ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

SMA

Les espaces de Sobolev

Jonathan Rochat
Sous la direction du professeur B. Dacorogna
et O. Kneuss

Dernière modification le 16 décembre 2009

Table des matières

Résumé

Nous introduisons ici les notions théoriques essentielles sur les espaces de Sobolev ainsi qu'une brève application dans le domaine du calcul des variations.

1 Introduction

Les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels. Ils doivent leur nom au mathématicien russe Sergei Lvovich Sobolev ($1908 - 1989$). En quelques mots, un espace de Sobolev est un espace de Banach ou un espace de Hilbert de fonctions pouvant être dérivées suffisamment de fois. Cet espace est muni d'une norme qui mesure à la fois la taille et la régularité de la fonction. Cependant, toutes les fonctions intégrables ne sont pas continues, encore moins dérivables. Il est donc nécessaire d'introduire une nouvelle dérivation dite "faible" ou au sens des distributions, ce qui va étendre la notion ordinaire de dérivée. En plaçant une telle définition, toute fonction devient alors indéfiniment dérivable au sens des distributions, nous permettant ainsi de définir les espaces de Sobolev.

Ces espaces sont un outil très important dans l'étude des équations aux dérivées partielles. Ils permettent en particulier d'étudier la régularité des solutions de tels problèmes. En effet, ils se sont imposés comme un environnement adéquat pour la recherche de solutions, car ce sont des espaces fermés.

Ce projet constitue une introduction à ce vaste sujet des mathématiques. Nous supposons le lecteur familiarisé avec la théorie de la mesure et l'intégrale de Lebesgue. Nous ferons néanmoins quelques rappels sur le sujet dans les préliminaires, contenant aussi les principales propriétés des espaces de Lebesgue et des fonctionnelles linéaires. Nous terminerons ces rappels avec les notions principales de dérivation au sens faible.

Au chapitre 3 nous introduisons les espaces de Sobolev définis sur un intervalle réel que nous appelerons I. Nous nous restreindrons dans un premier temps aux espaces notés $W^{1,p}(I)$, qui contiennent les fonctions intégrables au sens de Lebesgue dont la dérivée au sens des distributions est aussi intégrable. Nous en verrons les propriétés essentielles, en particulier qu'une fonction dans un tel espace est continue, et même bornée si l'intervalle I est borné. On verra de plus qu'une fonction dans $W^{1,p}(I)$ peut être approchée par une suite de fonctions C^∞ à support compact dans $\mathbb{R}$.
Une fonction de $W^{1,p}(I)$ possède encore d'autres caractéristiques intéressantes : $u \in W^{1,p}(I)$ si et seulement si

$$\left\| \frac{u(x+h) - u(x)}{|h|} \right\|_{L^p(w)} \leq C.$$

où w est un compact inclu dans I et C est une constante dépendante de $\|u'\|_{L^p(I)}$. Ce type d'inégalités sont très utiles pour étudier la régularité de solutions d'équations aux dérivées partielles. Nous en verrons des applications à la fin de ce travail.

Dans les problèmes variationnels ou les équations aux dérivées partielles, on donne souvent des conditions au bord sur les fonctions u recherchées. Pour cela, on utilise en général les espaces $W_0^{1,p}(I)$, qui contiennent toutes les fonctions continues sur I s'annulant sur ∂I. Nous donnerons les principales propriétés de ces espaces et nous terminerons le chapitre en définissant les espaces de Sobolev d'ordre quelconque sur I.

Malheureusement, toutes les propriétés montrées sur un intervalle réel ne sont plus toujours vraies lorsque nous observons de tels espaces dans un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, que nous noterons Ω. En effet, les fonctions n'y sont plus forcément continues et il devient plus compliqué d'en étudier la régularité. Puisque tous les ouverts ne sont pas réguliers, il devient fastidieux de définir la valeur de la fonction sur le bord d'un domaine. Nous énoncerons donc seulement des résultats principaux et donnerons quelques exemples.

Finalement, au chapitre 5, nous nous intéresserons au calcul des variations, qui consiste à minimiser l'intégrale d'une fonction qui dépend notamment d'un élément pris dans un espace de Sobolev. Plus précisément, on cherche u dans un sous-espace particulier X de $W^{1,p}(I)$ vérifiant

$$\inf \left\{ I(u) = \int_{\Omega} f(x, u(x), \nabla u(x)) dx : u \in X(\Omega) \right\} = m.$$

où f est une fonction continue. Nous allons montrer que si la fonction f est strictement convexe et vérifie certaines hypothèses, alors il existe une unique solution au problème ci-dessus.
Ensuite, si la fonction $f = f(x, u, \zeta)$ est dérivable et que la solution de notre problème est C^2, alors elle satisfait l'équation

$$(E) \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} [f_{\zeta_i}(x, \bar{u}, \nabla \bar{u})] = f_u(x, \bar{u}, \nabla \bar{u}), \quad \forall x \in \bar{\Omega},$$

plus connue sous le nom d'équation d'Euler-Lagrange. Cette dernière expression nous permettra d'étudier la régularité d'une solution de notre problème, un sujet que nous traiterons seulement en partie dans une dimension quelconque. Dans un intervalle de $\mathbb{R}$, nous remarquerons néanmoins que si la fonction f est suffisamment régulière, alors cette régularité sera aussi assurée pour la solution. Néanmoins, ce n'est plus toujours le cas en dimension supérieur.

2 Préliminaires

Dans tout le travail, Ω sera en général un ouvert de $\mathbb{R}^n$ pour un $n \in \mathbb{N}$ quelconque et I un intervalle dans $\mathbb{R}$, pas forcément borné.

2.1 Les espaces L^p

Définition 2.1 (Fonction mesurable)
Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est dite mesurable *si pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble*

$$E_\alpha = \{x \in \Omega | f(x) \geq \alpha\}$$

est mesurable au sens de Lebesgue.

Définition 2.2 (Fonction intégrable)
On dit qu'une fonction mesurable $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est intégrable *au sens de Lebesgue si*

$$\int_\Omega |f| < \infty.$$

Définition 2.3 (Espace de Lebesgue)
Soit $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$. On appelle l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ *l'ensemble*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} | \ f \textit{ mesurable et } |f|^p \textit{ intégrable.}\}$$

De plus, pour toute fonction $f \in L^p(\Omega)$, on pose :

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = \infty$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable, alors on définit $\| \cdot \|_{L^\infty}$:

$$\|f\|_{L^\infty} = \mathrm{Supess}(f) = \inf\{\alpha : |f(x)| \leq \alpha \textit{ p.p.}\}.$$

Théorème 2.4
On a les trois propriétés suivantes :

1. *L^p est un espace vectoriel et $\| \cdot \|_{L^p}$ est une norme pour tout $1 \leq p \leq \infty$.*
2. *L^p est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq \infty$.*
3. *L^p est séparable pour tout $1 \leq p < \infty$.*

Théorème 2.5 (Convergence Dominée)
Soit $(f_v)_{v \geq 1}$ une suite de fonctions mesurables telles que $|f_v| \leq g$ p.p, où g est une fonction intégrable. Supposons de plus que $\lim_{v \to \infty} f_v(x) = f(x)$ p.p. Alors f est intégrable et

$$\lim_{v \to \infty} \int f_v = \int f.$$

Définition 2.6
Soit $1 \leq p \leq \infty$; on dit qu'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ appartient à $L^p_{loc}(\Omega)$ si $f|_K \in L^p(\Omega)$ pour tout compact $K \subset \Omega$.

Définition 2.7 (Support d'une fonction continue)
Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle support de f *l'ensemble*

$$\mathrm{supp}(f) = \mathrm{adh}\{x \in \omega : f(x) \neq 0\}.$$

Définition 2.8 (L'espace $C_c(\Omega)$)
On désigne par $C_c(\Omega)$ l'espace des fonctions continues sur Ω à support compact, c'est-à-dire

$$C_c(\Omega) = \{f : \mathrm{supp}(f) \subset \Omega\}$$

Théorème 2.9 (Théorème de densité)
Pour tout $1 \le p < \infty$, l'espace $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$; c'est-à-dire que pour toute fonction $f \in L^p(\Omega)$ et pour tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction $f_\epsilon \in C_c^\infty(\Omega)$ telle que $\|f - f_\epsilon\|_{L^p} < \epsilon$.

Remarque 2.10
Le théorème ci-dessus n'est pas vrai si $p = \infty$. En effet, si $f_\epsilon \in C_c^\infty(\Omega)$ converge vers une fonction f dans $L^\infty(\Omega)$, alors f est continue. En effet,

$$\|f_\epsilon - f\|_{L^\infty} < \epsilon$$

et donc f_ϵ converge uniformément vers f, ce qui nous assure la continuité de f. Ainsi une fonction dans L^∞ discontinue sur un ensemble de mesure non nul ne possède aucune suite $f_\epsilon \in C_c^\infty(\Omega)$ convergente vers f dans L^∞.

Définition 2.11 (Exposant conjugué)
Soit $1 \le p \le \infty$; on désigne par p' l'exposant conjugué de p qui vérifie $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Théorème 2.12 (Inégalité de Young)
Soit $1 < p < \infty$ et p' son exposant conjugué. Alors pour tout $a \ge 0, b \ge 0$ on a

$$ab \le \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}.$$

Théorème 2.13 (Inégalité de Hölder)
Soit $f \in L^p$ et $g \in L^{p'}$. Alors $f \cdot g \in L^1$ et

$$\int |fg| \le \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{p'}}.$$

2.2 Convergence faible dans les espaces L^p

Définition 2.14
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert.

1. *Si $1 \le p < \infty$, on dit qu'une suite u_ν converge faiblement vers u dans L^p si u_ν, $u \in L^p$ et si*

   $$\lim_{\nu \to \infty} \int_\Omega [u_\nu(x) - u(x)]\varphi(x) = 0, \quad \forall \varphi \in L^{p'}(\Omega).$$

   On note dans ce cas-là $u_\nu \rightharpoonup u$.
2. *Si $p = \infty$, on dit que la suite u_ν converge $(*)$-faiblement vers u dans L^∞ si u_ν, $u \in L^\infty$ et si*

   $$\lim_{\nu \to \infty} \int_\Omega [u_\nu(x) - u(x)]\varphi(x)dx = 0, \quad \forall \varphi \in L^1(\Omega).$$

   On note $\overset{*}{\rightharpoonup} u$ dans L^∞.

Théorème 2.15
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné. Les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. *Si $u_\nu \to u$, alors $u_\nu \rightharpoonup u$ dans L^p, pour tout $1 \le p < \infty$.*
2. *Si $1 \le p \le \infty$ et si $u_\nu \rightharpoonup u$ dans L^p, alors il existe une constante $C > 0$ telle que*

   $$\|u_\nu\|_{L^p} \le C \text{ et } \|u\|_{L^p} \le \liminf_{\nu \to \infty} \|u_\nu\|_{L^p}.$$
3. *Si $1 < p < \infty$ et s'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|u_\nu\|_{L^p} \le C$, alors il existe une sous suite $\{u_{\nu_i}\}$ et u dans L^p tel que*

   $$u_{\nu_i} \rightharpoonup u \text{ dans } L^p.$$

   Si $p = \infty$ et s'il existe une constante $K > 0$ telle que $\|u_\nu\|_{L^\infty} \le K$, alors il existe une sous suite $\{u_{\nu_i}\}$ et u dans L^p tel que

   $$u_{\nu_i} \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ dans } L^\infty.$$

Exemple 2.16
Soit $\{f_\nu\}_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions définie par :*

$$f_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{\nu}} 1_{[\nu,2\nu]}(x).$$

Alors f_ν *converge faiblement vers* 0 *dans* $L^2([0,\infty[)$. *En effet, si* g *est une fonction à support compact, alors il existe une constante* C *tel que* $\int_0^\infty g(x)dx \leq C$ *pour tout* x *dans* $[0,\infty]$. *Ainsi*

$$\begin{aligned}\lim_{\nu\to\infty}\int_0^\infty [f_\nu(x)-f(x)]g(x) &= \lim_{\nu\to\infty}\int_\nu^{2\nu}\frac{1}{\sqrt{\nu}}g(x)dx\\ &\leq \lim_{\nu\to\infty}\frac{C}{\sqrt{\nu}}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Cependant, f_ν *ne converge pas fortement vers une fonction* f *dans* $L^2([0,\infty])$. *En effet, si c'est le cas, alors il existe une sous-suite de* f_ν *qui converge presque partout vers* f, *et donc* $f = 0$ *est la seule limite possible. Mais*

$$\begin{aligned}\|f_\nu\|^2_{L^2} &= \int_0^\infty \frac{1}{\nu}1_{[\nu,2\nu]}(x)\\ &= \frac{1}{\nu}\int_\nu^{2\nu} dx = 1.\end{aligned}$$

pour tout ν, *donc* $\|f_\nu\|_{L^2}$ *ne converge pas vers* $\|f\|_{L^2} = 0$.

2.3 Forme linéaire et dual de L^p

Définition 2.17 (Forme linéaire)
Une forme linéaire *sur un espace vectoriel* E *est une application linéaire* $f : E \to \mathbb{R}$.

Définition 2.18 (Continuité d'une forme linéaire)
Une forme linéaire f *dans* E *est continue si et seulement s'il existe* $C > 0$ *une constante telle que* $\|f\|_E \leq C$.

Définition 2.19 (Dual d'un espace de Banach)
Soit E *un espace de Banach. On désigne par* E' *l'*espace dual *de* E. *Plus explicitement,*

$$E' = \{f : E \to \mathbb{R},\ f \text{ est une forme linéaire et continue}\}.$$

E' *est muni de la norme duale*:

$$\|f\|_{E'} = \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|\leq 1}} |f(x)| = \sup_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|_E}.$$

Définition 2.20 (Espace Réflexif)
Soit E *un espace de Banach et soit* J *l'injection canonique de* E *dans* E'', *où* E'' *est le dual du dual de* E. *On dit que* E *est* reflexif *si* J *est surjective, c'est-à-dire* $J(E) = E''$.

Théorème 2.21
L^p *est réflexif pour* $1 < p < \infty$.

Proposition 2.22 (Prolongement d'une forme linéaire)
Soit H *un espace vectoriel normé et* A *un sous-espace vectoriel de* H *tel que* $\bar{A} = H$. *Soit* $L : A \to \mathbb{R}$ *une forme linéaire continue. Alors il existe une extension linéaire* $\tilde{L}$ *de* L *continue sur* H.

Démonstration. La preuve se déroule en trois étapes :

$L(x_n)$ est une suite de Cauchy : Soit $x \in H$ et x_n une suite d'élément quelconque de A qui converge vers x. Montrons que $L(x_n)$ est une suite de Cauchy. Soit $\epsilon > 0$. Par la linéarité de L,

$$\|L(x_n) - L(x_m)\| \leq \|L(x_n - x_m)\| \leq \|L\| \cdot \|x_n - x_m\|.$$

Comme $x_n \to x$ dans H, pour tout $\delta > 0$, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout n et m supérieur à N on a $\|x_n - x_m\| < \delta$. En posant $\delta = \frac{\epsilon}{\|L\|}$, on obtient bien que $L(x_n)$ est une suite de Cauchy et donc

$$L(x_n) \to L(x) \text{ dans } \mathbb{R},$$

puisque $\mathbb{R}$ est un espace de Banach.

Indépendance de la limite : Soit x_n, $y_n \in A$ deux suites qui convergent vers $x \in H$. Donc $x_n - y_n \to 0$ et

$$\|L(x_n) - L(y_n)\| \leq \|L\| \cdot \|x_n - y_n\| \to 0 \text{ si } n \to \infty.$$

On obtient ainsi

$$\lim_{n\to\infty} L(x_n) = \lim_{n\to\infty} L(y_n) = L(x).$$

et donc la limite ne dépend pas de la suite.

Définition du prolongement : On pose

$$\tilde{L}(x) = \lim_{x_n \to x} L(x_n)$$

pour tout $x \in H$ et pour une suite $x_n \in A$ tel que $x_n \to x$. Par les points 1. et 2. cette forme est bien définie.

Montrons qu'elle est linéaire :

$$\begin{aligned}
\tilde{L}(\alpha x + \beta y) &= \lim_{x_n \to x, y_n \to y} L(\alpha x_n + \beta y_n) \\
&= \lim_{x_n \to x, y_n \to y} [\alpha L(x_n) + \beta L(y_n)] \\
&= \alpha \lim_{x_n \to x} L(x_n) + \beta \lim_{y_n \to y} L(y_n) \\
&= \alpha \tilde{L}(x) + \beta \tilde{L}(y).
\end{aligned}$$

La continuité nous est assurée, car $\|\tilde{L}\| = \|L\|$. En effet, soit $x \in H$. Alors il existe $x_n \in A$ tel que $x_n \to x$. Par conséquent,

$$\frac{|\tilde{L}(x)|}{\|x\|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|L(x_n)|}{\|x_n\|} \leq \lim_{n\to\infty} \|L\|.$$

Donc $\|\tilde{L}\| \leq \|L\|$. L'autre inégalité est clair.

