstration**

Posons :

$$X = \overline{P(\gamma, d)},$$

$$U = \{x \in P(\gamma, \alpha, b, d) : \ \alpha(x) > b\},$$

$$V = \{x \in R(\gamma, \psi, a, d) : \ \psi(x) > a\}.$$

Alors **(a)** $U$ et $V$ sont deux sous-ensembles ouverts, bornés car $\|x\| \leq M\gamma(x) \leq Md$ pour tout $x \in X$.

**(b)** $U \subset V$ car si $x \in U$, alors $\psi(x) \geq \alpha(x) > b > a$, ce qui donne $x \in V$.

**(c)** Par la condition (i), on peut choisir $z_1 \in P(\gamma, \theta, \alpha, b, c, d)$ avec $\alpha(z_1) > b$.

Soit $H_1 : [0, 1] \times \overline{U} \to X$ définie par :

$$H_1(t, x) = tz_1 + (1 - t)Fx.$$

On a donc les assertions suivantes :

- $H_1 : [0, 1] \times \overline{U} \to X$ est un opérateur complètement continu.
- $H_1(t, x) \neq x$ pour tout $(t, x) \in [0, 1] \times \partial U$.

Supposons par, l'absurde qu'il existe $(t_1, x_1) \in [0, 1] \times \partial U$ tels que

$$H_1(t_1, x_1) = x_1.$$

$1^{\mathbf{er}}$**cas :** $\theta(Fx_1) > c$ :

D'après la condition (ii), on aura $\alpha(Fx) > b$ ; d'où

$$\alpha(x_1) = \alpha(t_1 z_1 + (1 - t_1)Fx_1) \geq t_1\alpha(z_1) + (1 - t_1)\alpha(Fx_1) > b;$$

ceci contredit le fait que $x_1 \in \partial U$ qui implique $\alpha(x_1) = b$.

$2^{\text{ème}}$**cas :** $\theta(Fx_1) \leq c$

Par définition, nous avons $x_1 \in P(\gamma, \theta, \alpha, b, c, d)$ puisque $\alpha(x_1) = b$ et

$$\theta(x_1) = \theta(t_1 z_1 + (1 - t_1)Fx_1) \leq t_1\theta(z_1) + (1 - t_1)\theta(Fx_1) \leq c.$$

Par conséquent, $\alpha(Fx) > b$ ; d'après la condition (i), ce qui est la même contradiction trouvée dans le cas précédent.

Les propriétés de l'invariance homotopique et de la normalisation de l'indice du point fixe, entraînent que :

$$i\,(F, U, X) = i\,(z_1, U, X) = 1.$$

**(d)** Soit $H_2 : [0, 1] \times \overline{V} \to X$ définie par $H_2(t, x) = tFx$. Alors, on a les assertions suivantes :

• $H_2 : [0, 1] \times \overline{V} \to X$ est un opérateur complètement continu.

• $H_2(t, x) \neq x$ pour tout $(t, x) \in [0, 1] \times \partial V$. Supposons par, l'absurde qu'il existe $(t_2, x_2) \in [0, 1] \times \partial V$ tels que

$$H_2(t_2, x_2) = x_2.$$

D'après la condition (iii), on aura $\psi(x_2) = \psi(t_2 F x_2) \leq t_2 \psi(Fx_2) < a$, ce qui contredit le fait que $\psi(x_2) = a$. Puisque $0 \notin V$, les propriétés d'invariance homotopique et d'existence de l'indice du point fixe entraînent que :

$$i\,(F, V, X) = i\,(0, V, X) = 0.$$

D'autre part, on a $F$ envoie $X$ donc $X$ où $X$ est un sous ensemble non vide, fermé, borné, convexe d'un espace de Banach, ce qui entraîne d'après la preuve du théorème 0.3, que $i\,(F, X, X) = 1$. Par la propriété d'additivité de L'indice du point fixe, on obtient donc

$$i\,(F, X - \overline{V}, X) = i\,(F, X, X) - i\,(F, V, X) = 1,$$

$$i\,(F, V - \overline{U}, X) = i\,(F, V, X) - i\,(F, U, X) = -1.$$

Par conséquent, d'après la propriété d'existence de l'indice du point fixe, il existe trois points fixes de $F$; $x_1, x_2, x_3 \in \overline{P(\gamma, d)}$ tels que :

$$\gamma(x_i) \leq d, \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3; \quad \alpha(x_1) > b;$$

$$\psi(x_2) > a, \quad \text{avec} \quad \alpha(x_2) < b \quad \text{et} \quad \psi(x_3) < a.$$

### 0.5.4 Théorème des points fixes jumeaux (dû à Avery et Henderson [6])

Dans cette section, on utilise la théorie de l'indice du point fixe pour établir l'existence de points fixes jumeaux pour un opérateur complètement continu sur un cône dans un espace de Banach, on commence par donner les définitions suivantes : Soit $E$ un espace de Banach réel et $P \subset E$ un cône.

• La fonctionnelle $\psi : P \to \mathbb{R}$ est dit croissante si

$$\psi(x) \leq \psi(y), \quad \text{pour tout } x, y \in P \ \text{ avec } x \leq y.$$

• Soit $\gamma : P \to [0, \infty)$ une fonctionnelle continue positives.

**Théorème 0.22** *Soit $P$ un cône dans l'espace de Banach réel $E$. Soient $\alpha$ et $\gamma$ sont des fonctionnelle continues, positives, croissantes sur $P$ et soit $\theta$ une fonction continue, positive sur le cône $P$ avec $\theta(0) = 0$ tels que pour $d > 0$ et $M > 0$, on ait :*

$$\gamma(x) \leq \theta(x) \leq \alpha(x), \quad et \ \|x\| \leq M\gamma(x), \quad pour\ tout\ \ x \in \overline{P(\gamma, c)}.$$

*Supposons qu'il existe un opérateur complètement continu $F : \overline{P(\gamma, c)} \to P$ ainsi que des nombres $0 < a < b < c$ tels que :*

$$\theta(\lambda x) \leq \lambda\theta(x), \quad Pour\ tout\, 0 \leq \lambda \leq 1 \quad et \quad x \in \partial P(\theta, b)$$

**(i)** $\gamma(Fx) > c$, *pour* $x \in \partial P(\gamma, c)$.

**(ii)** $\theta(Fx) < b$, *pour* $x \in \partial P(\theta, b)$.

**(iii)** $P(\alpha, a) \neq \emptyset$, *et* $\alpha(Fx) > a$, *pour tout* $x \in \partial P(\gamma, a)$.

*Alors, $F$ admet au moins deux points fixes $x_1, x_2 \in \overline{P(\gamma, c)}$ tels que :*

$$\alpha(x_1) > a, \quad avec \ \ \theta(x_1) < b, \quad et \quad \theta(x_2) > b, \quad avec \ \ \gamma(x_2) < c.$$

**Démonstration** Soit

$$X = \overline{P(\gamma, c)}, \ \ U = P(\gamma, c), \ \ V = P(\theta, b), \ \ W = P(\alpha, a).$$

Alors, **(a)** $U, V$ et $W$ sont des sous-ensembles ouverts, bornés de $X$ car $\|x\| \leq M\gamma(x) \leq Mc$ pour tout $x \in \overline{P(\gamma, c)}$.

**(b)** $W \subset V \subset U$ car si $x \in W$, alors $\gamma(x) \leq \theta(x) \leq \alpha(x) < a < b < c$,

**(c)** Soit $H_1 : [0,1] \times \overline{V} \to X$ défini par $H_1(t,x) = tFx$. On a, alors les assertions suivantes :

• $H_1 : [0,1] \times \overline{V} \to X$ est un opérateur complètement continu.

• $H_1(t,x) \neq x$ pour tout $(t,x) \in [0,1] \times \partial V$. En effet, supposons par l'absurde qu'il existe $(t_0, x_0) \in [0,1] \times \partial V$ tel que $H_1(t_0, x_0) = x_0$. D'après la condition (ii), on aura

$$\theta(x_0) = \theta(t_0 F x_0) \leq t_0 \theta(F x_0) \leq \theta(F x_0) < b,$$

ce qui contredit le fait que $\theta(x_0) = b$. Puisque $0 \in V$ $[\theta(0) = 0]$ les propriétés de l'invariance homotopique et de la solution de l'indice du point fixe entraînent que :

$$i\,(F, V, X) = i\,(0, V, X) = 1.$$

**(d)** Puisque $U \neq \emptyset$, on peut choisir $z_0 \in P(\gamma, c)$. Soit $H_2 : [0,1] \times \overline{U} \to X$ défini par $H_2(t,x) = tz_0 + Fx$. On a donc les assertions suivantes :

• , $H_2 : [0,1] \times \overline{U} \to X$ est un opérateur complètement continu.

• $H_2(t,x) \neq x$ pour tout $(t,x) \in [0,1] \times \partial U$. Supposons, par l'absurde qu'il existe $(t_1, x_1) \in [0,1] \times \partial U$ tels que

$$H_2(t_1, x_1) = x_1.$$

D'après la condition (i) et la croissance de $\gamma$, on aura

$$\gamma(x_1) = \gamma(t_1 z_0 + F x_1) \geq \gamma(F x_1) > c;$$

d'où la contradiction.

• $i\,(F, U, X) = 0$. En effet, par l'absurde, supposons que $i\,(F, U, X) \neq 0$ ; la propriété de l'invariance homotopique de l'indice du point fixe entraîne que $i\,(z_0 + F, U, X) \neq 0$ et par la propriété de l'existence de L'indice du point fixe, il existe $x_2 \in U$ tel que $z_0 + F x_2 = x_2$. Par conséquent, $\gamma(x_2) = \gamma(z_0 + F x_2) \geq \gamma(z_0) > c$ ; d'où la contradiction.

**(e)** Finalement, on choisit $z_1 \in P(\alpha, a)$ et on définit la déformation homotopique $H_3 : [0,1] \times \overline{W} \to X$ par $H_3(t,x) = tz_1 + Fx$. De la même manière, nous obtenons que $i\,(F, W, X) = 0$ en utilisant le fait que la fonction $\alpha$ est croissante. Par la propriété d'additivité de L'indice du point fixe, on obtient :

$$i\left(F, V-\overline{W}, X\right)=i\left(F, V, X\right)-i\left(F, W, X\right)=1$$

$$i\left(F, U-\overline{V}, X\right)=i\left(F, U, X\right)-i\left(F, V, X\right)=-1.$$

Par conséquent, d'après la propriété de la solution de l'indice du point fixe, il existe deux points fixes de $F$; $x_1, x_2 \in \overline{P(\gamma, c)}$ tels que :

$$\alpha(x_1)>a, \quad \text{avec } \theta(x_1)<b, \quad \text{et} \quad \theta(x_2)>b, \quad \text{avec } \gamma(x_2)<c.$$

Le théorème est donc démontré.

## 0.6 Application à un problème aux limites du type Dirichlet

**Introduction**

Le théorème de point fixe de Krasnosel'skii sur les cônes a été souvent utilisé pour discuter l'existence des solutions positives à des problèmes aux limites de type :

$$(P) \quad \begin{cases} -u''=f(u), \ 0<t<1 \\ u(0)=u(1)=0. \end{cases}$$

où $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$. Sous certaines hypothèses sur $f$, Avery [3] a montré l'existence d'au moins trois solutions positives au problème (P) et ce en appliquant le théorème des points fixes multiple de Leggett-Williams [22]. Henderson et Thompson [16] ont amélioré ce résultat en utilisant la symétrie de la fonction de Green associée au problème $(P)$. Dans [5], Avery et Henderson ont amélioré aussi les résultats d'Avery en appliquant le théorème de point fixe des cinq fonctionnelles [4].

**I- Applications du théorème de Krasnosel'skii**

Considérons le problème aux limites du second ordre (P) avec $f(0)=0$, donc $u=0$ est une solution triviale du poblème $(P)$. Nous allons prouver l'existence de solutions non triviales en supposant que $f$ vérifie :

$$0 \leq \lim sup_{u\to 0^+}\frac{f(u)}{u}<8 \text{ et } \frac{128}{3}<\lim inf_{u\to\infty}\frac{f(u)}{u} \leq \infty.$$

Notons que la condition précédente est vérifiée pour $f(u) = u^\gamma$, $\gamma > 1$. Alors, le problème $(P)$ admet au moins une solution $u \in C^2([0,1])$ telle que $u(t) > 0$ dans $(0,1)$.

• Le problème $(P)$ est équivalent à l'équation intégrale :

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s) f(u(s))\, ds$$

où la fonction de Green $G$ est donné par

$$G(t,s) = \begin{cases} t(1-s), \ 0 \le t \le s \le 1 \\ s(1-t), \ 0 \le s \le t \le 1. \end{cases}$$

On définit donc un opérateur $A$ par

$$(Au)(t) := \int_0^1 G(t,s) f(u(s))\, ds.$$

• L'opérateur $A : C([0,1]) \to C([0,1])$ est complètement continu, d'après le lemme d'Ascoli-Arzela. Considérons l'ensemble

$$K := \{u \in C[0,1] : \ u(t) \ge 0 \text{ dans } [0,1]\}$$

$$K_1 := \{u \in K : \min_{[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]} u(t) \ge \frac{1}{4}\|u\|\}.$$

Les ensembles $K$ et $K_1$ sont deux cônes de $C([0,1])$.

