Espaces de Sobolev

Résumé du cours de MEDP

Maîtrise de mathématiques 2001 – 2002

medp-sobolev.tex (2001nov24)

Sauf mention explicite du contraire, toutes les fonctions considérées seront à valeurs réelles.

1 Notations

Soit $\Omega \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On désignera par $C_0^0(\Omega)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact dans Ω,

$$C_0^0(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \mid f \text{continue et } \operatorname{Supp}(f) \Subset \Omega\}.$$

Rappelons que le support $\operatorname{Supp}(f)$ d'une fonction f continue sur Ω est défini par

$$\operatorname{Supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}}.$$

Si la fonction f est mesurable sur Ω le support est défini par

$$x \notin \operatorname{Supp}(f) \Leftrightarrow \exists\, \omega \in \mathcal{O}_x(\Omega) \text{ tq } f|\omega = 0 \text{ pp.}$$

Soit $1 \leq p \leq \infty$. On dit qu'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ appartient à $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ si $f\,\mathbf{1}_K \in L^p(\Omega)$ pour tout compact $K \subset \Omega$.

2 Rappels d'intégration

Pour toute cette section, on renvoie à [2], Chapitre IV. On rappelle (et on admettra) les résultats suivants.

Théorème 2.1. ([2], Théorème IV.3, p. 55) *L'espace $C_0^0(\Omega)$ est dense dans l'espace $L^1(\Omega)$, c'est à dire*

$$\forall\, f \in L^1(\Omega), \forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, f_\varepsilon \in C_0^0(\Omega) \text{ } tq \text{ } \|f - f_\varepsilon\|_{L^1} \leq \varepsilon\,.$$

Théorème 2.2. ([2], Théorèmes IV.11, p. 61 et IV.14, p. 63) *Soit $1 \leq p < \infty$ et soit p^* l'exposant conjugué de p, c'est à dire tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$ (lorsque $p = 1$, $p^* = \infty$).*

Étant donnée $\varphi \in (L^p)'$ une forme linéaire continue sur $L^p(\Omega)$, il existe une et une seule fonction $g \in L^{p^*}(\Omega)$ telle que

$$\forall\, f \in L^p(\Omega) \quad \varphi(f) = \int_\Omega fg\,.$$

De plus, on a $\|\varphi_{(L^p)'}\| = \|g\|_{L^{p^*}}$.

Théorème 2.3. ([2], Théorème IV.13, p. 62) *Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est séparable.*

Remarque. On prendra garde au fait que le dual de L^∞ ne coincide pas avec L^1 et que L^∞ n'est pas séparable ([2], p. 65 ff).

La proposition suivante résulte du Théorème 2.1 ; son corollaire résulte du Théorème 2.2.

Proposition 2.4. *Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Si $\int_\Omega uf = 0$ pour toute fonction $u \in C^0_0(\Omega)$, alors $f = 0$ presque partout dans Ω.*

Corollaire 2.5. *L'espace $C^0_0(\Omega)$ est dense dans l'espace $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$.*

Exercice 2.6. L'espace $C^0_0(\Omega)$ est-il dense dans $L^\infty(\Omega)$? $\lhd$

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière C^1 et de normale intérieure ν. Soit $X : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs C^1. On a la *formule de la divergence*

$$\int_\Omega \operatorname{div}(X)\, dx = -\int_{\partial\Omega} \langle X, \nu\rangle\, \sigma(dx)\,, \tag{1}$$

où σ désigne la mesure naturelle sur $\partial\Omega$ et où $\operatorname{div}(X)$ désigne la divergence du champ de vecteurs X, définie par

$$\operatorname{div}(X)(x) = \frac{\partial X_1}{\partial x_1}(x) + \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}(x)\,,$$

au point $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

De la formule de la divergence, on déduit la formule d'intégration par parties

$$\int_\Omega v(x)\, \partial_j u(x)\, dx = -\int_\Omega u(x)\, \partial_j v(x)\, dx - \int_{\partial\Omega} u(x)\, v(x)\, \nu_j\,, \sigma(dx) \tag{2}$$

pour deux fonctions $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$, où ∂_j désigne la dérivée partielle par rapport à la $j^{\text{ème}}$ variable et où ν_j est la $j^{\text{ème}}$ composante du vecteur normal unitaire $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ dirigée vers l'intérieur de Ω.