On a enfin $\tilde{L}_{|A} = L$. En effet, si $x \in A$, il suffit de prendre la suite constante $x_n = x$.

□

Proposition 2.23
Soit N un espace vectoriel normé et soit $F \subset N$ un sous-espace vectoriel tel que $\bar{F} \neq N$. Alors il existe $f \in N'$, $f \neq 0$ tel que

$$\langle f, x \rangle = 0 \quad \forall x \in F.$$

Théorème 2.24 (Théorème de représentation de Riesz)
Soit $1 < p < \infty$ et soit $\varphi \in (L^p)'$. Alors il existe $u \in L^{p'}$ unique tel que

$$\langle \varphi, f \rangle = \int uf \quad \forall f \in L^p.$$

De plus on a

$$\|u\|_{L^{p'}} = \|\varphi\|_{(L^p)'}.$$

Démonstration. On définit l'opérateur linéaire $T : L^{p'} \to (L^p)'$ par

$$\langle Tu, f\rangle = \int uf \quad \forall f \in L^p.$$

On procède ensuite en deux parties :

1. Montrons que $\|Tu\|_{(L^p)'} = \|u\|_{L^{p'}}$, $\forall u \in L^{p'}$.

   Soit $u \in L^{p'}$ fixé. L'application $f \in L^p \mapsto \int uf$ est une forme linéaire continue sur L^p. On a, par l'inégalité de Hölder,

   $$|\langle Tu, f\rangle| \leq \|u\|_{L^{p'}} \|f\|_{L^p}$$

   Par la norme duale, on obtient

   $$\|Tu\|_{(L^p)'} = \sup_{\substack{f\in L^p \\ f\neq 0}} \frac{|\langle Tu, f\rangle|}{\|f\|_{L^p}} \leq \|u\|_{L^{p'}} \tag{1}$$

   Posons ensuite $f_0(x) = |u(x)|^{p'-2}u(x)$.
   On a $\|f_0\|_{L^p} = \|u\|_{L^{p'}}^{p'-1} \leq \infty$, donc $f_0 \in L^p$.
   De plus, $|\langle Tu, f_0\rangle| = \|u\|_{L^{p'}}^{p'}$. Par conséquent,

   $$\|Tu\|_{(L^p)'} \geq \frac{|\langle Tu, f_0\rangle|}{\|f_0\|_{L^p}} = \|u\|_{L^{p'}}. \tag{2}$$

   En comparant (1) et (2), on a bien l'égalité souhaitée. Il en résulte que l'opérateur T ainsi défini est une isométrie, donc en particulier injectif.

2. Il nous reste par conséquent à prouver que T est surjectif. On définit le sous-espace $E = T(L^{p'})$. Comme E est fermé, il reste à montrer que E est dense dans $(L^p)'$. Or, comme L^p est reflexif pour tout $1 < p < \infty$, alors $(L^p)'' = L^p$. Soit $h \in (L^p)''(= L^p$ car L^p est reflexif $\forall\ 1 < p < \infty)$ tel que $\langle Tu, h\rangle = 0$ pour tout $u \in L^{p'}$; vérifions que $h = 0$. On obtiendra ainsi que E est dense dans $(L^p)'$ par la proposition 2.23. On a

   $$\int uh = \langle Tu, h\rangle = 0 \quad \forall u \in L^{p'}.$$

   En prenant $u = |h|^{p-2}h$, on a $u \in L^{p'}$ et $\|h\|_{L^p} = 0$, donc $h = 0$ par la positivité de la norme $\|\ \|_{L^p}$. On conclut ainsi que T est surjective, ce qui termine la preuve.

□

Remarque 2.25
Ce théorème exprime que toute forme linéaire continue sur L^p avec $1 < p < \infty$ peut se représenter à l'aide d'une fonction de $L^{p'}$. Puisque l'application $\varphi \mapsto u$ est un opérateur linéaire isométrique et surjectif, on identifie alors le dual de L^p avec $L^{p'}$. Par conséquent, nous admettrons par la suite l'identification $(L^p)' = L^{p'}$.

Lemme 2.26 (Lemme fondamental du calcul des variations)
Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tel que

$$\int fu = 0 \quad \forall u \in C_c(\Omega). \tag{3}$$

Alors $f = 0$ p.p. sur Ω.

Dans la démonstration de ce lemme, on aura besoin du

Lemme 2.27 (Urysohn)
Soit A et B deux ensembles compacts non vides et disjoints de $\mathbb{R}^n$. Alors il existe une fonction continue $f : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ telle que $f(a) = 0$ pour tout $a \in A$ et $f(b) = 1$ pour tout $b \in B$.

Preuve du lemme 2.26 : On procède en deux parties :

1. On démontre en premier lieu le lemme sous des hypothèses plus fortes : on suppose que $f \in L^1(\Omega)$ et que Ω est de mesure finie.
   Soit $\epsilon > 0$. Par le théorème 3.8, il existe $f_1 \in C_c(\Omega)$ tel que $\|f - f_1\|_{L^1} < \epsilon$. Par (3), on a

$$\left| \int f_1 u \right| \leq \epsilon \|u\|_{L^\infty}, \forall u \in C_c(\Omega). \tag{4}$$

   Posons

$$K_1 = \{x \in \Omega; f_1(x) \geq \epsilon\},$$
$$K_2 = \{x \in \Omega; f_1(x) \leq -\epsilon\}.$$

   Puisque $f_1 \in C_c(\Omega)$, elle est en particulier bornée. Donc K_1 et K_2 sont des compacts disjoints. En utilisant le lemme d'Urysohn, on peut facilement construire une fonction $u_0 \in C_c(\Omega)$ telle que

$$u_0(x) = \begin{cases} +1 \text{ si } x \in K_1 \\ -1 \text{ si } x \in K_2 \end{cases}$$

   et

$$|u_0(x)| \leq 1 \ \forall x \in \Omega.$$

   On pose $K = K_1 \cup K_2$. On obtient

$$\int_\Omega f_1 u_0 = \int_{\Omega \setminus K} f_1 u_0 + \int_K f_1 u_0$$

   et ainsi, grâce à (4),

$$\int_K |f_1| = \int_K f_1 u_0 = \int_\Omega f_1 u_0 - \int_{\Omega \setminus K} f_1 u_0 \leq \epsilon + \int_{\Omega \setminus K} |f_1 u_0| \leq \epsilon + \int_{\Omega \setminus K} |f_1|.$$

   En s'apercevant que

$$|f_1| \leq \epsilon \text{ sur } \Omega \setminus K,$$

   on obtient

$$\int_\Omega |f_1| = \int_K |f_1| + \int_{\Omega \setminus K} |f_1| \leq \epsilon + 2 \int_{\Omega \setminus K} |f_1| \leq \epsilon + 2\epsilon \cdot \text{mes}(\Omega).$$

   Donc

$$\|f\|_{L^1} \leq \|f - f_1\|_{L^1} + \|f_1\|_{L^1} \leq 2\epsilon(1 + \text{mes}(\Omega)).$$

   Comme cette inégalité est vraie pour tout $\epsilon > 0$, on en déduit que $f = 0$ *p.p.* sur Ω.

2. On considère maintenant le cas général. On écrit $\Omega = \bigcup_n \Omega_n$, où Ω_n est ouvert, $\overline{\Omega_n}$ compact et inclu dans Ω. On peut prendre par exemple

$$\Omega_n = \{x \in \Omega; \ \ \text{dist}(x, \Omega^c) > \frac{1}{n} \text{ et } |x| < n\}).$$

   En appliquant l'étape 1 avec Ω_n et $f_{|\Omega_n}$, on obtient $f = 0$ *p.p.* sur Ω_n et on conclut que $f = 0$ *p.p.* sur Ω.

$\square$

2.4 Les fonctions convexes

Définition 2.28 (Ensemble convexe)
Un ensemble $\Omega \in \mathbb{R}^n$ *est dit convexe si pout tout* $x, y \in \Omega$ *et tout* $\lambda \in [0,1]$ *on a* $\lambda x + (1-\lambda)y \in \Omega$.

Définition 2.29 (Fonction convexe)
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert convexe. Une fonction* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *est dite convexe si pour tout* $x, y \in \Omega$ *et tout* $\lambda \in [0,1]$ *elle vérifie*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Définition 2.30 (Fonction strictement convexe)
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert convexe. Une fonction* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *est dite strictement convexe si pour tout* $x, y \in \Omega$, $x \neq y$, *et tout* $\lambda \in [0,1]$ *elle vérifie*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Théorème 2.31 (Caractérisation des fonctions convexes)
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ *et* $\langle \cdot\ ; \cdot\ \rangle$ *le produit scalaire usuel dans* $\mathbb{R}^n$. *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *La fonction f est convexe*
2. *Pour tout* $x, y \in \mathbb{R}^n$, *l'inégalité suivante est vérifiée :*
$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y); x - y \rangle.$$
3. *Pour chaque* $x, y \in \mathbb{R}^n$, *l'inégalité suivante est satisfaite*
$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y); x - y \rangle \geq 0.$$

   Si $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$, *alors on a de plus*
4. *Pour tout* $x, v \in \mathbb{R}^n$, *l'inégalité suivante est vérifiée*
$$\langle \nabla^2 f(x)v; v \rangle \geq 0.$$

Proposition 2.32
Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ *est convexe,* $p \geq 1$, $\alpha_1 > 0$ *et*

$$|f(x)| \leq \alpha_1(1 + |x|^p), \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Alors il existe $\alpha_2 > 0$ *tel que*

$$\Big|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\Big| \leq \alpha_2\Big(1 + |x|^{p-1}\Big), \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

2.5 Produit de convolution

Définition 2.33 (Suite régularisante)
On appelle suite régularisante *toute suite* $(\rho_n)_{n\geq 1}$ *de fonctions telle que*

$$\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N), \quad \text{Supp } \rho_n \subset B(0, \frac{1}{n}), \quad \int \rho_n = 1, \quad \rho_n \geq 0 \text{ sur } \mathbb{R}^N.$$

Théorème 2.34 (Produit de convolution)
Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ *et* $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *avec* $1 \leq p \leq \infty$. *Alors, pour presque tout* $x \in \mathbb{R}^N$, *la fonction* $y \to f(x-y)g(y)$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}^N$. *On pose*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy.$$

Alors $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *et*

$$\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^p}.$$

Théorème 2.35
Soit $(\varphi_\nu)_{\nu\geq 1}$ *une suite régularisante. Prenons* $f \in C_c(I)$ *et définissons une suite de fonctions*

$$f_\nu(x) = f * \varphi_\nu(x).$$

Alors pour ν *suffisamment grand,* $f_\nu \in C_c^\infty(I)$*. On a*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_\nu(x)|dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx.$$

De plus, $f_\nu \to f$ *uniformément. Si par ailleur* $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *avec* $1 \leq p < \infty$*. Alors* $\rho_n * f \to f$ *dans* $L^p(\mathbb{R}^N)$*.*

Lemme 2.36
Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$*,* $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *et* $h \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$*. Si on écrit* $f_-(x) = f(-x)$*, alors on a*

$$\int (f * g)h = \int g(f_- * h).$$

Démonstration. La fonction $F(x,y) = f(x-y)g(y)h(x)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$. En effet, en utilisant le théorème 2.34 et l'inégalité de Hölder (2.13) on obtient

$$\begin{aligned} \int\int |F(x,y)|dxdy &\leq \int |h(x)| \left(\int |f(x-y)\|g(y)\|dy \right) dx \\ &\leq \|h\|_{L^{p'}} \|f * g\|_{L^p} \\ &\leq \|h\|_{L^{p'}} \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p} < \infty. \end{aligned}$$

Par conséquent, par le théorème de Fubini,

$$\int (f*g)(x)h(x)dx = \int dx \int F(x,y)dy = \int dy \int F(x,y)dx = \int g(y)(f_-*h)(y)dy.$$

$\square$

Proposition 2.37
Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ *et* $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$*. Alors*

$$\mathrm{Supp}(f * g) \subset \overline{\mathrm{Supp}(f) + \mathrm{Supp}(g)}.$$

Remarque 2.38
Si f *et* g *sont à support compact, alors* $f * g$ *est à support compact. Cependant, si l'un des supports seulement est compact, alors* $f * g$ *n'est en général pas à support compact.*

Lemme 2.39
Soit k *un entier,* $f \in C_c^k(\mathbb{R}^N)$ *et* $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$*. Alors*

$$f * g \in C^k(\mathbb{R}^N) \quad \text{et} \quad D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g.$$

2.6 Dérivée des distributions

Définition 2.40 (*Espace des fonctions test*)
Soit Ω *un ouvert non vide de* $\mathbb{R}^n$ *; on appelle* espace des fonctions test *et on note* $\mathcal{D}(\Omega)$ *l'ensemble*

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}^n | f \ \in C_c^\infty(\Omega)\}.$$

Définition 2.41 (Espace des distributions)
On appelle distribution toute forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$*, et on note* $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions.

Définition 2.42 (Distribution régulière)
Soit f un élément de $L^1_{loc}(\Omega)$. La distribution :

$$[f] : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}, u \mapsto \langle f, u \rangle = \int_\Omega f(x)u(x)dx,$$

est appelée distribution régulière *associée à la fonction f.*

Définition 2.43 (Dérivation des distributions)
Soit T un élément de $\mathcal{D}'(\Omega)$. Pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on appelle ordre *de α et on note $|\alpha|$ l'entier $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. La dérivée d'ordre $|\alpha|$ de T est l'application suivante, notée $D^\alpha T$:*

$$D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}, u \mapsto D^\alpha T(u) = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha u \rangle.$$

Remarque 2.44
Cette définition sert d'extension à la définition usuelle de dérivation. On obtient ainsi que toute distribution (qui n'est pas forcément une fonction) devient indéfiniment dérivable.

Remarque 2.45
Si u est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on note $D^\alpha u$ la dérivée d'ordre α de u :

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

3 Les espaces de Sobolev en dimension 1

3.1 Définition, premières propriétés et exemple

Soit $a < b$ et $I =]a, b[$ un intervalle dans $\mathbb{R}$ (pas forcément borné) et $1 \leq p \leq \infty$.

Définition 3.1 (L'espace $W^{1,p}(I)$)
L'espace de Sobolev $W^{1,p}(I)$ *est défini par*

$$W^{1,p}(I) = \left\{u \in L^p(I);\ \exists g \in L^p(I) \text{ tel que} \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(I)\right\}.$$

On pose

$$H^1(I) = W^{1,2}(I).$$

Remarque 3.2
Quelques points importants concernant cette définition sont à retenir:

1. *Quand il n'y aura pas de confusion, on écrira $W^{1,p}$ au lieu de $W^{1,p}(I)$.*
2. *Pour $u \in W^{1,p}(I)$ on note $u' = g$. Ceci a un sens : en effet, s'il existe $g_1, g_2 \in L^p(I)$ vérifiant*

$$\begin{aligned}\int u\varphi' &= \int g_1\varphi \\ &= \int g_2\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(I),\end{aligned}$$

alors

$$\int (g_1 - g_2)\varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^1(I).$$

Par le lemme (2.26)*, on obtient $g_1 = g_2 = u'$ p.p.*

3. *On dit que la fonction φ de la définition de $W^{1,p}(I)$ est une fonction test. Remarquons que l'on pourrait utiliser indifféremment $C_c^\infty(I)$ ou $C_c^1(I)$ comme espace des fonctions test. Pour cela, on utilise le produit de convolution. En effet soit $f \in C_c^1(I)$. Le lemme 2.35 nous donne l'existence d'une suite de fonctions $f_\nu(x) := f * \varphi_\nu(x)$ telle que pour un ν assez grand, $f_\nu(x)$ soit $C_c^\infty(I)$. De plus, $f_\nu' = f' * \varphi_\nu$ par le lemme 2.39. Ainsi, comme f_ν est en particulier $C_c^1(I)$* (*pour ν assez grand*)

$$\int_I u f_\nu' = -\int_I g f_\nu \quad \forall \nu.$$

De plus, par le lemme 2.35, on a encore que $f_\nu \to f$ et $f_\nu' \to f'$ uniformément. Ainsi, grâce au théorème de la convergence dominée (2.5),

$$\int_I u f' = -\int_I g f.$$

4. *Si $u \in C^1(I) \cap L^p(I)$ et si $u' \in L^p(I)$ est la dérivée au sens usuel de u, alors il est clair que $u \in W^{1,p}(I)$. Ainsi, la dérivée usuelle de u coïncide avec sa dérivée au sens des distributions. Si I est borné, alors $C^1(\bar{I}) \subset W^{1,p}(I)$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$.*
5. *On peut aussi définir l'espace $W^{1,p}(I)$ en terme de distribution : on dit qu'une fonction $u \in L^p$ appartient à $W^{1,p}$ si sa dérivée au sens des distributions* (*qui existe toujours*) *est aussi dans L^p.*

Exemple 3.3
Soit $I =]-1, +1[$.
Montrons que la fonction

$$u(x) = \frac{1}{2}(|x| + x)$$

appartient à $W^{1,p}(I)$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$ et que

$$u'(x) = H(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 < x < 1 \\ 0 \text{ si } -1 < x < 0. \end{cases}$$

Il est facile de voir que u est continue et bornée sur I. Elle appartient donc à $L^p(I)$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$. Montrons que sa dérivée au sens des distributions vaut H : On a, pour tout $\varphi \in C_c^1(I)$,

$$-\int_I u\varphi' = -\int_{-1}^0 u\varphi' - \int_0^1 u\varphi' = \int_0^1 \varphi = \int_I H\varphi.$$

Ainsi, $u' = H$. Or H est bornée sur I, et donc $H \in L^p(I)$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$. Ainsi, $u \in W^{1,p}(I)$. Notons que H n'appartient pas à $W^{1,p}(I)$ pour $1 \leq p \leq \infty$, car sinon on peut montrer que $H' = 0$ p.p. sur I. Par conséquent on aurait

$$\int_I H\varphi' = \int_0^1 \varphi' = \varphi(0) - \varphi(1) = \varphi(0) = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^1(I),$$

ce qui est clairement absurde.