• $A : K \to K_1$. En effet, utilisons les propriétés de la fonction de Green :

1. $G(t,s) \le s(1-s), \ \forall\, t \in [0,1]$.
2. $G(t,s) \ge \frac{1}{4} s(1-s), \ \forall\, \frac{1}{4} \le t \le \frac{3}{4}$
3. $\int_0^1 G(t,s) = \frac{t(1-t)}{2} \le \frac{1}{8}$

Alors pour tout $u \in K$, on a les estimations suivantes :

$$\|Au\| = \max_{0\le t\le 1} |(Au)(t)| = \max_{0\le t\le 1} \int_0^1 G(t,s) f(u(s))\, ds \le \int_0^1 s(1-s) f(u(s))\, ds.$$

$$\min_{\frac{1}{4}\le t\le \frac{3}{4}} (Au)(t) = \min_{\frac{1}{4}\le t\le \frac{3}{4}} \int_0^1 G(t,s) f(u(s))\, ds \ge \frac{1}{4} \int_0^1 s(1-s) f(u(s))\, ds \ge \frac{1}{4}\|Au\|.$$

Nous pouvons donc conclure que $A(K) \subset K_1$.

• Comme, $0 \leq \lim sup_{u\to 0^+} \frac{f(u)}{u} < 8$, on peut choisir $r > 0$ tel que

$$0 \leq f(u) \leq 8u,\ 0 \leq u \leq r.$$

Montrons que $\|Au\| \leq \|u\|$ pour tout $u \in \partial K_r$. Soit $u \in K_1$ avec $\|u\| = r$. Alors,

$$\begin{aligned}|(Au)(t)| &= \int_0^1 G(t,s)f(u(s))\,ds \leq 8\int_0^1 G(t,s)u(s)\,ds \leq 8\|u\|\int_0^1 G(t,s)\,ds \\ &\leq 8\|u\|t(1-t) \leq 8\|u\|\frac{1}{8} = \|u\|\cdot\end{aligned}$$

On obtient donc $(Au)(t) \leq \|u\|,\ \forall\, t \in [0,1]$ pour $\|u\| = r$, soit $\|Au\| \leq \|u\|,\ \forall\, u \in K$ tel que $\|u\| = r$.

• Puisque $\frac{128}{3} < \lim inf_{u\to\infty} \frac{f(u)}{u} \leq \infty$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$f(u) \geq \frac{128}{3}u, \quad \text{si } u \geq \eta.$$

Soit $R = \max\{2r, 4\eta\}$. Si $u \in K$ et $\|u\| = R$, on a $\min\limits_{[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]} u(t) \geq \frac{1}{4}R \geq \eta$. Donc,

$$f(u(t)) \geq \frac{128}{3}u(t), \quad \text{pour } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{3}{4}.$$

Montrons que $\|Au\| \geq \|u\|$ pour tout $u \in K_1$ avec $\|u\| = R$. Soit $u \in K_1$ avec $\|u\| = R$. Alors

$$\begin{aligned}|(Au)(\frac{1}{2})| &= \int_0^1 G(\frac{1}{2},s)f(u(s))\,ds \geq \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G(\frac{1}{2},s)f(u(s))\,ds \geq \frac{128}{3}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G(\frac{1}{2},s)u(s)\,ds \\ &\geq \frac{128}{3}\frac{1}{4}\|u\|\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G(\frac{1}{2},s)\,ds = \frac{32}{3}R\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G(\frac{1}{2},s)\,ds.\end{aligned}$$

Ce choix de la constante $R$ donne alors le résultat escompté. Par conséquent, le théorème 0.10 entraîne que $i\,(A, (U_R \backslash \overline{U_r}) \cap K_1, K_1) \neq 0$, où $U_r = \{x \in K :\ \|u\| < r\}$, i.e. l'opérateur $A$ admet au moins un point fixe dans $K_1 \cap \{x \in K : r < x < R\}$. Ceci nous permet de dire que le problème $(P)$ admet au moins une solution $u \in C^2([0,1])$ avec $u(t) > 0$ dans $(0,1)$. Ce résultat peut être légèrement amélioré en remplaçant $\frac{128}{3} \approx 42.66$ par $24\sqrt{3} \approx 41.569$. Cela peut être fait en considérant les cônes de la forme : $K_\epsilon = \{u \in K :\ \min\limits_{[\frac{1}{2}-\epsilon,\frac{1}{2}+\epsilon]} u(t) \geq \cdots \|u\|\}$.

**Remarque 0.14** *Le dernier exemple était au cas d'expansion d'un cône du type norme, nous pouvons considérer aussi un exemple au cas de compression d'un cône donne le même résultat. Supposons qu'une fonction* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *satisfait :*

**(i)** $\lim inf_{u\to 0^+} \frac{f(u)}{u} > \frac{128}{3}$

**(ii)** $0 \leq \lim sup_{x\to\infty} \frac{f(u)}{u} < 4$. *Alors, le problème* $(P)$ *admet au moins une solution* $u \in C^2([0,1])$ *telle que* $u(t) > 0$ *dans* $(0,1)$.

**Démonstration**

• Par la condition (i), nous choisissons $r > 0$ assez petit tel que :

$$f(u) \geq \frac{128}{3}u, \ \ 0 \leq u \leq r.$$

Si $u \in K_1$ et $\|u\| = r$, alors

$$\min_{[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]} u(t) \geq \frac{1}{4}\|u\| \quad \text{et} \quad f(u(t)) \geq \frac{128}{3}u(t) \geq \frac{32}{3}\|u\|, \ \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{3}{4}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} |(Au)(\frac{1}{2})| &= \int_0^1 G(\frac{1}{2},s)f(u(s))\,ds \geq \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G(\frac{1}{2},s)f(u(s))\,ds \\ &= \frac{32}{3}\|u\| \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G(\frac{1}{2},s)\,ds = \|u\|. \end{aligned}$$

Donc, $\|Au\| \geq \|u\|$ pour $u \in K_1$ et $\|u\| = r$ ; d'où $i\,(A, U_r \cap K_1, K_1) = 0$.

• Par la condition (ii), pour $\epsilon > 0$ donné, il existe $\eta = \eta(\epsilon)$ tel que

$$f(u) \leq (4-\epsilon)u, \quad \text{si } u \geq \eta.$$

Soit $M = \max_{0\leq u\leq \eta} f(u)$, $M = M(\epsilon)$. Choisissons $R > \eta$ tel que $R \geq \frac{M}{\epsilon}$. Alors pour $u \in K_1$ et $\|u\| = R$, on aura

$$\begin{aligned} |(Au)(t)| &= \int_0^1 G(t,s)f(u(s))\,ds \\ &= \int_{E_1} G(t,s)f(u(s))\,ds + \int_{E_2} G(t,s)f(u(s))\,ds, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} E_1 &= \{t \in [0,1] : \ u(t) \leq \eta\} \\ E_2 &= \{t \in [0,1] : \ u(t) > \eta\}. \end{aligned}$$

Notons que sur $E_1$, $f(u(t)) \leq M$ et sur $E_2$, $f(u(t)) \leq (4-\epsilon)u(t)$ d'où

$$\begin{aligned} (Au)(t) &\leq M \int_{E_1} G(t,s)\,ds + (4-\epsilon) \int_{E_2} G(t,s)u(t)\,ds \\ &\leq M \int_0^1 G(t,s)\,ds + (4-\epsilon)\|u\| \int_0^1 G(t,s)\,ds \\ &\leq \frac{M}{4} + \frac{(4-\epsilon)\|u\|}{4} \leq \frac{R\epsilon}{4} + \frac{(4-\epsilon)R}{4} = R. \end{aligned}$$

Le résultat demandé est donc démontré.

**II- Application du théorème des points fixes multiples de Leggett-Williams**

On considère le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -y'' = f(y(t)), \ \ 0 \leq t \leq 1; \\ y(0) = 0 = y(1). \end{cases} \tag{9}$$

• On applique, le théorème 0.17 de Leggett-Williams pour obtenir trois solutions strictement positives et symétriques au problème (9). Écrivons le problème (9) sous forme d'équation intégrale :

$$y(t) = \int_0^1 G(t,s) f(t,y)\,ds$$

où $G(t,s)$ est la fonction de Green associée au problème

$$\begin{cases} -y'' = 0, \ \ 0 \leq t \leq 1; \\ y(0) = 0 = y(1). \end{cases}$$

On va utiliser les propriétés de la fonction $G$ suivantes :

$$0 < G(t,s) \leq G(s,s) = s(1-s), \ \ 0 < t,s < 1, \tag{10}$$

$$G(t,s) \geq \frac{1}{4}G(s,s) = \frac{1}{4}s(1-s), \ \ \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{3}{4}, \ 0 \leq s \leq 1, \tag{11}$$

$$\max_{0\leq t\leq 1} \int_0^1 G(t,s)\,ds = \frac{1}{8}, \tag{12}$$

$$\min_{\frac14 \leq t \leq \frac34} \int_{\frac14}^{\frac34} G(t,s)\,ds = \int_{\frac14}^{\frac34} G(\frac{1}{4},s)\,ds = \frac{1}{16}, \tag{13}$$

$$\min_{0\leq t\leq 1} \frac{G(\frac14, r)}{G(\frac12, r)} = \frac{1}{2}. \tag{14}$$

Soit $X = C([0,1])$ l'espace de Banach muni de la norme du sup et $K \subset X$ le cône défini par $K = \{y \in K : y$ est positive, concave et symétrique sur $[0,1]\}$. Finalement, on définit la fonctionnelle continue, concave $\alpha : K \to [0,\infty)$ par :

$$\alpha(x) = \min_{\frac{1}{4} \le t \le \frac{3}{4}} y(t), \quad y \in K.$$

Notons que

$$\alpha(x) = y(\frac{1}{4}) \le y(\frac{1}{2}) = \|y\| \ \ \forall\, y \in K. \tag{15}$$

De même $y$, est une solution du problème (9) si et seulement si

$$y(t) = \int_0^1 G(t,s) f(y(s))\, ds, \quad 0 \le t \le 1.$$

Nous présentons, dans le théorème suivant, certaines hypothèses de croissance que doit vérifier la nonlinéarité $f$.

**Théorème 0.23** *Soit* $0 < a < b < \frac{c}{2}$ *et supposons que* $f$ *vérifie :*

**(i)** $f(w) < 8a$, *pour* $0 \le w \le a$,

**(ii)** $f(w) \ge 16b$, *pour* $b \le w \le 2b$,

**(iii** $f(w) \le 8c$, *pour* $0 \le w \le c$.

*Alors, le problème aux limites* (9) *admet trois solutions positives, symétriques* $y_1, y_2$ *et* $y_3$ *satisfaisant* $\|y_1\| < a$, $\alpha(y_2) > b$ *et* $\|y_3\| > a$ *avec* $\alpha(y_3) < b$.

**Démonstration**

Commençons par définir l'opérateur complètement continu $A : X \to X$ par :

$$(Ay)(t) = \int_0^1 G(t,s) f(y(s))\, ds.$$

Remarquons que $y$ est une solution de problème (9) si et seulement si $y$ est un point fixe de l'opérateur $A$. Notons d'abord que si $y \in K$, alors par les propriétés de la fonction $G(t,s)$, on a : $Ay(t) \ge 0, (Ay)''(t) = -f(y(t)) \le 0$, $0 \le t \le 1$ et $Ay(t) = Ay(1-t), 0 \le t \le \frac{1}{2}$

Par conséquent, $Ay \in K$ ; donc $A$ envoie $K$ dons $K$. Montrons maintenant que les conditions du théorème 0.17 sont satisfaites.

1. D'après l'estimation (15), nous avons $\alpha(y) \leq \|y\|$, pour tout $y \in K$.

2. Soit $y \in K_c$, alors $\|y\| \leq c$ et l'hypothèse (iii) entraîne que $f(y(s)) \leq 8c,\ 0 \leq s \leq 1$. D'après (1.12), on aura

$$\begin{aligned} \|Ay\| &= \max_{0\leq t\leq 1} \int_0^1 G(t,s) f(u(s))\, ds \\ &\leq \int_0^1 G(t,s) 8c\, ds = c. \end{aligned}$$

   Donc l'opérateur $A$ envoie $\overline{K_c}$ dans $\overline{K_c}$.

3. Soit $y \in \overline{K_a}$, alors l'hypothèse (i) entraîne que $f(y(s)) \leq 8a,\ 0 \leq s \leq 1$. Nous déduisons comme dans la discussion ci-dessus que $A$ envoie $\overline{K_a}$ dans $\overline{K_a}$. La condition (2) du théorème 0.17 est donc satisfaite.

4. On a $x(t) = 2b,\ 0 \leq t \leq 1$ un élément de $K(\alpha, b, 2b)$ et $\alpha(x) = \alpha(2b) > b$, donc $\{y \in K(\alpha, b, 2b) :\ \alpha(x) > b\} \neq \emptyset$. De plus, si on choisit $y \in K(\alpha, b, 2b)$, alors $\alpha(y) = y(\frac{1}{4}) \geq b$ et donc, $b \leq y(s) \leq 2b,\ \ \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{3}{4}$. L'hypothèse (ii) entraîne que $f(y(s)) \geq 16b,\ \forall\, y \in K(\alpha, b, 2b)$ et $\frac{1}{4} \leq s \leq \frac{3}{4}\cdot$ Par conséquent, d'après (1.13), on a

$$\begin{aligned} \alpha(Ay) &= \min_{\frac{1}{4}\leq t\leq \frac{3}{4}} Ay(t) \\ &= \int_0^1 G(\frac{1}{4}, s) f(u(s))\, ds \\ &> \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G(\frac{1}{4}, s) f(u(s))\, ds \\ &> \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G(\frac{1}{4}, s) 16b\, ds = b. \end{aligned}$$

   La condition (1) du théorème 0.17 est donc satisfaite.