3 Convolution et régularisation

On rappelle, et on admettra, les résultats suivants (le premier résulte du théorème de Tonelli et du théorème de Fubini, le second découle du premier et de la définition du support).

Théorème 3.1. ([2], Théorème IV.15, p. 66)*Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction $y \mapsto f(x-y)\,g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$. Si on pose*

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\,g(y)\,dy$$

alors $f \star g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $\|f \star g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1}\,\|g\|_{L^p}$.

Proposition 3.2. ([2], Proposition IV.18, p. 68) *Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$. Alors,*

$$\mathrm{Supp}(f \star g) \subset \overline{\mathrm{Supp}(f) + \mathrm{Supp}(g)}\,.$$

Notations.

- On note $C^k(\Omega)$, $0 \leq k \leq \infty$ l'espace vectoriel des fonctions dont les dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à k existent et sont continues dans Ω,
- On note $C_0^k(\Omega)$, $0 \leq k \leq \infty$ le sous-espace vectoriel des fonctions de $C^k(\Omega)$, à support compact dans Ω (une fonction de $C_0^k(\Omega)$ s'annule donc au voisinage de $\partial\Omega$ dans Ω).

  L'espace $C_0^\infty(\Omega)$, que nous noterons également $\mathcal{D}(\Omega)$, s'appelle l'espace des *fonctions test* sur Ω.

Remarque. On a l'inclusion $C_0^\infty(\Omega) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et l'égalité

$$C_0^\infty(\Omega) = \{u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \mathrm{Supp}(u) \Subset \Omega\}\ .$$

Exemples 3.3.

1) Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, posons $|x|^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2$. La fonction

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left((|x|^2-1)^{-1}\right) & \text{si} \quad |x| < 1\,, \\ 0 \quad \text{si} \quad |x| \geq 1\,, \end{cases} \tag{3}$$

est une fonction test sur $\mathbb{R}^n$ et on a $\mathrm{Supp}(\varphi) = \overline{B}(0,1)$.

2) Plus généralement, les fonctions $\varphi_{a,\varepsilon}$ définies par

$$\varphi_{a,\varepsilon}(x) = \varphi\left(\frac{x-a}{\varepsilon}\right)\,, \tag{4}$$

pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $\varepsilon > 0$, sont des fonctions test sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathrm{Supp}(\varphi_{a,\varepsilon}) = \overline{B}(a,\varepsilon)$.

Il résulte de l'exemple précédent que $\mathcal{D}(\Omega)$ est un espace vectoriel de dimension infinie.

Proposition 3.4. *Il existe une fonction $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que*

$$
\begin{cases}
\rho \geq 0\,, \\
\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\,dx = 1\,, \\
\mathrm{Supp}(\rho) = \overline{B}(0,1)\,.
\end{cases}
\tag{5}
$$

Notation. Pour tout $\varepsilon > 0$, nous noterons ρ_ε la fonction

$$\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\,\rho(\frac{x}{\varepsilon})\,. \tag{6}$$

Notons que la fonction ρ_ε est positive, à support la boule $\overline{B}(0,\varepsilon)$ et d'intégrale 1.

Notation. Pour toute fonction $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, posons

$$u_\varepsilon(x) = u \star \rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\rho(\frac{x-y}{\varepsilon})\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-\varepsilon y)\rho(y)\,dy\,. \tag{7}$$

Théorème 3.5. (Théorème de régularisation et d'approximation)

(i) Soit u une fonction intégrable, nulle en dehors du compact $K \Subset \Omega$. Alors, la fonction u_ε appartient à $\mathcal{D}(\Omega)$ dès que $\varepsilon < \delta = dist(K, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$. Si, de plus, u est supposée continue alors u_ε tend vers u uniformément quand ε tend vers 0.

