Chapitre 2

Equations elliptiques linéaires

2.1 Formulation faible

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$. Soient $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$, pour $i, j = 1, \ldots, N$. On suppose que les fonctions $a_{i,j}$ vérifient l'hypothèse d'ellipticité uniforme, c'est-à-dire :

$$\exists \alpha > 0;\ \forall \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N,\ \sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2. \tag{2.1.1}$$

On se donne $f \in L^2(\Omega)$ et $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$, et on cherche une solution au problème :

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} a_{i,j}\partial_i(a_{i,j}\partial_j u)(x) = f(x),\ x \in \Omega \tag{2.1.2a}$$

$$u(x) = g(x),\ x \in \partial\Omega, \tag{2.1.2b}$$

où $\partial_i u$ désigne dérivée partielle de u par rapport à sa la i-ème variable.

Exemple 2.1 (Le Laplacien) *Si on prend $a_{i,j} = \delta_{i,j}$ (c'est-à-dire 1 si $i = j$, 0 si $i \neq j$), alors le problème* (2.1.2) *devient*

$$-\Delta u = f \text{ sur } \Omega,$$
$$u = g \text{ sur } \partial\Omega.$$

Définition 2.2 (Solution classique) *On suppose que $a_{i,j} \in C^1(\Omega)$ pour tout $i, j = 1, \ldots, N$. On suppose que $f \in C(\Omega)$ et $g \in C(\partial\Omega)$ On appelle alors solution classique de* (2.1.2) *une fonction $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ vérifiant* (2.1.2).

Le problème est qu'il n'existe pas forcément de solution classique à (2.1.2). Mais il existe des solutions plus faibles, en un sens que l'on va définir ci-après. Pour comprendre leur nature, considérons d'abord le cas $g = 0$, avec $a_{i,j} \in C^1(\Omega)$ $f \in C(\Omega)$, et supposons qu'il existe une solution classique $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Par définition, celle ci vérifie :

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} a_{i,j}\partial_i(a_{i,j}\partial_j u)(x) = f(x),\ \forall x \in \Omega.$$

Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$; multiplions l'équation précédente par $\varphi(x)$ et intégrons sur Ω :

$$\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^N \sum_{i=1}^N \partial_i (a_{i,j} \partial_j u)(x) \right) \varphi(x) \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\varphi(x) \, \mathrm{d}x, \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Une intégration par parties donne alors :

$$\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^N \sum_{i=1}^N a_{i,j} \partial_i u(x) \partial_j \varphi(x) \right) \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\varphi(x) \, \mathrm{d}x, \ \forall x \in \Omega. \tag{2.1.3}$$

Comme $u \in C^2(\Omega)$, on a $\partial_i u \in C^2(\overline{\Omega}) \subset C(\overline{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$, et $D_i u = \partial_i u$ p.p (ce résultat n'est pas évident à démontrer). De plus $u \in C(\overline{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$ et donc $u \in H^1(\Omega)$. Enfin, comme $u = 0$ sur $\partial\Omega$, on a finalement $u \in H_0^1(\Omega)$.
Soit $v \in H_0^1(\Omega)$, par densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$, il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$ telle que $\varphi_n \to v$ dans $H^1(\Omega)$, c'est-à-dire $\varphi_n \to v$ dans $L^2(\Omega)$ et $D_i\varphi_n \to v$ dans $L^2(\Omega)$ pour $i = 1, \dots, N$. En écrivant (2.1.3) avec $\varphi = \varphi_n$, on obtient :

$$\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^N \sum_{i=1}^N a_{i,j} \partial_i u(x) \partial_j \varphi_n(x) \right) dx = \int_\Omega f(x)\varphi_n(x) \, \mathrm{d}x,$$

et en passant à la limite, on obtient que u satisfait le problème suivant, qu'on appelle <u>formulation faible</u> du problème (2.1.2) (lorsque $g = 0$)

$$\begin{aligned} & u \in H_0^1(\Omega), \\ & \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^N \sum_{i=1}^N a_{i,j} \partial_i u(x) \partial_j v(x) \right) \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f(x) v(x) \, \mathrm{d}x, \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

On vient ainsi de montrer que **toute solution classique du problème** (2.1.2) **(lorsque** $g = 0$**) est solution faible, c'est-à-dire vérifie** (2.1.4).

Remarque 2.3 (Cas symétrique, formulation variationnelle) *Dans le cas où $a_{i,j} = a_{j,i}$ pour $i \neq j$, u est solution de* (2.1.4) *si et seulement si u est solution du problème suivant, qu'on appelle <u>formulation variationnelle</u> :*

$$\begin{aligned} & u \in H_0^1(\Omega), \\ & J(u) \le J(v), \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

où la fonctionnelle J est définie par : $J(v) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^N \sum_{i=1}^N a_{i,j} D_i v D_j v \right) \, \mathrm{d}x.$

La démonstration de l'existence et de l'unicité des solutions des problèmes (2.1.4) et (2.1.5) utilise le lemme de Lax-Milgram, que nous rappelons ici :

Lemme 2.4 (Lax-Milgram) *Soient H un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire noté $(\cdot, \cdot)$, de norme associée notée $\|.\|$ et $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire qui est*
- *continue sur $H \times H$: $\exists\, c > 0, \forall (u, v) \in H^2$, $|a(u, v)| \le c\|u\|\|v\|$,*
- *coercive sur H (certains auteurs disent plutôt H-elliptique) : $\exists\, \alpha > 0, \forall u \in H,\ a(u, u) \ge \alpha \|u\|^2$,*

et soit T une forme linéaire continue sur H.
Alors il existe un unique u de H tel que l'équation $a(u,v) = T(v)$ soit vérifiée pour tout v de H :

$$\exists!\ u \in H,\ \forall v \in H, \quad a(u,v) = T(v)$$

Si de plus la forme bilinéaire a est symétrique, alors u est l'unique élément de H qui minimise la fonctionnelle $J : H \to \mathbb{R}$ définie par $J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - T(v)$ pour tout v de H, c'est-à-dire :

$$\exists!\ u \in H, \quad J(u) = \min_{v \in H} J(v).$$

Notons que dans le cas où la forme bilinéaire a est symétrique, elle définit un produit scalaire sur H, et dans ce cas, le lemme de Lax-Milgram est une conséquence directe du théorème de Riesz.
Pour appliquer le théorème de Lax-Milgram au problème (2.1.4), nous aurons besoin de l'inégalité de Poincaré :

Lemme 2.5 (Inégalité de Poincaré) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ (ou qui est au moins borné dans une direction), alors il existe C_Ω ne dépendant que de Ω tel que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \le C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},\ \forall u \in H_0^1(\Omega). \tag{2.1.6}$$

Démonstration Par hypothèse sur Ω, il existe $a > 0$ tel que $\Omega \subset]-a,a[\times R^{N-1}$. Soit $u \in C_c^\infty(\Omega)$, on prolonge u par 0 en dehors de Ω :

$$u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N), u = 0 \text{ sur } \Omega^c.$$

Soit $x = (x_1, \ldots, x_N)^t = (x_1, y)^t \in \Omega$, avec $x_1 \in]-a,a[$ et $y = (x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^{N-1}$. On a :

$$u(x_1, y) = \int_{-a}^{x_1} \partial_1 u(t,y)\,\mathrm{d}t,$$

et donc, par l'inégalité de Cauchy–Schwarz,

$$|u(x_1,y)|^2 \le \left(\int_{-a}^{a} \partial_1 u(t,y)\,\mathrm{d}t\right)^2 \le 2a \int_{-a}^{a} (\partial_1 u(t,y))^2\,\mathrm{d}t.$$

En intégrant entre $-a$ et a, on obtient :

$$|u(x_1,y)|^2\,\mathrm{d}x_1 \le 4a^2 \int_{-a}^{a} (\partial_1 u(t,y))^2\,\mathrm{d}t,$$

et donc

$$\int_\Omega |u(x)|^2\,\mathrm{d}x \le 4a^2 \int_\Omega (\partial_1 u(x))^2\,\mathrm{d}x,\ \forall u \in C_c^\infty(\Omega) \tag{2.1.7}$$

On procède ensuite par densité ; pour $u \in H_0^1(\Omega)$, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$ telle que $u_n \to u$ dans $H_0^1(\Omega)$, $u_n \to u$ dans $L^2(\Omega)$, et $\partial_i u \to D_i u$ dans $L^2(\Omega)$. On écrit alors (2.1.7) pour u_n et en passant à la limite lorsque $n \to +\infty$, on obtient :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \le 4a^2 \|D_1 u\|_{L^2(\Omega)}^2 \le 4a^2 \sum_{i=1}^{N} \|D_i u\|_{L^2(\Omega)}^2 = 4a^2 \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2$$

■

Théorème 2.6 (Existence et unicité de la solution de (2.1.4)**)** *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $f \in L^2(\Omega)$, et soient $(a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,N} \subset L^\infty(\Omega)$ et $\alpha > 0$ tels que* (2.1.1) *soit vérifiée. Alors il existe une unique solution de* (2.1.4).

Démonstration Pour appliquer le lemme de Lax-Milgram on écrit le problème (2.1.4) sous la forme : $u \in H$; $a(u,v) = T(v)$ pour tout $v \in H$, avec $H = H_0^1(\Omega)$ (qui est bien un espace de Hilbert, muni de la norme définie par $\|u\|_{H^1(\Omega)} = (\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{(L^2(\Omega))^N})^{\frac{1}{2}}$), et avec a et T définies par

$$a(u,v) = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^N \sum_{i=1}^N a_{i,j} D_i u(x) D_j v(x) \right) \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)v(x)\,\mathrm{d}x \text{ et } T(v) = \int_\Omega f(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

On remarque tout d'abord que la forme linéaire T est bien linéaire continue. En effet, $|T(v)| \le \|v\|_{L^2(\Omega)}\|f\|_{L^2(\Omega)} \le \|v\|_{H^1(\Omega)}\|f\|_{L^2(\Omega)}$. Quant à la forme a, elle est évidemment bilinéaire, et elle vérifie :

$$|a(u,v)| \le \sum_{i,j=1}^N \|a_{i,j}\|_{L^\infty(\Omega)} \|D_i u\|_{L^2(\Omega)} \|D_j v\|_{L^2(\Omega)} \le C \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)},$$

avec $C = \sum_{i,j=1}^N \|a_{i,j}\|_{L^\infty(\Omega)}$. Elle est donc continue.
Voyons si a est coercive : il faut montrer qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}_+$ tel que $a(u,u) \ge \beta \|u\|^2_{H^1(\Omega)}$, pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$. Par hypothèse sur a, on a :

$$a(u,u) = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^N \sum_{i=1}^N a_{i,j} D_i u(x) D_j u(x) \right) \,\mathrm{d}x \ge \alpha \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^N |D_i u(x)|^2 \right) \,\mathrm{d}x = \alpha \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \,\mathrm{d}x.$$

On applique alors l'inégalité de Poincaré (2.1.6) :

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \|D_i u(x)\|^2 \le (C_\Omega + 1) \sum_{i=1}^N \|D_i u(x)\|^2,$$

d'où on obtient que :

$$\sum_{i=1}^N \|D_i u(x)\|^2 \ge \frac{1}{C_\Omega + 1} \|u\|^2_{H^1(\Omega)},$$

et donc

$$a(u,u) \ge \alpha \sum_{i=1}^N \|D_i u(x)\|^2 \ge \frac{\alpha}{C_\Omega + 1} \|u\|^2_{H^1(\Omega)},$$

ce qui démontre la coercivité de a. Par le lemme de Lax-Milgram, on a donc bien existence et unicité du problème de la solution du problème (2.1.4). ■

Par le lemme de Lax-Milgram, on démontre de manière similaire l'existence et l'unicité dans le cas où le second membre est dans $H^{-1}(\Omega)$ (dual de $H_0^1(\Omega)$, c.à.d. l'ensemble des formes linéaires continues sur $H_0^1(\Omega)$).