Remarque 3.4
La fonction $H(x)$ ci-dessus s'appelle la distribution de Heaviside. Sa dérivée au sens des distributions est la delta de Dirac au point 0, noté δ_0.

Remarque 3.5
Dans l'exemple ci-dessus, on a vu le cas d'une fonction discontinue qui n'appartient pas à $W^{1,p}(I)$. Nous verrons plus loin que si une fonction se trouve dans $W^{1,p}(I)$, elle admet alors un représentant continu (voir thèorème 3.8), ce qui n'était pas le cas de la fonction de Heaviside. En fait, si la dérivée au sens des distributions F' d'une fonction F n'est pas une distribution régulière associée à une fonction, alors F ne peut pas appartenir à $W^{1,p}$, car F' n'est même pas une fonction. C'était le cas ci-dessus avec $F = H$ et $F' = \delta_0$.

Définition 3.6 (Norme de $W^{1,p}$)
L'espace $W^{1,p}$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p}.$$

L'espace H^1 est muni du produit scalaire

$$(u,v)_{H^1} = (u,v)_{L^2} + (u',v')_{L^2}$$

et de sa norme associée

$$\|u\|_{H^1} = (\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposition 3.7 (Propriétés de $W^{1,p}$)
L'espace de Sobolev $W^{1,p}$ est

1. *un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$;*
2. *réflexif pour $1 < p < \infty$;*
3. *séparable pour $1 \leq p < \infty$;*
4. *un espace de Hilbert séparable si $p = 2$.*

3.2 Propriétés et caractérisations des fonctions de $W^{1,p}(I)$

Théorème 3.8
Soit $u \in W^{1,p}(I)$, alors il existe une fonction $\tilde{u} \in C(\bar{I})$ telle que

$$u = \tilde{u} \text{ p.p. sur } I$$

et

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_y^x u'(t)dt \quad \forall x, y \in \bar{I}.$$

Dans la démonstration de ce théorème, on va utiliser les deux lemmes suivants :

Lemme 3.9
Soit $f \in L^1_{loc}(I)$ tel que

$$\int_I f\varphi' = 0 \quad \forall \varphi \in C^1_c(I). \tag{5}$$

Alors il existe une constante C telle que $f = C$ p.p.

Démonstration. Prenons une fonction $\psi \in C_c(I)$ telle que $\int \psi = 1$. Pour toute fonction $w \in C_c(I)$ il existe $\varphi \in C^1_c(I)$ tel que

$$\varphi' = w - \left(\int_I w\right)\psi.$$

En effet, la fonction $h = w - \big(\int_I w\big)\psi$ est continue et à support compact inclus dans I. De plus, $\int_I h = \int_I w - \big(\int_I w\big)\int_I \psi = 0$. Ainsi, h admet une unique primitive à support compact. On déduit de (5) que

$$\int_I f\Big[w - \left(\int_I w\right)\psi\Big] = 0 \quad \forall w \in C_c(I)$$

que l'on peut arranger grâce au théorème de Fubini :

$$\int_I \Big[f - \left(\int_I f\psi\right)\Big] w = 0 \quad \forall w \in C_c(I).$$

On utilise ensuite le lemme 2.26, et on obtient $f - \big(\int_I f\psi\big) = 0$ *p.p.* Ainsi, $f = C$ *p.p.* avec $C = \int_I f\psi$. □

Lemme 3.10
Soit $g \in L^1_{loc}(I)$; pour y_0 fixé dans I on pose

$$v(x) = \int_{y_0}^x g(t)dt, \quad x \in I.$$

Alors $v \in C(I)$ et

$$\int_I v\varphi' = -\int_I g\varphi \quad \forall \varphi \in C^1_c(I).$$

Démonstration. On a

$$\int_I v\varphi' = \int_I \left[\int_{y_0}^x g(t)dt\right]\varphi'(x)dx = -\int_x^{y_0} dx \int_x^{y_0} g(t)\varphi'(x)dt + \int_{y_0}^b dx \int_{y_0}^x g(t)\varphi'(x)dt.$$

En appliquant le théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_I v(t)\varphi'(t) &= -\int_a^{y_0} g(t)dt \int_a^t \varphi'(x)dx + \int_{y_0}^b g(t)dt \int_t^b \varphi'(x)dx \\
&= -\int_a^{y_0} g(t)dt[\varphi(t) - \varphi(a)]dx + \int_{y_0}^b g(t)dt[\varphi(b) - \varphi(t)dx \\
&= -\int_I g(t)\varphi(t)dt, \forall \varphi \in C^1_c(I).
\end{aligned}$$

□

Remarque 3.11
Ce lemme montre que la primitive v d'une fonction g de L^p appartient à $W^{1,p}$ dès que $v \in L^p$, ce qui est toujours le cas lorsque I est borné. En effet, dans ce cas $v(x) = \int_{y_0}^x g(t)dt$ est bornée, et donc $\|v\|_{L^p} < \infty$.

Preuve du théorème 3.8. On fixe $y_0 \in I$ et on pose $\bar{u}(x) = \int_{y_0}^{x} u'(t)dt$. Par le lemme 3.10 on a

$$\int_I \bar{u}\varphi' = -\int_I u'\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(I).$$

Ainsi $\int (u - \bar{u})\varphi' = 0 \ \forall \varphi \in C_c^1(I)$. Il résulte du lemme 3.9 que

$$u - \bar{u} = C \ p.p.$$

Donc la fonction $\tilde{u}(x) = \bar{u}(x) + C$ a les propriétés désirées.

□

Remarque 3.12
Le théorème précédent nous dit que les fonctions de $W^{1,p}$ sont "en gros" des primitives de fonctions de L^p.

Définition 3.13 (*Quotient différentiel*)
Soit $h \in \mathbb{R}, h \neq 0$. On définit le quotient différentiel *par*

$$D_h u(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{|h|}.$$

Théorème 3.14 (Caractérisation des fonctions de $W^{1,p}(I)$)
Soit $u \in L^p$ avec $1 < p \leq \infty$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $u \in W^{1,p}$.

2. *Il existe une constante C telle que*

$$\left| \int_I u\varphi' \right| \leq C\|\varphi\|_{L^{p'}(I)} \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(I).$$

3. *Il existe une constante C telle que pour tout ouvert $w \subset\subset I$ (c'est-à-dire $\bar{w}$ est compact et $\bar{w} \subset I$) et tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| < d(w, \Omega \setminus I)$ on a*

$$\|D_h u\|_{L^p(w)} \leq C.$$

De plus, on peut choisir $C = \|u'\|_{L^p(I)}$ dans (2) et (3).

Démonstration. (1) ⇒ (2) : Soit $u \in W^{1,p}$, donc $u' \in L^p$. En utilisant l'inégalité de Hölder on obtient directement

$$\left| \int_I u\varphi' \right| = \left| \int_I u'\varphi \right| \leq \|u'\|_{L^p(I)} \|\varphi\|_{L^{p'}(I)} \leq C\|\varphi\|_{L^{p'}(I)}.$$

(2) ⇒ (1) : On considère la forme linéaire $\psi : C_c^\infty \to \mathbb{R}$ définie par

$$\psi(\varphi) = \int u\varphi'.$$

Comme C_c^∞ est un sous-espace dense de $L^{p'}$ et puisque ψ est continue pour la norme de $L^{p'}$, alors on peut la prolonger par la proposition 2.22 en une forme linéaire et continue $\bar{\psi}$ sur $L^{p'}$. D'après le théorème de représentation de Riesz (2.24), il existe $g \in L^p$ tel que

$$\langle \bar{\psi}, \varphi \rangle = \int g\varphi \quad \forall \varphi \in L^{p'}.$$

Et donc en particulier

$$\int u\varphi' = \int g\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty,$$

d'où $u \in W^{1,p}$ (on pose $\bar{g} = -g$).

(1) $\Rightarrow$ (3) : D'après le théorème précédent, on a, pour $x \in w$

$$u(x+h) - u(x) = \int_x^{x+h} u'(t)dt = h\int_0^1 u'(x+sh)ds.$$

Par conséquent

$$|D_h u(x)| = \Big|\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\Big| \le \int_0^1 |u'(x+sh)|ds.$$

Si $p = \infty$, alors la conclusion est évidente ; supposons donc que $1 < p < \infty$. Appliquant l'inégalité de Hölder on obtient

$$|D_h u|^p \le \int_0^1 |u'(x+sh)|^p ds.$$

Donc, par Fubini,

$$\int_w |D_h u|^p dx \le \int_w dx \int_0^1 |u'(x+sh)|^p ds = \int_0^1 ds \int_w |u'(x+sh)|^p dx.$$

Or, pour $0 < s < 1$, on a

$$\int_w |u'(x+sh)|^p dx = \int_{w+sh} |u'(y)|^p dy \le \int_I |u'(y)|^p dy.$$

Ainsi, $\|D_h u\|^p_{L^p(w)} \le \|u'\|^p_{L^p(I)}$. Il suffit de prendre la p-ième racine pour obtenir le résultat.

(3) $\Rightarrow$ (2) : Soit $\varphi \in C^1_c(I)$; on choisi $w \subset\subset I$ tel que Supp $\varphi \subset w$. Pour $h \in \mathbb{R}$ avec $|h| < d(w, \Omega \setminus I)$, on a

$$\int_I [u(x+h) - u(x)]\varphi(x)dx = \int_I u(x)[\varphi(x-h) - \varphi(x)]dx.$$

En utilisant (3) et l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\Big|\int_I [u(x+h) - u(x)]\varphi(x)dx\Big| \le C|h|\|\varphi\|_{L^{p'}(I)},$$

et ainsi

$$\int_I u(x)D_h\varphi(x)dx \le C\|\varphi\|_{L^{p'}(I)}.$$

En laissant tendre $h \to 0$, on en déduit que

$$\Big|\int_I u\varphi'\Big| \le C\|\varphi\|_{L^{p'}(I)} \quad \forall \varphi \in C^1_c.$$

□

Remarque 3.15
Le théorème n'est pas vrai si $p = 1$, car (2) $\not\Rightarrow$ (1). En effet, on a seulement l'inclusion $(L^\infty)' \subset L^1$, et on ne peut appliquer le théorème de Riesz pour le cas $p = \infty$. Les fonctions de $W^{1,1}$ sont appelées les fonctions absolument continues, tandis que les fonctions vérifiant (2) ou (3) sont les fonctions à variations bornées (éventuellement discontinues) sur I.

En ce qui concerne le cas $p = \infty$, on a le

Corollaire 3.16
Une fonction de $L^\infty(I)$ appartient à $W^{1,\infty}(I)$ si et seulement s'il existe une constante C telle que

$$|u(x) - u(y)| \le C|x-y| \quad p.p. \quad x, y \in I.$$

Démonstration. On applique simplement (3) $\Rightarrow$ (1) du théorème précédent avec $p = \infty$. $\square$

Remarque 3.17
Une fonction de $W^{1,\infty}(I)$ est aussi appelée lipschitzienne de constante C, ainsi $W^{1,\infty}(I) = C^{0,1}(I)$.

Théorème 3.18 (Opérateur de prolongement)
Soit $1 \leq p \leq \infty$. Il existe un opérateur de prolongement $P : W^{1,p}(I) \to W^{1,p}(\mathbb{R})$ linéaire et continu tel que

1. *$Pu_{|I} = u$ pour tout $u \in W^{1,p}(I)$.*
2. *$\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{L^p(I)}$ pour tout $u \in W^{1,p}(I)$.*
3. *$\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)}$ pour tout $u \in W^{1,p}(I)$.*

Remarque 3.19
C dépend seulement de mes$(I) \leq \infty$.

Démonstration. Voir [2]. $\square$

Remarque 3.20
Soit (u_n) une suite de $W^{1,p}$ telle que $u_n \to u$ dans L^p et u_n' converge vers une certaine limite dans L^p. Alors $u \in W^{1,p}$ et $\|u_n - u\|_{W^{1,p}} \to 0$.

Démonstration. Supposons que u_n' converge vers une fonction a dans L^p. Comme on a $u_n \in W^{1,p}(I)$,

$$\int_I u_n\varphi = -\int_I u_n'\varphi, \quad \forall\varphi \in C_c^\infty(I).$$

En passant à la limite, on obtient

$$\int_I u\varphi = -\int_I a\varphi, \quad \forall\varphi \in C_c^\infty(I).$$

Donc $u \in W^{1,p}$, $u' = a$ et $\|u_n - u\|_{W^{1,p}} \to 0$. $\square$

3.3 Théorèmes de densité et d'injection

Théorème 3.21 (Densité)
Soit $u \in W^{1,p}(I)$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Alors il existe une suite u_n dans $C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $u_{n|I} \to u$ dans $W^{1,p}(I)$.

Lemme 3.22
Soit $\rho \in L^1(\mathbb{R})$ et soit $v \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Alors

$$\rho * v \in W^{1,p}(\mathbb{R}) \text{ et } (\rho * v)' = \rho * v'.$$

Démonstration. Supposons d'abord que ρ est à support compact. Alors $\rho * v \in L^p$. Soit $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R})$. Par les lemmes 2.36 et 2.39 on a

$$\int(\varphi * v)\varphi' = \int v(\varphi_- * \varphi') = \int v(\rho_- * \varphi)' = -\int v'(\rho_-' * \varphi) - \int(\rho * v')\varphi.$$

D'où

$$\rho * v \in W^{1,p} \quad \text{et} \quad (\rho * v)' = \rho * v'.$$

Supposons maintenant que ρ n'est pas à support compact. On introduit alors une suite $(\rho_n)_{n\geq 1}$ de $C_c(\mathbb{R})$ telle que $\rho_n \to \rho$ dans L^1. D'après ce qui précède, on a

$$\rho_n * v \in W^{1,p} \quad \text{et} \quad (\rho_n * v)' = \rho_n * v'.$$

Or, par le théorème 2.35, $\rho_n * v \to \rho * v$ dans L^p et $\rho_n * v' \to \rho * v'$ dans L^p. On conclut à l'aide de la remarque 3.20 que

$$\rho * v \in W^{1,p} \quad \text{et que} \quad (\rho * v)' = \rho * v'.$$

$\square$

Preuve du théorème 3.21. Soit $u \in W^{1,p}(I)$. On peut supposer que $I = \mathbb{R}$, sinon il suffit de prolonger u en une fonction de $W^{1,p}(\mathbb{R})$ par le théorème 3.18. On fixe ensuite une fonction $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $0 \leq \zeta \leq 1$ et

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } |x| \leq 1, \\ 0 \text{ si } |x| \geq 2. \end{cases}$$

On définit la suite

$$\zeta_n(x) = \zeta\left(\frac{x}{n}\right) \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Soit $f \in L^p$ avec $1 \leq p < \infty$. puisque $\zeta_n f \to f$ dans $\mathbb{R}$, on a, par le théorème de la convergence dominée, $\zeta_n f \to f$ dans L^p. Choisissons une suite régularisante (φ_n). Montrons que la suite $u_n = \zeta_n(\rho_n * u)$ converge vers u dans $W^{1,p}$. Or $\|u_n - u\|_{L^p} \to 0$. En effet, on écrit

$$u_n - u = \zeta_n[(\rho_n * u) - u] + [\zeta_n u - u]$$

et donc

$$\|u_n - u\|_{L^p} \leq \|(\varphi_n * u) - u\|_{L^p} + \|\zeta_n u - u\|_{L^p} \to 0.$$

Ensuite, grâce au lemme 3.22, on a

$$u_n' = \zeta_n'(\varphi_n * u) + \zeta_n(\rho_n * u').$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \|u_n' - u'\|_{L^p} &\leq \|\zeta_n'(\varphi_n * u)\|_{L^p} + \|\zeta_n(\rho_n * u') - u'\|_{L^p} \\ &\leq \frac{C}{n}\|u\|_{L^p} + \|(\rho_n * u') - u'\|_{L^p} + \|\zeta_n u' - u'\|_{L^p} \to 0, \end{aligned}$$

où $C = \|\zeta'\|_{L^\infty}$. □

Définition 3.23 (Application compacte)
Soit A, B deux espaces vectoriels normés dans Ω. Une application $i : A \to B$ est dite compacte si pour toute suite (a_n) dans A bornée (c'est-à-dire qu'il existe une constante $C > 0$ tel que $\|a_n\| \leq C$) il existe $b \in B$ et une sous-suite a_{n_k} de a_n tel que $i(a_{n_k}) \to b$ dans B.