(ii) Soit u une fonction de $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, alors, u_ε tend vers u dans L^p.

Remarque 3.6. Il résulte en particulier de ce théorème que l'on peut remplacer $C^0_0(\Omega)$ par $\mathcal{D}(\Omega)$ dans les énoncés de la Proposition 2.4 et du Corollaire 2.5.

Notations. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$ un multi-entier, avec $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.
On note x^α le monôme $x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$, de degré $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$,
on note ∂^α ou $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ l'opérateur de dérivation (d'ordre $|\alpha|$) $\frac{\partial}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_n^{\alpha_n}}$,
on note ∂_j l'opérateur de dérivation $\frac{\partial}{\partial x_j}$.

4 Notion de dérivée faible

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Soit $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. On dit que la fonction $v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ est *la dérivée faible* d'ordre α de la fonction u si

$$\forall\, f \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \int_\Omega u\,\partial^\alpha f\,dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\,f\,dx\,. \tag{8}$$

Il résulte de la Remarque 3.6 que la fonction v, si elle existe, est déterminée de manière unique dans L^1_{loc} par la formule (8).

Si la fonction u est de classe $C^{|\alpha|}$ dans Ω, on a immédiatement $v = \partial^\alpha u$ presque partout dans Ω. Dans le cas général, on écrira

$$v = \partial^\alpha u \text{ au sens faible, ou bien } v \overset{w}{=} \partial^\alpha u\,.$$

On dit qu'une fonction $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ est *faiblement différentiable* si elle admet des dérivées premières $\partial_j u\,, 1 \leq j \leq n$ au sens faible. On dit qu'une fonction $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ est k-fois faiblement différentiable, $k \geq 1$, si elle admet des dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à k au sens faible.

Exercice 4.1. Soit $u(x) = |x|$. Montrer que cette fonction est dérivable au sens faible sur $\mathbb{R}$ et déterminer la dérivée faible. $\triangleleft$

Exercice 4.2. On appelle fonction de Heaviside la fonction $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$Y(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x > 0\,, \\ 0 \text{ si } x \leq 0\,. \end{cases}$$

La fonction de Heaviside est-elle faiblement dérivable sur $\mathbb{R}$? $\triangleleft$

Exercice 4.3. Soient $u, v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Montrer que $v \overset{w}{=} \partial^\alpha u$ si et seulement s'il existe une suite $\{u_m\}$ de fonction $C^\infty(\Omega)$ telle que

$$u_m \overset{L^1(\omega)}{\longrightarrow} u\,, \quad \text{et} \quad \partial^\alpha u_m \overset{L^1(\omega)}{\longrightarrow} v\,.$$

$\triangleleft$

5 Espaces de Sobolev

Notation. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p < \infty$, introduisons l'espace

(9)
$$C^{\infty,\,k,\,p}(\Omega) = \left\{ u \in C^\infty(\Omega) \mid \partial^\beta u \in L^p(\Omega) \text{ pour tout } |\beta| \leq k \right\}\,,$$

et munissons le de la norme

(10)
$$\|u\|_{k,p} = \Big(\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|^p_{L^p} \Big)^{1/p}\,.$$

Quand $p = 2$, cette norme provient d'un produit scalaire.

Il y a deux manières classiques d'introduire les espaces de Sobolev.