Théorème 2.7 (Existence et unicité, $T \in H^{-1}$**)** *Sous les mêmes hypothèses qu'au théorème 2.6, si $T \in H^{-1}(\Omega)$, il existe une unique solution u de :*

$$\begin{aligned} & u \in H_0^1(\Omega), \\ & \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^N \sum_{i=1}^N a_{i,j} \partial_i u(x) \partial_j v(x) \right) \,\mathrm{d}x = T(v), \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $f \in L^1(\Omega)$. Il est intéressant de savoir si l'application $\varphi \mapsto \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx$ (définie, par exemple, pour $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$) se prolonge en un élément de $H^{-1}(\Omega)$ (et dans ce cas, le prolongement sera unique par densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$). En dimension $N = 1$, l'hypothèse $f \in L^1(\Omega)$ est suffisante. En dimension $N \geq 3$, l'hypothèse $f \in L^q(\Omega)$, avec $q = 2N/(N+2)$ est suffisante. En dimension $N = 2$, l'hypothèse $f \in L^q(\Omega)$, avec $q > 1$ est suffisante. Un résultat plus précis (pour $N = 2$) est donné dans l'exercice 22.

L'existence et l'unicité de solutions faibles est possible avec d'autres conditions aux limites. L'exercice 18 traite le cas des conditions de Neuman et l'exercice 20 les conditions dites de Fourier (ou de Robin, selon les auteurs). La résolution du probème de Neuman permet d'ailleurs de montrer une décomposition utile d'un élément de $L^2(\Omega)^N$, appelée décomposition de Hodge, exercice 23. L'exercice 19 s'intéresse à des conditions aux limites apparaissant en mécanique du solide. Il est possible aussi de coupler un problème elliptique sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ avec un problème elliptique unidimensionel sur le frontière de Ω, ceci est l'objet de l'exercice 25.

Les exercices 24, 26 et 21 montrent l'existence (et l'unicité ou une "unicité partielle") pour des systèmes elliptiques (problème des Stokes et équation de Schrödinger).

Enfin, il est possible de traiter des problèmes elliptiques avec des coefficients $a_{i,j}$ non bornés. On introduit alors des espaces de Sobolve dit "à poids", exercice 17.

2.2 Analyse spectrale

2.2.1 Quelques rappels

Soit E un espace de Banach réel, et T une application linéaire continue de E dans E. On note :
- $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{R}; T - \lambda I$ est non bijective $\}$ l'ensemble des valeurs singulières de T,
- $\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R}; T - \lambda I$ est bijective $\} = \mathbb{R} \setminus \sigma(T)$ l'ensemble des valeurs régulières de T,
- $\mathcal{VP}(T) = \{\lambda \in \mathbb{R}; T - \lambda I$ est non surjective $\}$ l'ensemble des valeurs propres de T,

Lorsque dim $E < +\infty$, on a $\mathcal{VP}(T) = \sigma(T)$. On a un résultat similaire en dimension finie, à condition que l'opérateur T soit linéaire continu et compacte ; en effet dans ce cas on a : $\mathcal{VP}(T) \setminus \{0\} = \sigma(T) \setminus \{0\}$, comme précisé dans le théorème suivant :

Proposition 2.8 (Opérateur linéaire continu compact autoajoint) *Soit E un espace de Hilbert séparable muni du produit scalaire $(\cdot,\cdot)_E$, et soit T un opérateur linéaire continu compact autoadjoint dont le noyau $N(T) = \{u \in E\ ;\ T(u) = 0\}$ est réduit à $\{0\}$. Alors il existe une base hilbertienne de E formée de vecteurs propres de T, c.à.d. des vecteurs e_n, $n \in \mathbb{N}$, vérifiant $(e_n, e_m)_E = \delta_{n,m}$ et tels que si $u \in E$, alors u peut s'écrire $u = \sum_{n\in N}(u, e_n)_E e_n$, et les valeurs propres $\lambda_n \in \mathbb{R}$ associées, i.e. telles que $Te_n = \lambda_n e_n$, sont telles que $\lambda_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.*

2.2.2 Le Laplacien

On va considérer dans cette section, pour simplifier, le cas du Laplacien, c.à.d. l'opérateur A qui a une fonction u associe $\Delta u = \sum_{i,j=1}^N \partial_i^2 u$. Afin que cet opérateur ait un sens, on le définit sur son **domaine** $D(A)$, c.à.d. l'ensemble :

$$D(A) = \{u \in H_0^1(\Omega)\ ; \Delta u \in L^2(\Omega)\},$$

et on définit alors $A : D(A) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$, par $Au = \Delta u$.

On a vu dans les paragraphes précédents que si $f \in L^2(\Omega)$, il existe une unique solution au problème (2.1.4) qui s'écrit, pour le Laplacien, c.à.d. avec les valeurs $a_{i,j} = \delta_{i,j}$, $i, j = 1, \ldots, N$:

$$\begin{aligned} & u \in H_0^1(\Omega), \\ & \int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x) \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f(x) v(x) \, \mathrm{d}x, \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

L'opérateur A est inversible. Son inverse, l'opérateur A^{-1}, est défini de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ par $A^{-1}f = u$ où u est solution de (2.2.9). Cet opérateur est injectif mais non surjectif. Les deux opérateurs sont linéaires.
Pour montrer qu'il existe une base hilbertienne formée des vecteurs propres de A^{-1}, on va démontrer le théorème suivant :

Théorème 2.9 *L'opérateur T est linéaire continu compact et autoadjoint de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.*

Démonstration Il est immédiat de voir que T est linéaire. Soit $f \in L^2(\Omega)$, et $u = Tf$. En prenant $v = u$ dans (2.2.9), on obtient

$$\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u \, \mathrm{d}x = \int_\Omega fu \, \mathrm{d}x \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Par l'inégalité de Poincaré, il existe $C_\Omega \in \mathbb{R}_+$ ne dépendant que de Ω tel que $\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}$, et donc :

$$\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^N \|D_i u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

On en déduit que $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_\Omega \|f\|_{L^2(\Omega)}$ et donc :

$$\|Tf\|^2_{L^2(\Omega)} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq C_\Omega^2 \|f\|^2_{L^2(\Omega)},$$

ce qui démontre la continuité de T.

Montrons maintenant que l'opérateur T est compact, c.à.d. que l'image $T(B)$ d'un ensemble B borné de $L^2(\Omega)$ est relativement compact dans $L^2(\Omega)$. On peut écrire T sous la forme $T = I + T_0$ où I est l'injection canonique de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ et T_0 est l'application qui à $f \in L^2(\Omega)$ associe $u = Tf \in H_0^1(\Omega)$. L'application T_0 est continue et l'injection I est compacte par le théorème de Rellich (théorème 1.23 page 8), et donc l'opérateur T est compact.

Montrons maintenant que l'opérateur T est auto-adjoint, c.à.d. que

$$\langle Tf, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f, Tg \rangle_{L^2(\Omega)}, \ \forall f, g \in L^2(\Omega). \tag{2.2.10}$$

Soient donc f et $g \in L^2(\Omega)$, u l'unique solution de (2.2.9), et v l'unique solution de (2.2.9) où on a remplacé f par g dans le second membre. On a :

$$\langle Tf, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega Tf \ g \, \mathrm{d}x = \int_\Omega u \ g \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega u \ \Delta v \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x$$

On montre de même que $\langle f, Tg \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x$, ce qui démontre (2.2.10). ■

D'après le théorème 2.9 et la proposition 2.8, il existe donc une base hilbertienne $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $L^2(\Omega)$ formées de vecteurs propres de T. Les valeurs propres associées sont toutes strictement positives. En effet, si $f \in L^2(\Omega)$ et $f \neq 0$, alors $u = Tf \neq 0$ et

$$(Tf, f)_{L^2(\Omega)} = (u, f)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u \, \mathrm{d}x = \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} > 0,$$

et donc si $\lambda_n \in \mathcal{VP}(T)$, est associée au vecteur propre $e_n \neq 0$, on a $Te_n = \lambda_n e_n$, et donc, comme $e_n \neq 0$,

$$\lambda_n(e_n, e_n)_{L^2(\Omega)} = (\lambda_n e_n, e_n)_{L^2(\Omega)} = (Te_n, e_n)_{L^2(\Omega)} > 0.$$

La suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement positive, décroissante et minorée par 0. Remarquons que les valeurs propres de $A = \Delta$ sont donc les valeurs $\mu_n = \frac{1}{\lambda_n}$, $n \in \mathbb{N}$, avec $\mu_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\mu_n \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$.
On peut alors caractériser le domaine de l'opérateur Laplacien $D(A)$ de la façon suivante :

$$\text{Soit } u \in L^2(\Omega), [u \in D(A)] \iff \left[\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n^2 (u, e_n)^2_{L^2(\Omega)} < +\infty.\right]$$

De plus si $u \in D(A)$, alors $Au = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n (u, e_n)_{L^2(\Omega)} e_n$. On peut ainsi définir les puissances de l'opérateur A :

Définition 2.10 (Puissance de l'opérateur) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $A = \Delta$, et soit $s \geq 0$. On définit*

$$D(A^s) = \{u \in L^2(\Omega) : \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n^{2s} (u, e_n)^2_{L^2(\Omega)} < +\infty.$$

Et pour $u \in D(A^s)$, on peut alors définir $A^s u$ par :

$$A^s u = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n^s (u, e_n)_{L^2(\Omega)}.$$

Pour $s = 0$, on a $D(A^0) = L^2(\Omega)$ et $A^0 u = u$: A^0 est l'opérateur identité.
Pour $s = 1$, on retrouve l'opérateur laplacien.
Pour $s = \frac{1}{2}$, on a $D(A^{\frac{1}{2}}) = \{u \in L^2(\Omega); \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n (u, e_n)^2_{L^2(\Omega)} < +\infty$. On peut montrer que $D(A^{\frac{1}{2}}) = H_0^1(\Omega)$, et on a $A^{\frac{1}{2}} u = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n (u, e_n)_{L^2(\Omega)}$.

Pour le cas $N = 1$, $\Omega =]0, 1[$, Le théorème de décomposition spectrale est détaillé dans l'exercice 16.