5. Finalement, montrons que la condition (3) du théorème 0.17 est satisfaite, i.e si $y \in K(\alpha, b, c)$ et $\|Ay\| > 2b$, alors $\alpha(Ay) > b$.

Soit $y \in K(\alpha, b, c)$ tel que $\|Ay\| > 2b$. D'après (1.14), on aura

$$\begin{aligned}
\alpha(Ay) &= Ay(\frac{1}{4}) \\
&= \int_0^1 G(\frac{1}{4}, s) f(u(s))\, ds \\
&= \int_0^1 \frac{G(\frac{1}{4}, s)}{G(\frac{1}{2}, s)} G(\frac{1}{2}, s) f(y(s))\, ds \\
&\geq \min_{0\leq r\leq 1} \frac{G(\frac{1}{4}, r)}{G(\frac{1}{2}, r)} \int_0^1 G(\frac{1}{2}, s) f(u(s))\, ds \\
&= \frac{1}{2} Ay(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\|Ay\| > b.
\end{aligned}$$

La condition (3) du théorème 0.17 est donc satisfaite.

Le théorème 0.17 dû à Leggett-Williams, assure au problème (9) l'existence de trois solutions strictement positives.

**III- Application du théorème des points fixes de cinq fonctionnelles**

• Appliquons le théorème 0.20 d'Avery pour obtenir trois solutions positives et symétriques au problème (9). Dans l'application suivante, Avery-Herderson [5] ont utilisé les propriétés de $G(t, s)$ suivantes :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 G(t, s)\, ds &= \frac{t(1-t)}{2}, \quad 0 \leq t \leq 1, &(16)\\
\int_0^{\frac{1}{r}} G(\frac{1}{2}, s)\, ds = \int_{1-\frac{1}{r}}^1 G(\frac{1}{2}, s)\, ds &= \frac{1}{4r^2}, \qquad 2 \leq r, &(17)\\
\int_{\frac{1}{r}}^{\frac{1}{2}} G(\frac{1}{2}, s)\, ds = \int_{\frac{1}{2}}^{1-\frac{1}{r}} G(\frac{1}{2}, s)\, ds &= \frac{r^2-4}{16r^2}, \qquad 2 \leq r, &(18)\\
\int_{t_1}^{t_2} G(t_1, s)\, ds + \int_{1-t_2}^{1-t_1} G(t_1, s)\, ds &= t_1(t_2 - t_1), \quad 0 < t_1 < t_2 \leq \frac{1}{2}, &(19)\\
\max_{0\leq r\leq 1} \frac{G(\frac{1}{2}, r)}{G(t, r)} &= \frac{1}{2t}, \qquad 0 < t \leq \frac{1}{2}, &(20)\\
\min_{0\leq r\leq 1} \frac{G(t_1, r)}{G(t_2, r)} &= \frac{t_1}{t_2}, \qquad 0 < t_1 < t_2 \leq \frac{1}{2}. &(21)
\end{aligned}$$

Ensuite, pour $0 < t_3 \leq \frac{1}{2}$, soit $E = C([0,1])$ l'espace de Banach muni de la norme du max, $\|y\| = \max_{0\leq t\leq 1} |y(t)|$ et définissons le cône $P \subset E$ par :

$$\begin{aligned}
P = \{y \in E : y(t) \geq 0,\ y(t) = y(1-t),\ y \text{ est concave pour tout } t \in [0,1] \\
\text{et} \min_{t\in[t_3, 1-t_3]} y(t) \geq 2t_3\|y\|\}.
\end{aligned}$$

Finalement, on définit les fonctions positives, continues, concaves $\alpha, \psi$ et les fonctions positives, continues, convexes $\gamma, \beta, \theta$ sur $P$ par :

$$\begin{aligned}
\gamma(y) &= \max_{t\in[0,t_3]\cup[1-t_3,1]} y(t) = y(t_3),\\
\psi(y) &= \min_{t\in[\frac{1}{r},1-\frac{1}{r}]} y(t) = y(\frac{1}{r}),\\
\beta(y) &= \max_{t\in[\frac{1}{r},1-\frac{1}{r}]} y(t) = y(\frac{1}{2}),\\
\alpha(y) &= \min_{t\in[t_1,t_2]\cup[1-t_2,1-t_1]} y(t) = y(t_1),\\
\theta(y) &= \max_{t\in[t_1,t_2]\cup[1-t_2,1-t_1]} y(t) = y(t_2).
\end{aligned}$$

$t_1, t_2$ and $r$ étant des nombres positifs tels que :

$$0 < t_1 < t_2 \leq \frac{1}{2} \text{ et } \frac{1}{r} \leq t_2.$$

Nous observons que pour tout $y \in P$, on a

$$\alpha(x) = y(t_1) \leq y(\frac{1}{2}) = \beta(y), \tag{22}$$

$$\|y\| = y(\frac{1}{2}) \leq \frac{1}{2t_3} y(t_3) = \frac{1}{2t_3}\gamma(y). \tag{23}$$

De plus, $y$ est une solution du problème (9) si et seulement si

$$y(t) = \int_0^1 G(t,s) f(y(s))\, ds, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Nous donnons maintenant un autre résultat d'existence

**Théorème 0.24** *Supposons qu'il existe des nombres positives $a, b$ et $c$ tels que $0 < a < b < \frac{ct_1}{t_2}$ et supposons que $f$ vérifie les conditions suivantes :*

**(i)** $f(w) < (\frac{8r^2}{r^2-4})(a - (\frac{c}{r^2 t_3(1-t_3)}))$, *pour* $w \in [\frac{2a}{r}, a]$,

**(ii)** $f(w) \geq \frac{b}{t_1(t_2-t_1)}$, *pour* $w \in [b, \frac{bt_2}{t_1}]$,

**(iii)** $f(w) \leq \frac{2c}{t_3(1-t_3)}$, *pour* $w \in [0, \frac{c}{2t_3}]$.

*Alors, le problème aux limites* (9) *admet trois solutions positives, symétriques $y_1, y_2$ et $y_3$ vérifiant :*

$$\max_{t\in[0,t_3]\cup[1-t_3,1]} y_i(t) \leq c, \quad \textit{pour } i = 1, 2, 3;$$

$$\min_{t\in[t_1,t_2]\cup[1-t_2,1-t_1]} y_1(t) > b;$$

$$\max_{t\in[\frac{1}{r},1-\frac{1}{r}]} y_2(t) < a;$$

$$\min_{t\in[t_1,t_2]\cup[1-t_2,1-t_1]} y_3(t) < b, \quad avec \quad \max_{t\in[\frac{1}{r},1-\frac{1}{r}]} y_3(t) > a.$$

**Démonstration**

On définit l'opérateur complètement continu $A$ par :

$$(Ay)(t) = \int_0^1 G(t,s)f(y(s))\,ds.$$

Remarquons que $y$ est une solution du problème (9) si et seulement si $y$ est un point fixe de l'opérateur $A$. Notons, d'abord que si $y \in P$, alors par les propriétés de la fonction $G(t,s)$ on a, en utilisant (1.20) : $Ay(t) \geq 0, (Ay)''(t) = -f(y(t)) \leq 0$, $0 \leq t \leq 1$ et $Ay(t) = Ay(1-t)$, $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ et $A(y(t_3)) \geq 2t_3 A(y\frac{1}{2})$. Par conséquent, $Ay \in P$ ; donc $A$ envoie $P$ dans $P$. De plus, pour tout $y \in P$, on a

$$\alpha(y) \leq \beta(y), \quad \text{et } \|y\| \leq \frac{1}{2t_3}\gamma(y).$$

Si $y \in \overline{P(\gamma,c)}$, alors $\|y\| \leq \frac{1}{2t_3}\gamma(y) \leq \frac{c}{2t_3}$ et d'après l'hypothèse (iii), on aura

$$\begin{aligned}
\gamma(Ay) &= \max_{t\in[0,t_3]\cup[1-t_3,1]} \int_0^1 G(t,s)f(u(s))\,ds \\
&= \int_0^1 G(t_3,s)f(u(s))\,ds \\
&\leq \frac{2c}{t_3(1-t_3)} \int_0^1 G(t_3,s)\,ds = c.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $A$ envoie $\overline{P(\gamma,c)}$ dans lui même. De plus, on a

$$\{y \in P(\gamma,\theta,\alpha,b,\frac{bt_2}{t_1},c) :\ \alpha(y) > b\} \neq \emptyset \text{ et } \{y \in Q(\gamma,\beta,\psi,\frac{2a}{r},a,c) :\ \beta(y) < a\} \neq \emptyset$$

Maintenant, nous montrons que les conditions du théorème 0.20 sont satisfaites.

1. Si $y \in Q(\gamma, \beta, a, c)$ avec $\psi(Ax) < \frac{2a}{r}$, alors $\beta(Ay) < a$. En effet

$$\begin{aligned}
\beta(Ay) &= \max_{t \in [\frac{1}{r}, 1-\frac{1}{r}]} \int_0^1 G(t,s) f(y(s))\, ds) \\
&= \int_0^1 G(\frac{1}{2}, s) f(y(s))\, ds \\
&\leq \int_0^1 \frac{G(\frac{1}{2}, s)}{G(\frac{1}{r}, s)} G(\frac{1}{r}, s) f(y(s))\, ds \\
&\leq \frac{r}{2} \int_0^1 G(\frac{1}{r}, s) f(y(s))\, ds \\
&= \frac{r}{2} \psi(Ay) < a.
\end{aligned}$$

La condition (iv) du théorème 0.20 est donc vérifiée.

2. Si $y \in Q(\gamma, \beta, \psi, \frac{2a}{r}, a, c)$, alors $\beta(Ay) < a$. En effet

$$\begin{aligned}
\beta(Ay) &= \max_{t \in [\frac{1}{r}, 1-\frac{1}{r}]} \int_0^1 G(t,s) f(y(s))\, ds) \\
&= \int_0^1 G(\frac{1}{2}, s) f(y(s))\, ds \\
&= 2 \int_0^{\frac{1}{r}} G(\frac{1}{2}, s) f(y(s))\, ds + 2 \int_{\frac{1}{r}}^{\frac{1}{2}} G(\frac{1}{2}, s) f(y(s))\, ds \\
&< \frac{c}{r^2 t_3 (1-t_3)} + \left( \frac{8r^2}{r^2-4} \right) \left( a - \frac{c}{r^2 t_3 (1-t_3)} \right) \left( \frac{r^2-4}{8r^2} \right) = a.
\end{aligned}$$

La condition (ii) du théorème 0.20 est donc vérifiée.

3. Si $y \in P(\gamma, \alpha, b, c)$ avec $\theta(Ay) > \frac{bt_2}{t_1}$, alors $\alpha(Ay) > b$. En effet

$$\begin{aligned}
\alpha(Ay) &= \min_{t \in [t_1, t_2] \cup [1-t_2, 1-t_1]} \int_0^1 G(t,s) f(y(s))\, ds) \\
&= \int_0^1 G(t_1, s) f(y(s))\, ds \\
&= \int_0^1 \frac{G(t_1, s)}{G(t_2, s)} G(t_2, s) f(y(s))\, ds \\
&\geq \frac{t_1}{t_2} \int_0^1 G(t_2, s) f(y(s))\, ds \\
&= \frac{t_1}{t_2} \theta(Ay) > b.
\end{aligned}$$

La condition (iii) du théorème 0.20 est donc vérifiée.

4. Si $y \in P(\gamma, \theta, \alpha, b, \frac{bt_2}{t_1}, c)$, alors $\alpha(Ay) > b$. En effet

$$\begin{aligned}
\alpha(Ay) &= \min_{t\in[t_1,t_2]\cup[1-t_2,1-t_1]} \int_0^1 G(t,s)f(y(s))\,ds) \\
&= \int_0^1 G(t_1,s)f(y(s))\,ds \\
&> \int_{t_1}^{t_2} G(t_1,s)f(y(s))\,ds + \int_{1-t_2}^{1-t_1} G(t_1,s)f(y(s))\,ds \\
&\geq \frac{b}{t_1(t_2-t_1)} \int_{t_1}^{t_2} G(t_1,s)\,ds + \frac{b}{t_1(t_2-t_1)} \int_{1-t_2}^{1-t_1} G(t_1,s)\,ds \\
&= \left(\frac{b}{t_1(t_2-t_1)}\right)\left(\frac{t_1[(1-t_1)^2-(1-t_2)^2]}{2}\right) + \left(\frac{b}{t_1(t_2-t_1)}\right)\left(\frac{t_1(t_2^2-t_1^2)}{2}\right) \\
&= b.
\end{aligned}$$

La condition (i) du théorème 0.20 est donc vérifiée.