Théorème 3.24 (Théorème d'injection)
Il existe une constante C (dépendant seulement de mes$(I) \leq \infty$) telle que

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)} \quad \forall u \in W^{1,p}(I) \quad \forall 1 \leq p \leq \infty, \tag{7}$$

autrement dit $W^{1,p}(I) \subset L^\infty(I)$ avec l'injection continue pour tout $1 \leq p \leq \infty$. De plus, lorsque I est borné on a

1. *l'injection $W^{1,p}(I) \subset C(\bar{I})$ est compacte pour $1 < p \leq \infty$ et*
2. *l'injection $W^{1,1}(I) \subset L^q(I)$ est compacte pour $1 \leq q < \infty$.*

Pour démontrer ce théorème, on aura besoin du théorème suivant :

Théorème 3.25 (Ascoli)
Soit K un espace métrique compact et soit H un sous-ensemble borné de $C(K)$. On suppose que H est uniformément équicontinu, c'est-à-dire que

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \quad \text{tel que } d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon \quad \forall f \in H.$$

Alors H est relativement compact dans $C(K)$.

Démonstration. La première étape est de montrer (7) pour $I = \mathbb{R}$; le cas général s'en déduit grâce au théorème de prolongement (3.18).
Soit $v \in C_c^1(\mathbb{R})$; si $1 \leq p < \infty$ on pose $G(s) = |s|^{p-1}s$. La fonction $w = G(v)$ appartient à $C_c^1(\mathbb{R})$ et

$$w' = G'(v)v' = p|v|^{p-1}v'.$$

Puisque $[G(v(x))]' = G'(v(x))v'(x)$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$G(v(x)) = \int_{-\infty}^{x} p|v(t)|^{p-1}v'(t)dt,$$

car $\lim_{y\to\infty} G(v(y)) = 0$ puisque $G(v) \in C_c^1(\mathbb{R})$.
Estimons maintenant $|v(x)|^p$. Par l'inégalité de Hölder (2.13) on a

$$|v(x)|^p = |G(v(x))| \leq \int_{\mathbb{R}} p|v(t)|^{p-1}|v'(t)|dt \leq p\|v^{p-1}\|_{L^{p'}}\|v'\|_{L^p}.$$

En se rappelant que $p' = \frac{p}{p-1}$, on obtient

$$|v(x)|^p \leq p\|v\|_{L^p}^{p-1}\|v'\|_{L^p}.$$

On utilise ensuite l'inégalité de Young (2.12) avec p et p' pour obtenir

$$p\|v\|_{L^{p-1}}^{p}\|v'\|_{L^p} \leq p\Big[\frac{p-1}{p}\|v\|_{L^p}^p + \frac{1}{p}\|v'\|_{L^p}^p\Big],$$

En utilisant l'inégalité $(a^p + b^p)^{\frac{1}{p}} \leq |a| + |b|$ et $p^{\frac{1}{p}} \leq e^{\frac{1}{e}}$, on a

$$\begin{aligned}
|v(x)| &\leq \Big[(p-1)\|v\|_{L^p}^p + \|v'\|_{L^p}^p\Big]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \Big[p[\|v\|_{L^p}^p + \|v'\|_{L^p}^p]\Big]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq p^{\frac{1}{p}}\|v\|_{W^{1,p}}. \\
&\leq C\|v\|_{W^{1,p}}.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a obtenu

$$\|v\|_{L^\infty} \leq C\|v\|_{W^{1,p}} \quad \forall v \in C_c^1(\mathbb{R}), \tag{8}$$

où $C = e^{\frac{1}{e}}$ est une constante universelle.
La démonstration se termine en raisonnant par densité. On prend $u \in W^{1,p}$; par le théorème de densité, il existe une suite $(u_n) \in C_c^1(\mathbb{R})$ telle que $u_n \to u$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R})$. En appliquant (8), on remarque que (u_n) est de Cauchy dans L^∞. Donc $u_n \to u$ dans L^∞ et on obtient notre inégalité cherchée.
Nous démontrons maintenant la seconde partie. Pour montrer 1. prenons F la boule unité de $W^{1,p}(I)$ avec $1 < p \leq \infty$. Pour $u \in F$ et grâce à l'inégalité de Hölder (2.13) on obtient

$$|u(x) - u(y)| = \Big|\int_y^x u'(t)dt\Big| \leq \|u'\|_{L^p}|x-y|^{\frac{1}{p'}} \leq |x-y|^{\frac{1}{p'}} \quad \forall x, y \in I.$$

On en déduit alors du théorème d'Ascoli (3.25) que F est relativement compact dans $C(\bar{I})$. Par linéarité de la compacité, on obtient que $W^{1,p}(I)$ est relativement compact dans $C(\bar{I})$. La seconde partie se base sur un théorème assez technique dont nous ne parlerons pas ici. Nous admettrons donc la seconde partie sans démonstration. Pour les intéressés, vous pouvez consulter [2]. □

Corollaire 3.26
On suppose que I n'est pas borné et on prend $u \in W^{1,p}(I)$ avec $1 \leq p < \infty$. Alors on a

$$\lim_{\substack{x\in I \\ |x|\to\infty}} u(x) = 0. \tag{9}$$

Démonstration. Par le théorème de densité (3.21), il existe une suite $(u_n)_{n\geq 1} \in C_c^1(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{u}_{n|_I} \to u$ dans $W^{1,p}(I)$. On déduit de (7) que $\|u_n - u\|_{L^\infty(I)} \to 0$ et donc on obtient (9). En effet si $\epsilon > 0$ est donné, on choisit n assez grand pour que $\|u_n - u\|_{L^\infty(I)} < \epsilon$; or pour $|x|$ assez grand on a $u_n(x) = 0$ (puisque $u_n \in C_c^1(\mathbb{R})$) et donc $|u(x)| < \epsilon$. □

Corollaire 3.27 (Dérivation d'un produit)
Soient $u, v \in W^{1,p}(I)$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Alors $uv \in W^{1,p}(I)$ et

$$(uv)' = u'v + uv'. \tag{10}$$

De plus on a la formule d'intégration par parties

$$\int_x^y u'v = u(x)v(x) - u(y)v(y) - \int_y^x uv' \quad \forall x, y \in \bar{I}. \tag{11}$$

Démonstration. On peut déjà noter que $u \in L^\infty$ par (7) et donc $uv \in L^p$. Commençons par le cas où $1 \leq p < \infty$. Soit (u_n) et (v_n) des suites de $C_c^1(\mathbb{R})$ telles que $u_{n|I} \to u$ et $v_{n|I} \to v$ dans $W^{1,p}(I)$. Alors par (7), $u_n \to u$ et $v_n \to v$ dans $L^\infty(I)$ et par conséquent $u_n v_n \to uv$ dans $L^\infty(I)$ et dans $L^p(I)$. On a de plus

$$(u_n v_n)' = u_n' v_n + u_n v_n' \to u'v + uv' \quad \text{dans } L^p(I).$$

Il en résulte que $uv \in W^{1,p}(I)$ et que $(uv)' = u'v + uv'$ en appliquant la remarque 3.20. On obtient ensuite (11) en intégrant (10). Supposons maintenant que $u, v \in W^{1,\infty}(I)$. Alors

$$uv \in L^\infty(I) \quad \text{et} \quad u'v + uv' \in L^\infty(I).$$

Il nous reste à vérifier que $uv \in W^{1,\infty}(I)$, c'est-à-dire que

$$\int_I uv\varphi' = -\int_I (u'v + uv')\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(I).$$

Pour cela, fixons un intervalle ouvert borné $J \subset I$ tel que supp$\varphi \subset J$. Par conséquent $u, v \in W^{1,p}(J)$ pour tout $p < \infty$ et d'après ce qui précède on sait que

$$\int_J uv\varphi' = -\int_J (u'v + uv')\varphi$$

c'est-à-dire

$$\int_I uv\varphi' = -\int_I (u'v + uv')\varphi.$$

□

Corollaire 3.28 (Dérivation d'un produit de composition)
Soit $G \in C^1(\mathbb{R})$ tel que $G(0) = 0$ et soit $u \in W^{1,p}(I)$. Alors

$$G \circ u \in W^{1,p}(I) \quad \textit{et} \quad (G \circ u)' = (G' \circ u)u'.$$

Démonstration. Soit $M = \|u\|_{L^\infty}$. Comme $G(0) = 0$, il existe une constante C telle que $|G(s)| \leq C|s|$, pour $s \in [-M, M]$. En effet, $|D_s G(0)| = \frac{G(0+s)-G(0)}{s} \leq C$ pour tout $s \in [-M, M]$, car la fonction est bornée et donc sa dérivée aussi. Ainsi $|G \circ u| \leq C|u|$, et on obtient $G \circ u \in L^p(I)$. De même, $(G' \circ u)u' \in L^p(I)$. Il reste à vérifier que $G \circ u \in W^{1,p}(I)$, c'est-à-dire que

$$\int_I (G \circ u)\varphi' = -\int_I (G' \circ u)u'\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(I).$$

Si on prend $1 \leq p < \infty$, alors il existe une suite (u_n) de $C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $u_n \to u$ dans $W^{1,p}(I)$ et dans $L^\infty(I)$. Donc $G \circ u_n \to G \circ u$ dans $L^\infty(I)$ et $(G' \circ u_n)u_n' \to (G \circ u)u'$ dans $L^p(I)$. Or on a

$$\int (G \circ u_n)\varphi' = -\int (G' \circ u_n)u_n'\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(I).$$

En utilisant le théorème de la convergence dominée, on en déduit que la composition $G \circ u \in W^{1,p}(I)$. Pour le cas $p = \infty$, on procède comme au corollaire 3.27.

□

3.4 L'espace $W_0^{1,p}(I)$

Définition 3.29
Soit $1 \leq p < \infty$, on désigne par $W_0^{1,p}(I)$ la fermeture de $C_c^1(I)$ dans $W^{1,p}(I)$, c'est-à-dire que $W_0^{1,p}(I) = \overline{C_c^1(I)}$. Si $p = 2$, on note $W^{1,p}(I) = H_0^1(I)$.

Remarque 3.30
On a les propriétés suivantes:

1. *Sans risque de confusion, on notera souvent $W_0^{1,p}$ et H_0^1 au lieu de $W_0^{1,p}(I)$ et $H_0^1(I)$.*
2. *L'espace $W_0^{1,p}$ est muni de la norme induite par $W^{1,p}$; l'espace H_0^1 est muni du produit scalaire induit par H^1.*
3. *L'espace $W_0^{1,p}$ est un espace de Banach séparable ; il est de plus réflexif pour $1 < p < \infty$. L'espace H_0^1 est un espace de Hilbert séparable.*
4. *On sait du théorème de densité (3.21) que $C_c^1(\mathbb{R})$ est dense dans $W^{1,p}(\mathbb{R})$, et par conséquent $W_0^{1,p} = W^{1,p}(\mathbb{R})$.*

Proposition 3.31
$C_c^\infty(I)$ est dense dans $W_0^{1,p}(I)$.

Démonstration. Montrons que $\overline{C_c^1(I)} = \overline{C_c^\infty(I)}$. La première inclusion est claire, puisque $C_c^\infty(I) \subset C_c^1(I)$. Pour l'autre inclusion, prenons maintenant $u \in C_c^1(I)$ et une suite régularisante (ρ_n). Alors la suite $\tilde{u}_n = \rho_n * u_n$ est $C_c^\infty(I)$ pour un n assez grand et

$$\|\rho_n * u - u\|_{L^p} \to 0, \|\rho_n * u' - u'\|_{L^p} \to 0.$$

Donc $\rho_n * u \to u$ dans $W^{1,p}(I)$. Ainsi

$$C_c^1(I) \subset \overline{C_0^\infty(I)} \subset W_0^{1,p}(\Omega).$$

et par conséquent

$$\overline{C_c^1(I)} \subset \overline{C_c^\infty(I)} = W_0^{1,p}(\Omega).$$

□

Proposition 3.32
Si $u \in W^{1,p}(I) \cap C_c(I)$, alors $u \in W_0^{1,p}(I)$.

Démonstration. On prend une suite régularisante $(\rho_n)_{n\geq 1}$ et on pose $u_n = \rho_n * u$. Comme $u \in C_c(I)$, on a par le lemme 2.35 que pour un n suffisamment grand, $u_n \in C_c^\infty(I)$ et $u_n \to u$ uniformément sur $\bar{I}$. Donc $u_n \to u$ dans L^p. Par la proposition précédente, $u \in W_0^{1,p}(I)$ car c'est la limite d'une suite dans $C_c^\infty(I)$. □

Théorème 3.33
Soit $u \in W^{1,p}(I)$. Alors $u \in W_0^{1,p}(I)$ si et seulement si $u = 0$ sur ∂I.

Démonstration. Si $u \in W_0^{1,p}(I)$, il existe une suite (u_n) de $C_c^1(I)$ telle que $u_n \to u$ dans $W^{1,p}(I)$. Donc, par (7) $u_n \to u$ uniformément sur $\bar{I}$ et par conséquent $u = 0$ sur ∂I.
Réciproquement, soit $u \in W^{1,p}(I)$ tel que $u = 0$ sur ∂I. On fixe une fonction $G \in C^1(\mathbb{R})$ telle que

$$G(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } |t| \leq 1 \\ t \text{ si } |t| \geq 2 \end{cases}$$

et

$$|G(t)| \leq t \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

On pose $u_n = \frac{1}{n}G(nu)$ de sorte que $u_n \in W^{1,p}(I)$. On a d'autre part

$$\text{Supp} u_n \subset \{x \in I; |u(x)| \geq \frac{1}{n}\}.$$

Ainsi, Supp u_n est un compact inclus dans I, car $u = 0$ sur ∂I et $u(x) \to 0$ quand $|x| \to \infty$, $x \in I$. Donc $u_n \in W^{1,p}(I) \cap C_c(I)$. Par la proposition ci-dessus, $u_n \in W_0^{1,p}$. Finalement, on vérifie à l'aide du théorème de la convergence dominée que $u_n \to u$ dans $W^{1,p}$. □

Remarque 3.34
Voici deux autres caractérisations des fonctions de $W_0^{1,p}$:

1. *Soit* $1 < p < \infty$ *et* $u \in L^p(I)$, *alors* $u \in W_0^{1,p}(I)$ *si et seulement s'il existe une constante* C *telle que*
$$\Big| \int_I u\varphi' \Big| \leq C \|\varphi\|_{L^{p'}(I)} \quad \forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}).$$
2. *Soit* $1 \leq p < \infty$ *et* $u \in L^p(I)$; *on définit* $\bar{u}$ *par*
$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x) \text{ si } x \in I \\ 0 \text{ si } x \in \mathbb{R} \backslash I. \end{cases}$$
Alors $u \in W_0^{1,p}(I)$ *si et seulement si* $\bar{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$.