2.3 Régularité des solutions faibles

Sous les hypothèses (2.1.1), on sait par les résultats précédents qu'il existe une unique solution au problème (2.1.4), et on se demande quelle est la régularité de cette solution en fonction des données du problème. Le problème est assez simple en dimension $N = 1$, voir l'exercice 15, mais beaucoup plus difficile en dimension $N > 1$.

Théorème 2.11 (Régularité de la solution du problème de Dirichlet) *Sous les hypothèses* (2.1.1), *soit $u \in H_0^1(\Omega)$ la solution de* (2.1.4).

1. *Si $a_{i,j} \in C^1(\overline{\Omega})$ pour $i, j = 1, \ldots, N$ et Ω est à frontière C^2, alors, pour tout $f \in L^2(\Omega)$, on a $u \in H^2(\Omega)$.*
2. *Si $a_{i,j} \in C^\infty(\overline{\Omega})$ pour $i, j = 1, \ldots, N$, si Ω est à frontière C^∞, et si $f \in H^m(\Omega)$ avec $m \geq 0$, alors $u \in H^{m+2}(\Omega)$.*

En conséquence, si $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, alors $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ et donc u est solution classique. De même, si $f \in H^m(\Omega)$ avec $m > \frac{N}{2}$, alors $u \in C^2(\overline{\Omega})$ et donc u est encore solution classique.

Remarque 2.12 (Optimalité des hypothèses) *Notons que la partie 1. du théorème précédent est fausse sans les hypothèses $a_{i,j} \in C^1(\overline{\Omega})$ et Ω est à frontière C^2.*
Par contre dans le cas du Laplacien, c.à.d. $a_{i,j} = \delta_{i,j}$, si Ω est convexe, alors $u \in H^2(\Omega)$ dès que $f \in L^2(\Omega)$.

Idée de démonstration du théorème 2.11

On se ramène par la technique dite des “cartes locales" au cas $\Omega = \mathbb{R}^N_+ = \{(x_1, y), y \in \mathbb{R}^{N-1}, x_1 > 0\}$, et au problème suivant :

$$\begin{aligned}
&u \in H^1_0(\Omega),\\
&\int_\Omega \nabla u \nabla v \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f v \, \mathrm{d}x, \forall v \in H^1_0(\Omega).
\end{aligned}$$

et on applique ensuite le théorème 2.15, qui dit que la solution de ce problème appartient à $H^2(\mathbb{R}^N_+)$. ■

La démonstration du théorème de Nirenberg [1] que nous énonçons un peu plus loin nécessite les lemmes techniques suivants :

Lemme 2.13 *Soit $g \in L^2(\Omega)$ et, pour $h > 0$, $\Psi_h g$ défini par :$\Psi_h g = \frac{1}{h}(g_h - g)$, où $g_h \in H^1_0(\Omega)$ est définie par $g_h(x) = g(x_1, x_2 + h)$. Alors $\|\Psi_h g\|_{H^{-1}(\Omega)} \le \|g\|_{L^2(\Omega)}$.*

Démonstration Soit $g \in L^2(\Omega)$, par définition,

$$\|\Psi_h g\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup\{\int_\Omega \Psi_h g \; v \, \mathrm{d}x, \; v \in H^1_0(\Omega), \; \|v\|_{H^1(\Omega)} \le 1\},$$

et donc, par densité de $C^\infty_c(\Omega)$ dans $H^1_0(\Omega)$,

$$\|\Psi_h g\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup\{\int_\Omega \Psi_h g \; v \, \mathrm{d}x, \; v \in C^\infty_c(\Omega), \; \|v\|_{H^1(\Omega)} \le 1\}.$$

Soit $v \in C^\infty_c(\Omega)$ tel que $\|v\|_{H^1(\Omega)} \le 1$.

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Psi_h g \; v \, \mathrm{d}x &= \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}} (g(x_1, x_2 + h) - g(x_1, x_2))\, v(x_1, x_2) \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2\\
&= \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}} g(x_1, \tilde{x}_2) v(x_1, \tilde{x}_2 - h) \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}\tilde{x}_2 - \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}} g(x_1, x_2) v(x_1, x_2) \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2\\
&= \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}} g(x_1, x_2) \frac{v(x_1, x_2 - h) - v(x_1, x_2)}{-h} \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2.
\end{aligned}$$

Donc, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|\int_\Omega \Psi_h g \; v \, \mathrm{d}x| \le \|g\|_{L^2(\Omega)} \, \|\frac{v(\cdot, \cdot - h) - v(\cdot, \cdot)}{-h}\|_{L^2(\Omega)} \le \|g\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \le \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

On en déduit que $\|\Psi_h g\|_{H^{-1}(\Omega)} \le \|g\|_{L^2(\Omega)}$. ■

Lemme 2.14 *Sous les hypothèses du lemme 2.13, soit $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, alors $\Psi_h u \to D_2 u$ dans $\mathcal{D}^*$ lorsque $h \to 0$.*

Démonstration Soit $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$; on veut montrer que

$$\int_\Omega \Psi_h u \; \varphi \, \mathrm{d}x \to -\int_\Omega u \partial_2 \varphi \, \mathrm{d}x = \langle D_2 u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}^*, \mathcal{D}} \text{ lorsque } h \to 0.$$

1. Louis Nirenberg (né en 1925) est un mathématicien Canadien qui a beaucoup contribué à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires et non linéaires.

Or

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Psi_h \varphi \,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}} \frac{u(x_1,x_2+h)-u(x_1,x_2)}{h}\varphi(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\\ &= \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}} u(x_1,x_2)\frac{\varphi(x_1,x_2-h)-\varphi(x_1,x_2)}{-h}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2.\end{aligned}$$

Mais $\frac{\varphi(x_1,x_2-h)-\varphi(x_1,x_2)}{-h} \to \partial_2\varphi$ uniformément lorsque $h \to 0$, et le support de cette fonction est inclus dans un compact K de Ω, qui est fixé si $|h| < 1$. Donc $\lim_{h\to 0}\int_\Omega \Psi_h u\,\varphi\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u\,\varphi\,\mathrm{d}x$. ■

Théorème 2.15 (Nirenberg) *Soit* $\Omega = \mathbb{R}^N_+ = \{(x_1,y), y \in \mathbb{R}^{N-1}, x_1 > 0\}$ *et* $f \in L^2(\Omega)$*, et soit* $u \in H^1_0(\Omega)(\mathbb{R}^N_+)$ *l'unique solution du problème suivant :*

$$\begin{aligned}&u \in H^1_0(\Omega),\\ &\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x = \int_\Omega fv\,\mathrm{d}x, \forall v \in H^1_0(\Omega).\end{aligned} \tag{2.3.11}$$

Alors $u \in H^2(\mathbb{R}^N_+)$.

Démonstration On va effectuer la démonstration dans le cas $N = 2$. Soit $u \in H^1_0(\Omega)$ solution de (2.3.11), u vérifie donc :

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x + \int_\Omega u\,v\,\mathrm{d}x = \int_\Omega gv\,\mathrm{d}x, \forall v \in H^1_0(\Omega),\ \text{où } g = u+f \in L^2(\Omega)(\mathbb{R}^2_+).$$

On a donc

$$(u,v)_{H^1(\mathbb{R}^2_+)} = \int_{\mathbb{R}^2_+} g\,v\,\mathrm{d}x \le \|g\|_{H^{-1}(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}, \tag{2.3.12}$$

puisque, par définition, $\|g\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup\{\int_{\mathbb{R}^2_+} g\,v\,\mathrm{d}x,\ v \in H^1_0(\Omega), \|v\|_{H^1(\Omega)} \le 1\}$, où, comme d'habitude, on confond l'application T_g qui à $v \in H^1_0(\Omega)$ associe $\int gv\,\mathrm{d}x$, qui est donc un élement de $H^{-1}(\Omega)$, avec la (classe de) fonction(s) $g \in L^2(\Omega)$. On prend $v = u$ dans (2.3.12). On obtient $\|u\|_{H^1(\Omega)} \le \|g\|_{H^{-1}(\Omega)}$.
Pour montrer la régularité sur D_2u, on introduit la fonction $\Psi_h u = \frac{1}{h}(u_h - u)$ où $u_h \in H^1_0(\Omega)$ est définie par $u_h(x) = u(x_1, x_2+h)$. Comme u vérifie (2.3.11), u_h vérifie $\int_\Omega \nabla u_h\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f_h v\,\mathrm{d}x$ où $f_h(x) = f(x+h)$, et donc $\Psi_h u = \frac{1}{h}(u_h - u)$ vérifie

$$\int_\Omega \nabla\Psi_h u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \Psi_h f v\,\mathrm{d}x.$$

On en déduit que $(\Psi_h u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega \Psi_h f v\,\mathrm{d}x$, et donc que $\|\Psi_h u\|_{H^1(\Omega)} \le \|\Psi_h g\|_{H^1(\Omega)}$. Par le lemme 2.13, comme $g \in L^2(\Omega)$, on a donc

$$\|\Psi_h u\|_{H^1(\Omega)} \le \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

Prenons maintenant $h = \frac{1}{n}$ et faisons tendre $n \to +\infty$. Par ce qui précède, la suite $(\Psi_{\frac{1}{n}} u)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, et il existe donc une sous-suite encore notée $(\Psi_{\frac{1}{n}} u)_{n\in\mathbb{N}}$, et $w \in H^1_0(\Omega)$ telle que $\Psi_{\frac{1}{n}} u \to w$ dans $H^1_0(\Omega)$ faible, donc $S(\Psi_{\frac{1}{n}} u) \to S(w)$ pour tout $S \in H^{-1}(\Omega)$. ■

Donc $\Psi_{\frac{1}{n}} u \to w$ dans $\mathcal{D}^*$. Mais par le lemme 2.14, $\Psi_{\frac{1}{n}} u \to D_2 u$ dans $\mathcal{D}^*$. Donc $D_2 u = w \in H^1_0(\Omega)$, et par conséquent, $D_1D_2u \in H^1_0(\Omega)$ et $D_2D_2u \in H^1_0(\Omega)$. Pour conclure, il ne reste plus qu'à montrer que $D_1D_1u \in$

$H_0^1(\Omega)$. Pour cela, on utilise l'équation satisfaite par u. En effet, comme u est solution faible de (2.1.4), on a $-\Delta u = f$ dans $\mathcal{D}^*$, et donc $D_1D_1u = f - D_2D_2u$ ce qui prouve que $D_1D_1u \in L^2(\Omega)$. Ceci termine la preuve.

■

Remarque 2.16 (Plus de régularité...)