La 1 ère généralisation du théorème de point fixe de Leggett-Williams (le théorème0.20) fournit au problème (9) trois solutions positives $y_1, y_2, y_3 \in \overline{P(\gamma, c)}$ telles que :

$$\alpha(y_1) > b, \quad \beta(y_2) < a$$

$$\alpha(y_3) < b \text{ avec } \beta(y_3) > a.$$

**VI- Application du théorème de points fixes multiples de Leggett-Williams au problème à nonlinéarité $f$ dépendant de la dérivée**

Dans l'application suivante, nous nous intéréssons à l'existence des solutions positives du problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -u'' = f(u,u'), & 0 \leq t \leq 1; \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{24}$$

Avec la fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ est continue. Plusieurs auteurs [13], [24], [25] ont étudié les équations $-u'' = f(t,u)$ et $-u'' = g(t)f(u)$, mais dans touts leurs travaux le terme non linéaire $f$ ne dépend pas de $u'$, autrement le problème aux limites relatif est plus compliqué. Sous certaines hypothèses sur $f$, F. Li et Y. Zhang [26] en appliquant le théorème 0.17 de Leggett-Williams ont obtenu trois solutions positives et symétriques du problème (24). Écrivons ce problème sous forme d'équation intégrale :

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s) f(u(s), u'(s))\, ds, \quad \forall\, t \in [0,1],$$

où la fonction de Green $G(t,s)$ est encore définie comme suit :

$$G(t,s) = \begin{cases} t(1-s), \ 0 \le t \le s \le 1, \\ s(1-t), \ 0 \le s \le t \le 1. \end{cases}$$

Soit $E = C^1([0,1])$ l'espace de Banach muni de la norme du maximum,

$$\max\{\max_{0\le t\le 1} |u(t)|, \max_{0\le t\le 1} |u'(t)|\}.$$

On définit l'opérateur $T : E \to E$ par

$$(Tu)(t) = \int_0^1 G(t,s) f(u(s), u'(s))\, ds.$$

Donc, $u$ est une solution du problème (24) si et seulement si $u$ est un point fixe de l'opérateur $T$. On commence tout d'abord par les lemmes suivants :

**Lemme 0.11** *$D \subset E$ est relativement compacte si et seulement si $D$ est uniformément borné dans $\mathcal{C}^1$ et équi-continues sur* $[0,1]$.

**Démonstration**
Pour démontrer ce lemme, on applique le lemme d'Arzela-Ascoli.

**Lemme 0.12** *L'opérateur $T$ est complètement continu.*

**Démonstration**
On sait que $\frac{\partial}{\partial x}[\int_{x_0}^x f(x,y)dy] = f(x,x) + \int_{x_0}^x \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy$. Donc

$$\begin{aligned} (Tu)'(t) &= -\int_0^t s f(u(s), u'(s))\, ds + \int_t^1 (1-s) f(u(s), u'(s))\, ds \\ &= \int_t^1 f(u(s), u'(s))\, ds - \int_0^1 s f(u(s), u'(s))\, ds, \quad \forall\, t \in [0,1], \ \forall\, x \in E. \end{aligned}$$

Si $D \subset E$ est borné, $Tu$ et $(Tu)'$ sont uniformément bornées et équicontinues sur $[0,1]$, $\forall\, u \in D$. Le lemme 0.11 entraîne que l'opérateur $T$ est complètement continu.
Définissons dans $E$ le cône $P$ par :

$$P = \{u \in P : u \text{ est concave, symétrique pour } \tfrac{1}{2} \text{ et positive sur } [0,1]\}.$$

Enfin, on définit la fonctionnelle positive, continue, concave $\alpha : P \to [0, \infty)$ par :

$$\alpha(u) = \min_{\eta \leq t \leq 1-\eta} u(t),\ u \in P\, \forall\, u \in P,$$

où la constante $\eta \in (0, \frac{1}{2})$.

**Lemme 0.13** *Si la fonction $u \in P$, alors $u$ est croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$, mais $u'$ est décroissante sur $[0, \frac{1}{2}]$*

**Démonstration**

On a $u'' = -f(u(t), u'(t)) \leq 0,\ \ \forall\, t \in [0, 1]$, donc $u'$ est décroissante ; d'autre part, puisque $u$ est symétrique pour $t = \frac{1}{2}$, alors $u'(\frac{1}{2}) = 0$ ; ce qui entraîne que $u' \geq 0$ sur $[0, \frac{1}{2}]$, $u$ est croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$. Par l'utilisation du lemme (0.13), nous obtenons :

$$\alpha(u) = u(\eta) \leq \|u\|,\ \ \forall\, u \in P. \tag{25}$$

et

$$\|u\| = \max\{u(\frac{1}{2}), u'(0)\},\ \ \forall\, u \in P. \tag{26}$$

Nous présentons, dans le théorème suivant, certaines hypothèses de croissance que doit vérifier la nonlinéarité $f$.

**Théorème 0.25** *Soit $0 < a < b < \frac{c}{M}$, $M = \frac{1}{\eta(1-2\eta)}$ et $f$ vérifiant :*

**(H1)** $f(u, v) < 2a$, *pour tout* $0 \leq u \leq a,\ |v| \leq a$;

**(H2)** $f(u, v) \geq [\eta(\frac{1}{2} - \eta)]^{-1} b$, *pour tout* $b \leq u \leq Mb,\ |v| \leq Mb$ ;

**(H3)** $f(u, v) < 2c$, *pour tout* $0 \leq u \leq c,\ |v| \leq c$;

**(H4** $f(u, v) = f(u, -v)$, *pour tout* $0 \leq u \leq +\infty,\ -\infty < v \leq +\infty$;

**(H5)** $f(u_1, v_1) = f(u_2, v_2)$, *pour tout* $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq c,\ 0 \leq v_2 \leq v_1 \leq c$.

*Alors, le problème à conditions aux bords* (24) *admet trois solutions positives, symétriques $u_1, u_2$ et $u_3$ satisfont $\|u_1\| < a$, $\alpha(u_2) > b$ et $\|u_3\| > a$ avec $\alpha(u_3) < b$.*

**Démonstration**

Le lemme 0.13, implique que l'opérateur $T$ est complètement continu de $E$ dans $E$. De plus, pour tout $u \in P$, $Au(t) \geq 0$ et $(Tu)''(t) = -f(u(t), u'(t)) \leq 0$, pour $0 \leq t \leq 1$.

D'autre part, d'après l'hypothèse (H4), pour $0 \leq t \leq 1$ on a

$$\begin{aligned}
(Tu)(t) &= \int_0^1 G(t,s)f(u(s),u'(s))\,ds \\
&= (1-t)\int_0^t sf(u(s),u'(s))\,ds + t\int_t^1 (1-s)f(u(s),u'(s))\,ds \\
&= (1-t)\int_{1-t}^1 (1-\omega)f(u(1-\omega),u'(1-\omega))d\omega + t\int_0^{1-t} \omega f(u(1-\omega),u'(1-\omega))d\omega \\
&= (1-t)\int_{1-t}^1 (1-\omega)f(u(\omega),-u'(\omega))d\omega + t\int_0^{1-t} \omega f(u(\omega),-u'(\omega))d\omega \\
&= (1-t)\int_{1-t}^1 (1-\omega)f(u(\omega),u'(\omega))d\omega + t\int_0^{1-t} \omega f(u(\omega),u'(\omega))d\omega \\
&= (Tu)(1-t).
\end{aligned}$$

Par conséquent, $Tu \in P$ ; donc $T$ envoie $P$ dans $P$. Montrons, maintenant que les conditions du théorème 0.17 sont satisfaites. D'après l'estimation (25), nous avons $\alpha(u) \leq \|u\|$, $\forall\, u \in P$.

**1.** Montrons que $T(\overline{P}_c) \subset \overline{P_c}$ et $T(\overline{P_a}) \subset P_a$. En effet, pour tout $u \in P$, on a les égalités

$$\begin{aligned}
(Tu)(t) &= \int_0^1 G(t,s)f(u(s),u'(s))\,ds \\
&= (1-t)\int_0^t sf(u(s),u'(s))\,ds + t\int_t^1 (1-s)f(u(s),u'(s))\,ds \\
&= \int_0^t sf(u(s),u'(s))\,ds - t\int_0^1 sf(u(s),u'(s))\,ds + t\int_t^1 f(u(s),u'(s))\,ds \\
&= \int_0^t sf(u(s),u'(s))\,ds - t[\int_0^{\frac{1}{2}} sf(u(s),u'(s))\,ds + \int_{\frac{1}{2}}^1 sf(u(s),u'(s))\,ds] \\
&+ \; t\int_t^1 f(u(s),u'(s))\,ds \\
&= \int_0^t sf(u(s),u'(s))\,ds - t[\int_0^{\frac{1}{2}} sf(u(s),u'(s))\,ds \int_0^{\frac{1}{2}} (1-\omega)f(u(\omega),u'(\omega))d\omega] \\
&+ \; t\int_t^1 f(u(s),u'(s))\,ds \\
&= \int_0^t sf(u(s),u'(s))\,ds - t\int_0^{\frac{1}{2}} f(u(s),u'(s))\,ds + t\int_t^1 f(u(s),u'(s))\,ds \\
&= \int_0^t sf(u(s),u'(s))\,ds - t\int_{\frac{1}{2}}^1 f(u(s),u'(s))\,ds + t\int_t^1 f(u(s),u'(s))\,ds.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$(Tu)(t) = \int_0^t sf(u(s),u'(s))\,ds + t\int_t^{\frac{1}{2}} f(u(s),u'(s))\,ds, \quad \forall\, t \in [0,1]. \tag{27}$$

et

$$(Tu)'(t) = \int_t^{\frac{1}{2}} f(u(s),u'(s))\,ds, \quad \forall\, t \in [0,1]. \tag{28}$$

Ensuite, d'après l'hypothèse (H3), pour tout $u \in \overline{P_c}$, on a $f(u(s),u'(s)) \leq 2c, \forall\, 0 \leq t \leq 1$. Ceci entraîne d'après (26) que

$$\begin{aligned}
\|Tu\| &= \max\{\max_{0\leq t\leq 1}|(Tu)(t)|, \max_{0\leq t\leq 1}|(Tu')(t)|\} \\
&= \max\{(Tu)(\frac{1}{2}), (Tu)'(0)\} \\
&= \max\{\int_0^{\frac{1}{2}} sf(u(s),u'(s))\,ds, \int_0^{\frac{1}{2}} f(u(s),u'(s))\,ds\} \\
&\leq \int_0^{\frac{1}{2}} 2c\,ds = \ c.
\end{aligned}$$

Donc, $T(\overline{P_c}) \subset \overline{P_c}$. Par une discussion semblable, nous obtenons que $T(\overline{P_a}) \subset \overline{P_a}$.

**2.** Montrons que

$$\{u \in P(\alpha, b, Mb) :\ \alpha(u) > b\} \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \alpha(Tu) > b, \quad \text{pour } u \in P(\alpha, b, Mb).$$

En effet, notons que $v(t) = Mb$, $0 \leq t \leq 1$ est un élément de $P(\alpha, b, Mb)$ et $\alpha(v) = Mb > b$. De plus, si $u \in P(\alpha, b, Mb)$, alors $\alpha(u) > b$, $\|u\| \leq Mb$ et donc $b \leq u(t) \leq Mb$, $|u'(t)| \leq Mb$ pour tout $\eta \leq t \leq \frac{1}{2}$ Par conséquent, pour tout $u \in P(\alpha, b, Mb)$, l'hypothèse (H2) donne que $f(u(s),u'(s)) \geq [\eta(\frac{1}{2}-\eta)]^{-1}b$, $\eta \leq t \leq \frac{1}{2}\cdot$ Par suite, d'après (27), on aura

$$\begin{aligned}
\alpha(Tu) &= (Tu)(\eta) \\
&= \int_0^{\eta} sf(u(s),u'(s))\,ds + \eta\int_{\eta}^{\frac{1}{2}} f(u(s),u'(s))\,ds \\
&> \eta\int_{\eta}^{\frac{1}{2}} f(u(s),u'(s))\,ds \\
&\geq \eta\int_{\eta}^{\frac{1}{2}} [\eta(\frac{1}{2}-\eta)]^{-1}b\,ds = b
\end{aligned}$$

**3.** Montrons que, si $u \in P(\alpha, b, c)$ avec $\|Tu\| > Mb$, alors $\alpha(Tu) > b$. En effet, soit $u \in P(\alpha, b, c)$ tel que $\|Tu\| > Mb$ ; l'hypothèse (H5) donne donc $f(u(t), u'(t)) \geq f(u(\eta), u'(\eta)), \eta \leq t \leq \frac{1}{2}$ et $f(u(t), u'(t)) \leq f(u(\eta), u'(\eta)), 0 \leq t \leq \eta$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\alpha(Tu) &= (Tu)(\eta) \\
&= \int_0^\eta s f(u(s), u'(s))\, ds + \eta \int_\eta^{\frac{1}{2}} f(u(s), u'(s))\, ds \\
&\geq \eta \int_\eta^{\frac{1}{2}} f(u(s), u'(s))\, ds \\
&= \frac{1}{M}[\eta(1-2\eta)]^{-1} \eta \int_\eta^{\frac{1}{2}} f(u(s), u'(s))\, ds \\
&= \frac{1}{M}[\int_\eta^{\frac{1}{2}} f(u(s), u'(s))\, ds + \eta(\frac{1}{2} - \eta)^{-1} \int_\eta^{\frac{1}{2}} f(u(s), u'(s))\, ds] \\
&\geq \frac{1}{M}[\int_\eta^{\frac{1}{2}} f(u(s), u'(s))\, ds + \eta(\frac{1}{2} - \eta)^{-1} f(u(\eta), u'(\eta)) \int_\eta^{\frac{1}{2}} ds] \\
&\geq \frac{1}{M}[\int_\eta^{\frac{1}{2}} f(u(s), u'(s))\, ds + \int_0^\eta f(u(s), u'(s))\, ds] \\
&= \frac{1}{M} \max\{\int_0^{\frac{1}{2}} s f(u(s), u'(s))\, ds, \int_0^{\frac{1}{2}} f(u(s), u'(s))\, ds\} \\
&= \max\{|(Tu)(\frac{1}{2})|, |(Tu)'(0)|\} \\
&= \frac{1}{M}\|Tu\| > b.
\end{aligned}$$

Une application du théorème 0.17 de Leggett-Williams complète la preuve.