Définition 5.1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $1 \leq p < \infty$, on définit l'espace de Sobolev $H^{k,p}(\Omega)$ comme étant le complété de l'espace $C^{\infty,\,k,\,p}(\Omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_{k,p}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $1 \leq p < \infty$, on définit l'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ comme

(11)
$$\begin{aligned} W^{k,p}(\Omega) = \{ & u \in L^p(\Omega) \mid \forall\,\alpha, \quad |\alpha| \leq k, \\ & \exists\, v_\alpha \in L^p(\Omega), \text{ tq } v_\alpha = \partial^\alpha u \text{ au sens faible} \}\,. \end{aligned}$$

On a ainsi deux manières naturelles de définir les espaces de Sobolev. Il se trouve que les deux définitions ci-dessus sont équivalentes. Cela n'a été découvert que relativement tardivement. Plus précisément, on a le résultat suivant dû à N. Meyers et J. Serrin (1964),

Théorème 5.2. ([3], Theorem 7.9, p. 154) *Pour tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $1 \leq p < \infty$, on a*

$$H^{k,p}(\Omega) = W^{k,p}(\Omega)\,.$$

Il est facile de voir que $W^{k,p}(\Omega)$, muni de la norme $\|\cdot\|_{k,p}$, est un espace de Banach séparable et que $H^{k,p}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega)$. La réciproque se démontre par régularisation.

6 Les espaces H^k

Dans ce cours, nous nous limiterons au cas où $p = 2$ et nous utiliserons le Théorème 5.2 chaque fois que cela sera nécessaire. Par commodité, nous introduisons la notation suivante.

Définition 6.1. Étant donné $k \in \mathbb{N}$, nous désignerons par $H^k(\Omega)$ l'espace de Sobolev

$$\begin{aligned} H^k(\Omega) = \big\{ & u \in L^2(\Omega) \mid \forall\, \alpha, \quad |\alpha| \leq k, \\ & \exists\, v_\alpha \in L^2(\Omega),\ \text{tq } v_\alpha = \partial^\alpha u \text{ au sens faible} \big\}\,, \end{aligned} \tag{12}$$

On introduit sur H^k le produit scalaire

$$\langle u, v\rangle_k = \sum_{|\alpha| \leq k} \langle \partial^\alpha u, \partial^\alpha v\rangle\,, \tag{13}$$

et la norme associée $\|u\|_k = \sqrt{\langle u, u\rangle_k}$ (ici, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur $L^2(\Omega)$).

Théorème 6.2. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $k \in \mathbb{N}$. L'espace $H^k(\Omega)$ muni du produit scalaire* (13) *est un espace de Hilbert séparable.*

Remarque. L'intérêt d'avoir un espace séparable est de pouvoir construire une base hilbertienne dénombrable.

Exercices 6.3.

1) Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction

$$u(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{si } x \leq -1\,, \\ 1 + x\,, & \text{si } -1 \leq x \leq 0\,, \\ 1 - x\,, & \text{si } 0 \leq x \leq 1\,, \\ 0, & \text{si } 1 \leq x\,. \end{cases}$$

Montrer que $u \in H^1(\mathbb{R})$. Montrer que la fonction $v = 1 - u$ est dans $H^1([-2, 2])$, mais qu'elle n'est pas dans $H^1(\mathbb{R})$.

2) Montrer que l'on a l'inclusion $C^1(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$ pour tout ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Plus généralement, montrer que si $u \in C^1(\Omega)$ et si $u, \partial_j u \in L^2(\Omega), 1 \leq j \leq n$, alors $u \in H^1(\Omega)$.

3) Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une injection continue de $H^1(]a,b[)$ dans $C^0([a,b])$.

4) Pour $0 < a < 1$ donné, on pose $\Omega = B(0,a) \subset \mathbb{R}^2$. Pour $k > 0$, on définit (sauf en 0) la fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ par

$$u(x,y) = \big(-\ \ln \sqrt{x^2+y^2}\,\big)^k .$$

Montrer que la fonction u est dans L^2 pour tout $k > 0$ et qu'elle n'admet pas de représentant continu sur Ω. Montrer que $u \in H^1(\Omega)$ si $k < 1/2$. Déduire de ce qui précède que $H^1(\Omega) \not\subset C^0(\Omega)$. $\lhd$

Proposition 6.4. *Pour tout $m \in \mathbb{N}$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \le m$, l'opérateur de dérivation ∂^α est un opérateur linéaire continu de $H^m(\Omega)$ dans $H^{m-|\alpha|}(\Omega)$.*

Définition 6.5. Pour $m \in \mathbb{N}$, on note $H_0^m(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$.