1. *Supposons que $a_{i,j} \in C^1(\overline{\Omega})$ et que Ω est à frontière C^2. On a déjà vu que si $f \in L^2(\Omega)$ alors $u \in H^2(\Omega)$. On peut montrer que si $f \in L^p(\Omega)$ alors $u \in W^{2,p}(\Omega)$.*
2. *Supposons maintenant qu'on ait seulement $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$. On peut montrer (c'est un résultat de Meyers) qu'il existe $p^* > 2$ tel que si $f \in L^p(\Omega)$ avec $2 \leq p \leq p^*$, alors $u \in W^{2,p}(\Omega)$.*
3. *Toujours dans le cas $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$, on peut montrer (ce résultat est dû à Stampacchia[2]) que si $f \in L^p(\Omega)$, avec $p > \frac{N}{2}$, alors $u \in L^\infty(\Omega)$.*
4. *Il est possible aussi de démontrer des résultat de régularité pour d'autres conditions aux limites. L'exercice 18 donne un exemple avec les conditions de Neuman, l'exercice 20 un exemple avec conditions de Fourier et l'exercice 21 traite l'exemple du système elliptique induit par l'équation de Schrödinger (qui est généralement présenté comme une équation dont l'inconnue prend ses valeurs dans $\mathbb{C}$).*

2.4 Principe du maximum

Question. (Positivité de la solution faible.) Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$, pour $i,j = 1,\ldots,N$. On suppose que les fonctions $a_{i,j}$ vérifient (2.1.1). Soit $f \in L^2(\Omega)$ et u la solution de (2.1.4). On suppose que $f \geq 0$ p.p.. A-t-on $u \geq 0$ p.p. ?

Remarque 2.17 On suppose que $u \in C^2(\Omega)$, $-\Delta u = f$ dans Ω et $u = 0$ sur le bord de Ω (la fonction u est donc une solution classique avec $a_{i,j} = 0$ si $i \neq 1$ et $a_{i,j} = 1$ si $i = j$). On suppose aussi que $f > 0$ dans Ω. On va montrer que $u \geq 0$ dans Ω. Pour cela, on raisonne par l'absurde. On suppose qu'il existe $a \in \Omega$ t.q. $u(a) < 0$. On choisit alors $x \in \Omega$ t.q. $u(x) = \min\{u(y),\, y \in \overline{\Omega}\}$ (un tel x existe car $\overline{\Omega}$ est compact, u continue et $u = 0$ sur le bord de Ω). On a alors

$$\partial_i u(x) = 0 \text{ et } \partial_i^2 u(x) \geq 0 \text{ pour tout } i \in \{1,\ldots,N\}.$$

Ceci donne $\Delta u(x) \geq 0$ en contradiction avec $\Delta u(x) = -f(x) < 0$. On obtient donc finalement que $u(x) \geq 0$ pour tout $x \in \Omega$. Un argument supplémentaire (consistant à considérer, par exemple, la fonction $u_\varepsilon(x) = u(x) - \varepsilon x_1^2$ pour $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon \to 0$) permet de remplacer l'hypothèse $f > 0$ par $f \geq 0$. La question posée au début de ce paragraphe consiste donc à étendre cette propriété de positivité aux solutions faibles.

Nous donnons maintenant deux petits lemmes, dûs à G. Stampacchia.

Lemme 2.18 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) et $\varphi \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose que φ' est bornée et $\varphi(0) = 0$. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$, alors $\varphi(u) \in H_0^1(\Omega)$ et $D_i\varphi(u) = \varphi'(u)D_iu$ p.p. (pour tout $i \in \{1,\ldots,N\}$). (La notation $\varphi(u)$ désigne la fonction $\varphi \circ u$.)*

Démonstration Il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $C_c^\infty(\Omega)$ t.q. $u_n \to u$ dans $H_0^1(\Omega)$ (quand $n \to +\infty$), c'est-à-dire

$$\begin{aligned} &u_n \to u \text{ dans } L^2(\Omega), \\ &D_iu_n \to D_iu \text{ dans } L^2(\Omega), \text{ pour tout } i \in \{1,\ldots,N\}. \end{aligned}$$

2. Mathématicien italien né à Naples en 1922, mort en 1978, spécialiste de calcul des variations et des équations aux dérivées partielles, entre autres.

Après extraction éventuelle d'une sous suite, on peut même supposer qu'il existe $F \in L^2(\Omega)$ et, pour tout $i \in \{1,\ldots,N\}$, $F_i \in L^2(\Omega)$ t.q.

$$u_n \to u \text{ p.p. et } |u_n| \le F \text{ p.p. et pour tout } n \in \mathbb{N},$$
$$D_i u_n \to D_i u \text{ p.p. et } |D_i u_n| \le F_i \text{ p.p. et pour tout } n \in \mathbb{N},\ i \in \{1,\ldots,N\}.$$

On a alors $\varphi(u_n) \in C^1_c(\Omega)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $i \in \{1,\ldots,N\}$,

$$D_i\varphi(u_n) = \partial_i\varphi(u_n) = \varphi'(u_n)\partial_i u_n.$$

On pose $M = \sup\{|\varphi'(s)|,\ s \in \mathbb{R}\}$, de sorte que $|\varphi(s)| \le M|s|$, pour tout $s \in \mathbb{R}$. On a donc

$$\varphi(u_n) \to \varphi(u) \text{ p.p. et } |\varphi(u_n)| \le MF \text{ p.p. et pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Comme $MF \in L^2(\Omega)$, le théorème de convergence dominée (dans $L^2(\Omega)$) donne $\varphi(u_n) \to \varphi(u)$ dans $L^2(\Omega)$. On a donc aussi $D_i\varphi(u_n) \to D_i\varphi(u)$ dans $\mathcal{D}^\star(\Omega)$. On rappelle maintenant que $D_i\varphi(u_n) = \varphi'(u_n)\partial_i u_n$. Comme

$$\varphi'(u_n) \to \varphi'(u) \text{ p.p.},$$
$$\partial_i u_n \to D_i u \text{ p.p.},$$
$$|\varphi'(u_n)\partial_i u_n| \le MF_i \text{ p.p. et pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Le théorème de convergence dominée donne $\varphi'(u_n)\partial_i u_n \to \varphi'(u)D_i u$ dans $L^2(\Omega)$ et donc aussi dans $\mathcal{D}^\star(\Omega)$. Par unicité de la limite dans $\mathcal{D}^\star(\Omega)$ on a donc $D_i\varphi(u) = \varphi'(u)D_i u$ p.p. (et pour tout i). Finalement, on obtient donc que $\varphi(u) \in H^1_0(\Omega)$ (comme limite, pour la norme de $H^1(\Omega)$ de fonctions de $H^1_0(\Omega)$) et $D_i\varphi(u) = \varphi'(u)D_i u$ p.p., pour tout i. ■

Lemme 2.19 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \ge 1$). Soit $u \in H^1_0(\Omega)$. On définit u^+ par $u^+(x) = \max\{u(x), 0\}$ Pour $x \in \Omega$. Alors, $u^+ \in H^1_0(\Omega)$ et $D_i u^+ = 1_{u\ge 0}D_i u = 1_{u>0}D_i u$ p.p. (pour tout $i \in \{1,\ldots,N\}$). En particulier on a $D_i u = 0$ p.p. (pour tout i) sur l'ensemble $\{u = 0\}$.*

Démonstration Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit $\varphi_n \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ par

$$\varphi_n(s) = 0 \text{ si } s \le 0,$$
$$\varphi_n(s) = \frac{n}{2}s^2 \text{ si } 0 < s < \frac{1}{n},$$
$$\varphi_n(s) = s - \frac{1}{2n} \text{ si } \frac{1}{n} \le s.$$

On a donc $\varphi_n(s) \to s^+$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ (quand $n \to +\infty$) et $|\varphi_n'(s)| \le 1$ pour tout s et pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. Le lemme 2.18 donne $\varphi_n(u) \in H^1_0(\Omega)$ et $D_i(\varphi_n(u)) = \varphi_n'(u)D_i u$ p.p. (et pour tout $i \in \{1,\ldots,N\}$). D'autre part, on a

$$\varphi_n(u) \to u^+ \text{ p.p.},\ |\varphi_n(u)| \le |u| \text{ p.p. et pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Le théorème de convergence dominée donne donc $\varphi_n(u) \to u^+$ dans $L^2(\Omega)$ (et donc que $D_i\varphi_n(u) \to D_i u^+$ dans $\mathcal{D}^\star(\Omega)$). Puis, on remarque que $\varphi_n'(u) \to 1_{\{u>0\}}$ p.p. et donc

$$\varphi_n'(u)D_i u \to 1_{\{u>0\}}D_i u \text{ p.p.},\ |\varphi_n'(u)D_i u| \le |D_i u| \text{ p.p. et pour tout } n \in \mathbb{N},$$

ce qui (toujours par le théorème de convergence dominée) donne $\varphi_n'(u)D_i u \to 1_{\{u>0\}}D_i u$ dans $L^2(\Omega)$ (et donc dans $\mathcal{D}^\star(\Omega)$). Comme $D_i(\varphi_n(u)) = \varphi_n'(u)D_i u$ on en déduit (par unicité de la limite dans $\mathcal{D}^\star(\Omega)$) que $D_i u^+ = 1_{\{u>0\}}D_i u$ p.p.. La suite $(\varphi_n(u))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite de $H^1_0(\Omega)$, elle converge dans $H^1(\Omega)$ vers u^+. On a bien montré, finalement, que $u^+ \in H^1_0(\Omega)$ et $D_i u^+ = 1_{\{u>0\}}D_i u$ p.p. (et pour tout i).

En considérant la suite $(\psi_n(u))_{n\in\mathbb{N}}$ avec ψ_n définie par $\psi_n(s) = \varphi(s+1/n) - 1/(2n)$, un raisonnement analogue montre que $D_i u^+ = 1_{\{u\ge 0\}}D_i u$ (la différence essentielle entre φ_n et ψ_n est que $\varphi_n'(0) = 0$ alors que $\psi_n'(0) = 1$). ■

Remarque 2.20 Le lemme 2.19 peut se généraliser à toute fonction lipschitzienne s'annulant en 0, on obtient ainsi le résultat suivant. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) et φ une fonction lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, s'annulant en 0. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$. On a alors $\varphi(u) \in H_0^1(\Omega)$ et $D_i\varphi(u) = \varphi'(u)D_iu$ p.p. (pour tout $i \in \{1,\ldots,N\}$). Un exemple important consiste à prendre $\varphi(s) = (s-k)^+$ pour tout $s \in \mathbb{R}$, avec k donné dans $\mathbb{R}_+$. On obtient ainsi, pour $u \in H_0^1(\Omega)$, $(u-k)^+ \in H_0^1(\Omega)$ et $D_i\varphi(u) = 1_{\{u>k\}}D_iu = 1_{\{u\geq k\}}D_iu$ p.p..

On peut maintenant répondre à la question posée au début de ce paragraphe.