Dans ce qui suit, nous présentons un exemple où le théorème précédent peut être appliqué.

**Exemple 0.2** *Soit* $a = \frac{1}{17},\ b = 1,\ c = 525,\ \eta = \frac{1}{4},\ M = 8$ *et*

$$f(u, v) = \begin{cases} 16u^2 + \frac{1}{17(1+v^2)}, & 0 \leq u \leq 8,\ -\infty < v < +\infty; \\ \sqrt{u-8} + \frac{1}{17(1+v^2)} + 1024, & u > 8,\ -\infty < v < +\infty. \end{cases}$$

## 0.7 Application à un problème aux limites du type Neumann

Récemment, les problèmes aux limites du type Neumann ont été abordées par différentes méthodes. En particulier, Jiang et Liu [18] ont étudié l'existence de solution positive pour les équations du seconde ordre :

$$-u'' + Mu = f(t, u), \quad 0 < t < 1 \qquad (1)$$

$$u'' + Mu = f(t, u), \quad 0 < t < 1 \qquad (2)$$

associées aux conditions aux limites du type :

$$u'(0) = u'(1) = 0 \qquad (3)$$

avec une nonlinéarité $f$ soit sur-linéaire, soit sous-linéaire. En l'utilisation le théorème de point fixe sur les cônes de Krasnosel'skii (théorème 0.2), J.P. Sun et W.T. Li [28] ont montré l'existence d'au moins deux solution positives au problème $(1)-(3)$ ou $(2)-(3)$ sous des conditions plus faibles que dans [18]. Ensuite, J.P. Sun *et al* [29] ont amélioré les résultats de Sun et Li [28] en utilisant le théorème de Leggett-Williams (théorème (0.17)) pour obtenir trois solutions positives au problème $(1)-(2)$ ou $(1)-(3)$.

Considérons d'abord le problème aux limites $(1)-(3)$ avec $M > 0$. On sait, d'après [18], que le problème $(1)-(3)$ est équivalent à l'équation

$$u(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s, u(s))\, ds,$$

où

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{ch(m(1-t))ch(ms)}{msh(m)}, & 0 \leq s \leq t \leq 1; \\ \frac{ch(m(1-s))ch(mt)}{msh(m)}, & 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

$m = \sqrt{M}, \quad M > 0, \quad chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\cdot$ Par un calcul direct, nous obtenons

$$\frac{1}{msh(m)} = A \leq G(t, s) \leq B = \frac{ch^2 m}{msh(m)},$$

i.e

$$1 \geq \frac{G(t,s)}{B} \geq \sigma \text{ pour tout } 0 \leq t,s \leq 1, \qquad \text{avec } \sigma = \frac{1}{ch^2 m}\cdot$$

**I- Application du théorème de Krasnosel'skii**

Le problème $(1)-(3)$ est équivalent à l'équation de point fixe $u = Tu$ dans $E = C[0,1]$ l'espace de Banach où $T : E \to E$ est donné par :

$$Tu = \int_0^1 G(t,s) f(s,u(s))\, ds.$$

On peut montrer que $T$ est un opérateur complètement continu. Ensuite, on définit dans $E$ le cône $K$ par :

$$K = \{u \in E : \ u(t) \geq 0,\ t \in [0,1] \quad \text{et} \quad \min_{t\in[0,1]} u(t) \geq \sigma \|u\|\}$$

muni de la norme du sup, $\|u\| = \sup\limits_{t\in[0,1]} |u(t)|$ ; ici $\sigma = \frac{1}{ch^2 m}\cdot$ Avant de présenter le résultat principal, commençons par le lemme suivant :

**Lemme 0.14** *Supposons que la fonction* $f : [0,1] \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ *est continue. S'il existe deux nombres positifs distincts* $a$ *et* $b$ *telles que les conditions suivantes soient satisfaites :*

$$f(t,u) \leq a \left[ \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s)\, ds \right]^{-1}, \quad \forall\, (t,u) \in [0,1] \times [0,a], \tag{29}$$

$$f(t,u) \geq b \left[ \min_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s)\, ds \right]^{-1}, \quad \forall\, (t,u) \in [0,1] \times [\sigma b, b]. \tag{30}$$

*Alors, le problème* $(1)-(3)$ *admet au moins une solution positive* $u^*$ *tel que*

$$\min(a,b) \leq \|u^*\| \leq \max(a,b).$$

**Démonstration**

Comme $1 \geq \frac{G(t,s)}{B} \geq \sigma$ pour tout $0 \leq t,s \leq 1$, pour tout $u \in K$, on a

$$\begin{aligned}
\min_{0\leq t\leq 1} (Tu)(t) &= \min_{0\leq t\leq 1} \int_0^1 G(t,s) f(s,u(s))\, ds \\
&\geq \sigma \int_0^1 B f(s,u(s))\, ds \\
&\geq \sigma \max_{0\leq t\leq 1} \int_0^1 G(t,s) f(s,u(s))\, ds \\
&= \sigma \|Tu\|.
\end{aligned}$$

Ceci montre que $T(K) \subset K$. Alors, d'après (1.28) et (1.29), il est facile de prouver que le lemme 0.14 reste vrai en utilisant le théorème 0.2 dû à Krasnosel'skii. La preuve est donc terminée. Maintenant, on formule des conditions pour $f(t,u)$ comme suit :

**(H1)** $\inf_{s>0}\{\max_{t\in[0,1],u\in[0,s]} \frac{f(t,u)}{u}\} < C$,

**(H2)** $\min\{\liminf_{u\to 0} \min_{t\in[0,1],u\in[0,s]} \frac{f(t,u)}{u},\ \liminf_{u\to\infty} \min_{t\in[0,1],u\in[0,s]} \frac{f(t,u)}{u}\} > D$,

**(H3)** $\sup_{s>0}\{\min_{t\in[0,1],u\in[0,s]} \frac{f(t,u)}{u}\} > \sigma D$,

**(H4)** $\max\{\limsup_{u\to 0} \max_{t\in[0,1],u\in[0,s]} \frac{f(t,u)}{u},\ \limsup_{u\to\infty} \max_{t\in[0,1],u\in[0,s]} \frac{f(t,u)}{u}\} > C$ ;

où

$$C = \left[\max_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s)\,ds\right]^{-1}, D = \left[\sigma \min_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s)\,ds\right]^{-1}.$$

**Théorème 0.26** *Supposons que la fonction $f : [0,1]\times[0,+\infty) \to [0,+\infty)$ est continue. Alors, le problème $(1)-(3)$ admet au moins deux solutions positives pourvu que $M > 0$ et une des conditions suivantes soit satisfaite :*

**(a)** *$(H_1)$ et $(H_2)$*

**(b)** *$(H_1)$ et $(H_2)$.*

**Démonstration**

• Supposons que la condition (a) soit vérifiée et soit

$$\varphi(s) = \max_{t\in[0,1],u\in[0,s]} \frac{f(t,u)}{u}.$$

Alors, $\varphi : (0,+\infty) \to [0,+\infty)$ est continue et $\inf_{s>0} \varphi(s) < C$. Il existe, donc deux nombres positives $a_1$ et $a_2$ avec $0 < a_1 < a_2 < +\infty$ tel que

$$\varphi(a_1) \leq C \quad \text{et } \varphi(a_2) \leq C,$$

ce qui implique que

$$f(t,u) \leq a_1 C, \quad \forall\, t \in [0,1], u \in [0,a_1], \tag{31}$$

$$f(t,u) \leq a_2 C, \quad \forall\, t \in [0,1], u \in [0,a_2]. \tag{32}$$

D'autre part, puisque $\liminf_{u\to 0} \min_{t\in[0,1],u\in[0,s]} \frac{f(t,u)}{u} > D$, il existe $d_1 > 0$ tel que

$$\min_{t\in[0,1]} \frac{f(t,u)}{u} \geq D, \quad \forall\, u \in (0, d_1]. \tag{33}$$

Soit $g(u) = \min_{t\in[0,1]} f(t,u)$. Alors, $g : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ est continue.
- Si $\underline{\lim}\, g(u)_{u\to 0} = 0$, alors il existe une suite positive $\{c_n\}_{n\geq 0}$ avec $c_n \to 0$ quand $n \to +\infty$ telle que

$$g(\sigma c_n) = \lim_{\sigma c_n \leq u \leq c_n} g(u). \tag{34}$$

Choisissons $n_1$ tel que $b_1 = c_{n_1} < min\{a_1, \frac{d_1}{\sigma}\}$.
De (33) et (34), on tire, car $\sigma b_1 < d_1$
$\min_{t\in[0,1]} f(t,u) = g(u) \geq g(\sigma b_1) = \min_{t\in[0,1]} f(t, \sigma b_1) \geq \sigma b_1 D, \quad u \in [\sigma b_1, b_1]$.

$$f(t,u) \geq b_1 \left[\min_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s)\, ds\right]^{-1}, \ \ \forall\, t \in [0,1],\ u \in [\sigma b_1, b_1]. \tag{35}$$

- Si $\underline{\lim}\, g(u)_{u\to 0} > 0$, alors il existe $d_2 > 0$ tel que $g(u) > 0$ pour $u \in (0, d_2]$. Soit $L = \min_{u\in[0,d_2]} g(u)$, alors $L > 0$ et soit $b_1 = \min\{\frac{a_1}{2}, d_2, L \min_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s)\, ds\}$ on a donc :

$$\min_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s)\, ds \geq L \geq b_1[\min_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s)\, ds]^{-1} \quad \text{pour } u \in [\sigma b_1, b_1],$$

i.e

$$f(t,u) \geq b_1 \left[\min_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s)\, ds\right]^{-1}, \ \ \forall\, t \in [0,1],\ u \in [\sigma b_1, b_1]. \tag{36}$$

De (35) et (36), si $\liminf_{u\to 0} \min_{t\in[0,1],u\in[0,s]} \frac{f(t,u)}{u} > D$, il existerait $0 \leq b_1 \leq a_1$ tels que

$$f(t,u) \geq b_1 \left[\min_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s)\, ds\right]^{-1}, \ \ \forall\, t \in [0,1],\ u \in [\sigma b_1, b_1]. \tag{37}$$

De plus, puisque $\liminf_{u\to\infty} \min_{t\in[0,1],u\in[0,s]} \frac{f(t,u)}{u} > D$, on a $\liminf_{u\to+\infty} g(u) = +\infty$, il existe $d_3 > 0$ tel que

$$\min_{t\in[0,1]} \frac{f(t,u)}{u} \geq D, \ \ \forall\, u \in [d_3, +\infty); \tag{38}$$

où $g(u) = \min_{t\in[0,1]} f(t,u)$. Puisque $g$ est continue et $\lim_{u\to+\infty} g(u) = +\infty$, il existe $c_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$ tel que

$$g(\sigma c_n) = \min_{\sigma c_n \leq u \leq c_n} g(u). \tag{39}$$

On choisit $n_2$ tel que $b_2 = c_{n_2} > \max\{a_2, \frac{d_3}{\sigma}\}$. De (38) et (39), on déduit que

$$f(t,u) \geq b_2 \left[ \min_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s)\, ds \right]^{-1}, \quad \forall\, t \in [0,1],\ u \in [\sigma b_1, b_1]. \tag{40}$$

D'après (1.30), (1.31), (37) , (40) et le lemme 0.14, le problème $(1)-(2)$ admet deux solutions positives $u^*$ et $u^{**}$ telles que $b_1 \leq \|u^*\| \leq a_1 < a_2 \leq \|u^{**}\| \leq b_2$.