Exercices 6.6.

1) Montrer que $H_0^1(]a,b[) \subsetneqq H^1(]a,b[)$.

2) Soient $u \in H^1(\Omega)$ et $f \in \mathcal{D}(\Omega)$. Montrer que $f\,u \in H_0^1(\Omega)$.

Théorème 6.7. *Pour tout $m \in \mathbb{N}$, l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^m(\mathbb{R}^n)$. Autrement dit,*

$$H_0^m(\mathbb{R}^n) = H^m(\mathbb{R}^n)\,.$$

Remarque. Nous montrerons dans la Section 7 que $H_0^1(\Omega) \subsetneqq H^1(\Omega)$ si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.

Définition 6.8. Étant donnée u une fonction définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, on note $\tilde{u}$ la fonction qui prolonge u par 0 sur $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$.

Proposition 6.9. *Si $u \in H_0^m(\Omega)$, alors $\tilde{u} \in H^m(\mathbb{R}^n)$.*

7 Inégalité de Poincaré

L'inégalité ci-dessous, dite *inégalité de Poincaré*, joue un rôle important dans l'étude des problèmes variationnels.

Théorème 7.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, borné dans une direction. Alors, il existe une constante $C(\Omega) > 0$ telle que*

$$\forall\, u \in H_0^1(\Omega)\,, \qquad \|u\|_{0,\Omega} \le C(\Omega) \left(\sum_{j=1}^{n} \|\partial_j u\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2} . \tag{14}$$

Remarque. Le théorème précédent est faux pour $H^1(\Omega)$ (prendre pour Ω un domaine borné et pour u la fonction identiquement égale à 1). Ceci montre en particulier que les espaces H_0^1 et H^1 sont distincts en général.

Corollaire 7.2. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, borné dans au moins une direction. La semi-norme*

$$|u|_{1,\Omega} = \left(\sum_{j=1}^{n} \|\partial_j u\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}$$

est une norme sur $H_0^1(\Omega)$, équivalente à la norme $\|\cdot\|_1$.

Remarque. L'inégalité de Poincaré permet d'affirmer que la forme bilinéaire

$$\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) \ni (u,v) \to \int_\Omega \langle du, dv \rangle \, dx$$

est coercive.

Complément. Dans le cas d'un ouvert borné, on peut caractériser la meilleure constante $C(\Omega)$ dans l'inégalité de Poincaré comme étant $\delta_1(\Omega)^{-1/2}$, où $\delta_1(\Omega)$ est *la plus petite valeur propre* du Laplacien avec condition de Dirichlet dans Ω,

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda\, u \quad \text{dans } \Omega\,, \\ u|_{\partial\Omega} = 0\,. \end{cases} \tag{15}$$

8 Théorèmes de trace

Étant donnés Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, nous introduisons les notations

$$\begin{aligned} C^m(\overline{\Omega}) = \big\{ f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} \mid \exists\, \Omega_1 \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n), \quad \overline{\Omega} \subset \Omega_1\,, \\ \exists\, f_1 \in C^m(\Omega_1) \text{ t.q. } f_1|\overline{\Omega} = f \big\}\,, \end{aligned} \tag{16}$$

et

$$\begin{aligned} C_0^m(\overline{\Omega}) = \big\{ f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} \mid \exists\, \Omega_1 \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n), \quad \overline{\Omega} \subset \Omega_1\,, \\ \exists\, f_1 \in C_0^m(\Omega_1) \text{ t.q. } f_1|\overline{\Omega} = f \big\}\,. \end{aligned} \tag{17}$$