Théorème 2.21 (Positivité de la solution faible) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$, pour $i,j = 1,\ldots,N$. On suppose que les $a_{i,j}$ vérifient (2.1.1). Soit $f \in L^2(\Omega)$ et u la solution de* (2.1.4)*. On suppose que $f \geq 0$ p.p.. On a alors $u \geq 0$ p.p..*

Démonstration On suppose que $f \leq 0$ p.p. et on va montrer que $u \leq 0$ p.p. (en changeant f en $-f$ et u et $-u$ on obtient le résultat désiré). Comme u est solution de (2.1.4), on a

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x)D_ju(x)D_iv(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega).$$

On choisit, dans cette égalité, $v = u^+$ et on obtient

$$\alpha \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 1_{\{u\geq 0\}}(x)dx \leq \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x)D_ju(x)D_iu^+(x)dx = \int_\Omega f(x)u^+(x)dx \leq 0.$$

On en déduit que $\alpha\|u^+\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \alpha\int_\Omega |\nabla u^+(x)|^2dx \leq \int_\Omega f(x)u^+(x)dx \leq 0$, et donc $u^+ = 0$ p.p., c'est-à-dire $u \leq 0$ p.p.. ■

Remarque 2.22 Nous n'avons considéré ici que les problèmes elliptiques avec condition nulle au bord du domaine. Il est assez facile de remplacer la condition "$u = 0$" sur le bord de Ω par "$u = g$" à condition que Ω soit assez régulier pour que l'opérateur "trace", noté γ et introduit au chapitre précédent, soit bien défini et que $g = \gamma(G)$ avec $G \in H^1(\Omega)$. On cherche alors alors la fonction $u - G$ comme solution faible d'un problème elliptique posé dans $H_0^1(\Omega)$ avec un second membre dans $H^{-1}(\Omega)$. La solution faible existe bien et est unique. On peut alors montré, par une méthode voisine de celle donnée dans le théorème 2.21 que, si $f = 0$ et $A \leq g \leq B$ p.p. (avec $A, B \in \mathbb{R}$), on a alors $A \leq u \leq B$ p.p. (où u est la solution faible du problème elliptique avec 0 comme second membre et g comme condition au bord). C'est ce résultat que l'on appelle "principe du maximum".

2.5 Exercices

Exercice 15 (Régularité en dimension 1**)**

$f \in L^2(]0,1[)$. On rappelle (cf. cours) qu'il existe un et un seul u solution de

$$\begin{aligned} &u \in H_0^1(]0,1[),\\ &\int_0^1 Du(t)Dv(t)dt = \int_0^1 f(t)v(t)dt,\ \forall v \in H_0^1(]0,1[). \end{aligned} \tag{2.5.13}$$

On suppose maintenant que $f \in C([0,1],\mathbb{R})(\subset L^2(]0,1[)$. On pose $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, pour tout $x \in [0,1]$. Soit u la solution de (2.5.13). Montrer que, pour tout $\varphi \in C([0,1],\mathbb{R})$, on a

$$\int_0^1 (Du(t) + F(t))\varphi(t)dt = \int_0^1 c\varphi(t)dt$$

avec un certain $c \in \mathbb{R}$ convenablement choisi (et indépendant de φ).
En déduire que $Du = -F + c$ p.p., puis que u est deux fois continûment dérivable sur $]0,1[$ et $-u''(x) = f(x)$ pour tout $x \in]0,1[$ (et que $u(0) = u(1) = 0$).

Exercice 16 (Décomposition spectrale en dimension 1**)**

On reprend l'exercice précédent. On pose $E = L^2(]0,1[)$ (muni de la norme $\|\cdot\|_2$). Pour $f \in E$, on rappelle qu'il existe un et un seul u solution de (2.5.13).
On note T l'application de E dans E qui à f associe u (solution de (2.5.13), noter que $H_0^1(]0,1[) \subset E$). On rappelle que T est un opérateur linéaire compact autoadjoint de E dans E.

1. Soit $\lambda \in \mathcal{VP}(T)$. Montrer qu'il existe $u \in C([0,1],\mathbb{R}) \cap C^2(]0,1[,\mathbb{R})$, $u \neq 0$, tel que $-\lambda u'' = u$, sur $]0,1[$ et $u(0) = u(1) = 0$.
2. Montrer que $\mathcal{VP}(T) = \{\frac{1}{k^2\pi^2},\, k \in \mathbb{N}^*\}$ et $\sigma(T) = \mathcal{VP}(T) \cup \{0\}$.
3. Soit $f \in E$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $c_n = 2\int_0^1 f(t)\sin(n\pi t)dt$. Montrer que :
$$\|f - \sum_{p=1}^{n} c_p \sin(p\pi\cdot)\|_2 \to 0, \text{ quand } n \to \infty.$$
(Comparer avec les séries de Fourier. . . ,)
4. Soit $\mu \in \mathbb{R}^*$. En utilisant l'alternative de Fredholm, donner une C.N.S. sur $f \in E$ pour que le problème suivant ait une solution :
$$\begin{aligned} & u \in H_0^1(]0,1[), \\ & \int_0^1 Du(t)Dv(t)dt + \mu\int_0^1 u(t)v(t)dt = \int_0^1 f(t)v(t)dt,\ \forall v \in H_0^1(]0,1[). \end{aligned}$$

Exercice 17 *Problème elliptique à coefficients non bornés*

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, et $p : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable t.q. $\inf\{p(x),\, x \in \Omega\} = a > 0$. On pose $H^1(p,\Omega) = \{u \in L^2(\Omega)$ t.q. $D_i u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ et $p\, D_i u \in L^2(\Omega)$ pour tout $i \in \{1,\ldots,N\}\}$.
On rappelle que $D_i u$ désigne la dérivée, au sens des distributions, de u dans la direction x_i, la variable de $\mathbb{R}^N$ étant notée $x = (x_1,\ldots,x_N)^t$.

Pour $u \in H^1(p,\Omega)$, on définit $\|u\|$ par $\|u\|^2 = \|u\|_2^2 + \sum_{i=1}^{N} \|p\, D_i u\|_2^2$, avec $\|\cdot\|_2 = \|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$.

1. (Etude de l'espace fonctionnel.)
   (a) Montrer que $H^1(p,\Omega) \subset H^1(\Omega)$.
   (b) Montrer que $H^1(p,\Omega)$, muni de la norme $\|\cdot\|$, est un espace de Hilbert. [On pourra remarquer qu'une suite de Cauchy dans $H^1(p,\Omega)$ est aussi de Cauchy dans $H^1(\Omega)$.]

   On pose $H_0^1(p,\Omega) = H^1(p,\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.
2. (Espace fonctionnel, suite.) Montrer que $H_0^1(p,\Omega)$ est un s.e.v. fermé de $H^1(p,\Omega)$.

3. (solution faible.) Soit $h \in L^2(\Omega)$, montrer qu'il existe un et un seul u t.q.

$$u \in H_0^1(p, \Omega), \tag{2.5.14}$$

$$\int_\Omega p^2(x) \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_\Omega h(x) v(x) dx, \ \forall v \in H_0^1(p, \Omega). \tag{2.5.15}$$

4. (Précisions...)
   (a) On suppose ici que $p^2 \in L^1_{loc}(\Omega)$. Montrer que $C_c^\infty(\Omega) \subset H_0^1(p, \Omega)$.
   (b) On prend maintenant $N = 1$ et $\Omega =]0, 1[$. Donner un exemple de fonction p (avec $p : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable et t.q. $\inf\{p(x), \, x \in \Omega\} > 0$) pour lequel $C_c^\infty(\Omega) \cap H_0^1(p, \Omega) = \{0\}$ (cette question est plus difficile).

Exercice 18 *Problème de Neumann*

Soient Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$), faiblement lipschitzienne. On pose $H = \{u \in H^1(\Omega), \int_\Omega u(x) dx = 0\}$. On rappelle que sur un tel ouvert, une fonction L^1_{loc} dont les dérivées (au sens des distributions) sont nulles est nécessairement constante (c'est-à-dire qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. cette fonction soit égale à C p.p..

1. (Inégalité de "Poincaré moyenne".) Montrer que H est un s.e.v. fermé de $H^1(\Omega)$ et que, sur H, la norme H^1 est équivalente à la norme $\|\cdot\|_m$ définie par $\|u\|_m = \|(|\nabla u|)\|_{L^2(\Omega)}$.
   [On pourra montrer, en raisonnant par l'absurde, qu'il existe C, ne dépendant que Ω, t.q. $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|u\|_m$, pour tout $u \in H$.]
2. (Caractérisation de $(H^1(\Omega))'$.) Soit $T \in (H^1(\Omega))'$, Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $F \in (L^2(\Omega))^N$ t.q.

$$\langle T, u \rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)} = a \int_\Omega u(x) dx + \int_\Omega F(x) \cdot \nabla u(x) dx, \ \forall u \in H^1(\Omega). \tag{2.5.16}$$

   [On pourra considérer $T_{|_H}$ et utiliser une injection convenable de H dans $L^2(\Omega)^N$.]

   Pour tout $x \in \Omega$, on se donne une matrice, notée $A(x)$, dont les coefficients sont notés $a_{i,j}(x)$, $i, j = 1, \ldots, N$. On suppose que $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$ pour tout $i, j = 1, \ldots, N$ et qu'il existe $\alpha > 0$ t.q $A(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha |\xi|^2$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ et p.p. en $x \in \Omega$. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $F \in (L^2(\Omega))^N$. On cherche u solution de

$$\begin{aligned} & u \in H^1(\Omega), \\ & \int_\Omega A(x) \nabla u(x) \nabla v(x) dx = a \int_\Omega v(x) dx + \int_\Omega F(x) \cdot \nabla v(x) dx, \ \forall v \in H^1(\Omega). \end{aligned} \tag{2.5.17}$$

3. (Existence et unicité.)
   (a) Si $a \neq 0$, montrer que (2.5.17) n'a pas de solution.
   (b) Si $a = 0$, montrer que (2.5.17) a une solution et que cette solution est unique si l'on demande qu'elle appartienne à H.
   (c) Dans cette question, on suppose que $a = 0$, $a_{i,j} \in C^\infty(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ pour tout $i, j = 1, \ldots, N$, $F \in C^\infty(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, Ω est de classe C^∞ et que la solution (appartenant à H) de (2.5.17) est aussi dans $C^\infty(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$, montrer que $-\mathrm{div}(A\nabla u) = -\mathrm{div}F$, dans Ω, et que $A\nabla u \cdot \mathbf{n} = F \cdot \mathbf{n}$ sur $\partial\Omega$, où $\mathbf{n}$ est la normale à $\partial\Omega$, extérieure à Ω.

4. (Dépendance par rapport aux paramètres.) On suppose $a = 0$ et on note u la solution (appartenant à H) de (2.5.17). On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in H$ est la solution de (2.5.17) avec A_n au lieu de A et F_n au lieu de F (et $a = 0$). On suppose que
   – $A_n = (a_{i,j}^{(n)})_{i,j=1,\ldots,N}$ vérifie, pour tout n, les mêmes hypothèses que A avec un α indépendant de n,
   – $(a_{i,j}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^\infty(\Omega)$, pour tout $i, j = 1, \ldots, N$,
   – $a_{i,j}^{(n)} \to a_{i,j}$ *p.p.*, quand $n \to \infty$, pour tout $i, j = 1, \ldots, N$,
   – $F_n \to F$ dans $L^2(\Omega)^N$, quand $n \to \infty$.

   Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans H, puis que $u_n \to u$ faiblement dans $H^1(\Omega)$ (quand $n \to \infty$) et enfin que $u_n \to u$ dans $H^1(\Omega)$.
5. (Régularité H^2 par la technique des réflexions, cette question est indépendante de la précédente.). On suppose que $a = 0$ et qu'il existe $f \in L^2(\Omega)$ t.q. $\int_\Omega F(x) \cdot \nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x) \cdot v(x)dx$, pour tout $v \in H^1(\Omega)$. On note u la solution (appartenant à H) de (2.5.17). On suppose que $N = 2$ et que $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$. On pose $\Omega_s =] - 1, 1[\times]0, 1[$. On définit A, f et u sur Ω_s en posant $a_{i,j}(x_1, x_2) = a_{i,j}(-x_1, x_2)$ si $(x_1, x_2) \in] - 1, 0[\times]0, 1[$ et $i = j$, $a_{i,j}(x_1, x_2) = -a_{i,j}(-x_1, x_2)$ si $(x_1, x_2) \in] - 1, 0[\times]0, 1[$ et $i \neq j$, $f(x_1, x_2) = f(-x_1, x_2)$ si $(x_1, x_2) \in]-1, 0[\times]0, 1[$ et $u(x_1, x_2) = u(-x_1, x_2)$ si $(x_1, x_2) \in]-1, 0[\times]0, 1[$. Montrer que u est solution de (2.5.17), avec Ω_s au lieu de Ω.

   En utilisant ainsi plusieurs réflexions, montrer (en se ramenant au théorème de régularité locale vu en cours) que $u \in H^2(\Omega)$ dans le cas $A(x) = Id$ pour tout $x \in \Omega$.

Exercice 19 (Modélisation d'un problème de contact)

On pose $B = \{x \in \mathbb{R}^2, |x| < 2\}$, $I =] - 1, 1[$ ($\subset \mathbb{R}$), et $\Omega = B \setminus [-1, 1] \times \{0\}$ (Ω est donc un ouvert de $\mathbb{R}^2$). On note $\partial B = \overline{B} - B$. On rappelle que $|x|$ désigne la norme euclidienne de $x \in \mathbb{R}^2$ et $x \cdot y$ le produit scalaire correspondant de x et y ($\in \mathbb{R}^2$).
Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^\infty(I)$ t.q. $g \geq 0$ p.p. (sur I). On s'intéresse au problème suivant.

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(x),\ x \in \Omega, &(2.5.18)\\ u(x) &= 0,\ x \in \partial B, &(2.5.19)\\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0^+) &= \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0^-),\ x \in I, &(2.5.20)\\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0^+) &= g(x)(u(x, 0^+) - u(x, 0^-)),\ x \in I. &(2.5.21)\end{aligned}$$

1. (Recherche d'une formulation faible)
   On suppose, dans cette question, que f est une fonction continue sur $\overline{\Omega}$ et g une fonction continue sur I. On note $\Omega_+ = \Omega \cap \{(x, y),\ y > 0\}$ et $\Omega_- = \Omega \cap \{(x, y),\ y < 0\}$. Soit $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ t.q. $u_{|\Omega_+} \in C^2(\overline{\Omega_+})$ et $u_{|\Omega_-} \in C^2(\overline{\Omega_-})$. Noter alors que toutes les expressions dans (2.5.18)-(2.5.21) ont bien un sens. On a, par exemple, $u(x, 0^+) = \lim_{y\to 0,\, y>0} u(x, y)$.
   Montrer que u est solution "classique" de (2.5.18)-(2.5.21) (c'est-à-dire vérifie (2.5.18) pour tout $x \in \Omega$, (2.5.19) pour tout $x \in \partial B$ et (2.5.20),(2.5.21) pour tout $x \in I$) si et seulement si u vérifie :

$$\begin{aligned} &u(x) = 0,\ \forall x \in \partial B,\\ &\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx+\\ &\int_I g(x)(u(x, 0^+) - u(x, 0^-))(v(x, 0^+) - v(x, 0^-))dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx, \end{aligned} \qquad (2.5.22)$$

pour tout $v \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ t.q. $v_{|\Omega_+} \in C^2(\overline{\Omega_+})$, $v_{|\Omega_-} \in C^2(\overline{\Omega_-})$ et $v(x) = 0$ pour tout $x \in \partial B$. Noter que dx désigne l'intégration par rapport à la mesure de Lebesgue (1 ou 2 dimensionnelle).

2. (Construction de l'espace fonctionnel) On se donne une fonction $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}_+)$ t.q. $\rho(x) = 0$, si $|x| \geq 1$, et d'intégrale 1 (sur $\mathbb{R}^2$). Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit ρ_n par $\rho_n(x) = n^2\rho(nx)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^2$.
   (a) (Trace sur ∂B, sans "cartes locales") Soit $u \in H^1(\Omega)$. Pour $n > 5$, on pose $u_n(x) = \int_\Omega u(y)\rho_n(x(1-\frac{1}{n}) - y)dy$, pour $x \in D$, avec $D = \{x \in B, \frac{3}{2} < |x| < 2\}$. Montrer que $u_n \in C^\infty(\overline{D})$, et que $u_n \to u_{|D}$, dans $H^1(D)$, quand $n \to \infty$.
   En déduire qu'il existe un opérateur linéaire continu γ de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(]0, 2\pi[)$ t.q. $\gamma(u)(\theta) = u(2\cos\theta, 2\sin\theta)$ p.p. en $\theta \in]0, 2\pi[$ si $u \in H^1(\Omega)$ et u est continue sur $\overline{B} \setminus [-1, 1] \times \{0\}$.
   (b) Montrer qu'il existe γ_+ [resp. γ_-] linéaire continu de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(I)$ t.q. $\gamma_+(u)(x) = u(x, 0+)$ [resp. $\gamma_-(u)(x) = u(x, 0-)$] p.p. en $x \in I$ si $u \in H^1(\Omega)$ et $u_{|\Omega_+}$ est continue sur $\overline{\Omega_+}$ [resp. $u_{|\Omega_-}$ est continue sur $\overline{\Omega_-}$].
3. (Coerci(ti)vité)
   On pose $H = \mathrm{Ker}\gamma$ (où γ est défini à la question précédente).
   Montrer qu'il existe C t.q. $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\||\nabla u|\|_{L^2(\Omega)}$ pour tout $u \in H$. [On pourra, par exemple, remarquer que $u_{|\Omega_+} \in H^1(\Omega_+)$ et $u_{|\Omega_-} \in H^1(\Omega_-)$]
4. (Existence et unicité de solutions faibles)
   On rappelle que $H = \mathrm{Ker}\gamma$. Montrer qu'il existe un et un seul u solution de (2.5.23).

$$\left\{\begin{array}{l} u \in H, \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx + \int_I g(x)(\gamma_+ u(x) - \gamma_- u(x))(\gamma_+ v(x) - \gamma_- v(x))dx \\ \displaystyle = \int_\Omega f(x)v(x)dx, \ \forall v \in H. \end{array}\right. \tag{2.5.23}$$

5. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note u_n la solution de (2.5.23) avec g t.q. $g(y) = n$, pour tout $y \in I$. Montrer que $u_n \to u$ (en un sens à préciser), quand $n \to \infty$, où u est la (unique) solution (faible) de $-\Delta u = f$ dans B, $u = 0$ sur ∂B.

Exercice 20 (De Fourier à Dirichlet. . .)

Soient $\sigma \geq 0$, $f \in L^2(\mathbb{R}^N_+)$ et $g \in L^2(\mathbb{R}^{N-1})$. On s'intéresse au problème suivant :

$$\begin{array}{l} -\Delta u(x) + u(x) = f(x), \ x \in \mathbb{R}^N_+, \\ -\partial_1 u(0, y) + \sigma u(0, y) = g(y), \ y \in \mathbb{R}^{N-1}. \end{array} \tag{2.5.24}$$

1. Donner une définition de solution "classique" de (2.5.24) et de solution "faible" de (2.5.24).
2. Montrer l'existence et l'unicité de la solution faible de (2.5.24).
3. Montrer que si $g = 0$ presque partout, la solution faible de (2.5.24) (trouvée à la question précédente) appartient à $H^2(R^N_+)$.
4. Toujours lorsque $g = 0$ presque partout, on note u_n la solution forte associée à $\sigma = n$. Montrer que u_n converge dans $H^1(\mathbb{R}^N_+)$ vers u solution faible de :

$$\begin{array}{l} -\Delta u(x) + u(x) = f(x), \ x \in \mathbb{R}^N_+, \\ u(0, y) = 0, \ y \in \mathbb{R}^{N-1}. \end{array} \tag{2.5.25}$$

Exercice 21 (Equation de Schrödinger)

Soit $N \geq 1$. On note Ω la boule unité de $\mathbb{R}^N$ (en fait, les résultats de cet exercice restent vrais si Ω un ouvert borné “assez régulier" de $\mathbb{R}^N$).

Pour $f_1, f_2 \in L^2(\Omega)$, on s'intéresse au système :

$$\begin{aligned} -\Delta u_1 + u_2 &= f_1 \text{ dans } \Omega, \\ -\Delta u_2 - u_1 &= f_2 \text{ dans } \Omega, \end{aligned} \tag{2.5.26}$$

avec diverses conditions aux limites.

1. On considère dans cette première question la condition aux limites :

$$u_1 = 0,\ u_2 = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \tag{2.5.27}$$

Soit $f_1, f_2 \in L^2(\Omega)$, on dit que (u_1, u_2) est solution faible du problème (2.5.26)-(2.5.27) si

$$\begin{aligned} &u_1 \in H_0^1(\Omega),\ u_2 \in H_0^1(\Omega), \\ &\int_\Omega \nabla u_1(x) \cdot \nabla\varphi(x)dx + \int_\Omega u_2(x)\varphi(x)dx = \int_\Omega f_1(x)\varphi(x)dx,\ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \\ &\int_\Omega \nabla u_2(x) \cdot \nabla\varphi(x)dx - \int_\Omega u_1(x)\varphi(x)dx = \int_\Omega f_2(x)\varphi(x)dx,\ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \tag{2.5.28}$$

(a) Montrer que le problème (2.5.28) admet une et une seule solution. [Utiliser l'espace $V = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.]

(b) Montrer que le problème (2.5.26)-(2.5.27) admet une et une seule solution au sens suivant : $u_1 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $u_2 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ et les équations (2.5.26) sont satisfaites $p.p.$ sur Ω. [Utiliser, en particulier, la question précédente et un théorème de régularité vu en cours. Ne pas oublier de montrer aussi l'unicité.]

On suppose maintenant que $f_1, f_2 \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Montrer que $u_1,\ u_2 \in C^\infty(\bar{\Omega})$. [Utiliser aussi des théorèmes de régularité vu en cours.]

(c) Pour $f = (f_1, f_2) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, soit $u = (u_1, u_2)$ la solution de (2.5.28), on note $u = T(f)$. Montrer que l'opérateur $T : f \mapsto u$ est un opérateur linéaire continu et compact de $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ dans lui-même.

2. On considère dans cette deuxième question la condition aux limites :

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} = 0,\ \frac{\partial u_2}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \tag{2.5.29}$$

où n désigne le vecteur normal à $\partial\Omega$, extérieure à Ω.
Pour résoudre le problème (2.5.26)-(2.5.29), on va introduire un paramètre, $n \in \mathbb{N}^\star$, destiné à tendre vers l'infini.

Soit $f_1, f_2 \in L^2(\Omega)$. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on s'intéresse au système :

$$\begin{aligned} -\Delta u_1 + u_2 + \frac{1}{n}u_1 &= f_1 \text{ dans } \Omega, \\ -\Delta u_2 - u_1 + \frac{1}{n}u_2 &= f_2 \text{ dans } \Omega, \end{aligned} \tag{2.5.30}$$

avec la condition aux limites (2.5.29).