• Supposons que la condition (b) soit vérifiée et posons

$$\psi(s) = \min_{t\in[0,1], u\in[\sigma s, s]} \frac{f(t,u)}{u}.$$

Alors, $\psi : (0,+\infty) \to [0,+\infty)$ est continue et $\sup_{s>0} \psi(s) > \sigma D$. Il existe donc deux nombres positifs $b_1$ et $b_2$ avec $0 < b_1 < b_2 < +\infty$ tels que

$$\psi(b_1) \geq \sigma D \quad \text{ et } \psi(b_2) \geq \sigma D,$$

ce qui implique que

$$f(t,u) \geq b_1 \left[ \min_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s)\, ds \right]^{-1}, \quad \forall\, t \in [0,1],\ u \in [\sigma b_1, b_1] \tag{41}$$

et

$$f(t,u) \geq b_2 \left[ \min_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s)\, ds \right]^{-1}, \quad \forall\, t \in [0,1],\ u \in [\sigma b_1, b_1]. \tag{42}$$

D'autre part, puisque $\limsup_{u\to 0} \min_{t\in[0,1], u\in[0,s]} \frac{f(t,u)}{u} < C$, il existe $a_1 > 0$ (on peut choisir $a_1$ de telle sorte que $a_1 < b_1$) tel que $\max_{t\in[0,1]} \frac{f(t,u)}{u} \leq C, \quad \forall\, u \in (0, a_1]$.

$$f(t,u) \leq uC \leq a_1 C, \quad \forall\, t \in [0,1], u \in [0, a_1], \tag{43}$$

De plus, puisque $\limsup_{u\to+\infty} \max_{t\in[0,1]} \frac{f(t,u)}{u} < C$, il existe donc $d > 0$ tel que

$$\max_{t\in[0,1]} \frac{f(t,u)}{u} \leq C, \quad \forall\, u \in [d, +\infty). \tag{44}$$

Soit $h(u) = \max_{t\in[0,1]} f(t,u)$. Alors, $h : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ est continue.

- Si $\limsup_{u\to+\infty} h(u) = +\infty$, alors il existe une suite $\{c_n\}_n$ avec $c_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$ telle que

$$h(c_n) = \max_{0\leq u\leq c_n} g(u). \tag{45}$$

Choisissons $n_3$ tel que $a_2 = c_{n_3} > \max\{b_2, d\}$. D'après (44), (45), nous avons que $\max_{t\in[0,1]} f(t,u) = h(u) \le a_2 C, \quad \forall\, u \in (0, a_2]$ ; d'où

$$f(t,u) \le a_2 C, \quad \forall\, t \in [0,1], u \in [0, a_2], \tag{46}$$

- Si $\limsup_{u\to+\infty} h(u) < +\infty$, alors $h$ est borné sur $[0,+\infty)$. Soit $\sup_{u\in[0,\infty)} h(u) = H$, alors $H < +\infty$. choisissons, $a_2 > \max\{b_2, \frac{H}{C}\}$ ; donc

$$\max_{t\in[0,1]} f(t,u) = h(u) \le H \le a_2 C, \quad \forall\, u \in [0,+\infty).$$

Donc

$$f(t,u) \le a_2 C, \ \ \forall\, t \in [0,1], u \in [0, a_2]. \tag{47}$$

D'après (46) et (47),on a :

$$f(t,u) \le a_2 C, \ \ \forall\, t \in [0,1], u \in [0, a_2]. \tag{48}$$

Les estimations (41), (43), (48) et le lemme 0.14 entraînent que le problème $(1)-(2)$ admet deux solutions positives $u^*$ et $u^{**}$ telles que

$$a_1 \le \|u^*\| \le b_1 < b_2 \le \|u^{**}\| \le a_2.$$

Le théorème est donc démontré.

**II- Application du théorème de point fixe de Leggett-Williams**

Nous rappelons que pour $P$ un cône on a :

$$\begin{aligned} P_a &= \{x \in P : \ \ \|x\| < a\}, \\ P(\alpha, a, b) &= \{x \in P : \ \ a \le \alpha(x), \ \|x\| \le b\}. \end{aligned}$$

**Théorème 0.27** *Soit* $M > 0$. *Supposons que* $f : [0,1]\times[0,\infty) \to [0,\infty)$ *est continue et il existe deux nombres* $a$ *et* $d$ *avec* $0 < d < a$ *tels que :*

$$f(t,u) < \frac{d}{D}, \quad t \in [0,1], \ \ u \in [0,d], \tag{49}$$

$$f(t,u) > \frac{a}{C}, \quad t \in [0,1], \ \ u \in [a, \frac{a}{\sigma}]; \tag{50}$$

*où*

$$C = \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s)\,ds, \ \ D = \min_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s)\,ds.$$

*Supposons satisfaite l'une des conditions suivantes :*

**(H1)**

$$\lim_{u\to\infty}\max_{t\in[0,1]}\frac{f(t,u)}{u}<\frac{1}{D},$$

**(H2)** *Il existe un nombre $c>\frac{a}{\sigma}$ tel que si $t\in[0,1]$ et $u\in[0,c]$, $f(t,u)<\frac{c}{D}$.*

*Donc, le problème aux limites $(1)-(3)$ admet au moins trois solutions positives (au moins deux solutions sont strictement positives).*

**Démonstration**

Considérons l'espace de Banach $E=C[0,1]$, muni de la norme du sup. Définissons comme précédent dans $E$ le cône $P$ par :

$$P=\{u\in E:\ u(t)\geq 0,\ t\in[0,1]\quad \text{et}\quad \min_{t\in[0,1]}u(t)\geq\sigma\|u\|\}$$

Pour $u\in P$, soit

$$\alpha(u)=\min_{t\in[0,1]}u(t),$$

et

$$(Tu)(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s))\,ds,\quad dt\in[0,1].$$

Nous pouvons facilement vérifier que :

- $\alpha$ est une fonction positive, continue et concave sur $P$ avec $\alpha(x)\leq\|x\|\ \forall\, x\in P$.
- L'opérateur $T:P\to P$ est complètement continu.
- $u$ est un point fixe de $T$ si et seulement si $u$ solution du problème $(1)-(3)$.

Si la condition (H1) est satisfaite, il existe un nombre $c$ tel que $c>\frac{a}{\sigma}$ et $T:\overline{P_c}\to P_c$.

En effet, supposons que :

$$\lim_{u\to\infty}\max_{t\in[0,1]}\frac{f(t,u)}{u}<\frac{1}{D},$$

alors, il existe $\tau>0$ et $\gamma<\frac{1}{D}$ tel que, si $u>\tau$ :

$$\lim_{u\to\infty}\max_{t\in[0,1]}\frac{f(t,u)}{u}\leq\gamma,$$

i.e. $f(t,u)\leq\gamma u$ pour $t\in[0,1]$ et $u>\tau$. soit $\beta=\max_{t\in[0,1],u\in[0,\tau]}f(t,u)$. Alors,

$$f(t,u)\leq\gamma u+\beta\quad\forall\, t\in[0,1],u\in[0,+\infty).$$

Prenons $c > \max\{\frac{\beta D}{1-\gamma D},\ \frac{a}{\sigma}\}$. Si $u \in \overline{P_c}$, alors

$$\begin{aligned}\|Tu\| &= \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s) f(s,u(s))\, ds \leq \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s)[\gamma u + \beta]\, ds \\ &\leq \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s)[\gamma\|u\| + \beta]\, ds \leq (\gamma c + \beta) < c.\end{aligned}$$

Montrons que, pour un nombre $r$ tel que $f(t,u) < \frac{r}{D}$, $t \in [0,1]$ et $u \in [0,r]$, on a $T : \overline{P_r} \to P_r$. En effet, si $u \in \overline{P_r}$, alors

$$\|Tu\| = \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s) f(s,u(s))\, ds < \frac{r}{D} D = r.$$

Nous avons montré que si (H1) ou (H2) qui vérifiée, il existe un nombre $c > \frac{a}{\sigma}$ tel que $T : \overline{P_c} \to P_c$.

• L'opérateur $T$ vérifie les conditions du théorème 0.10 :

1. Si $r = d$, d'après (1.41) on déduit que $T : \overline{P_d} \to P_d$.
2. $\{u \in p(\alpha, a, \frac{a}{\sigma}) : \alpha(u) > a\} \neq \emptyset$ et $\alpha(Tu) > a$ pour tout $u \in p(\alpha, a, \frac{a}{\sigma})$. En effet, La fonction constante $\frac{1}{2}(a + \frac{a}{\sigma}) \in \{u \in p(\alpha, a, \frac{a}{\sigma}) : \alpha(u) > a\}$.
   De plus, pour $u \in p(\alpha, a, \frac{a}{\sigma})$, on a
   $$\frac{a}{\sigma} \geq \|u\| \geq u(t) \geq \min_{t\in[0,1]} u(t) = \alpha(u) \geq a, \quad \forall\, t \in [0,1].$$
   D'après (1.42), on déduit que :
   $$\alpha(Tu) = \min_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s) f(s,u(s))\, ds > \frac{a}{C} \min_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s)\, ds = a.$$
3. Finalement, si $u \in p(\alpha, a, c)$ et $\|Tu\| > \frac{a}{\sigma}$, alors $\alpha(Tu) > a$. En effet, supposons que $u \in p(\alpha, a, c)$ et $\|Tu\| > \frac{a}{\sigma}$, alors pour tout $t \in [0,1]$, on a :
   $$\begin{aligned}\alpha(Tu) &= \min_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s) f(s,u(s))\, ds = \min_{t\in[0,1]} \int_0^1 \frac{G(t,s)}{B} B f(s,u(s))\, ds \\ &\geq \sigma \int_0^1 B f(s,u(s))\, ds \geq \sigma \int_0^1 G(t,s) f(s,u(s))\, ds.\end{aligned}$$
   D'où
   $$\alpha(Tu) \geq \sigma \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s) f(s,u(s))\, ds = \sigma\|Tu\| > \sigma\frac{a}{\sigma} = a.$$

Les conditions du théorème 0.10 de Leggett-Williams sont donc vérifiées (pour $b = \frac{a}{\sigma}$) ; ceci donne que $T$ admet au moins trois point fixes positifs ; donc le problème à conditions au bords $(1)-(3)$ admet au moins trois solutions positives $u, v$ et $w$ telles que :

$$\|u\| < d, \;\; a < \min_{t\in[0,1]} v(t), \quad \|w\| > d.$$

Maintenant, on considère le problème aux limites $(2)-(3)$ avec $M \in (0, \frac{\pi^2}{4})$. Par les mêmes techniques que précédemment, nous avons besoin seulement de changer la fonction de Green en

$$Gt, s) = \begin{cases} \frac{\cos(m(1-t))\cos(ms)}{msh(m)}, & 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ \frac{\cos(m(1-s))\cos(mt)}{msh(m)}, & 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Si on prend,

$$K = P = \{u \in E : \;\; u(t) \geq 0, \; t \in [0,1] \quad \text{et} \quad \min_{t\in[0,1]} u(t) \geq \sigma\|u\|, \}$$

avec $\|u\| = \sup_{t\in[0,1]} |u(t)|, \;\; u \in E$, et $\sigma = \cos^2 m$, on peut montrer les théorèmes suivants en utilisant respectivement le théorème 0.2 dû à Krasnosel'skii et le théorème 0.17 dû à Leggett-Williams.

**Théorème 0.28** *Supposons que la fonction* $f : [0,1] \times [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ *est continue. Alors, le problème* $(1)-(2)$ *admet au moins deux solutions positives, pourvu que* $M \in (0, \frac{\pi^2}{4})$ *et une des conditions suivantes est satisfaite :*

**(c)** $(H_1)$ *et* $(H_2)$

**(d)** $(H_3)$ *et* $(H_4)$.

**Théorème 0.29** *Soit* $M \in (0, \frac{\pi^2}{4})$. *Sous les mêmes conditions que dans le théorème* 0.27, *le problème aux limites qui est défini par* $(2)-(3)$ *admet au moins trois solutions positives (au moins deux solutions strictement positives).*

## 0.8 Application à un problème aux limites de type Mixte

Dans l'application suivante, Avery *et al* [7] ont appliqué le théorème des points fixes jumeaux [6], pour obtenir l'existence d'au moins deux solutions strictement positives au problème :

$$(Q)\begin{cases} y'' + f(u) = 0, & 0 \leq t \leq 1; \\ y(0) = y'(1) = 0; \end{cases}$$

où $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ est continue. Nous rappelons que, pour $\alpha$ une fonction continue positive dans un cône $P$, l'ensemble $P(\alpha, a)$ avec $a > 0$ est défini par $P(\alpha, a) = \{x \in P : \alpha(x) < a\}$. On écrit ce problème sous forme d'équation intégrale :

$$y(t) = \int_0^1 G(t,s) f(t, y(s))\, ds$$

où $G(t, s)$ est la fonction de Green associée au problème

$$\begin{cases} -y'' = 0, \ \ 0 \leq t \leq 1; \\ y(0) = 0 = y'(1). \end{cases}$$

C'est-à-dire,

$$G(t,s) = \begin{cases} t, \ 0 \leq t \leq s \leq 1, \\ s, \ 0 \leq s \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Les propriétés de $G(t, s)$ que nous utiliserons sont :

$$0 < G(t,s) \leq G(s,s) = s, \quad 0 < t, s < 1, \tag{51}$$

$$G(t,s) \geq \frac{1}{2} G(s,s) = \frac{s}{2}, \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \ 0 \leq s \leq 1. \tag{52}$$

Soit $E = C([0, 1])$ l'espace de Banach muni de la norme du sup et définissons sur $E$ le cône $P$ par :

$$P = \{y \in E : y \text{ est positive, concave et croissante sur } [0, 1]\}.$$

Dans ce qui suit, fixons $0 < \frac{1}{2} < r < 1$. Ensuite, on définit les fonctions continues, positives, croissantes $\gamma, \theta$ et $\alpha$ par :

$$\begin{aligned}\gamma(y) &= \min_{\frac{1}{2}\leq t\leq r} y(t) = y(\frac{1}{2}),\\ \theta(y) &= \max_{0\leq t\leq \frac{1}{2}} y(t) = y(\frac{1}{2}),\\ \alpha(x) &= \max_{0\leq t\leq r} y(t) = y(r).\end{aligned}$$

Remarquons que pour tout $y \in P$,

$$\gamma(y) = \theta(y) \leq \alpha(y).$$

De plus, pour tout $y \in P$, $\gamma(y) = y(\frac{1}{2}) = y(\frac{1}{2}1 + (1-\frac{1}{2})0) \geq \frac{1}{2}y(1) = \frac{1}{2}\|y\|$, soit

$$\|y\| \leq 2\gamma(y),\ \forall\, y \in P.$$

Finalement, on note que :

$$\theta(\lambda y) = \lambda\theta(y), \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \text{ et } y \in \partial P(\theta, b).$$

Nous présentons maintenant un résultat d'existence sous différentes hypothèses de croissance sur $f$.