8.1 Théorème de trace pour $\mathbb{R}_+^n$ et applications

Dans cette section, nous traitons le cas où

$$\begin{cases} \Omega = \mathbb{R}_+^n := \{x = (x', x_n) = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}\,, \\ \Gamma := \partial\Omega = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}\,. \end{cases} \tag{18}$$

Proposition 8.1. *L'espace $C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ est dense dans $H^1(\mathbb{R}_+^n)$.*

On peut bien-sûr parler de la *trace* d'une fonction v de $C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ sur $\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}$: on définit $\gamma_0(v)$ par

$$\gamma_0(v)(x') = v(x',0)\,, \qquad \text{pour tout } x'\in\mathbb{R}^{n-1}\,. \tag{19}$$

Il est clair que l'on a $\gamma_0(v)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$. On a le lemme important suivant.

Lemme 8.2. *Pour toute $v\in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, on a*

$$\|\gamma_0(v)\|_{0,\mathbb{R}^{n-1}} \le \|v\|_{1,\mathbb{R}^n_+}\,.$$

Corollaire 8.3. *L'application γ_0 définie par* (19) *s'étend en une application linéaire continue de $H^1(\mathbb{R}^n_+)$ dans $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$, telle que*

$$\forall\, v\in H^1(\mathbb{R}^n_+)\,, \qquad \|\gamma_0(v)\|_{0,\mathbb{R}^{n-1}} \le \|v\|_{1,\mathbb{R}^n_+}\,.$$

Remarque. Nous utiliserons également la notation $u|\partial\mathbb{R}^n_+$ à la place de $\gamma_0(u)$.

Théorème 8.4. *Soit γ_0 l'application trace de $H^1(\mathbb{R}^n_+)$ dans $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$. Pour tous u et v dans $H^1(\mathbb{R}^n_+)$, on a les égalités* (formules de Green)

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n_+} v(x)\,\partial_j u(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}^n_+} u(x)\,\partial_j v(x)\,dx\,, \qquad 1\le j\le n-1\,,\\ \int_{\mathbb{R}^n_+} v(x)\,\partial_n u(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}^n_+} u(x)\,\partial_n v(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \gamma_0(v)(x')\,\gamma_0(u)(x')\,dx'\,. \end{cases}$$

Théorème 8.5. *Soit γ_0 l'application trace de $H^1(\mathbb{R}^n_+)$ dans $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$. On a l'égalité*

$$H^1_0(\mathbb{R}^n_+) = \left\{ u\in H^1(\mathbb{R}^n_+) \;\middle|\; \gamma_0(u)=0 \right\}\,.$$

8.2 Théorème de trace pour un ouvert Ω et applications

Nous admettrons le résultat suivant, dont la démonstration est plus technique, que difficile.

Théorème 8.6. ([4], Théorème 1.3.2, p. 25) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ dont la frontière $\partial\Omega$ est une sous-variété fermée de classe C^k (avec $k\ge 1$) et de dimension $(n-1)$. Alors, $C^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$ et l'application qui à v dans $C^\infty(\overline{\Omega})$ associe $\gamma_0(v)=v|\partial\Omega$ se prolonge en un opérateur linéaire continu γ_0 de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, appelé* opérateur de trace.

Théorème 8.7. *Soit γ_0 l'application trace de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$. Pour tous $u,v\in H^1(\Omega)$, on a l'égalité* (formule de Green)

$$\int_\Omega v(x)\,\partial_j u(x)\,dx = -\int_\Omega u(x)\,\partial_j v(x)\,dx - \int_{\partial\Omega} \gamma_0(v)(x')\,\gamma_0(u)(x')\,\nu_j\,\sigma(dx')\,,$$

où $\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_n)$ est la normale unitaire à $\partial\Omega$ dirigée vers l'intérieur de Ω et où σ désigne la mesure naturelle sur $\partial\Omega$.