On dit que $(u_1,\, u_2)$ est solution faible du problème (2.5.30)-(2.5.29) si

$$\begin{array}{l} u_1 \in H^1(\Omega),\ u_2 \in H^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u_1(x)\cdot\nabla\varphi(x)dx + \int_\Omega (u_2(x) + \frac{1}{n}u_1(x))\varphi(x)dx = \int_\Omega f_1(x)\varphi(x)dx,\ \forall\varphi\in H^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u_2(x)\cdot\nabla\varphi(x)dx + \int_\Omega (\frac{1}{n}u_2(x) - u_1(x))\varphi(x)dx = \int_\Omega f_2(x)\varphi(x)dx,\ \forall\varphi\in H^1(\Omega). \end{array} \tag{2.5.31}$$

Noter aussi que $(u_1,\, u_2)$ est solution faible du problème (2.5.26)-(2.5.29) si $(u_1,\, u_2)$ est solution de (2.5.31) en remplaçant $\frac{1}{n}$ par 0.

Soit $f_1,\, f_2 \in L^2(\Omega)$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que le problème (2.5.31) admet une et une seule solution, que l'on note $(u_1^{(n)}, u_2^{(n)})$ dans la suite.

(b) Montrer que :

$$\|u_1^{(n)}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_2^{(n)}\|^2_{L^2(\Omega)} \le \|f_1\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f_2\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

En déduire que les suites $(u_1^{(n)})_{n\in\mathbb{N}^\star}$, et $(u_2^{(n)})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ sont bornées dans $H^1(\Omega)$.

(c) Montrer qu'il existe une et une seule solution au problème (2.5.31) obtenu en remplaçant $1/n$ par 0, c'est à dire une et une solution faible au problème (2.5.26)-(2.5.29). [Pour l'existence, utiliser les suites $(u_1^{(n)})_{n\in\mathbb{N}^\star}$, et $(u_2^{(n)})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ de la question précédente et faire tendre n vers $+\infty$. Montrer ensuite l'unicité.]

(d) Montrer que le problème (2.5.26)-(2.5.29) admet une et une seule solution au sens suivant : $u_1 \in H^2(\Omega)$, $u_2 \in H^2(\Omega)$, les équations (2.5.26) sont satisfaites $p.p.$ sur Ω et les équations (2.5.29) sont satisfaites $p.p.$ (pour la mesure de lebesgue $N-1$-dimensionnelle) sur $\partial\Omega$ en utilisant l'opérateur “trace" (vu en cours) de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$ pour donner un sens à $\frac{\partial u_1}{\partial n}$ et $\frac{\partial u_2}{\partial n}$.

On suppose maintenant que $f_1, f_2 \in C^\infty(\bar\Omega)$. Montrer que $u_1,\, u_2 \in C^\infty(\bar\Omega)$. [Utiliser aussi des théorèmes de régularité vu en cours.]

(e) Pour $f = (f_1, f_2) \in L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$, soit $u = (u_1, u_2)$ la solution faible de (2.5.26)-(2.5.29), on note $u = T(f)$. Montrer que l'opérateur $T : f \mapsto u$ est un opérateur linéaire continu et compact de $L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$ dans lui-même.

3. De manière similaire, résoudre le problème (2.5.26) avec la condition aux limites :

$$u_1 = 0,\ \frac{\partial u_2}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Exercice 22 (A la limite de H^{-1})

Partie I, décomposition dans $H^1_0(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $N \ge 1$.

1. Soit $\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ t.q. $\varphi' \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $\varphi(0) = 0$. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$. On note $\varphi(u)$ la fonction (de Ω dans $\mathbb{R}$) $x \mapsto \varphi(u(x))$. Montrer que $\varphi(u) \in H_0^1(\Omega)$ et que $D_i\varphi(u) = \varphi'(u)D_iu$ *p.p.* pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$ (où $\varphi'(u)$ désigne la fonction $x \mapsto \varphi'(u(x))$). [Reprendre la méthode vue en cours.]

   On définit maintenant φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\begin{array}{l} \varphi(s) = s, \text{ pour } 0 \le s \le 1, \\ \varphi(s) = -\frac{s^2}{2} + 2s - \frac{1}{2}, \text{ pour } 1 < s \le 2, \\ \varphi(s) = \frac{3}{2}, \text{ pour } 2 < s, \\ \varphi(s) = -\varphi(-s), \text{ pour } s < 0. \end{array}$$

   Pour $k \in \mathbb{N}^\star$, On définit φ_k de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $\varphi_k(s) = k\varphi(\frac{s}{k})$ pour $s \in \mathbb{R}$.

2. Montrer que, pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\varphi_k(s) \to s$ et $\varphi_k'(s) \to 1$ quand $k \to \infty$ et que $|\varphi_k(s)| \le |s|$, $\varphi_k'(s) \le 1$.
3. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$. Montrer que $\varphi_k(u) \in H_0^1(\Omega)$, pour tout $k \in N^\star$, et que $\varphi_k(u) \to u$ dans $H_0^1(\Omega)$, quand $k \to \infty$.
4. En déduire que, pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $u_1 \in L^\infty(\Omega)$ et $u_2 \in H_0^1(\Omega)$ t.q. $u = u_1 + u_2$ et $\|u_2\|_{H_0^1} \le \varepsilon$.

Partie II, Inégalité de Trudinger-Möser

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$. On admet qu'il existe $C > 0$, ne dépendant que de Ω, t.q.

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \le C\sqrt{q}\|u\|_{H_0^1(\Omega)},\ \forall u \in H_0^1(\Omega),\ \forall q \in [1, \infty[.$$

(Noter que cette inégalité a été démontrée en T.D. avec q au lieu de $\sqrt{q}$.)

1. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ t.q. $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \le 1$. Montrer qu'il existe $\sigma > 0$ et $a > 0$, ne dépendant que de C (donné ci dessus) t.q. $e^{\sigma u^2} \in L^1(\Omega)$ et $\|e^{\sigma u^2}\|_{L^1(\Omega)} \le a$. [Développer e^s en puissances de $s \ldots$.]
2. En utilisant la partie I (et la question précédente), Montrer que $e^{\sigma u^2} \in L^1(\Omega)$ pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$ et tout $\sigma > 0$. En déduire que $e^{\sigma u^2} \in L^p(\Omega)$ pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$, tout $\sigma > 0$ et tout $p \in [1, \infty[$.

Partie III, sur la résolution du problème de dirichlet

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$. Soit $f \in L^1(\Omega)$ t.q. $f\sqrt{|\ln(|f|)|} \in L^1(\Omega)$.

1. (Préliminaire.) Soit $\sigma > 0$. Montrer qu'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^\star$, ne dépendant que de σ, t.q.

$$st \le \alpha e^{\sigma s^2} + \beta t\sqrt{|\ln t|} + \gamma t,\ \forall s, t \in \mathbb{R}_+^\star.$$

   [On pourra, par exemple, remarquer que $st \le \max\{\beta t\sqrt{|\ln t|}, se^{(s^2/\beta^2)}\}$ puis choisir β et conclure.]
2. Montrer que $fu \in L^1(\Omega)$ pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$ et que l'application $T\ :\ u \mapsto \int_\Omega f(x)u(x)dx$ est un élément de $H^{-1}(\Omega)$.
3. Montrer qu'il existe un et un seul $u \in H_0^1(\Omega)$ t.q. $-\Delta u = f$ dans $\mathcal{D}^\star(\Omega)$.

Partie IV, contre-exemple

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ et $\theta \in]0, \frac{1}{2}[$. On suppose que $0 \in \Omega$ et on se donne $\delta \in]0, \frac{1}{2}[$ t.q. $B_{2\delta} = \{x \in \mathbb{R}^2, |x| < 2\delta\} \subset \Omega$.

1. Soit $\gamma \in]0, \frac{1}{2}[$. Montrer qu'il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ t.q. $u(x) = (\ln|x|)^\gamma$ *p.p.* sur B_δ. [On pose $v(x) = (\ln(|x|)^\gamma$. On rappelle qu'on a vu en T.D. que $v \in H^1(B_{2\delta})$. Il n'est pas demandé de redémontrer ce résultat.]

2. Montrer qu'il existe $f \in L^1(\Omega)$ t.q. $f(\ln|f|)^\theta \in L^1(\Omega)$ et $fu \notin L^1(\Omega)$ pour certains $u \in H_0^1(\Omega)$.
3. Montrer qu'il existe $f \in L^1(\Omega)$ t.q. $f(\ln|f|)^\theta \in L^1(\Omega)$ et t.q. il n'existe pas $u \in H_0^1(\Omega)$ vérifiant $-\Delta u = f$ dans $\mathcal{D}^\star(\Omega)$.

Exercice 23 (Décomposition de Hodge)

Soient Ω un ouvert borné connexe faiblement lipschitzien de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ et $f \in (L^2(\Omega))^N$.
Montrer qu'il existe $u \in H^1(\Omega)$ t.q.

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx = \int_\Omega f(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx, \ \ \forall \varphi \in H^1(\Omega).$$

En déduire qu'il existe $u \in H^1(\Omega)$ et $g \in (L^2(\Omega))^N$ t.q. $f = \nabla u + g$, p.p. dans Ω et $\int_\Omega g(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx = 0$ pour tout $\varphi \in H^1(\Omega)$.
On suppose maintenant que $g \in C^1(\bar{\Omega})$ et que $\Omega = (]0,1[)^N$. Montrer que $\operatorname{div} g = 0$ sur Ω et que $g \cdot \mathbf{n} = 0$ p.p. (pour la mesure de Lebesgue $(N-1)-$dimensionnelle) sur $\partial\Omega$, où $\mathbf{n}$ est un vecteur normal à $\partial\Omega$.

Exercice 24 (Problème de Stokes, vitesse)

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ et $f = (f_1, \ldots, f_N)^t \in (L^2(\Omega))^N$. On pose $H = \{u \in (H_0^1(\Omega))^N;$ $\operatorname{div} u = 0$ p.p. dans $\Omega\}$. On rappelle que u est solution du problème de Stokes si :

$$u = (u_1, \ldots, u_N)^t \in H, \ \sum_{i=1}^N \int_\Omega \nabla u_i(x) \cdot \nabla v_i(x) dx = \int_\Omega f(x) \cdot v(x) dx, \ \forall v = (v_1, \ldots, v_N)^t \in H. \quad (2.5.32)$$

On se propose ici de montrer qu'il existe une et une seule solution de (2.5.32) par une méthode de pénalisation. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on considère le problème suivant :

$$\begin{aligned} &u = (u_1, \ldots, u_N)^t \in (H_0^1(\Omega))^N, \\ &\int_\Omega (\nabla u_i(x) \cdot \nabla v(x) + n(\operatorname{div} u(x)) D_i v(x)) dx = \int_\Omega f_i(x) v(x) dx, \ \forall v = H_0^1(\Omega), \ \forall i \in \{1, \ldots, N\}. \end{aligned} \quad (2.5.33)$$

1. Montrer que (2.5.32) admet au plus une solution.
2. Montrer qu'il existe une et une seule solution à (2.5.33). [Utiliser le lemme de Lax-Milgram sur $(H_0^1(\Omega))^N$.] On note, dans la suite, $u^{(n)}$ cette solution.
3. Montrer que la suite $(u^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $(H_0^1(\Omega))^N$ et que la suite $(\sqrt{n}\operatorname{div} u^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$.
4. Montrer que, après extraction éventuelle d'une sous suite, $u^{(n)} \to u$ faiblement dans $(H_0^1(\Omega))^N$, quand $n \to \infty$, où u est solution de (2.5.32). En déduire (avec la question 1) que (2.5.32) admet une unique solution, notée u, et que $u^{(n)} \to u$ faiblement dans $(H_0^1(\Omega))^N$, quand $n \to \infty$ (sans extraction de sous suite).

