

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

T. GALLAY (COURS) ET J. VOVELLE (TD)

Transcrit par Idriss Mazari.

É.N.S Lyon, 2014-2015

Ces notes ont été rédigées par Idriss Mazari. Les erreurs qui s'y trouvent ne sont donc aucunement du fait de M. Gallay (<http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~gallay/>). Les Td ont été rédigés par Julien Vovelle (<http://math.univ-lyon1.fr/homes-www/vovelle/>).

Table des matières

I	Introduction générale	3
1	Mise en jambes	3
2	Quelques EDP emblématiques	3
3	Bibliographie	5
4	Exercices	6
4.1	Stabilité de la solution d'une EDP	6
4.2	Equation de transport	7
4.3	Étude d'un problème elliptique en dimension 1	7
4.4	Equation des ondes et cordes de guitare	10
4.5	Minimisation et EDP	11
4.6	Probas et EDP	12
4.7	Transport Optimal et équation de Monge-Ampère	13
II	EDP linéaires du second ordre à coefficients constants	14
1	Solutions fondamentales de l'équation de Laplace	14
2	Mesure de surface et formule de Gauss	15
3	Propriétés des fonctions harmoniques	17
4	Problème de Dirichlet et fonctions de Green	19
5	L'équation de la chaleur	22
6	L'équation des ondes	28
7	Exercices	30
7.1	L'équation de Poisson dans $\mathbb{R}^3$	30
7.2	Fonction de Green sur le demi-espace - I	31
7.3	Principe du maximum	32
7.4	La formule de la moyenne et applications	32
7.5	Fonction de Green sur le demi-espace - II	33
7.6	L'équation de la chaleur sur le Tore	34
7.7	Propagation	36
7.8	Limite Hydrodynamique	37
III	Opérateurs différentiels-Régularité elliptique-Propagation des singularités	38
1	Définitions générales	38
2	EDP elliptiques d'ordre 2-Existence de solutions faibles	39
3	Équations elliptiques d'ordre 2-Résultats de régularité	42
3.1	Rappels sur les quotients différentiels	42
3.2	Régularité intérieure	42

I. Introduction générale

I-1. Mise en jambes

On abrègera dans toute la suite "équation aux dérivées partielles" en "EDP".

Une EDP est une équation dont l'inconnue est une fonction et qui relie la fonction à ses dérivées partielles. Typiquement, la fonction u cherchée est définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et est à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, Ω étant supposé non vide et $n \geq 2$; le cas $n = 1$ est traité par la théorie des équations différentielles ordinaires. Une EDP est donc de la forme

$$\forall x \in \Omega, F(x, u(x), \nabla u(x), \dots, \nabla^k u(x)) = 0 \quad (\text{I.1})$$

F étant à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ (on demande généralement autant d'équations que d'inconnues). Si $m = 1$, on parle d'**équation scalaire**. Si $m \geq 2$, on parle de **système d'EDP**. L'entier k qui intervient dans (1) est appelé **ordre de l'EDP** (k est l'ordre maximal intervenant dans l'équation de manière non triviale). La forme (I.1) est beaucoup trop générale : on ne sait strictement rien en dire.

On dit que (I.1) est **linéaire** si F dépend linéairement de chacun des $\nabla^i u(x)$, $i \in \{0, \dots, k\}$. L'équation s'écrit alors

$$\sum_{|\alpha| \leq k} v_\alpha D^\alpha u = f \quad (\text{I.2})$$

où les $v_\alpha : \Omega \rightarrow M(m, \mathbb{R})$ sont les **coefficients de l'équation**. La fonction f est appelé **second membre de l'équation**.

I-2. Quelques EDP emblématiques

Faisons d'abord quelques rappels historiques : les équations différentielles ordinaires sont apparues au dix-septième siècle, et accompagnent la naissance du calcul différentiel dans les travaux de Newton et Leibniz (dans la lignée des oeuvres de Fermat sur la recherche d'extrema), auquel elles se couplent pour modéliser la mécanique céleste. Ces équations ont également pu servir à modéliser la mécanique des solides indéformables.