Proposition 3.35 (Inégalité de Poincaré)
On suppose que I *est borné. Alors il existe une constante* C *dépendante de mes*(I) *telle que*
$$\|u\|_{W^{1,p}} \leq C \|u'\|_{L^p} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(I). \tag{12}$$
Démonstration. Pour $u \in W_0^{1,p}(I)$ on a
$$|u(x)| = |u(x) - u(a)| = \Big| \int_a^x u'(t)dt \Big| \leq \|u'\|_{L^1}.$$
Donc $\|u\|_{L^\infty} \leq \|u'\|_{L^1}$. De plus, grâce à l'inégalité de Hölder (2.13)
$$\begin{aligned} \|u\|_{L^p} = \left(\int |u(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|u'\|_{L^1} (\text{mes}(I))^{\frac{1}{p}} & \leq \|u'\|_{L^p} (\text{mes}(I))^{\frac{1}{p'}} (\text{mes}(I))^{\frac{1}{p}} \\ & = \|u'\|_{L^p} (\text{mes}(I)). \end{aligned}$$
Finalement
$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p} \leq \underbrace{[1 + \text{mes}(I)]}_{=C} \|u'\|_{L^p}.$$
□

3.5 Les espaces $W^{m,p}(I)$ et $W_0^{m,p}(I)$

Définition 3.36 (L'espace $W^{m,p}(I)$)
Soit $m \geq 2$ *et un réel* $1 \leq p \leq \infty$. *On définit* $W^{m,p}(I)$ *par récurrence :*
$$W^{m,p}(I) = \{u \in W^{m-1,p}(I); u' \in W^{m-1,p}(I)\}.$$
On pose
$$H^m(I) = W^{m,2}(I).$$
Une fonction u *appartient à* $W^{m,p}(I)$ *si toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre* m *y appartiennent aussi. Plus précisément,* $u \in W^{m,p}(I)$ *si et seulement s'il existe* m *fonctions* $g_1, \dots, g_m \in L^p(I)$ *telles que*
$$\int u D^j \varphi = (-1)^j \int g_j \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(I), \quad \forall j = 1, 2, \dots m,$$
où $D^j\varphi$ *dénote la dérivée à l'ordre* j *de* φ. *On peut considérer* $u' = g_1$, $(u')' = g_2 \dots$ *jusqu'à l'ordre* m, *que l'on note aussi* $Du, D^2u, \dots D^m u$.
On munit l'espace $W^{m,p}$ *de la norme*
$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{\alpha=1}^m \|D^\alpha u\|_{L^p}$$
et H^m *du produit scalaire*
$$(u, v)_{H^m} = (u, v)_{L^2} + \sum_{\alpha=1}^m (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}.$$

Remarque 3.37
Les notions démontrées précédemment pour $W^{1,p}(I)$ *sont aussi valables pour* $W^{m,p}(I)$*. En particulier,* $W^{m,p}(I) \subset C^{m-1}(\bar{I})$ *avec injection continue.*

Définition 3.38 (L'espace $W_0^{m,p}(I)$)
Soit un réel $1 \leq p \leq \infty$ *et un entier* $m \geq 2$*. On définit l'espace* $W_0^{m,p}(I)$ *comme la fermeture de* $C_c^m(I)$*. Similairement au théorème 3.33, on peut obtenir la définition équivalente*

$$W_0^{m,p}(I) = \{u \in W^{m,p}(I) : u = Du = \cdots = D^{m-1}u = 0 \text{ sur } \partial I\}.$$

4 Les espaces de Sobolev en dimension n

4.1 L'espace $W^{1,p}(\Omega)$

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$.

Définition 4.1
L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ *est défini par*

$$W^{1,p} = \left\{ u \in L^p(\Omega) \,\middle|\, \begin{array}{c} \exists g_1, \ldots, g_n \in L^p(\Omega) \text{ tel que} \\ \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \ \forall i = 1, 2, \ldots, N \end{array} \right\}.$$

On pose

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

Pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$ on note

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \text{ et } \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right).$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^{n} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^p}$$

et l'espace $H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire

$$(u,v)_{H^1} = (u,v)_{L^2} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2}$$

Remarque 4.2
En d'autre terme, $W^{1,p}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $u : \Omega \to \mathbb{R}, u \in L^p(\Omega)$ dont les dérivées partielles $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, prises au sens faible, sont dans $L^p(\Omega)$ pour tout $i = 1, \ldots, n$.

Remarque 4.3
On définit de manière analogue à la dimension une les espaces de Sobolev d'ordre entier quelconque. Si $k > 0$ est un entier, on note $W^{k,p}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions $u : \Omega \to \mathbb{R}$, dont les dérivées partielles prises au sens faible $D^\alpha u$ sont dans $L^p(\Omega)$, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ vérifiant $|\alpha| \leq k$.

Propriété 4.4
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $1 \leq p < \infty$ et $k \geq 1$.

1. *$W^{k,p}(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$ est un espace de Banach, séparable si $1 \leq p < \infty$ et réflexif si $1 < p < \infty$.*
2. *$W^{1,2}(\Omega)$ est un espace de Hilbert lorsqu'il est muni du produit scalaire*

$$\langle u; v \rangle_{W^{1,2}} = \int_\Omega u(x)v(x)dx + \int_\Omega \langle \nabla u(x); \nabla v(x) \rangle dx.$$

Remarque 4.5
Les espaces de Sobolev en dimension supérieure à une sont considérablement plus difficiles à étudier. En effet, nous allons voir que les fonctions de $W^{1,p}(\Omega)$ ne sont plus forcément continues si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, avec $n \geq 2$. Cependant, certains résultats vu en dimension une restent valable. Ainsi, la caractérisation des fontions de $W^{1,p}$ (3.14), le théorème de densité (3.21), la dérivation d'un produit (3.27) et la dérivation d'un produit de composition (3.28) sont applicables pour une dimension quelconque.

Il est souvent commode d'établir des propriétés des fonctions de $W^{1,p}(\Omega)$ en commençant par le cas où $\Omega = \mathbb{R}^n$. Il est donc utile de pouvoir prolonger une fonction $u \in W^{1,p}(\Omega)$ en une fonction $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Cependant, ceci n'est pas toujours possible. En fait il est nécessaire que Ω soit un ouvert assez "régulier". Nous allons préciser cette notion particulière d'ouvert.

Définition 4.6 (Continuité au sens d'Hölder)
Soit $f : \bar{I} \to \mathbb{R}$ et $0 < \alpha \leq 1$. On dit que f est Hölder continue d'exposant α et on note $f \in C^{0,\alpha}(\bar{I})$ s'il existe une constante $\gamma > 0$ telle que

$$|f(x) - f(y)| \leq \gamma |x - y|^{\alpha}, \quad \forall x, y \in \bar{I}.$$

Si $\alpha = 1$ on dit aussi que f est Lipschitzienne.

Définition 4.7
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné. On dit que Ω est un ouvert de classe C^k*, pour tout $k \in \mathbb{N}$, si pour chaque $x \in \partial\Omega$, il existe un voisinage $U \subset \mathbb{R}^n$ de x dans $\mathbb{R}^n$ et une application $H : Q \to U$ bijective telle que*

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_j| < 1, j = 1, 2 \ldots, n\},$$
$$H \in C^k(\bar{Q}), \qquad H^{-1} \in C^k(\bar{U}), \quad H(Q_+) = U \cap \Omega, H(Q_0) = U \cap \partial\Omega$$

où $Q_+ = \{x \in Q : x_n > 0\}$ et $Q_0 = \{x \in Q : x_n = 0\}$.

Remarque 4.8
Si H et H^{-1} sont seulement $C^{0,1}$, on dit que Ω est un ouvert lipschitzien.

Théorème 4.9 (Théorème de prolongement)
On suppose que Ω est de classe $C^{0,1}$. Alors il existe un opérateur de prolongement borné

$$P : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

linéaire et une constante C, tel que pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$

1. $Pu_{|\Omega} = u$;
2. $\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{L^p(\Omega)}$;
3. $\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}}$;

L'exemple suivant montre que si l'ouvert Ω n'est pas assez régulier il est alors impossible de prolonger de façon régulière des fonctions qui sont pourtant très régulières sur Ω.

Exemple 4.10
Soit Ω le rectangle $]-1, 2[\times]-1, 1[$ privé du segment $]0, 2[\times\{0\}$. On définit la fonction u sur Ω par

$$u(x_1, x_2) \begin{cases} e^{\frac{-1}{x_1^2}} & \text{si } x_1 > 0, x_2 > 0, \\ -e^{\frac{-1}{x_1^2}} & \text{si } x_1 > 0, x_2 < 0, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}.$$

Il est facile de voir que $u \in C^{\infty}(\Omega)$ et que $D^{\alpha}u \in L^{\infty}(\Omega)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^2$. Ceci entraîne par conséquent que $u \in H^m(\Omega)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Cependant, il est impossible de prolonger u en une fonction régulière sur tout $\mathbb{R}^2$.

Lorsque $\Omega = I$ est un intervalle borné dans $\mathbb{R}$, on a vu que

$$C^1(\bar{I}) \subset W^{1,p}(I) \subset C(\bar{I}), 1 \leq p \leq \infty.$$

Cette idée se généralise dans $\mathbb{R}^n$ avec les résultats suivants :

Théorème 4.11 (Théorème d'inclusion de Sobolev)
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert lipschitzien.

1. *Si $1 \leq p < n$ alors*
$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$$
pour tout $q \in [1, p^*]$ où $p^* = \frac{np}{n-p}$.
Plus précisément, pour tout $q \in [1, p^*]$ il existe $\gamma = \gamma(\Omega, p, q)$ tel que
$$\|u\|_{L^q} \leq \gamma \|u\|_{W^{1,p}}.$$
2. *Si $p = n$ alors*
$$W^{1,n}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \text{ pour tout } q \in [1, \infty).$$
3. *Si $p > n$ alors*
$$W^{1,p}(\Omega) \subset C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}), \text{ pour tout } \alpha \in [0, 1 - n/p].$$

Voici une généralisation du théorème de compacité dans la dimension n.

Théorème 4.12 (Théorème de Rellich-Kondrachov)
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert lipschitzien.
1. *Si $1 \leq p < n$ alors l'inclusion de $W^{1,p}$ est compacte, pour tout $q \in [1, p^*)$.*
2. *Si $p = n$ alors l'inclusion de $W^{1,n}$ dans L^q est compacte, pour chaque nombre $q \in [1, \infty)$.*
3. *Si $p > n$ alors l'inclusion de $W^{1,p}$ dans $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ est compacte, pour tout $0 \leq \alpha < 1 - n/p$.*

Remarque 4.13
Pour résumer lorsque $n = 1$ et $I = (a, b)$, on a par le théorème précédent, pour $p \geq 1$,
$$\begin{array}{rcl} \mathcal{D} & = & C_0^\infty(I) \subset \cdots \subset W^{2,p}(I) \subset C^1(\bar{I}) \\ & \subset & W^{1,p}(I) \subset C^{0,1/p'}(\bar{I}) \subset C(\bar{I}) \subset L^\infty(I) \subset \ldots \\ & \subset & L^2(I) \subset L^1(I). \end{array}$$

La régularité des fonctions de $W^{1,p}(\Omega)$ est un sujet relativement fin. Le théorème d'inclusion nous dit que $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ seulement si $p > n$, alors que c'était toujours vrai en dimension une si Ω est borné. De plus, par Rellich-KLondrachov, les fonctions de $W^{1,p}$ ne sont pas toujours dans L^∞ si $p = n$. En effet, on peut trouver dans ces deux cas des fonctions dans $W^{1,p}(\Omega)$ qui n'appartiennent pas à $L^\infty(\Omega)$ et qui ne sont même pas continues:

Exemple 4.14
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ le disque centré à l'origine de rayon $r < 1$. Alors la fonction u suivante définie sur $\Omega \backslash \{(0,0)\}$
$$u(x, y) = \left(ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^k,$$
avec $0 < k < 1/2$ appartient à $H^1(\Omega)$, mais elle n'est ni bornée et ni continue à cause de la singularité en $(0, 0)$.

Exemple 4.15
Soit $B_R(x) = \{x \in \mathbb{R}^n | |x| < R\}$, et $p = n$. Soit
$$u(x) = \log \left(\log \frac{4R}{|x|} \right).$$
Alors $u \notin L^\infty(B_R(x))$ mais $u \in W^{1,p}(B_R(x))$. On peut même montrer que $u \in W^{m,p}$ si $p > 1$ et $mp = n$.

D'après les exemples précédent, on remarque qu'il n'est pas simple de définir la "valeur" de u sur le bord du domaine Ω, plus souvent appelé la *trace* de f. Néanmoins, on peut montrer qu'il n'est pas nécessaire que la fonction considérée ait un représentant continu pour la définir au bord de Ω. Dans le cas où Ω est un ouvert suffisamment régulier (lipschitzien), il existe néanmoins une unique application linéaire et continue qui permette de définir u sur le bord du domaine Ω. Ce résultat, appelé le théorème de la trace, ne nous seras néanmoins pas utile ici.

4.2 L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$

Définition 4.16
Soit $1 \le p < \infty$; $W_0^{1,p}$ *désigne la fermeture de* $C_c^1(\Omega)$ *dans* $W^{1,p}(\Omega)$.

Similairement à la dimension une, on aimerait dire que les fonctions de $W_0^{1,p}(\Omega)$ sont en "gros" les fonctions de $W^{1,p}(\Omega)$ qui s'annulent sur le bord. Il est néanmoins assez dificile de donner un sens précis à cette supposition car une fonction $u \in W^{1,p}(\Omega)$ est seulement définie *p.p.* et u n'a pas toujours un représentant continu. En supposant Ω assez régulier, on a néanmoins le résultat suivant :

Théorème 4.17
Supposons Ω *de classe* C^1. *Soit*

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \quad \text{avec} \quad 1 \le p < \infty.$$

Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $u = 0$ *sur* $\partial\Omega$;
2. $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Proposition 4.18
Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *et* $\phi \in W_0^{1,p'}(\Omega)$. *Alors*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi = -\int_\Omega u\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx, i = 1, \dots, n.$$

Démonstration. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Alors, puisque $u \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$\int_\Omega \left[\frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi + u\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx\right] = 0, i = 1, \dots, n.$$

Soit $\phi \in W_0^{1,p'}(\Omega)$ et $\epsilon > 0$. Par la densité de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W_0^{1,p'}(\Omega)$, on peut trouver $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ tel que

$$\|\varphi - \phi\|_{L^{p'}} + \|\nabla\varphi - \nabla\phi\|_{L^{p'}} \le \epsilon.$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned}
\Big|\int_\Omega \left[\frac{\partial u}{\partial x_i}\phi + u\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right]dx\Big| &\le \int_\Omega \left[\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\Big|\phi - \varphi| + |u|\Big|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\Big|\right]dx \\
&\le \|u\|_{W^{1,p}}[\|\varphi - \phi\|_{L^{p'}} + \left\|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right\|_{L^{p'}} \le \epsilon\|u\|_{W^{1,p}}.
\end{aligned}$$

Puisque ϵ est arbitraire, on a bien

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\phi = -\int_\Omega u\frac{\partial \phi}{\partial x_i}dx, i = 1, \dots, n.$$

□

Théorème 4.19 (Inégalité de Poincaré)
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert borné et* $1 \le p \le \infty$. *Alors il existe* $\gamma = \gamma(\Omega, p) > 0$ *tel que*

$$\|u\|_{L^p} \le \gamma\|\nabla u\|_{L^p}, \ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

ou de manière équivalente

$$\|u\|_{W^{1,p}} \le \gamma\|\nabla u\|_{L^p}, \ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Certaines résultats de cette section sont assez difficiles à montrer. On peut trouver diverses démonstrations dans [2], [1] ou [5].

5 Calcul des variations

5.1 Introduction

Dans ce qui va suivre, nous allons nous intéresser au problème suivant :

$$(P) \quad \inf \left\{ I(u) = \int_\Omega f(x, u(x)), \nabla u(x))dx : u \in X \right\} = m \tag{13}$$

C'est-à-dire que l'on veut minimiser l'intégral $I(u)$ dans un espace de fonctions X admissibles, où

1. Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$;
2. $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ et $u = \left(\frac{\partial u^j}{\partial x_i}\right)_{1 \leq i \leq n}^{1 \leq j \leq N} \in \mathbb{R}^{N \times n}$;
3. $f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N \times n} \to \mathbb{R}$, $f = f(x, u, \zeta)$, est continue.

Nous voulons trouver un minimum $\bar{u} \in X$ de (P), c'est-à-dire vérifiant

$$I(\bar{u}) \leq I(u), \forall u \in X.$$

Ces problèmes sont très couramment rencontrés en analyse, géométrie et mathématiques appliquées.

Exemple 5.1 (L'intégrale de Dirichlet)
C'est probablement le plus célébre problème du calcul des variations. On a dans ce cas $n > 1$, $N = 1$ et

$$(P) \quad \inf \left\{ I(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx : u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}. \tag{14}$$

L'équation différentielle associée n'est rien d'autre que l'équation de Laplace

$$\Delta u = 0.$$

A l'aide des espaces de Sobolev introduits dans la première partie, nous allons étudier l'existence, l'unicité et la régularité de solutions d'un tel problème. Cette section utilisera des résultats sur les fonctions convexes et sur la notion de convergence faible rappelée dans les préliminaires.

5.2 Existence de solutions

Définition 5.2
On dit qu'une fonction u est dans $u_0 + W_0^{1,p}$ si u, $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$ et $u - u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Cela signifie en gros que $u = u_0$ sur $\partial\Omega$.