Exercice 25 (Conditions aux limites de Vencel)

Notations et Rappels du cours

On note $H^1_p(0,2\pi) = \{u \in H^1(]0,2\pi[);\, u(0) = u(2\pi)\}$ (on rappelle que, si $u \in H^1(]0,2\pi[)$, u admet toujours un représentant continu sur $[0,2\pi]$ et on identifie u avec ce représentant continu).

Soit $B = \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 < 1\}$. On rappelle qu'il existe une application $\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\partial B)$, linéaire, continue et t.q. $\gamma(u) = u$ p.p. sur ∂B si $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{B},\mathbb{R})$.

Si $w \in L^2(\partial B)$, on définit $j(w) \in L^2(]0,2\pi[)$ par $j(w)(\theta) = w(\cos\theta,\sin\theta)$, pour $\theta \in [0,2\pi[$. L'application j est donc une isométrie de $L^2(\partial B)$ sur $L^2(]0,2\pi[)$, de sorte que $\overline{g} = jo\gamma$ est linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(]0,2\pi[)$.

On pose $H = \{u \in H^1(\Omega)\,;\, \overline{g}(u) \in H^1_p(0,2\pi)\}$. On munit H du produit scalaire $(u/v)_H = (u/v)_{H^1(\Omega)} + (\overline{g}(u)/\overline{g}(v))_{H^1_p(0,2\pi)}$.

Partie I (Préliminaire d'analyse fontionnelle)

1. Montrer que $H^1_p(0,2\pi)$ est une espace de Hilbert.
2. Montrer que H est une espace de Hilbert.

Partie II (Conditions aux limites de Vencel)

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x,y) \neq (0,0)$, on définit r et θ par $r = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$ et $\theta \in [0,2\pi[$ t.q. $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. Pour $u \in C^1(\mathbb{R}^N \setminus (0,0),\mathbb{R})$, on pose $u_r(x,y) = \frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{y}{r}\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$ et $u_\theta(x,y) = -y\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + x\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$. (Dans la suite, on pose $u_{\theta\theta} = (u_\theta)_\theta$, si $u \in C^2(\overline{B},\mathbb{R})$.)

Pour f et g données, on s'intéresse au problème :

$$\begin{aligned} -\Delta u(x,y) + u(x,y) &= f(x,y),\ (x,y) \in B, && (2.5.34)\\ u_r(x,y) - u_{\theta\theta}(x,y) + u(x,y) &= g(x,y),\ (x,y) \in \partial B. && (2.5.35)\end{aligned}$$

Soient $f \in L^2(B)$ et $g \in L^2(\partial B)$, on appelle "solution faible" de (2.5.34)-(2.5.35) une solution du problème suivant :

$$u \in H, \tag{2.5.36}$$

$$\begin{aligned}\int_B \Big(\sum_i D_i u(z) D_i v(z) + u(z)v(z)\Big)dz + \int_0^{2\pi} \big(D\overline{g}(u)(\theta)D\overline{g}(v)(\theta) + \overline{g}(u)(\theta)\overline{g}(v)(\theta)\big)d\theta \\ = \int_B f(z)v(z)dz + \int_0^{2\pi} j(g)(\theta) j(\gamma(v))(\theta)d\theta,\ \forall v \in H.\end{aligned} \tag{2.5.37}$$

1. Soient $f \in L^2(B)$ et $g \in L^2(\partial B)$. Montrer qu'il existe une et une seule solution de (2.5.36)-(2.5.37).
2. (Question plus difficile) On retire, dans cette question, "uv" dans la 1ère intégrale de (2.5.37). Soient $f \in L^2(B)$ et $g \in L^2(\partial B)$. Montrer qu'il existe encore une et une seule solution de (2.5.36)-(2.5.37).
3. Soient $f \in C(\overline{B},\mathbb{R})$ et $g \in C(\partial B,\mathbb{R})$. Soit $u \in C^2(\overline{B},\mathbb{R})$. Montrer que u est solution au sens "classique" de (2.5.34)-(2.5.35) (c.a.d. vérifie (2.5.34) pour tout $(x,y) \in \overline{B}$ et (2.5.35) pour tout $(x,y) \in \partial B$) si et seulement si u est solution faible de (2.5.34)-(2.5.35).
4. Pour $f \in L^2(B)$ et $g \in L^2(\partial B)$, on note $T(f,g) = (u,\gamma(u)) \in L^2(B) \times L^2(\partial B)$, où est l'unique solution faible de (2.5.34)-(2.5.35). Montrer que T est un opérateur linéaire compact autoadjoint de $L^2(B) \times L^2(\partial B)$ dans lui-même.

Exercice 26 (Problème de Stokes, vitesse et pression)

Soient Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ à frontière lipschitzienne et $f = (f_1, \ldots, f_N)^t \in (L^2(\Omega))^N$. On s'intéresse ici au problème de Stokes, c'est-à-dire à trouver $u = (u_1, \ldots, u_N)^t$ et p solution de

$$\begin{aligned} &-\Delta u + \nabla p = f \text{ dans } \Omega,\\ &\operatorname{div}(u) = 0 \text{ dans } \Omega,\\ &u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.5.38}$$

Noter que la première équation de (2.5.38) est vectorielle.
On pose $H = \{u \in (H_0^1(\Omega))^N ; \operatorname{div} u = 0 \text{ p.p. dans } \Omega\}$. On appelle solution faible de (2.5.38) un couple (u, p) solution de

$$\begin{aligned} &u = (u_1, \ldots, u_N)^t \in H,\ p \in L^2(\Omega),\\ &\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \nabla u_i(x) \cdot \nabla v_i(x) dx - \int p(x) \operatorname{div} v(x) dx = \int_\Omega f(x) \cdot v(x) dx\\ &\qquad \text{pour tout } v = (v_1, \ldots, v_N)^t \in (H_0^1(\Omega))^N. \end{aligned} \tag{2.5.39}$$

On pourra remarquer qu'une solution classique (u, p) de (2.5.38) est solution de (2.5.39).

Partie I, existence et unicité de u

Montrer que, si (u, p) est une solution classique de (2.5.38), u est alors solution de

$$u = (u_1, \ldots, u_N)^t \in H,\ \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \nabla u_i(x) \cdot \nabla v_i(x) dx = \int_\Omega f(x) \cdot v(x) dx,\ \forall v = (v_1, \ldots, v_N)^t \in H. \tag{2.5.40}$$

On montre dans cete pemière partie que (2.5.40) a une et une seule solution et que si (u, p) est solution de (2.5.39), u est alors l'unique solution de (2.5.40).

1. Montrer que H est un s.e.v. fermé de $(H_0^1(\Omega))^d$.
2. Montrer que (2.5.40) admet une et une seule solution. [Utiliser le lemme de Lax-Milgram.]
3. Soit (u, p) une solution de (2.5.39). Montrer que u est l'unique solution de (2.5.40).

Soit u la solution de (2.5.40). La suite de l'exercice consiste à trouver p pour que (u, p) soit solution de (2.5.39).

Partie II, préliminaire d'analyse fonctionnelle

Soit E et F deux espaces de Hilbert (réels). On note $(\cdot/\cdot)_E$ (resp. $(\cdot/\cdot)_F$) le produit scalaire dans E (resp. F). Soit A un opérateur linéaire continu de E dans F. On note $A^\star$ l'opérateur adjoint de A. L'opérateur $A^\star$ est un opérateur linéaire continu de F dans E. Pour tout $g \in F$, $A^\star g$ est l'unique élément de E défini par

$$(A^\star g/u)_E = (g/Au)_F \text{ pour tout } u \in E.$$

(Noter que l'existence et l'unicité de $A^\star g$ est donnée par le théorème de représentation de Riesz.)

1. Montrer que $\operatorname{Ker} A = (\operatorname{Im} A^\star)^\perp$.
   (On rappelle que si $G \subset E$, $G^\perp = \{u \in E, (u/v)_E = 0 \text{ pour tout } v \in G\}$.)
2. Montrer que $(\operatorname{Ker} A)^\perp = \overline{\operatorname{Im} A^\star}$.

Partie III, Existence et unicité partielle de p

Dans cette partie, on va utiliser le lemme suivant (souvent attribué à J. Nečas, 1965) que nous admettons.

Lemme 2.23 *Soient Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) à frontière lipschitzienne et $q \in L^2(\Omega)$ t.q. $\int_\Omega q(x)dx = 0$. Il existe alors $v \in (H_0^1(\Omega))^N$ t.q. $\mathrm{div}(v) = q$ p.p. dans Ω et*

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)^N} \leq C\|q\|_{L^2(\Omega)},$$

où C ne dépend que de Ω.

On prend ici $E = H_0^1(\Omega)^N$ et $F = L^2(\Omega)$. Pour $u \in E$ on pose $Au = \mathrm{div}\, u$, de sorte que A est un opérateur linéaire continu de E dans F.

1. Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de F et $v \in E$ t.q. $A^\star p_n \to v$ dans E quand $n \to +\infty$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $q_n = p_n - a_n$, où a_n est la moyenne de p_n dans Ω.
   (a) Montrer que $A^\star p_n = A^\star q_n$.
   (b) Montrer que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans F. [Utiliser le lemme 2.23.]
   (c) Montrer que $v \in \mathrm{Im}A^\star$.
2. Montrer que $(\mathrm{Ker}A)^\perp = \mathrm{Im}A^\star$ et que $\mathrm{Ker}A = H$.
3. On rappelle que le produit scalaire dans E est défini par

$$(u/v)_E = \sum_{i=1}^N \int_\Omega \nabla u_i(x) \cdot \nabla v_i(x)dx.$$

   On définit $T_f \in E$ par $(T_f/v)_E = \int_\Omega f(x) \cdot v(x)dx$ pour tout $v \in E$. Soit u la solution de (2.5.40).
   (a) Montrer que $u - T_f \in H^\perp$. En déduire que $u - T_f \in \mathrm{Im}A^\star$.
   (b) Montrer qu'il existe $p \in F$ t.q. (u, p) est solution de (2.5.39).
4. Soit (u_1, p_1) et (u_2, p_2) deux solutions de (2.5.39). Montrer que $u_1 = u_2 = u$ (où u est l'unique solution de (2.5.40)) et qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $p_1 - p_2 = a$ p.p..