Les problèmes commencent à apparaître lorsqu'on l'on cherche à modéliser des solides déformables (souvent supposés idéaux, au moins le temps de la modélisation, la notion d'idéalité d'un objet dépendant évidemment de la situation). Historiquement, les équations sont apparues avec l'équation des **cordes vibrantes**, introduite par d'Alembert en 1749 dans un texte intitulé *Recherches sur la courbe que forme une courbe tendue mise en vibration*. Cette équation a une histoire riche en rebondissements qui mériterait une étude approfondie sur le plan historique, et nous nous contenterons ici de donner quelques éléments sur la controverse qui opposa Euler, d'Alembert et Daniel Bernoulli ; en effet, d'Alembert ayant trouvé la forme générale des solutions classiques de l'équation, Bernoulli s'empare de ses travaux et introduit, à sa manière, un développement en série de Fourier des solutions (ce qui imposerait une certaine régularité), tandis

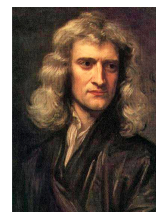
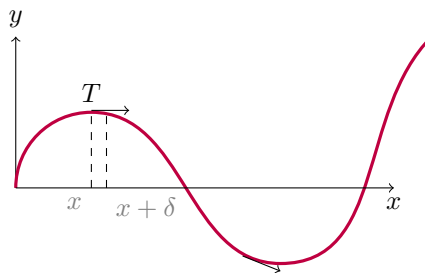


FIGURE 1 –
Newton



FIGURE 2 –
d'Alembert

qu'Euler réussit à déterminer la solution générale en fonction du profil initial, qui peut présenter des défauts de régularité ; sa solution a pourtant toujours un sens. **développer**. Les travaux de Bernoulli se retrouveront plus tard dans le célèbre *Théorie analytique de la chaleur* de Joseph Fourier. On réalisera au vingtième siècle qu'Euler, au cours de cette controverse, aura en fait été le premier à introduire la notion de **solution faible**, réapparue dans les années 30 avec les travaux de Leray (1906-1998). Étudions cette équation : nous aurons simplement besoin, pour cela, du principe fondamental de la mécanique de Newton.. On considère une corde astreinte à ne se déplacer que verticalement :



Soit μ la masse linéique de la corde, T la tension de la corde (supposée constante). On considère une portion de la corde entre x et $x + \delta$. La masse de ce bout de corde est

$$m = \mu \int_x^{x+\delta} \sqrt{1 + (\partial_x u)^2(y)} dy$$

Par hypothèse, l'accélération est uniquement verticale et vaut donc

$$a = \partial_{tt}^2 u(x, t) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En négligeant la gravitation, la somme des forces se réduit à la tension exercée de part et d'autre du fil. La souplesse supposée de la corde signifie que la tension est toujours dirigée par la tangente au fil. Ainsi, en notant F la résultante des forces, on a :

$$F = T \begin{pmatrix} 1 \\ \partial_x u(x + \delta) \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial_x u)^2(x + \delta)}} - T \begin{pmatrix} 1 \\ \partial_x u(x) \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial_x u)^2(x)}}$$

Sous l'hypothèse de petits déplacements, ces deux quantités deviennent

$$m = \mu \delta, F = T \delta \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_{xx}^2 u(x) \end{pmatrix}$$

et on obtient finalement l'équation des cordes vibrantes, en posant $c := \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ la vitesse de propagation :

$$\boxed{\partial_{tt}^2 u(x, t) = c^2 \partial_{xx}^2 u(x, t)} \quad (\text{I.3})$$

On peut généraliser cette formule à n'importe quelle dimension, et on l'appelle toujours **équation des ondes** : Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, si f est une fonction de $\Omega \times \mathbb{R}$, on peut considérer l'équation suivante, d'inconnue $u : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\boxed{\partial_{tt}^2 u = c^2 \Delta_x u + f} \quad (\text{I.4})$$

On peut également utiliser l'**équation d'élasticité**, qui fait intervenir plusieurs vitesses de propagation.

La deuxième équation aux dérivées partielles fondamentale est l'**équation de la chaleur**, introduite par Fourier aux alentours de 1810 :

$$\boxed{\partial_t u = D \Delta_x u + f} \quad (\text{I.5})$$

où u modélise la température dans le domaine Ω , f est une terme source et D est la diffusivité thermique du matériau. Cette équation s'établit via un bilan d'énergie et via la loi de Fourier, qui est une loi phénoménologique : de nombreux débats ont lieu aujourd'hui encore pour savoir si cette loi peut se déduire des principes de la mécanique classique ou si elle est condamnée à rester une loi phénoménologique. Notons que cette équation n'est pas réversible, contrairement aux équations de Newton. Mais où arrive cette irréversibilité ?