Proposition 5.3
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert borné et $1 < p < \infty$. S'il existe une constante $\gamma > 0$ telle que

$$\|u_\nu\|_{W^{1,p}} \leq \gamma,$$

alors il existe une sous-suite $\{u_{\nu_i}\}_{i \geq 1}$ et $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tel que

$$u_{\nu_i} \rightharpoonup u \text{ dans } W^{1,p}.$$

Démonstration. Par le théorème 15, il existe u, $v_k \in L^p(\Omega)$, $k = 1, \ldots n$, et des sous-suites $\{u_{\nu_i}\}$, $\frac{\partial u_{\nu_i}}{\partial x_k}$ tel que

$$u_{\nu_i} \rightharpoonup u \text{ et } \frac{\partial u_{\nu_i}}{\partial x_k} \rightharpoonup v_k \text{ dans } L^p.$$

De plus, comme $u_{\nu_i} \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$\int_\Omega u_{\nu_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = -\int_\Omega \frac{\partial u_{\nu_i}}{\partial x_k} \varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega), \quad \forall k = 1, \ldots n.$$

Ainsi,

$$\int_\Omega v_k \varphi = \lim_{\nu_i \to \infty} \int_\Omega \frac{\partial u_{\nu_i}}{\partial x_k} \varphi = - \lim_{\nu_i \to \infty} \int_\Omega u_{\nu_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = - \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}.$$

Par conséquent, $v_k = \frac{\partial u}{\partial x_k}, k = 1 \ldots n$. Le résultat s'ensuit. $\square$

Théorème 5.4
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert lipschitzien borné. Soit $f \in C^0(\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, $f = f(x, u, \zeta)$, satisfaisant

1. *$\zeta \to f(x, u, \zeta)$ est convexe pour tout $(x, u) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$;*
2. *(H_2) il existe $p > q \geq 1$ et $\alpha_1 > 0$, α_2, $\alpha_3 \in \mathbb{R}$ tel que*

$$f(x, u, \zeta) \geq \alpha_1 |\zeta|^p + \alpha_2 |u|^q + \alpha_3, \forall (x, u, \zeta) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Soit

$$(P) \quad \inf \left\{ I(u) = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x)) dx : u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega) \right\} = m$$

où $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$ avec $I(u_0) < \infty$. Alors il existe $\bar{u} \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ un minimum de (P). De plus, si $(u, \zeta) \mapsto f(x, u, \zeta)$ est strictement convexe pour tout $x \in \bar{\Omega}$, alors le minimum est unique.

Démonstration. Nous n'allons pas montrer ce théorème dans toute sa généralité. Pour les intéressés à voir la démonstration complète, nous vous invitons à consulter [4]. Nous allons prouver ce résultat sous les hypothèses renforcées suivantes ; on supposera en premier lieu que $f \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ au lieu de C^0 et que

(H_1+) $(u, \zeta) \to f(x, u, \zeta)$ est convexe pour tout $x \in \bar{\Omega}$;

(H_2+) il existe $p > 1$ et $\alpha_1 > 0$, $\alpha_3 \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x, u, \zeta) \geq \alpha_1 |\zeta|^p + \alpha_3, \quad \forall (x, u, \zeta) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n;$$

(H_3) il existe une constante $\beta \geq 0$ tel que pour tout $(x, u, \zeta) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

$$|f_u(x, u, \zeta)|, \; |f_\zeta(x, u, \zeta)| \leq \beta(1 + |u|^{p-1} + |\zeta|^{p-1})$$

où $f_\zeta = (f_{\zeta_1}, \ldots, f_{\zeta_n})$, $f_{\zeta_i} = \partial f / \partial \zeta_i$ et $f_u = \partial f / \partial u$.

Une fois que ces hypothèses sont faites, la preuve se déroule en deux étapes.

Existence Nous allons démontrer les deux points séparément.

1. **Compacité** Par hypothèse on a

$$-\infty < m \leq I(u_0) < \infty.$$

Prenons ensuite une suite minimisante $u_\nu \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ de (P), c'est-à-dire

$$I(u_\nu) \to \inf\{I(u)\} = m, \text{ lorsque } \nu \to \infty.$$

Par conséquent, pour un ν assez grand, on obtient

$$\begin{aligned} m + 1 \geq I(u_\nu) &\geq \alpha_1 \|\nabla u_\nu\|_{L^p}^p + \alpha_3 \mathrm{mes}(\Omega) \\ &\geq \alpha_1 \|\nabla u_\nu\|_{L^p}^p - |\alpha_3| \mathrm{mes}(\Omega). \end{aligned}$$

et donc il existe $\alpha_4 > 0$ tel que

$$\|\nabla u_\nu\|_{L^p} \leq \alpha_4.$$

Puisque $u_\nu - u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, on obtient grâce à l'inégalité de Poincaré l'existence de α_5, $\alpha_6 > 0$ tel que

$$\alpha_4 \geq \|\nabla u_\nu\|_{L^p} \geq \alpha_5 \|u_\nu\|_{W^{1,p}} - \alpha_6 \|u_0\|_{W^{1,p}}$$

et finalement on peut trouver $\alpha_7 > 0$ tel que

$$\|u_\nu\|_{W^{1,p}} \leq \alpha_7.$$

Par la proposition 5.3 , on en déduit qu'il existe $\bar{u} \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ et une sous-suite (encore notée u_ν) tel que

$$u_\nu \rightharpoonup \bar{u} \text{ dans } W^{1,p}, \text{ lorsque } \nu \to \infty.$$

2. **Semi-continuité inférieure** Nous allons montrer maintenant que I est faiblement semi-continu inférieurement ; c'est-à-dire

$$u_\nu \rightharpoonup \bar{u} \text{ dans } W^{1,p} \Rightarrow \lim \inf_{\nu\to\infty} I(u_\nu) \geq I(\bar{u}).$$

Par la convexité de f (voir 2.31) et puisqu'elle est C^1 nous obtenons

$$\begin{aligned} f(x, u_\nu, \nabla u_\nu) \quad &\geq \quad f(x, \bar{u}, \nabla\bar{u}) + f_u(x, \bar{u}, \nabla\bar{u})(u_\nu - \bar{u}) && (15)\\ &+ \quad \langle f_\zeta(x, \bar{u}, \nabla\bar{u}); \nabla u_\nu - \nabla\bar{u}\rangle. && (16)\end{aligned}$$

Avant de continuer, il nous faut montrer que (H_3) et le fait que $\bar{u} \in W^{1,p}(\Omega)$ nous donne

$$f_u(x, \bar{u}, \nabla\bar{u}) \in L^{p'}(\Omega) \text{ et } f_\zeta(x, \bar{u}, \nabla\bar{u}) \in L^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^n) \qquad (17)$$

où p' est l'exposant conjugué de p. Nous allons prouver la première affirmation, la seconde s'obtenant de manière similaire. On a, par (H_3) et si C désigne une constante,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f_u(x, \bar{u}, \nabla\bar{u}|^{p'} dx \quad &\leq \quad \beta^{p'} \int_\Omega \left(1 + |\bar{u}|^{p-1} + |\nabla\bar{u}|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}} dx\\ &\leq \quad C(1 + \|\bar{u}\|_{W^{1,p}}) < \infty.\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder (2.13) et (17), nous trouvons que pour $u_\nu \in W^{1,p}(\Omega)$

$$f_u(x, \bar{u}, \nabla\bar{u})(u_\nu - \bar{u}), \ \langle f_\zeta(x, \bar{u}, \nabla\bar{u}); \nabla u_\nu - \nabla\bar{u}\rangle \ \in L^1(\Omega).$$

On intègre ensuite (15) pour obtenir

$$I(u_\nu) \geq I(\bar{u}) + \int_\Omega [f_u(x, \bar{u}, \nabla\bar{u})(u_\nu - \bar{u}) + \langle f_\zeta(x, \bar{u}, \nabla\bar{u}); \nabla u_\nu - \nabla\bar{u}\rangle] dx. \qquad (18)$$

Puisque $u_\nu - \bar{u} \rightharpoonup 0$ dans $W^{1,p}$ et que (17) est vérifiée, on en déduit à partir de la convergence faible dans L^p que

$$\lim_{\nu\to 0} \int_\Omega [f_u(x, \bar{u}, \nabla\bar{u})(u_\nu - \bar{u}) = \lim_{\nu\to 0} \int_\Omega \langle f_\zeta(x, \bar{u}, \nabla\bar{u}); \nabla u_\nu - \nabla\bar{u}\rangle] dx = 0.$$

Par conséquent, on a bien obtenu à partir de (18)

$$\lim \inf_{\nu\to\infty} I(u_\nu) \geq I(\bar{u}).$$

3. **Conclusion** Nous combinons maintenant les deux étapes précédentes ; puisque $\{u_\nu\}$ est une suite minimisante et qu'une telle suite est semi-continue inférieurement, alors

$$\lim \inf_{\nu\to\infty} I(u_\nu) = \lim_{\nu\to\infty} I(u_\nu) = \inf\{I(u)\} = m$$

et par conséquent $I(\bar{u}) = m$, c'est-à-dire que $\bar{u}$ est un minimum de (P).

Unicité Supposons qu'il existe $\bar{u}$, $\bar{v} \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ tel que

$$I(\bar{u}) = I(\bar{v}) = m$$

et montrons que ceci implique $\bar{u} = \bar{v}$. Si on pose

$$\bar{w} = \frac{\bar{u} + \bar{v}}{2}$$

alors $\bar{w} \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$. La fonction $(u, \zeta) \mapsto f(x, u, \zeta)$ étant convexe, on peut affirmer que $\bar{w}$ est aussi un minimum de (P) puisque

$$m \leq I(\bar{w}) \leq \frac{1}{2} I(\bar{u}) + \frac{1}{2} I(\bar{v}) = m.$$

On obtient ainsi

$$\int_\Omega \Big[\frac{f(x, \bar{u}, \nabla \bar{u})}{2} + \frac{f(x, \bar{v}, \nabla \bar{v})}{2} - f\left(x, \frac{\bar{u} + \bar{v}}{2}, \frac{\nabla \bar{u} + \nabla \bar{v}}{2}\right) \Big] dx = 0.$$

La convexité de $(u, \zeta) \mapsto f(x, u, \zeta)$ rend l'intégrant non-négatif. Puisque l'intégrale est nulle, la seule possibilité est donc

$$\frac{f(x, \bar{u}, \nabla \bar{u})}{2} + \frac{f(x, \bar{v}, \nabla \bar{v})}{2} - f\left(x, \frac{\bar{u} + \bar{v}}{2}, \frac{\nabla \bar{u} + \nabla \bar{v}}{2}\right) = 0 \quad p.p. \text{ dans } \Omega.$$

Nous utilisons maintenant la convexité stricte de $(u, \zeta) \mapsto f(x, u, \zeta)$ pour obtenir que $\bar{u} = \bar{v}$ et $\nabla \bar{u} = \nabla \bar{v}$ *p.p.* dans Ω. On a donc bien le résultat.

□

Remarque 5.5
Si, dans l'énoncé du théorème 5.4, on avait posé

$$f(x, u, \zeta) = g(x, u) + k(x, \zeta)$$

où $\zeta \mapsto k(x, \zeta)$, $u \mapsto g(x, u)$ *sont convexes et au moins l'une des deux est strictement convexe. Alors l'unicité dans 5.4 est conservée. Pour vérifier cela on peut procéder comme dans la démonstration précédente.*

5.3 L'équation d'Euler-Lagrange

Théorème 5.6
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert lipschitzien borné. Soit* $p \geq 1$ *et* $f \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, $f = f(x, u, \zeta)$, *satisfaisant*

(H_3) *il existe une constante* $\beta \geq 0$ *tel que pour tout* $(x, u, \zeta) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

$$|f_u(x, u, \zeta)|, \; |f_\zeta(x, u, \zeta)| \leq \beta(1 + |u|^{p-1} + |\zeta|^{p-1})$$

où $f_\zeta = (f_{\zeta_1}, \ldots, f_{\zeta_n})$, $f_{\zeta_i} = \partial f / \partial \zeta_i$ *et* $f_u = \partial f / \partial u$.

Soit $\bar{u} \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ *un minimum de*

$$(P) \quad \inf \left\{ I(u) = \int_\Omega f(x, u(x)), \nabla u(x)) dx : u \in X \right\} = m,$$

où $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$. *Alors* $\bar{u}$ *satisfait la forme faible de l'équation d'Euler-Lagrange*

$$(E_f) \quad \int_\Omega f_u(x, \bar{u}, \nabla \bar{u}) \varphi + \langle f_\zeta(x, \bar{u}, \nabla \bar{u}); \nabla \varphi \rangle] dx = 0, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Si de plus $f \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ *et* $\bar{u} \in C^2(\bar{\Omega})$

$$(E) \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [f_{\zeta_i}(x, \bar{u}, \nabla \bar{u})] = f_u(x, \bar{u}, \nabla \bar{u}), \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Réciproquement si $(u, \zeta) \mapsto f(x, u, \zeta)$ *est convexe pour tout* $x \in \bar{\Omega}$ *et si* $\bar{u}$ *est une solution de soit* (E_f) *ou* (E), *alors c'est un minimum de* (P).

Remarque 5.7
L'hypothèse H_3 nous permet de donner un sens à l'équation faible d'Euler-Lagrange (E_f). Si dans (E_f) on choisit les fonctions tests φ dans $C_0^\infty(\Omega)$ au lieu de $W_0^{1,p}(\Omega)$, alors on affaiblit d'avantage l'équation (E_f). Par conséquent, on peut affaiblir l'hypothèse (H_3) et la remplacer par

(H_3') *il existe une constante $\beta \geq 0$ et $p \geq 1$ tel que pour tout $(x, u, \zeta) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$*

$$|f_u(x, u, \zeta)|,\ |f_\zeta(x, u, \zeta)| \leq \beta(1 + |u|^p + |\zeta|^p)$$

où $f_\zeta = (f_{\zeta_1}, \ldots, f_{\zeta_n})$, $f_{\zeta_i} = \partial f/\partial \zeta_i$ et $f_u = \partial f/\partial u$.

Démonstration. Observons tout d'abord que

$$f(x, u, \zeta) = f(x, 0, 0) + \int_0^1 \frac{d}{dt}[f(x, tu, t\zeta)]dt,\ \forall (x, u, \zeta) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

En effet,

$$\int_0^1 \frac{d}{dt}[f(x, tu, t\zeta)]dt = f(x, u, \zeta) - f(x, 0, 0).$$

Ainsi, en utilisant (H_3), on peut trouver $\gamma_1 > 0$ tel que

$$|f(x, u, \zeta)| \leq \gamma_1(1 + |u|^p + |\zeta|^p),\ \forall (x, u, \zeta) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n. \tag{19}$$

On en déduit que

$$|I(u)| < \infty,\ \forall u \in W^{1,p}(\Omega)$$

La preuve se déroule maintenant en trois parties.

Dérivation de I Nous allons prouver que pour tout $u, \varphi \in W^{1,p}(\Omega)$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on a

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{I(u + \alpha\varphi) - I(u)}{\alpha} = \int_\Omega [f_u(x, u, \nabla u)\varphi + \langle f_\zeta(x, u, \nabla u); \nabla\varphi\rangle]dx \tag{20}$$

On écrit

$$I(u + \alpha\varphi) = \int_\Omega g(x, \alpha)dx,$$

où $g(x, \alpha) = f(x, u(x) + \alpha\varphi(x), \nabla u(x) + \alpha\nabla\varphi(x))$. Puisque $f \in C^1$, on considère

$$g(x, \alpha) - g(x, 0) = \int_0^1 \frac{d}{dt}[g(x, t\alpha)]dt = \alpha \int_0^1 g_\alpha(x, t\alpha)dt$$

où

$$g_\alpha(x, t\alpha) = f_u(x, u + t\alpha\varphi, \nabla u + t\alpha\nabla\varphi)\varphi + \langle f_\zeta(x, u + t\alpha\varphi, \nabla u + t\alpha\nabla\varphi); \nabla\varphi\rangle.$$

L'hypothèse (H_3) nous donne l'existence de $\gamma_2 > 0$ tel que, pour tout $\alpha \in [-1, 1]$, $t \in [0, 1]$,

$$|g_\alpha(x, t\alpha)| \leq G(x) := \gamma_2(1 + |u|^p + |\varphi|^p + |\nabla u|^p + |\nabla\varphi|^p).$$

Puisque $u, \varphi \in W^{1,p}(\Omega)$, on a $G \in L^1(\Omega)$. On observe ensuite, puisque $u, \varphi \in W^{1,p}(\Omega)$ et d'après (19) que les fonctions $x \mapsto g(x, 0)$ et $x \mapsto g(x, \alpha)$ sont toutes les deux dans $L^1(\Omega)$. Pour résumer,

$$\begin{aligned} \frac{g(x, \alpha) - g(x, 0)}{\alpha} &\in L^1(\Omega) \\ \left|\frac{g(x, \alpha) - g(x, 0)}{\alpha}\right| &\leq G(x),\ \text{avec } G \in L^1(\Omega) \\ \frac{g(x, \alpha) - g(x, 0)}{\alpha} &\to g_\alpha(x, 0) \text{ p.p. dans } \Omega. \end{aligned}$$

En appliquant la convergence dominée, on obtient (20).