**Théorème 0.30** *Soit* $0 < a < (\frac{4r^2}{3})b < \frac{2r^2}{3}c$ *et supposons* $f$ *vérifiant les hypothèses suivantes :*

**(A)** $f(w) > 4c$, *pour* $c \leq w \leq 2c$,

**(B)** $f(w) < \frac{8b}{3}$, *pour* $0 \leq w \leq 2b$,

**(C)** $f(w) > \frac{2a}{r^2}$, *pour* $0 \leq w \leq a$.

*Alors, le problème à conditions aux bords (Q) admet au moins deux solutions strictement positives,* $y_1$ *et* $y_2$ *telles que*

$$a < \max_{0\leq t\leq r} y_1(t), \quad \textit{avec} \max_{0\leq t\leq \frac{1}{2}} y_1(t) < b, \quad \textit{et} \quad b < \max_{0\leq t\leq \frac{1}{2}} y_2(t) \quad \textit{avec} \min_{\frac{1}{2}\leq t\leq r} y_2(t) < c.$$

**Démonstration**

Introduisons l'opérateur complètement continu $A : E \to E$ par :

$$(Ay)(t) = \int_0^1 G(t,s)f(y(s))\,ds.$$

Remarquons que $y$ est une solution de notre problème si et seulement si $y$ est un point fixe de l'opérateur $A$. Montrons à présent que les conditions du théorème 0.22 sont satisfaites.

1. Soit $y \in \overline{P(\gamma, c)}$, par la positivité de $f$ et $G$ pour $0 \leq t \leq 1$ :

$$(Ay)(t) = \int_0^1 G(t,s) f(y(s))\, ds \geq 0.$$

De plus, $(Ay)''(t) = -f(y(t)) \leq 0$, $0 \leq t \leq 1$, ce qui implique que $Ay$ est concave sur $[0,1]$ et aussi $(Ay)'$ est croissant. Puisque la fonction $G$ satisfait les conditions aux bords, nous avons $(Ay)'(1) = 0$ et donc $(Ay)'(t) \geq 0$ sur $[0,1]$. Ceci implique que $Ay$ est croissant sur $[0,1]$. Par conséquent, $Ay \in P$, i.e. $A : \overline{P(\gamma, c)} \to P$.

2. La condition (i) du théorème (0.22) est satisfaite. En effet, soit $y \in \partial P(\gamma, c)$, alors $\gamma(y) = \min\limits_{\frac{1}{2} \leq t \leq r} y(t) = y(\frac{1}{2}) = c$. Puisque $y \in P$ ($y$ est croissante) $y(t) \geq c$, $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$. Comme $\|y\| \leq 2\gamma(y) = 2c$, nous avons $c \leq y(t) \leq 2c$, $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$. L'hypothèse (A) entraîne donc, $f(y(s)) > 4c$, $\frac{1}{2} \leq s \leq 1$. D'où :

$$\begin{aligned} \gamma(Ay) &= (Ay)(\frac{1}{2}) \\ &= \int_0^1 G(\frac{1}{2}, s) f(y(s))\, ds \\ &\geq \int_{\frac{1}{2}}^1 G(\frac{1}{2}, s) f(y(s))\, ds \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2} f(y(s))\, ds \\ &\geq 4c \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2}\, ds = c. \end{aligned}$$

3. La condition(ii) du théorème (0.22) est satisfaite. En effet, Soit $y \in \partial P(\theta, b)$, alors $\theta(y) = \max\limits_{0 \leq t \leq \frac{1}{2}} y(t) = y(\frac{1}{2}) = b$ ; ceci implique que $0 \leq y(t) \leq b$, $\;0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ et puisque $y \in P$ :

$$b \leq y(t) \leq \|y\| = y(1), \; \frac{1}{2} \leq t \leq 1.$$

De plus, $\|y\| \leq 2\gamma(y) \leq 2\theta(y) = 2b$, donc $0 \leq y(t) \leq 2b$, $\forall\, 0 \leq t \leq 1$. Par l'hypothèse (B), on a $f(y(s)) < \frac{8b}{3}$, $0 \leq s \leq 1$. D'où :

$$\begin{aligned}
\theta(Ay) &= (Ay)(\frac{1}{2}) = \int_0^1 G(\frac{1}{2}, s) f(y(s))\, ds \\
&< \frac{8b}{3} \int_0^1 G(\frac{1}{2}, s) = \frac{8b}{3} (\int_0^{\frac{1}{2}} G(\frac{1}{2}, s)\, ds + \int_{\frac{1}{2}}^1 G(\frac{1}{2}, s)\, ds) \\
&= \frac{8b}{3} (\int_0^{\frac{1}{2}} s\, ds + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2}\, ds) = b.
\end{aligned}$$

4. La condition (iii) du théorème 0.22 est satisfaite. En effet, définissons $y(t) = \frac{a}{2}$ pour tout $0 \leq t \leq 1$, alors $\alpha(y) = \frac{a}{2} < a$ et $P(\alpha, a) \neq \emptyset$. Maintenant, soit $y \in \partial P(\alpha, a)$, alors $\alpha(y) = \max_{0 \leq t \leq r} y(t) = y(r) = y(r) = a$, ceci implique que $0 \leq y(t) \leq a$, $\forall \forall 0 \leq t \leq r$. Par l'hypothèse (C), on a $f(y(s)) > \frac{2a}{r^2}$, $\forall 0 \leq s \leq r$. D'où

$$\begin{aligned}
\alpha(Ay) &= (Ay)(r) \\
&= \int_0^1 G(r, s) f(y(s))\, ds \\
&\geq \int_0^r G(r, s) f(y(s))\, ds \\
&> \frac{2a}{r^2} \int_0^r G(r, s)\, ds \\
&= \frac{2a}{r^2} \int_0^r s\, ds = a.
\end{aligned}$$

Les conditions (i), (ii) et (iii) du théorème 0.22 sont satisfaites et le résultat demandé en découle.

**Exemple 0.3** *Soit $\frac{1}{2} < r < 1$ fixé et $0 < a < (\frac{4r^2}{3})b < \frac{2r^2}{3}c$ et soit $f : R \to [0, +\infty)$ définie par :*

$$f(w) = \begin{cases} \frac{br^2+a}{r^2}, w \leq 2b; \\ l(w), 2b \leq w \leq c; \\ 4c + 1, c \leq w. \end{cases}$$

*Où $l$ vérifie $l'' = 0$, $l(2b) = \frac{br^2+a}{r^2}$ et $l(c) = 4c + 1$. Alors, d'après le théorème précédent, le problème (Q) admet au moins deux solutions strictement positives.*

## 0.9 Application à un opérateur intégral de type Hammerstein

On considère l'opérateur intégral de type Hammerstein définit sur $C(\Omega)$ par :

$$Ax(t) = \int_{\Omega} G(t,x) f(s,x(s))\, ds, \quad t \in \Omega. \tag{53}$$

où $\Omega$ est un domaine compact dans $\mathbb{R}^n$, $f : \Omega \times [0,c] \to [0,\infty)$ une fonction continue et $G : \Omega \times \Omega \to [0,\infty)$ est telle que $A$ est complètement continu sur $K_c = [C_+(\Omega)]_c$ ; par exemple, si $G$ est continue $A$ est complètement continu. Soit $\Omega_1$ un sous-ensemble fermé de $\Omega$ et supposons que :

$$\|G\| = \sup_{t \in \Omega} \int_{\Omega} G(t,s)\, ds < \infty,$$

$$\epsilon = \inf_{t \in \Omega_1} G(t,s)\, ds > 0,$$

et

$$\delta = \sup_{t \in \Omega, u \in \Omega_1} \int_{\Omega} |G(t,s) - G(u,s)\, ds > 0.$$

Le théorème 0.16 de Leggett-Williams peut se ramener au résultat suivant :

**Théorème 0.31** *Supposons qu'il existe des nombres positifs* $a, b$ *et* $d$ *avec* $0 < d < a < b \leq c$ *satisfaisant les conditions suivantes :*

1. $f(t,x) > a\epsilon^{-1}$ *si* $t \in \Omega_1,\ a \leq x \leq b$ *;*
2. $f(t,x) < d\|G\|^{-1}$ *si* $t \in \Omega,\ 0 \leq x \leq d$ *;*
3. $f(t,x) \leq \delta^{-1}(b-a)$ *si* $t \in \Omega,\ 0 \leq x \leq c$ *;*
4. $f(t,x) < c\|G\|^{-1}$ *si* $t \in \Omega,\ 0 \leq x \leq c.$

*Alors, l'opérateur de Hammerstein* (53) *admet au moins trois points fixes dans* $K_c = [C_+(\Omega)]_c$.

**Démonstration**

- La condition (2) implique que $\|Ax\| < d$ si $\|x\| \leq d$.
- La condition (4) assure que l'opérateur $A$ envoie $K_c$ dans $K_c$.
- On définit la fonction concave $\alpha$ sur $K$ par :

$$\alpha(x) = \min_{t \in \Omega_1} x(t).$$

Évidement, $\alpha(x) \leq \|x\|$ et il existe $x \in S(\alpha, a, b)$ tel que $\alpha(x) > a$. Si $x \in S(\alpha, a, b)$, alors

$$\begin{aligned}
\alpha(Ax) &= \min_{t\in\Omega_1} \int_\Omega G(t,s)f(s,x(s))\,ds \\
&\geq \min_{t\in\Omega_1} \int_{\Omega_1} G(t,s)f(s,x(s))\,ds \\
&> \min_{t\in\Omega_1} \int_\Omega G(t,s)a\epsilon^{-1}\,ds = a.
\end{aligned}$$

• Finalement, si $x \in S(\alpha, a, c)$, alors pour $t \in \Omega$ et $u \in \Omega_1$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega G(t,s)f(s,x(s))\,ds - \int_\Omega G(u,s)f(s,x(s))\,ds &\leq \int_\Omega |G(t,s) - G(u,s)| f(s,x(s))\,ds \\
&\leq \int_\Omega |G(t,s) - G(u,s)|\delta^{-1}(b-a)\,ds \\
&\leq b - a.
\end{aligned}$$

Donc, $\|Ax\| - \alpha(Ax) \leq b - a$ et $\|Ax\| > b$ implique que $\alpha(Ax) > a$. Le théorème 0.16 de Leggett-Williams donne alors le résultat escompté.

## 0.10 Application à un problème aux limites à trois points

**I- Introduction :**

En utilisant le théorème 0.13 de type Leggett-Williams dû a M. Zima nous montrons l'existence d'au moins une solution positive au problème aux limites à trois points suivant :

$$(P') \quad \begin{cases} y''(t) + f(t, y(t)) = 0, \\ y(0) = 0,\ \alpha y(\eta) = y(1); \end{cases}$$

où $t \in [0,1]$, $f$ est une fonction continue, $\eta \in (0,1)$, $\alpha \geq 0$ et $1 - \alpha\eta > 0$. Notons que des problèmes similaires ont été considérés par exemple dans [14], [17]. En particulier dans [17], Infante et Webb ont montré l'existence des solutions multiples non triviaux (pas nécessairement positives) avec $0 \leq \alpha < 1 - \eta$ ou $\alpha < 0$.

**II- L'existence de solution positive au problème (P')**

On peut vérifier sans difficulté que la fonction noyau de l'équation intégrale associée au problème $(P')$ est donnée par

$$K(t,s)=\begin{cases}\begin{cases}(1-\frac{1-\alpha}{1-\alpha\eta}s)t, & 0\le t\le s\le 1,\\ (1-\frac{1-\alpha}{1-\alpha\eta}t)s, & 0\le s\le t\le 1,\end{cases} & ,\quad s\le\eta;\\ \begin{cases}\frac{1-s}{1-\alpha\eta}t, & 0\le t\le s\le 1,\\ s-\frac{s-\alpha\eta}{1-\alpha\eta}t, & 0\le s\le t\le 1,\end{cases} & ,\quad \eta\le s.\end{cases}$$

Remarquons que pour $\eta\in(0,1)$, $\alpha\ge 0$ et $1-\alpha\eta>0$, nous avons

$$\bigwedge_{t,s\in[0,1]} MK(s,s)\ge K(t,s)\ge 0 \tag{54}$$

et

$$\bigwedge_{t,s\in[0,1]} K(t,s)\quad \ge m(t)K(s,s). \tag{55}$$

Avec

$$M=\max\{1,\frac{\alpha(1-\eta)}{1-\alpha\eta}\}\text{ et } m(t)=\min\{t,1-t\}\text{ pour } t\in[0,1].$$

Supposons que

**(1°)** $f:[0,1]\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ est une fonction continue et il existe $r_1>0$ tel que

$$f(t,x)\le [M\int_0^1 K(s,s)\,ds]^{-1}r_1$$

pour tout $t\in[0,1]$ et $x\in[0,r_1]$.