La troisième EDP emblématique est l'**équation de la mécanique des fluides** (introduite par Euler, en 1755, et affinée par Navier en 1823 pour l'étude des fluides visqueux).

On définit $u(t, x)$ la vitesse dans le fluide au point x à l'instant t et $p(t, x)$ la pression dans le fluide au point x à l'instant t . On introduit $\eta \geq 0$ la viscosité du fluide. Alors u est solution de l'EDP suivante :

$$\boxed{\begin{cases} \rho (\partial_t u + (u \cdot \nabla) u) &= \eta \Delta_x u - \nabla p \\ \operatorname{div}_x(u) &= 0 \end{cases}} \quad (\text{I.6})$$

Si $\eta = 0$, on parle d'équation d'Euler, et si $\eta > 0$, on parle d'équation de Navier-Stokes. Il est intéressant de noter qu'il s'agit de la première EDP non-linéaire apparue historiquement. Elle l'est de manière intrinsèque, pas à cause d'un développement limité malencontreux de la part d'un mathématicien, mais bien à cause du $(u \cdot \nabla)u$ qui apparaît dans le terme d'accélération, qui correspond en fait à une dérivée de Lie. C'est une équation sur laquelle beaucoup de questions sont encore ouvertes : on sait pas si les solutions sont régulières, ni même si elles existent en tout temps...

Un des succès incontestables de la physique du XIX^e siècle est l'établissement, aux alentours de 1875, des **équations de Maxwell**. Soit ρ la densité de charge, j la densité de courant, ε_0 la permittivité du vide et μ_0 sa perméabilité. Les équations de Maxwell sont le système d'EDP suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(E) &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \operatorname{div}(B) &= 0 \\ \operatorname{rot}(E) &= -\partial_t B \\ \operatorname{rot}(B) &= \mu_0 j + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t E \end{cases} \quad (\text{I.7})$$

On peut par exemple en déduire une EDP fermée qui s'assimile à une équation des ondes à la vitesse de la lumière c , $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$:

$$\varepsilon_0 \mu_0 \partial_{tt}^2 B = \Delta_x B + \mu_0 \operatorname{rot}(j) \quad (\text{I.8})$$

Enfin, mentionnons l'**équation de Schrodinger** : $u(t, x)$ désignant l'amplitude de probabilité de présence de la particule en dx à l'instant t , on a :

$$i\hbar \partial_t u = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_x u + V u \quad (\text{I.9})$$

FIGURE 3 –
Maxwell

où $\hbar$ est la constante de Planck réduite, m la masse d'une particule et $V(x, t)$ le potentiel associé à la force subie. Cette équation décrit l'évolution de la densité de probabilité $|u|^2$. Elle présente certaines analogies avec l'équation de la chaleur, mais également des différences majeures : par exemple, elle est réversible (via la symétrie $u(x, t) \mapsto \overline{u(x, -t)}$, qui est un analogue quantique de la réversibilité), tandis que l'équation de la chaleur ne l'est pas.

Mentionnons pour finir l'**équation de Poisson**, qui apparaît naturellement lorsque l'on cherche des solutions stationnaires de l'équation des ondes ou de la chaleur :

$$-\Delta_x u = f \quad (\text{I.10})$$

f ne dépendant pas du temps.

I-3. Bibliographie

- S. Alinhac et P. Gérard, *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser*. Savoirs Actuels, InterEditions, Paris, 1991.
- H. Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext, Springer, New York, 2011.
- Th. Cazenave et A. Haraux, *Introduction aux problèmes d'évolution semi-linéaires*. Mathématiques & Applications 1, Ellipses, Paris, 1990.
- K.-J. Engel et R. Nagel, *One-parameter semigroups for linear evolution equations*. Graduate Texts in Mathematics 194, Springer-Verlag, New York, 2000.
- L. C. Evans, *Partial differential equations*, second edition. Graduate Studies in Mathematics 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
- A. Friedman, *Partial differential equations*. Robert E. Krieger Publishing Co., Huntington, N.Y., 1976.
- D. Gilbarg et N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, reprint of the 1998 edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators. I. Distribution theory and Fourier analysis. II. Differential operators with constant coefficients. III. Pseudo-differential operators. IV. Fourier integral operators*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003–2009.