Dérivation de (E_f) **et (E)** La conclusion du théorème se déduit facilement de l'étape précédente. En effet, puisque $\bar{u}$ est un minimum de (P) alors

$$I(\bar{u} + \alpha\varphi) \geq I(\bar{u}),\ \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

et donc

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{I(\bar{u} + \alpha\varphi) - I(\bar{u})}{\alpha} = 0$$

combiné avec (20) nous donne (E_f). En utilisant la proposition 4.18 on trouve

$$(E_f)\ \int_\Omega [f_u(x, \bar{u}, \nabla \bar{u}) - \operatorname{div}[f_\zeta(x, \bar{u}, \nabla \bar{u}]]\varphi dx = 0,\ \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Le lemme fondamental du calcul intégral (2.26) nous permet de conclure.

Conclusion Soit $\bar{u}$ une solution de (E_f) (Notons que toute solution de (E) est nécessairement une solution de (E_f)). Par la convexité de f on déduit que pour presque tout $u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ la relation suivante est vérifiée

$$\begin{aligned} f(x, u, \nabla u) &\geq f(x, \bar{u}, \nabla \bar{u}) + f_u(x, \bar{u}, \nabla \bar{u})(u - \bar{u}) \\ &+ \langle f_\zeta(x, \bar{u}, \nabla \bar{u}); (\nabla u - \nabla \bar{u})\rangle. \end{aligned}$$

En intégrant, utilisant (E_f) et le fait que $u - \bar{u} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ on obtient immédiatement que $I(u) \geq I(\bar{u})$ et par conséquent la démonstration est terminée.

□

5.4 Régularité des solutions

Nous considérons toujours le problème (P), Dans la section précédente, nous avons montré que, sous certaines hypothèses sur f, u_0 et Ω, (P) a un minimum $\bar{u} \in u_0 + W_0^{1,p}$. Nous allons nous intéresser maintenant à la régularité d'une telle solution. Plus précisément, si les données f, u_0 et Ω sont suffisamment régulières, c'est-à-dire C^∞, peut on en déduire que $\bar{u} \in C^\infty$?

5.4.1 La régularité en dimension 1

Nous allons nous concentrer d'abord dans le cas $n = 1$, en donnant quelques résultats intéressants. On considère le problème

$$(P) \quad \inf \left\{ I(u) = \int_a^b f(x, u(x)), u'(x))dx : u \in X \right\} = m \tag{21}$$

où $X = \{u \in W^{1,p}(a,b) : u(a) = \alpha, u(b) = \beta\}$ et $f \in C^0([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}), f = f(x, u, \zeta)$. Dans la section précédente, on a vu dans le théorème 5.4 que si f satisfait (H_1) et (H_2), alors (P) a une solution $\bar{u} \in X$. Si de plus $f \in C^1([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ et vérifie (H_3'), alors par 5.6 et la remarque 5.7, $\bar{u}$ satisfait la forme faible de l'équation d'Euler-Lagrange

$$(E_f) \quad \int_\Omega f_u(x, \bar{u}, \bar{u}')\varphi + f_\zeta(x, \bar{u}, \bar{u}')\varphi']dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(a,b).$$

Nous allons montrer qu'en renforçant certaines hypothèses, si $f \in C^\infty$ alors $\bar{u} \in C^\infty$.

Proposition 5.8
Soit $g \in C^\infty([a,b] \times \mathbb{R})$ *satisfaisant*

(H_2) *il existe* $2 > q \geq 1$ *et* $\alpha_2,\ \alpha_3 \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$g(x, u) \geq \alpha_2 |u|^q + \alpha_3, \forall (x, u) \in [a,b] \times \mathbb{R}.$$

Soit
$$f(x,u,\zeta) = \frac{1}{2}\zeta^2 + g(x,u).$$
Alors il existe $\bar{u} \in C^\infty([a,b])$, un minimum de (P). Si, de plus, $u \mapsto g(x,u)$ est convexe pour tout $x \in [a,b]$, alors le minimum est unique.

Démonstration. Puisque la fonction $\zeta \mapsto f(x,u,\zeta)$ est convexe, alors l'existence d'une solution $\bar{u} \in W^{1,2}(a,b)$ s'obtient directement à partir du théorème 5.4. Pour l'unicité, on utilise la remarque 5.5. De plus, par le théorème 5.6 et la remarque 5.7, $\bar{u}$ satisfait la forme faible de l'équation d'Euler-Lagrange

$$\int_a^b \bar{u}'v'dx = -\int_a^b g_u(x\bar{u})vdx, \quad \forall v \in C_0^\infty(a,b). \tag{22}$$

Nous allons commencer par montrer que $\bar{u} \in W^{2,2}(a,b)$. Comme $\bar{u} \in W^{1,2}(a,b)$, on a en particulier par la remarque 4.13 que $\bar{u} \in L^\infty(a,b)$ et donc $g_u(x,\bar{u}) \in L^2$. Par l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\Big|\int_a^b \bar{u}'v'dx\Big| \leq \|g_u(x,\bar{u})\|_{L^2}\|v\|_{L^2}, \quad \forall v \in C_0^\infty(a,b).$$

Par le théorème 3.14, $\bar{u} \in W^{2,2}(a,b)$. En intégrant par partie (22) et puisqu'on a les conditions de bord $v(a) = v(b) = 0$:

$$\int_a^b \bar{u}''vdx = \int_a^b g_u(x,\bar{u})vdx, \forall v \in C_0^\infty(a,b)$$

En utilisant ensuite le lemme fondamental du calcul des variations (2.26), on en déduit que
$$\bar{u}''(x) = g_u(x,\bar{u}(x)) \quad p.p.x \in (a,b). \tag{23}$$
Puisque $\bar{u} \in W^{2,2}(a,b)$, on en déduit de la remarque 4.13 que $\bar{u} \in C^1([a,b])$ et donc que la fonction
$$x \to g_u(x,\bar{u})$$
est $C^1([a,b])$, g étant C^∞. Par (23) $\bar{u}'' \in C^1([a,b])$ et donc $\bar{u} \in C^3([a,b])$. On termine la preuve par récurrence. Comme $\bar{u} \in C^3([a,b])$, on en déduit que $g_u(x,\bar{u}(x))$ est $C^3([a,b])$ et de nouveau par (23) $\bar{u} \in C^5([a,b])$ puisque $\bar{u}'' \in C^3([a,b])$. En continuant ce procédé, on montre finalement que $\bar{u} \in C^\infty([a,b])$. □

Lemme 5.9
Soit $f \in C^1([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ satisfaisant (H_1), (H_2) et (H_3'). Alors tout minimum $\bar{u} \in W^{1,p}(a,b)$ de (P) est en fait dans $W^{1,\infty}(a,b)$ et l'équation d'Euler-Lagrange est satisfaite presque partout,

$$\frac{d}{dx}[f_\zeta(x,\bar{u},\bar{u}')] = f_u(x,\bar{u},\bar{u}'), \quad p.p. \in (a,b).$$

Démonstration. On sait du théorème 5.6 et de la remarque 5.7 que l'équation suivante est satisfaite

$$(E_f) \quad \int_\Omega f_u(x,\bar{u},\bar{u}')\varphi + f_\zeta(x,\bar{u},\bar{u}')\varphi']dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(a,b). \tag{24}$$

On divise ensuite la preuve en deux étapes.

(i) Définissons

$$\varphi(x) = f_\zeta(x,\bar{u}(x),\bar{u}'(x)) \text{ et } \gamma(x) = f_u(x,\bar{u}(x),\bar{u}'(x)).$$

Puisque $\bar{u} \in W^{1,p}(a,b)$, $\bar{u} \in L^\infty(a,b)$ et on déduit de (H_3') que γ et $\varphi \in L^1(a,b)$. De plus, par (24)

$$\int_a^b \gamma(x)v(x)dx = -\int_a^b \varphi(x)v'(x)dx, \quad \forall v \in C_0^\infty(a,b).$$

Par conséquent, $\varphi \in W^{1,1}(a,b)$ et $\varphi' = \gamma p.p.$ Par conséquent,

$$\frac{d}{dx}[f_\zeta(x,\bar{u},\bar{u}')] = f_u(x,\bar{u},\bar{u}'), \quad p.p. \in (a,b)$$

(*ii*) Puisque $\varphi \in W^{1,1}(a,b)$, on a en particulier que $\varphi \in C^0([a,b])$ ce qui signifie qu'il existe une constante θ tel que

$$|\varphi(x)| = |f_\zeta(x,\bar{u}(x),\bar{u}'(x))| \leq \theta, \forall x \in [a,b].$$

Comme $\bar{u}$ est bornée et continue, on peut trouver $C > 0$ tel que $|\bar{u}(x)| \leq C$ pour tout $x \in [a,b]$. Par l'hypothèse (H_1) on a

$$f(x,u,0) \geq f(x,u,\zeta) - \zeta(f_\zeta(x,u,\zeta), \quad \forall (x,u,\zeta) \in [a,b] \times [-C,C] \times \mathbb{R}.$$

En combinant cette inégalité avec (H_2), on peut trouver $\beta \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $(x,u,\zeta) \in [a,b] \times [-C,C] \times \mathbb{R}$,

$$\zeta f_\zeta(x,u,\zeta) \geq f(x,u,\zeta) - f(x,u,0) \geq \alpha_1|\zeta|^p + \beta.$$

En utilisant cette dernière inégalité, on trouve

$$\alpha_1|\bar{u}'|^p + \beta \leq \bar{u}' f_\zeta(x,\bar{u},\bar{u}') \leq |\bar{u}'||f_\zeta(x,\bar{u},\bar{u}')| \leq \theta|\bar{u}'|, \quad p.p. \text{ dans } (a,b)$$

ce qui implique, puisque $p > 1$, que $|\bar{u}'|$ est uniformément bornée. Donc $\bar{u} \in W^{1,\infty}(a,b)$.

□

Théorème 5.10
Soit $g \in C^1([a,b] \times \mathbb{R})$ satisfaisant

(H_2) *il existe $p > q \geq 1$ et α_2, $\alpha_3 \in \mathbb{R}$ tel que*

$$g(x,u) \geq \alpha_2|u|^q + \alpha_3, \ \forall (x,u) \in [a,b] \times \mathbb{R}.$$

Soit

$$f(x,u,\zeta) = \frac{1}{p}|\zeta|^p + g(x,u).$$

Alors il existe $\bar{u} \in C^1([a,b])$, avec $|\bar{u}'|^{p-2}\bar{u}' \in C^1([a,b])$, un minimum de (P), et l'équation d'Euler Lagrange est satisfaite partout,

$$\frac{d}{dx}[|\bar{u}'(x)|^{p-2}\bar{u}'(x)] = g_u(x,\bar{u}(x)), \forall x \in [a,b].$$

De plus, si $1 < p \leq 2$, alors $\bar{u} \in C^2([a,b])$ et si $u \mapsto g(x,u)$ est convexe pour tout $x \in [a,b]$, alors le minimum est unique.

Démonstration. L'existence d'une unique solution $\bar{u} \in W^{1,p}(a,b)$ se déduit du théorème 5.4 et de la remarque 5.5. Par le lemme 5.9, $\bar{u} \in W^{1,\infty}(a,b)$ et puisque la fonction $x \to g_u(x,\bar{u}(x))$ est continue, l'équation d'Euler-Lagrange est satisfaite sur tout l'intervalle, c'est-à-dire

$$\frac{d}{dx}[|\bar{u}'(x)|^{p-2}\bar{u}'(x)] = g_u(x,\bar{u}(x)), \forall x \in [a,b].$$

Par conséquent, $|\bar{u}'(x)|^{p-2}\bar{u}'(x)$ est $C^1([a,b])$. En appelant $v \equiv |\bar{u}'(x)|^{p-2}\bar{u}'(x)$, on peut affirmer que

$$\bar{u}' = |v|^{\frac{2-p}{p-1}} v.$$

Comme la fonction $t \mapsto |t|^{\frac{2-p}{p-1}} t$ est continue si $p > 2$ et C^1 si $1 < p \leq 2$, on obtient, puisque $v \in C^1([a,b])$, la conclusion du théorème. □

5.4.2 La régularité en dimension n

Nous allons nous intéresser maintenant à la régularité de solution de notre problème (P) dans Ω, un ouvert de $\mathbb{R}^n$. C'est une question difficile comme nous le montre l'exemple suivant:

Exemple 5.11
Soit $f(x,u,\zeta) = \frac{1}{2}|\zeta|^2 - k(x)u$. L'équation d'Euler-Lagrange associée est

$$\Delta u = -k.$$

Si $n = 1$, alors en supposant $k \in C^{m,\alpha}$ avec $m \geq 0$ et $0 \leq \alpha \leq 1$ ou $k \in W^{m,p}$, avec $1 \leq p \leq \infty$, il est clair que $u \in C^{m+2,\alpha}$ ou $u \in W^{m+2,p}$.
Si $n \geq 2$, alors il faut que la trace de la matrice des dérivées partielles du second ordre de u, appelée la matrice Hessienne*, soit dans $C^{m,\alpha}$ ou dans $W^{m,p}$. Nous cherchons à montrer que $u \in C^{m+2,\alpha}$ ou $u \in W^{m+2,p}$. A priori, il n'est pas évident de voir que c'est le cas, car il faut que toute les entrées de la matrice Hessienne soient dans $C^{m,\alpha}$ ou dans $W^{m,p}$. En fait le résultat est vrai seulement pour $0 < \alpha < 1$ ou $1 < p < \infty$. Il existe des contre-exemples pour les cas limites $\alpha = 0, 1$ et $p = 1, \infty$.*

Nous allons dans ce paragraphe principalement étudier la régularité à l'intérieur pour $p = 2$ avec l'intégrale de Dirichlet. L'objectif est de montrer que le minimum n'est pas seulement dans $W^{1,2}$ mais en fait dans $W^{2,2}_{loc}$. Pour la régularité sur le bord du domaine, nous allons voir que u est finalement dans $W^{2,2}$ sur $\overline{\Omega}$ et pas seulement dans $W^{2,2}_{loc}$. Nous ne montrerons pas ce dernier résultat, car il fait appel à des notions théoriques sur les cartes que nous n'avons pas developpées jusqu'ici.

Théorème 5.12 (Régularité à l'intérieur)
Ce long théorème est séparé en deux parties :

Première partie *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert lipschitzien borné, $u_o \in W^{1,2}(\Omega)$, $k \in L^2(\Omega)$ et $g \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n)$, $g = g(x\zeta)$, avec $\zeta \mapsto g(x,\zeta)$ convexe et tel qu'il existe $0 < \alpha_1 \leq \alpha_3$ et $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ avec*

$$(G_1) \quad \alpha_1|\zeta|^2 - \alpha_2 \leq g(x,\zeta) \leq \alpha_3\left(|\zeta|^2 + 1\right), \forall (x,\zeta) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n.$$

Alors il existe un minimum $u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ de

$$(P) \quad \inf\left\{I(u) = \int_\Omega [g(x, \nabla u(x)) - k(x)u(x)]dx : \; u \in u_0 + W_0^{1,2}(\Omega)\right\} = m \tag{25}$$

satisfaisant

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial \zeta_i}(x, \nabla u(x)) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = \int_\Omega k(x)\varphi(x)dx : \forall \varphi \in W_0^{1,2}. \tag{26}$$

Seconde partie *Si de plus $g \in C^2(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n)$ et qu'il existe des constantes α_4, α_5, $\alpha_6 > 0$ tel que*

$$(G_2) \quad \left|\frac{\partial^2 g}{\partial \zeta_i \partial \zeta_j}(x,\zeta)\right| \leq \alpha_4, \forall (x,\zeta) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n \quad \text{et } \forall i,j = 1,\ldots,n$$

$$(G_3) \quad \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial \zeta_i \partial \zeta_j}(x,\zeta)\lambda_i, \lambda_j \geq \alpha_5|\lambda|^2, \forall \zeta, \lambda \in \mathbb{R}^n \quad \text{et } \forall x \in \bar{\Omega}$$

$$(G_4) \quad \left|\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial \zeta_j}(x,\zeta)\right| \leq \alpha_6|\zeta|, \forall (x,\zeta) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n \quad \text{et } \forall i,j = 1,\ldots,n$$

alors le minimum $u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ est unique et $u \in W^{2,2}_{loc}(\Omega)$. Plus précisément, pour tout ouvert $\mathcal{O} \subset \bar{\mathcal{O}} \subset \Omega$, il existe une constante $\gamma > 0$ tel que

$$\|u\|_{W^{2,2}(O)} \leq \gamma\Big[\|h\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}\Big].$$

De plus, la forme suivante de l'équation d'Euler-Lagrange est satisfaite :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big[\frac{\partial g}{\partial \zeta_i}(x_i, \nabla u)\Big] = -h, \quad p.p. \text{ dans } \Omega. \tag{27}$$

Démonstration. L'existence d'un minimum est assurée à nouveau par le théorème 5.4 et la remarque 5.5. Remarquons ensuite que l'hypothèse (G_1) et la proposition 2.32 nous donnent l'existence d'une constante $\alpha_7 > 0$ tel que

$$(G_1)\Big|\frac{\partial g}{\partial \zeta_i}(x,\zeta)\Big| \leq \alpha_7(|\zeta|+1),\ \forall (x,\zeta) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n \text{ et } \forall i = 1, \ldots, n$$

Par le théorème 5.6 et la remarque 5.7, l'équation d'Euler-Lagrange est satisfaite. L'hypothèse (G_3) et le théorème 2.31 nous donnent la convexité stricte de g. Par conséquent, l'unicité de la deuxième partie est montrée. De plus, si $u \in W^{2,2}_{loc}(\Omega)$, on obtient (27) en intégrant (26) par partie. Il nous reste donc à montrer que $u \in W^{2,2}_{loc}(\Omega)$. La preuve est divisée en deux parties.

