ESPACE L^2

1 Définition

DÉFINITION 1.1 :

On note $L^2(\Omega)$ l'ensemble des fonction de carré intégrable sur Ω. Une fonction u définie sur Ω à valeurs complexes est dite de carré intégrable si u est mesurable et $u^2 \in L^1(\Omega)$. On définie alors la nomre sur L^2 :

$$\|u\|_{L^2} = \left(\int_\Omega |u|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

L^2 est un espace vectoriel.

PROPRIÉTÉ 1.1 :

❶ L'application de $L^2 \times L^2 \longrightarrow \mathbb{C}$:

$$(u,v) \longmapsto \int_\Omega u(x)\overline{v}(x)\,\mathrm{d}x$$

est un produit scalaire que l'on notera $(u,v)_{L^2}$.

❷ L'inégalité de MINKOWSKI est vérifiée :

$$\|u+v\|_{L^2} \leqslant \|u\|_{L^2} + \|v\|_{L^2}$$

❸ Si $u \in L^2(\Omega)$ et $v \in L^2(\Omega)$ alors $uv \in L^1(\Omega)$ car l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ est vérifiée :

$$\int_\Omega |uv| \leqslant \left(\int_\Omega |u|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

On le note aussi :

$$\|uv\|_{L^1} \leqslant \|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2}$$

❹ L'espace L^2 est complet, c'est un espace de HILBERT !

❺ $\mathscr{D}(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$.

Pour la convergence avec la norme de L^2, on parlera de *convergence en moyenne quadratique*.

2 Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbf{R}^n)$

Propriété 2.2 :

1. L'espace $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ est dense dans $L^2(\mathbf{R}^n)$.
2. On a que :

$$L^2(\mathbf{R}^n) \subset \mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$$

Théorème 2.1 : Plancherel-Parseval

La transformée de Fourier $\mathscr{F}$ et son inverse $\overline{\mathscr{F}}$ sont des **isoméries** $L^2(\mathbf{R}^n)$ et on a, pour tous u et v dans $L^2(\mathbf{R}^n)$:

1. L'identié de Parseval :

$$\int_{\mathbf{R}^n} u(x)\overline{v}(x)\,\mathrm{d}x = (u,v)_{L^2} = (\widehat{u},\widehat{v})_{L^2} = \int_{\mathbf{R}^n} \widehat{u}(x)\overline{\widehat{v}}(x)\,\mathrm{d}x$$

2. L'identité de Plancherel :

$$\|u\|_{L^2} = \|\widehat{u}\|_{L^2}$$

3 Propriétés

Propriété 3.3 : Complet

Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Alors :

$$L^2(\Omega) \text{ est un Hilbert}$$

En particulier il est *complet*.

Théorème 3.2 : Densité

$$\mathscr{D}(\Omega) \text{ est dense dans } L^2(\Omega)$$

4 Comparaison des ensembles

PROPRIÉTÉ 4.4 :

On a :

$$\mathscr{D}(\Omega) \subset \mathscr{S}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset \mathscr{S}'(\Omega) \subset \mathscr{D}'(\Omega)$$

et

$$\mathscr{D}(\Omega) \subset \mathscr{S}(\Omega) \subset L^1(\Omega) \subset \mathscr{S}'(\Omega) \subset \mathscr{D}'(\Omega)$$

PROPRIÉTÉ 4.5 :

Soir Ω un borné de $\mathbf{R}^n$, alors :

$$Ł^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$$

Attention : ceci n'est par vrai pour $\Omega = \mathbf{R}^n$.