- F. John, *Partial differential equations*, reprint of the fourth edition. Applied Mathematical Sciences 1, Springer-Verlag, New York, 1991.
- J. Jost, *Partial differential equations*, second edition. Graduate Texts in Mathematics 214, Springer, New York, 2007.
- O. Kavian, *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*. Mathématiques & Applications 13, Springer, Paris, 1993.
- J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1969.
- A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Applied Mathematical Sciences 44, Springer-Verlag, New York, 1983.
- M. Protter et H. F. Weinberger, *Maximum principles in differential equations*, corrected reprint of the 1967 edition. Springer-Verlag, New York, 1984.
- J. Rauch, *Partial differential equations*. Graduate Texts in Mathematics 128, Springer-Verlag, New York, 1991.
- W. Strauss, *Partial differential equations. An introduction*, second edition. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2008.
- M. E. Taylor, *Partial differential equations. I. Basic theory. II. Qualitative studies of linear equations. III. Nonlinear equations*. Second edition, Applied Mathematical Sciences 115–117, Springer, New York, 2011.

I-4. Exercices

I-4- 1. Stabilité de la solution d'une EDP

On note $\mathbb{T}^n$ le tore de dimension n (classes d'équivalence $\bar{x}$ pour la relation $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Z}^n$). Pour $p \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$, on dit qu'une fonction $\varphi: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est de classe C^k sur $\mathbb{T}^n$ (noté $\varphi \in C^k(\mathbb{T}^n; \mathbb{R}^p)$) si la fonction

$$x \ni \mathbb{R}^n \mapsto \varphi(\bar{x})$$

est de classe C^k sur $\mathbb{R}^n$. Pour $f \in C^0(\mathbb{T}^n; \mathbb{R})$, on notera aussi

$$\int_{\mathbb{T}^n} f(x) dx = \int_{[0,1]^n} f(\bar{x}) dx.$$

On rappelle la formule de Green dans ce cadre périodique :

$$\int_{\mathbb{T}^n} \mathbf{a}(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx = - \int_{\mathbb{T}^n} \operatorname{div}(\mathbf{a})(x) \varphi(x) dx, \quad (\text{I.11})$$

pour toutes fonctions $\mathbf{a} \in C^1(\mathbb{T}^n; \mathbb{R}^n)$, $\varphi \in C^1(\mathbb{T}^n; \mathbb{R})$.

Pour $p \geq 1$, on note $L^p(\mathbb{T}^n)$ l'ensemble des fonctions mesurables $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont $\mathbb{Z}^n$ périodique et satisfont

$$\int_{[0,1]^n} |u(x)|^p dx < +\infty.$$

Si $u \in L^1(\mathbb{T}^n)$ et $k \in \mathbb{Z}^n$, on note

$$\hat{u}(k) = \int_{\mathbb{T}^n} u(x) e^{-2\pi i k \cdot x} dx = \langle u, e_k \rangle_{L^2(\mathbb{T}^n)}$$

le k -ième coefficient de Fourier de u . Ici $e_k(x) := e^{2\pi i k \cdot x}$.

1. Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{T}^n)$. Soit $u \in C([0, +\infty[; L^2(\mathbb{T}^n))$ satisfaisant

$$u \in C^\infty([0, +\infty[\times \mathbb{T}^n), \quad (\text{I.12})$$

$$\partial_t u(t, x) - \Delta u(t, x) = 0, \quad \text{pour tout } (t, x) \in]0, +\infty[\times \mathbb{T}^n, \quad (\text{I.13})$$

$$u(0) = u_0. \quad (\text{I.14})$$

Remarque : Dans (II.28), $u(0)$ est la valeur en $t = 0$ de la courbe $t \mapsto u(t)$ tracée dans $L^2(\mathbb{T}^n)$. Considérer la valeur en 0 a un sens puisque la courbe est continue par hypothèse.

En passant en Fourier, montrer que, pour tout $t \geq 0$,

$$u(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} e^{-4\pi^2 |k|^2 t} \hat{u}_0(k) e_k, \quad (\text{I.15})$$

l'égalité ayant lieu dans $L^2(\mathbb{T}^n)$.

- Réciproquement, montrer que la formule (I.15) définit une fonction

$$u \in C([0, +\infty[; L^2(\mathbb{T}^n))$$

satisfaisant (I.12), (II.27), (II.28).