Théorème 8.8. ([4], Théorème 1.3.2, p. 25) *Soit γ_0 l'application trace de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$. On a l'égalité*

$$H_0^1(\Omega) = \left\{u \in H^1(\Omega) \;\middle|\; \gamma_0(u) = 0\right\} .$$

Remarque. Les résultats précédents s'étendent au cas où la frontière $\partial\Omega$ est seulement C^1 par morceaux (penser au cas où Ω est l'intérieur d'un rectangle de $\mathbb{R}^2$ ou bien d'un parallélépipède de $\mathbb{R}^3$).

8.3 Cas de l'espace H^2

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dont la frontière est assez régulière et soit $u \in H^2(\Omega)$. En particulier, u est dans $H^1(\Omega)$ et on peut donc définir sa trace $\gamma_0(u)$ sur le bord $\partial\Omega$ de l'ouvert. Les fonctions $\partial_j u$, pour $1 \leq j \leq n$ sont également dans $H^1(\Omega)$ et on peut donc définir leurs traces $\gamma_0(\partial_j u)$ sur le bord de Ω. On définit la dérivée normale intérieure de u le long de $\partial\Omega$ (au sens faible) par

$$\gamma_1(u) = \sum_{j=1}^{n} \nu_j \gamma_0(\partial_j u) \,,$$

et on utilisera également les notations $\nu \cdot u$ et $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ (comme ci-dessus, le vecteur normal unitaire le long de $\partial\Omega$ est dirigé vers l'intérieur et noté $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$).

Si $u, v \in H^2(\Omega)$ et si la frontière est assez régulière, on a la formule de Green

$$-\int_\Omega v\, \Delta u\, dx = \int_\Omega \langle du, dv\rangle\, dx + \int_{\partial\Omega} (\nu \cdot u)\, v\, \sigma(dx) \,.$$

9 Théorèmes de compacité

Théorème 9.1. (Théorème de Rellich, [3], Theorem 7.22 p. 167) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Alors, l'injection canonique j de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est un opérateur compact.*

Théorème 9.2. ([3], Theorem 7.26 p. 171) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière $\partial\Omega$ de classe C^1. Alors, l'injection canonique j de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est un opérateur compact.*

Remarque. Remarquons qu'il n'y a aucune hypothèse sur la régularité du bord de Ω dans le Théorème 9.1. Par contre, il existe des ouverts bornés non réguliers de $\mathbb{R}^n$ pour lesquels l'inclusion du Théorème 9.2 n'est pas compacte (mais le théorème s'étend au cas des domaines C^1 par morceaux).

10 Théorème de régularité

Mentionnons le théorème de régularité

Théorème 10.1. ([3], Theorem 7.26 p. 171) *Soit Ω un ouvert borné de classe C^1 dans $\mathbb{R}^n$. Pour $m > k + n/2$, il y a une injection continue de $H^m(\Omega)$ dans $C^k(\overline{\Omega})$.*

On pourra trouver une étude exhaustive des espaces de Sobolev dans [1] et des applications dans [3] et [4] (ce dernier ouvrage est orienté vers les applications numériques).

Références

[1] Adams, R.A. — Sobolev spaces, Academic Press 1975

[2] Brezis, Haïm. — Analyse fonctionnelle. Théorie et Applications, Masson 1973

[3] Gilbarg, David – Trudinger, Neil S. — Elliptic partial differential equations of second order, Grundlehren 224, Springer 1983

[4] Raviart, Pierre-Arnaud – Thomas, Jean-Marie. — Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Masson 1983

Pierre Bérard

Institut Fourier
UMR 5582 UJF – CNRS

`Pierre.Berard@ujf-grenoble.fr`

`www-fourier.ujf-grenoble.fr/~pberard/notes_cours.html`