**(2°)** Il existe $t_0\in(0,1], a>0, r_2>0, r_2\ne r_1$ et deux fonctions continues $g:[0,1]\to[0,\infty)$, $h:(0,r_2]\to[0,\infty)$ tel que $f(t,x)\ge g(t)h(x)$ pour $t\in[0,1]$ et $x\in(0,r_2]$, $\frac{h(x)}{x^a}$ est décroissante sur $(0,r_2]$ et

$$\frac{h(r_2)}{M^a}\int_0^1 K(t_0,s)g(s)m^a(s)\,ds\ge r_2.$$

**Théorème 0.32** *Si les deux hypothèses (1°) et (2°) sont vérifiées, alors le problème $(P')$ a une solution positive non nulle sur $[0,1]$.*

**Démonstration**

Considérons dans l'espace de Banach $C([0,1])$ l'ensemble

$$P = \{y \in C([0,1]) : y(t) \geq \frac{m(t)}{M}\|y\|, \ t \in [0,1]\}.$$

On peut montrer facilement que $P$ est un cône naturel dans $C([0,1])$ (avec $\gamma = 1$). Fixons $u_0(t) = 1$ sur $[0,1]$. Alors

$$P(u_o) = \{y \in C([0,1]) : y(t) > \frac{m(t)}{M}\|y\|, \ t \in [0,1]\}.$$

Pour $y \in P$ et $t \in [0,1]$, définissons l'opérateur intégral

$$(Ty)(t) = \int_0^1 K(t,s)f(s,y(s))\,ds.$$

Il est clair que chaque point fixe de l'opérateur $T$ est solution du problème $(P')$. D'après (54) et (55), pour $t \in [0,1]$ et $y \in P$, nous avons

$$\int_0^1 K(s,s)f(s,y(s))\,ds \geq \frac{m(t)}{M}\|Ty\|$$

et

$$(Ty)(t) \geq m(t)\int_0^1 K(s,s)f(s,y(s))\,ds.$$

Donc, pour tout $t \in [0,1]$ : $(Ty)(t) \geq \frac{1}{M}\|Ty\|$, soit $T : P \to P$. Soit $\Omega_1 = \{y \in C([0,1]) : \|y\| < r_1\}$ et $\Omega_2 = \{y \in C([0,1]) : \|y\| < r_2\}$. On peut supposer que $r_1 < r_2$. Les conditions du théorème 0.13 sont donc satisfaites. En effet,

• L'opérateur $T$ est complètement continu sur $P \cap \overline{\Omega_2}$.

• Par l'hypothèse ($1^{\circ}$) et (54), pour $y \in P \cap \partial\Omega_1$ et $t \in [0,1]$, on obtient :

$$(Ty)(t) \leq M\int_0^1 K(s,s)[M\int_0^1 K(\tau,\tau)d\tau]^{-1}r_1\,ds = r_1.$$

Donc $\|Fy\| \leq \|y\|$ pour $y \in P \cap \partial\Omega_1$.

• Soit $y \in P(u_0) \cap \partial\Omega_2$, alors $\|y\| = r_2$ et $y(t) \in (0, r_2]$ $\forall\, t \in [0,1]$. Par l'hypothèse ($2^{\circ}$), on obtient :

$$\begin{aligned}
(Ty)(t_0) &\geq \int_0^1 K(t_0,s)g(s)h(y(s))\,ds = \int_0^1 K(t_0,s)g(s)\frac{h(y(s))}{y^a(s)}y^a(s)\,ds \\
&\geq \frac{h(r_2)}{r_2^a}\int_0^1 K(t_0,s)g(s)y^a(s)\,ds > \frac{h(r_2)}{r_2^a}\int_0^1 K(t_0,s)g(s)[\frac{m(s)\|y\|}{M}]^a\,ds \\
&= \frac{h(r_2)}{M^a}\int_0^1 K(t_0,s)g(s)m^a(s)\,ds \geq r_2.
\end{aligned}$$

Donc $\|Fy\| \geq \|y\|$ pour $x \in P(u_0) \cap \partial\Omega_2$. En vertu du théorème (0.13), l'opérateur $T$ possède un point fixe $y^* \in P$ tel que $r_1 \leq \|y^*\| \leq r_2$, ce qui termine la preuve de notre théorème.

**Exemple 0.4** *Considérons le problème $(P')$ avec*

$$f(x,t) = \begin{cases} 16(t+1)x^2(x-3)^2, & (t,x) \in [0,1] \times [0,3]; \\ (t+1)(x-3), & (t,x) \in [0,1] \times (3,\infty) \end{cases}$$

*et $\alpha = \eta = \frac{1}{2}$. On peut montrer facilement que les conditions du théorème précédent sont vérifiées pour $r_1 = \frac{1}{60},\ r_2 = 1,\ t_0 = 1,\ a = 2,\ g(x) = 16(t+1)$ et*
*$h(t) = x^2(x-3)^2$. Par conséquent, le problème $(P')$ a une solution $x^*$ défini sur $[0,1]$ et telle que $\frac{1}{60} \leq \|x^*\| \leq 1$.*

# ANNEXES (Résultats complémentaires en E.D.O)

## Extension et rétraction dans les espace de Banach

**Définition 0.13** *Soit $X$ un espace topologique et $A \subset X$ une partie non vide.On dit que $A \subset X$ est une rétractée de $X$ s'il existe une application continue $r : X \to A$ telle que $r(x) = x \; \forall \, x \in A$; ou encore si $I_{/A}$ admet une extension à $X$. L'application $r$ est alors appelée rétraction.*

**Exemple 0.5** *Dans $\mathbb{R}^n$, la boule $B_n = B(x_0, R)$ est une rétractée de l'espace $\mathbb{R}^n$. Il suffit pour cela de considèrer l'application définie par :*

$$r(x) = \begin{cases} x, & si \; \|x - x_0\| \leq R \\ x_0 + R\frac{x-x_0}{\|x-x_0\|}, & si \; \|x - x_0\| \geq R. \end{cases}$$

**Proposition 0.3** *$A$ est une rétractée de $X$ si et seulement si pour tout espace topologique $Y$, toute application continue $f : A \to Y$ admet une extension continue $\tilde{f} : X \to Y$.*

**Démonstration**
**(i)** Soit $r : X \to A$ une rétraction et $f : A \to Y$ une application continue. Alors l'application composée $f \circ r : X \to Y$ est une extension continue de l'application $f$.
**(ii)** Réciproquement, si tout application continue $f : A \to Y$ admet une extension à l'espace $X$, alors l'application identité $I_{/A} : A \to A$ possède une extension $r : X \to A$.

# Théorèmes d'extension de Dugundji

**Théorème 0.33** *Soient $X$ et $Y$ deux espaces vectoriels normés, $A \subset X$ une partie fermée de $X$ et $f : A \to Y$ une application continue. Alors $f$ admet une extension continue $\tilde{f} : X \to Y$ tel que $\tilde{f}(X) \subset Conv(f(A))$.*

**Théorème 0.34** *Soient $X$ et $Y$ deux espaces de Banach, $A \subset X$ une partie fermée, bornée et $f : A \to Y$ une application compacte. Alors $f$ admet une extension compacte $\tilde{f} : X \to Y$ tel que $\tilde{f}(X) \subset Conv(f(A))$.*

**Corollaire 0.3** *Tout partie convexe fermée $A$ d'un espace vectoriel normé en est une rétractée.*

**Démonstration**

D'après le théorème de Dugundji, l'application $I_{/A}$ admet une extension unique $\tilde{I}_{/A}$ telle que $\tilde{I}_{/A}(x) \subseteq Conv(I(A)) = Conv(A)$ comme $A \subset X$, alors $\tilde{I}(A) \subset \tilde{I}(X) \subseteq Conv(A)$ et donc
$A \subseteq \tilde{I}(X) \subseteq Conv(A) = A$ car, $A$ étant convexe,i.e. $\tilde{I}(X) = A$ ; d'où le résultat demandé. Le lecteur peut trouver ces résultats avec plus de détails dans [12].

# Bibliographie

[1] H. Amann, *On the number of solutions of nonlinear equations in orderd Banach spaces*, J. Fonctional Analysis 11 (1972),346-384.

[2] H. Amann, *Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in orderd Banach spaces*, SIAM Review 18 (1976),620-709.

[3] R.I. Avery, *Existence of multiple positive solutions to a conjugate boudary value problem*, MSR Hot-Line 2,1-6, (1998).

[4] R.I. Avery, *A generalization of the Leggett-Williams fixed point theorem*, MSR Hot-Line 2,9-14, (1998).

[5] R.I. Avery & J. Herderson, *Theree symmetric positive solutions for a second-order boundary value problem* , Appl. Math. Lett. 13(2000)1-7.

[6] R.I. Avery & J.Herderson , *Two positive fixed points of nonlinear operators on ordered Banach spaces*,

[7] R.I. Avery, J. Herderson & Chuan Jen Chyan, *Twin solutions of boundary value problems for ordinary differential equations and finite difference equations*,comp. Math. With Appl. 42(2001) 695-704.

[8] R.I. Avery & A.C. Peterson , *Three positive fixed points of nonlinear operators on ordered Banach spaces*, Comp. Math. Appl. 42(2001)313-322.

[9] R. Avery & D.R. Anderson, *Fixed point theorem of cone expansion and compression of fonctional type*, J. Differ. Eqn. Appl. 8(2002)1073-1083.

[10] R.P. Agarwal & D. O'Regan, *Periodic solutions to nonlinear integral equations on the infinite interval modelling infectious disease*, Nonlinear Anal 40(2000)21-35. %bibitemCroninJ. Cronin,

[11] S. Djebali, *Degré topologique : théorie et applications aux EDO-EDP*, Cours policopié, Département de mathématiques, ENS-Kouba, Alger, (1998).

[12] S. Djebali, *Problèmes aux limites non linéaires associés aux EDO du second ordre*, Cours de magister, Département de mathématiques, ENS-Kouba, Alger,(2001-2002).

[13] L.H. Erbe, S. Hu & H. Wang, *Multiple positiv solutions of some boudary value problems*, J. Math Anal. Appl. 184, 640-648, (1994).

[14] G.P. Gupta & S.I. Trofimchuk, *Existence of a solution of a thre point boundary value problem and the spectral radius of a related linear operator*, Nonlinear Anal., TMA, 34(1998)489-507.

[15] D. Guo & V. Lakshmikantham, *Nonlinear Problèms in Abstract Cones*, Acad Press, San Diego, 1988.

[16] J. Herderson & H.B. Thompson, *Multiple symmetric positive solutions for a second-order boundary value problem*, Proceedings of the American Mathematical Society (2000).

[17] G. Infante & J.R.L. Webb, *Nonzero solution of Hammerstein integral equations with discontinuos Kernels*, J.Math.Anal.Appl. 272(2002)30-42.

[18] D.Q. Jiang & H.Z. Liu, *Existence of positive solutions to second order Neumann boudary value problems*, J. Math. Res. Exposition 20(3)(2000)360-364.

[19] , M.A. Krasnosel'skii, *Positive solutions of operator equations*, Noordhoff, Groningen. The Netherlands (1964).

[20] M.A. Krasnosel'skii *Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations*, Pergamon, Elmsford, NY,(1964)

[21] , M.A. Krasnosel'skii & SV.JL. Stecenko, *Some nonlinear problems with many solutions*, Amer. Math. Soc.Transl., Ser.2,54(1966),29-48.

[22] R.W. Leggett & L.R. Williams, *Multiple positive fixed-points of nonlinear operators on orderd Banach spaces*, Indiana University Mathematics Journal 28,673-688,(1979).

[23] R.W. Leggett & L.R. Williams, *A fixed point theorem with application to an infectious disease model*, J. Math. Anal. Appl.76(1980)91-79. 192.119-124(1971).

[24] Z. Lui & F. Li, *Multiple positive solutions of nonlinear two-point boudary value problems* , J. Math Anal. Appl. 203,610-625, (1996).

[25] K. Lan & J.R.L. Webb, *Positive solutions of semilinear differential equations with singularities*, J. Differential Equations 148, 407-421, (1998).

[26] Fuyi Li & Y. Zhang, *Multiple symmetric nonegative solutions of second-order ordinary differential equations*, Appl. Math. Lett. 17(2004)261-267.

[27] C.A. Stuart, *Positive solution of nonlinear integral equation*, Math, Annln. 192.119-124(1971).

[28] J.P. Sun & W.T. Li, *Multiple positive solutions to second order Neumann boudary value problems*, Appl. Math. Comp. 146(2003)187-194.

[29] J.P. Sun, W.T. Li & S.S. Cheng, *Three positive solutions to second order Neumann boudary value problems,*Appl. Math. Lett. 17(2004)1079-1084.

[30] Miroslawa Zima, *Fixed point theorem of leggett-Williams type and its application,* J. Math. Anal. Appl.299 (2004) 254-260.