- Montrer que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \int_{\mathbb{T}^n} u_0(x) dx$$

dans $L^2(\mathbb{T}^n)$.

- Qu'en déduit-on au sujet de la stabilité dans $L^2(\mathbb{T}^n)$ de la solution nulle ?

I-4- 2. Equation de transport

Soit $b \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ un champ de vecteur borné.

- Justifier que le flot $\Phi_t(x)$ est défini globalement en temps. On rappelle que Φ_t définit un C^1 -difféomorphisme $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.
- On note Φ^t la fonction inverse de $x \mapsto \Phi_t(x)$. Soit $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Montrer que

$$u: (t, x) \mapsto u_0(\Phi^t(x))$$

est solution de l'équation de transport

$$\partial_t u(t, x) + b(t, x) \cdot \nabla_x u(t, x) = 0 \quad \text{pour tous } t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{I.16})$$

et satisfait la condition initiale : $u(0, x) = u_0(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

- Comment opère l'équation de transport (I.16) sur le graphe de u_0 ? Qu'en est-il dans les cas particuliers $n = 1$, $b \equiv \pm 1$?

I-4- 3. Étude d'un problème elliptique en dimension 1

On considère le problème aux limites suivant :

$$\begin{aligned} &\text{trouver } u \in C^2[0, 1] \quad \text{tel que} \\ &-u''(x) + a(x)u(x) = f(x), \quad \forall x \in]0, 1[, \end{aligned} \quad (\text{I.17})$$

$$u(0) = \alpha \quad u(1) = \beta. \quad (\text{I.18})$$

Les fonctions, $a, f \in C^0[0, 1]$, sont données, ainsi que les réels α, β . On suppose $a(x) \geq 0, \forall x \in [0, 1]$.

- En utilisant les théorèmes de base sur les équations différentielles, montrer que les solutions de (1) forment un espace affine de dimension 2.

.....

SOLUTION :

Il s'agit d'une EDO dont l'ensemble des solutions est défini par la considération du problème de Cauchy

$$\begin{aligned} &\text{trouver } u \in C^2[0, 1] \quad \text{tel que} \\ &-u''(x) + a(x)u(x) = f(x), \quad \forall x \in]0, 1[, \\ &u(0) = \lambda \quad u'(0) = \mu, \end{aligned}$$

avec λ et μ dans $\mathbb{R}$. Pour λ et μ fixés, le problème de Cauchy admet une unique solution par le théorème de Cauchy-Lipschitz. En effet, il est équivalent au système différentiel

$$V' = AV \quad \text{et} \quad V(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ avec } V = \begin{pmatrix} v \\ v' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

où $(x, y) \mapsto A(x)y$ est lipschitzienne de $[0, 1] \times \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par rapport à y .

2. Pour $v \in C^2(]0, 1[) \cap C^0[0, 1]$, on pose $(\mathcal{L}v)(x) = -v''(x) + a(x)v(x)$. Montrer que

$$(\mathcal{L}v)(x) \leq 0, \quad \forall x \in]0, 1[, \quad \text{entraîne} \quad v(x) \leq \max(0, v(0), v(1)), \quad \forall x \in [0, 1].$$

Indication : quel est le signe de v'' sur les intervalles où $v > 0$?

SOLUTION :

- Supposons $(\mathcal{L}v)(x) \leq 0, \forall x \in]0, 1[$. Dans un premier temps, supposons $v(0), v(1) \leq 0$. Il s'agit alors de montrer que v reste négative.

Par l'absurde, considérons alors qu'il existe x_0 tel que $m = \max\{v(x), x \in]0, 1[\} = v(x_0) > 0$. Soit $V(x_0)$ le voisinage de x_0 maximal tel que $v(x) > 0$ pour tout x dans $V(x_0)$. Par positivité de v et a sur $V(x_0)$, il vient alors que v'' est positive sur $V(x_0)$ et donc v est convexe sur $V(x_0)$. Alors, sur $V(x_0)$, v atteint son max sur une borne de $V(x_0)$.

La convexité de v et sa continuité induisent que v est constante sur $V(x_0) \cup [x_0, 1]$ et ceci contredit la définition même de $V(x_0)$. Contradiction.