Etape 1 Nous allons developper trois faits qui seront constamment utilisés dans la preuve du théorème.

Fait 1 On rappelle la notion de quotient différentiel (voir 3.13). Pour $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, on a

$$(D_h u)(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{|h|}.$$

On remarque que

$$\nabla(D_h u) = \nabla\left(\frac{u(x+h) - u(x)}{|h|}\right) = \frac{\nabla(u(x+h)) - \nabla(u(x))}{|h|} = D_h(\nabla u).$$

Par un changement de variable, si $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$ avec v a support compact dans Ω et $0 \neq |h| < \text{dist}(\text{supp } v, \Omega^c)$,

$$\int_\Omega \langle \nabla u; \nabla D_{-h} v\rangle dx = \int_\Omega \langle D_h \nabla u; \nabla v\rangle dx. \tag{28}$$

Fait 2 Nous observons que

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \zeta_i}(x,\zeta) - \frac{\partial g}{\partial \zeta_i}(x,0) &= \int_0^1 \frac{d}{dt}\Big[\frac{\partial g}{\partial \zeta_i}(x,t\zeta)\Big]dt \\ &= \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 g}{\partial \zeta_i \partial \zeta_j}(x,t\zeta)\zeta_j\Big]dt. \end{aligned}$$

Par conséquent, l'hypothèse (G_3) implique que

$$\langle \nabla_\zeta g(x,\zeta) - \nabla_\zeta g(x,0); \zeta\rangle \geq \alpha_5 |\zeta|^2, \quad \forall (x,\zeta) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n. \tag{29}$$

Fait 3 On utilisera souvent la version suivante de l'inégalité de Cauchy-Schwarz : soit $\epsilon > 0$, donc

$$ab = \sqrt{\epsilon}a \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}b \leq \epsilon a^2 + \frac{b^2}{\epsilon}$$

ce qui nous amène à

$$\|uv\|_{L^1} \leq \epsilon \|u\|^2_{L^2} + \frac{1}{\epsilon}\|v\|^2_{L^2}.$$

Méthode du quotient différentiel Soit $\mathcal{O} \subset \overline{\mathcal{O}} \subset \Omega$ et prenons $\rho \in C_0^\infty(\Omega)$ tel que

$$0 \leq \rho \leq 1 \quad \text{et} \quad \rho \equiv 1 \text{ dans } \mathcal{O}.$$

Nous prenons maintenant une fonction particulière $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ dans l'équation d'Euler-Lagrange (26), à savoir, pour $|h|$ suffisamment petit,

$$\varphi = D_{-h}(\rho^2 D_h u).$$

L'équation (26) devient alors

$$\int_\Omega \langle \nabla_\zeta g(x, \nabla u); \nabla(D_{-h}\rho^2(D_h u))\rangle = \int_\Omega h D_{-h}(\rho^2 D_h u).$$

En utilisant les propriétés du quotient différentiel, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \langle \nabla_\zeta g(x, \nabla u); \nabla(D_{-h}\rho^2(D_h u))\rangle = \int_\Omega \langle D_h[\nabla_\zeta g(x, \nabla u)]; \nabla(\rho^2(D_h u))\rangle \\
= &\int_\Omega \langle D_h[\nabla_\zeta g(x, \nabla u)]; \rho^2(\mathcal{D}_h \nabla u)\rangle + 2\int_\Omega \langle D_h[\nabla_\zeta g(x, \nabla u)]; \rho\nabla\rho(D_h u))\rangle \\
= &\int_\Omega h D_{-h}(\rho^2 D_h u)
\end{aligned}$$

où

$$D_h[\nabla_\zeta g(x, \nabla u)] = \left(D_h\left[\frac{\partial g}{\partial \zeta_1}(x, \nabla u)\right], \ldots, D_h\left[\frac{\partial g}{\partial \zeta_n}(x, \nabla u)\right]\right) \tag{30}$$

et

$$D_h\left[\frac{\partial g}{\partial \zeta_i}(x, \nabla u)\right] = \frac{1}{|h|}\left[\frac{\partial g}{\partial \zeta_i}(x+h, \nabla u(x+h)) - \frac{\partial g}{\partial \zeta_i}(x, \nabla u(x))\right]. \tag{31}$$

Nous allons estimer les trois termes de l'équation (30). Cela se fera en deux étapes.

Etape 1 Faisons déjà une première observation :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial g}{\partial \zeta_i}(x+h, \nabla u(x+h)) - \frac{\partial g}{\partial \zeta_i}(x+h, \nabla u(x)) \\
= &\int_0^1 \frac{d}{dt}\Big[\frac{\partial g}{\partial \zeta_i}(x+h, \nabla u(x) + t(\nabla u(x+h) - \nabla u(x)))\Big]dt \\
= &\sum_{j=1}^n \int_0^1 \Big[\frac{\partial^2 g}{\partial \zeta_i \partial \zeta_j}(x+h, \nabla u(x) + t(\nabla u(x+h) - \nabla u(x))) \\
\cdot &\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}(x+h) - \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\right)\Big]dt.
\end{aligned}$$

Par ailleurs nous voyons que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial \zeta_i}(x+h, \nabla u(x)) \quad - \quad &\frac{\partial g}{\partial \zeta_i}(x, \nabla u(x)) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\Big[\frac{\partial g}{\partial \zeta_i}(x+th, \nabla u(x))\Big]dt \\
= \quad &\int_0^1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial \zeta_i \partial x_j}(x+th, \nabla u(x)) h_j dt.
\end{aligned}$$

On écrit, pour simplifier les notations,

$$g_{ij}(x) = \int_0^1 \frac{\partial^2 g}{\partial \zeta_i \partial \zeta_j}(x+h, \nabla u(x) + t(\nabla u(x+h) - \nabla u(x)))dt$$

et

$$\tilde{g}_{ij}(x) = \int_0^1 \frac{\partial^2 g}{\partial \zeta_i \partial x_j}(x+th, \nabla u(x))dt$$

On peut alors réécrire (31)

$$D_h\left[\frac{\partial g}{\partial \zeta_i}(x, \nabla u)\right] = \sum_{j=1}^n g_{ij}(D_h u_{x_j}) + \sum_{j=1}^n \tilde{g}_{ij}\frac{h_j}{|h|}.$$

Par les hypothèses (G_2) et (G_4) et l'estimation précédente on obtient

$$|D_h[\nabla_\zeta g(x,\nabla u)]| \leq n\alpha_4|D_h\nabla u| + n\alpha_6|\nabla u|. \tag{32}$$

De plus nous avons

$$\langle D_h[\nabla_\zeta g(x,\nabla u)]; D_h\nabla u\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(D_h u_{x_j})(D_h u_{x_i}) + \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{g}_{ij}\frac{h_j}{|h|}(D_h u_{x_i})$$

et donc par (G_3)

$$\langle D_h[\nabla_\zeta g(x,\nabla u)]; D_h\nabla u\rangle \geq \alpha_5|D_h\nabla u|^2 - n^2\alpha_6|\nabla u||D_h\nabla u|.$$

En fixant $\epsilon > 0$, on a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\langle D_h[\nabla_\zeta g(x,\nabla u)]; D_h\nabla u\rangle \geq (\alpha_5 - n^2\alpha_6\epsilon)|D_h\nabla u|^2 - \frac{n^2\alpha_6}{\epsilon}|\nabla u|^2. \tag{33}$$

Etape 2 Nous allons maintenant estimer les trois termes de l'équation d'Euler-Lagrange (30).

Estimation du premier terme En multipliant l'équation (33) par ρ^2 on obtient

$$\begin{aligned}(\alpha_5 - n^2\alpha_6\epsilon)\|\rho D_h\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} &- \frac{n^2\alpha_6}{\epsilon}\|\rho\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &\leq \int_\Omega \langle D_h[\nabla_\zeta g(x,\nabla u)]; \rho^2(D_h\nabla u)\rangle.\end{aligned}$$

Comme $0 \leq \rho \leq 1$:

$$\begin{aligned}(\alpha_5 - n^2\alpha_6\epsilon)\|\rho D_h\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} &- \frac{n^2\alpha_6}{\epsilon}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &\leq \int_\Omega \langle D_h[\nabla_\zeta g(x,\nabla u)]; D_h\nabla u\rangle.\end{aligned}$$

Estimation du deuxième terme De l'équation (32) on obtient, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à deux reprises,

$$\begin{aligned}&\left|2\int_\Omega \langle D_h[\nabla_\zeta g(x,\nabla u)]; \rho\nabla\rho(D_h u))\rangle\right|\\ \leq\ & 2n\alpha_4\int_\Omega \rho(D_h\nabla u)||\nabla\rho(D_h u)| + 2n\alpha_6\int_\Omega |\rho\nabla u||\nabla\rho(D_h u)|\\ \leq\ & 2n\alpha_4\epsilon\|\rho(D_h\nabla u)\|^2_{L^2(\Omega)} + \left(\frac{2n\alpha_4}{\epsilon} + 2n\alpha_6\right)\|\nabla\rho(D_h u)\|^2_{L^2(\Omega)}\\ +\ & 2n\alpha_6\|\rho\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

En utilisant le théorème 3.14, on obtient

$$\begin{aligned}\|\rho(D_h\nabla u)\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_{\mathrm{supp}\rho}|\nabla\rho(D_h u)|^2 &\leq \|\nabla\rho\|^2_{L^\infty}\int_{\mathrm{supp}\rho}|D_h u)|^2\\ &\leq \|\nabla\rho\|^2_{L^\infty}\|\nabla\|^2_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

et donc, puisque $0 \leq \rho \leq 1$,

$$\begin{aligned}&\left|2\int_\Omega \langle D_h[\nabla_\zeta g(x,\nabla u)]; \rho\nabla\rho(D_h u))\rangle\right|\\ \leq\ & 2n\alpha_4\epsilon\|\rho(D_h\nabla u)\|^2_{L^2(\Omega)} + (\frac{2n\alpha_4}{\epsilon}\\ +\ & 2n\alpha_6)\|\nabla\rho\|^2_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}\\ +\ & 2n\alpha_6\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Estimation du troisième terme Il suit du théorème 3.14 et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que, pour $\epsilon > 0$ fixé,

$$\begin{aligned}\Big|\int_\Omega k(D_h\rho^2(D_hu))\Big| &\le \epsilon\|D_h\rho^2(D_hu)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\epsilon}\|k\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &\le \epsilon\|\nabla(\rho^2(D_hu))\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\epsilon}\|k\|^2_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

Puisqu'on a, en utilisant l'inégalité $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$

$$\begin{aligned}\|\nabla(\rho^2(D_hu))\|^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega |\rho^2(D_h\nabla u) + 2\rho\nabla\rho(D_hu)|^2\\ &\le 2\int_\Omega |\rho^2(D_h\nabla u|^2 + 2\int_\Omega |2\rho\nabla\rho(D_hu)|^2\end{aligned}$$

on obtient, similairement à l'estimation faite précédemment pour le deuxième terme et puisque $\rho^2 \le \rho$,

$$\begin{aligned}\Big|\int_\Omega k(D_h\rho^2(D_hu))\Big| &\le 2\epsilon\|\rho(D_h\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &+ 8\epsilon\|\nabla\rho\|^2_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\epsilon}\|k\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Conclusion En insérant ces trois estimations dans l'équation d'Euler-Lagrange (30), on obtient

$$\begin{aligned}&(\alpha_5 - n^2\alpha_6\epsilon - 2n\alpha_4\epsilon - 2\epsilon)\|\rho(D_h\nabla u)\|^2_{L^2(\Omega)}\\ \le\ &\left(\frac{2n\alpha_4}{\epsilon} + 2n\alpha_6 + 8\epsilon\right)\|\nabla\rho\|^2_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}\\ +\ &\left(2n\alpha_6 + \frac{n^2\alpha_6}{\epsilon}\right)\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\epsilon}\|k\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Par conséquent, en choisissant ϵ suffisamment petit, on peut trouver une constante $\gamma_1 = \gamma_1(\epsilon,\rho) > 0$ tel que

$$\|\rho(D_h\nabla u)\|^2_{L^2(\Omega)} \le \gamma_1\left(\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|k\|^2_{L^2(\Omega)}\right).$$

Puisque $\rho \equiv 1$ sur $\mathcal{O}$, on obtient

$$\|(D_h\nabla u)\|^2_{L^2(\mathcal{O})} \le \gamma_1\left(\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|k\|^2_{L^2(\Omega)}\right).$$

Par le théorème 3.14 on en déduit que

$$\|\nabla^2 u\|^2_{L^2(\mathcal{O})} \le \gamma_1\left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|k\|^2_{W^{1,2}(\Omega)}\right).$$

On peut alors conclure que $u \in W^{2,2}_{\text{loc}}(\Omega)$ avec

$$\|u\|^2_{W^{2,2}(\mathcal{O})} \le (\gamma_1 + 1)\left(\|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} + \|k\|^2_{L^2(\Omega)}\right).$$

ce qui achève la démonstration.

□

Théorème 5.13 (Régularité sur le bord)
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble de classe C^2, $k \in L^2(\Omega)$ et $g_{ij} = gji \in C^1(\overline{\Omega})$ tel qu'il existe $\alpha > 0$ avec

$$(G) \qquad \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x)\lambda_i\lambda_j \ge \alpha|\lambda|^2, \ \forall\lambda \in \mathbb{R}^n \text{ et } \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Alors il existe un unique minimum $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega)$ *du problème*

$$(P) \quad \inf \left\{ I(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega g_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx - \int_\Omega kudx : u \in W_0^{1,2}(\Omega) \right\}$$

et il existe une constante $\gamma > 0$ *tel que*

$$\|u\|_{W^{2,2}(\Omega)} \leq \gamma \|h\|_{L^2(\Omega)}.$$

Démonstration. On ne donnera ici que l'idée générale de la preuve. Pour une démonstration plus détaillée vous pouvez consulter [3]. En utilisant des cartes, on peut montrer le résultat pour le demi-hypercube suivant :

$$\Omega = (-1,1)^n \cap \{x_n > 0\},$$

et on applique à nouveau la méthode du quotient différentiel avec une fonction $\rho \in C_c^\infty((-1,1)^n)$. Cependant, puisque ρ ne s'annule pas sur tout le bord de Ω et comme la solution n'est pas définie en dehors de $\overline{\Omega}$, on a une restriction sur le vecteur directeur h dans le quotient différentiel car on ne peut pas aller dans toutes les directions possibles. On pose alors $h = (h_1, h_2, \dots, h_{n-1}, 0) \neq 0$. On peut donc estimer tous les $u_{x_i x_j}$, $2 \leq i + j < 2n$, similairement au théorème précédent. Quant à $u_{x_n x_n}$, on arrive, à l'aide de l'équation d'Euler-Lagrange, des hypothèses du problème et des $u_{x_i x_j}$, $2 \leq i+j < 2n$ à contrôler la norme de $u_{x_n x_n}$, permettant ainsi de conclure que $u \in W^{2,2}(\Omega)$. □

Références

[1] A. Adams *Sobolev Spaces.* Elsevier, London, 2003.

[2] H. Brezis *Analyse fonctionnelle : théorie et application.* Masson, Paris, 1983.

[3] B. Dacorogna *Introduction to the calculus of variations.* Imperial College Press, London, 2009.

[4] B. Dacorogna *Direct method in the Calculus of Variations.* Springer, New-York, 2008.

[5] M-Th. Lacroix-Sonrier *Distribution, Espaces de Sobolev, Applications.* Ellipses, Paris, 1998.

[6] A. Munnier *Espaces de Sobolev et introduction aux équations aux dérivées partielles.* Nancy Université, France, 2007-2008.
http ://www.iecn.u-nancy.fr/ munnier/

[7] A. Quarteroni *Numerical Models for Differential Problems.* Springer, New-York, 2009.