- Concernant le cas $v(0) > 0$ et $v(1) \leq 0$. On pose $w(x) = v(x) - v(0)(1 - x)$ et on se retrouve dans le cas précédent en w , ce qui induit le résultat attendu par l'intermédiaire de $(\mathcal{L}w)$ qui est aussi négative lorsque $(\mathcal{L}v)$ l'est.
- Concernant le cas $v(0) \leq 0$ et $v(1) > 0$. Idem en posant $w(x) = v(x) - v(1)x$.
- Concernant le cas $v(0) > 0$ et $v(1) > 0$. Idem en posant $w(x) = v(x) - v(0)(1 - x) - v(1)x$.

3. Vérifier que, si u est solution de (1), (2), la fonction

$$w(x) = u(x) - |\alpha|(1 - x) - |\beta|x - \frac{1}{2}x(1 - x)\|f\|_{L^\infty(0,1)}$$

vérifie $(\mathcal{L}w)(x) \leq 0$, pour tout $x \in [0, 1]$.

SOLUTION :

Il suffit d'écrire pour aboutir à

$$(\mathcal{L}w)(x) = f(x) - \|f\|_{L^\infty(0,1)} - a(x)(|\alpha|(1 - x) + |\beta|x + \frac{1}{2}x(1 - x)\|f\|_{L^\infty(0,1)})$$

ce qui est effectivement négatif.

On peut remarquer de plus que $w(0), w(1) \leq 0$, d'où l'on déduit de la question précédente que $w \leq 0$ sur $]0, 1[$.

4. Montrer que les solutions de (1), (2) vérifient

$$\forall x \in [0, 1], \quad |u(x)| \leq |\alpha|(1 - x) + |\beta|x + \frac{1}{2}x(1 - x)\|f\|_{L^\infty(0,1)}$$

en déduire l'unicité des solutions de (1), (2).

SOLUTION :

De la question précédente, on a $u(x) \leq |\alpha|(1-x) + |\beta|x + \frac{1}{2}x(1-x)\|f\|_{L^\infty(0,1)}$.

Il suffit d'appliquer la question précédente à $-u$ avec $-f$, $-\alpha$, et $-\beta$ à la place de f , α , et β pour avoir $-u(x) \leq |\alpha|(1-x) + |\beta|x + \frac{1}{2}x(1-x)\|f\|_{L^\infty(0,1)}$.

cqfd. L'unicité de la solution de (1-2) en découle trivialement.

Ici, on remarque que l'unicité repose sur la linéarité du problème et le contrôle de la solution par les données du problème : α , β et f .

.....

5. Montrer que la solution du problème

$$\begin{aligned} -v''(x) + a(x)v(x) &= 0, \quad \forall x \in]0, 1[, \\ v(0) &= 0 \quad v'(0) = 1, \end{aligned}$$

vérifie $v(1) \neq 0$. En déduire que le problème (1), (2) admet une solution et une seule, et que de plus, si $a \in C^k[0, 1]$ et $f \in C^k[0, 1]$, alors $u \in C^{k+2}[0, 1]$.

SOLUTION :

Désignons par (P1) le problème

$$\begin{aligned} -v''(x) + a(x)v(x) &= 0, \quad \forall x \in]0, 1[, \\ v(0) &= 0 \quad v'(0) = 1, \end{aligned}$$

D'après la question précédente, si $v(1) = 0$, on obtient $v = 0$ sur $[0, 1]$, ce qui contredit $v'(0) = 1$. Nécessairement, $v(1) \neq 0$. L'unicité et l'existence de la solution v de (P1) est assurée par le théorème de Cauchy-Lipschitz (comme question (a)).

Désignons par (P2) le problème

$$\begin{aligned} -w''(x) + a(x)w(x) &= 0, \quad \forall x \in]0, 1[, \\ w(0) &= \alpha \quad w'(0) = 0, \end{aligned}$$

L'unicité et l'existence de la solution w de (P2) est aussi assurée par le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Notons $u = w + \gamma v$. Alors u vérifie :

$$\begin{aligned} -u''(x) + a(x)u(x) &= 0, \quad \forall x \in]0, 1[, \\ u(0) &= w(0) + \gamma v(0) = \alpha \\ u(1) &= w(1) + \gamma v(1). \end{aligned}$$

On obtient ainsi l'existence d'une solution u de (1-2) en prenant $\gamma = \frac{\beta - w(1)}{v(1)}$.

La régularité provient du fait que $u'' = au - f$. Ainsi, si $a \in C^k[0, 1]$ et $f \in C^k[0, 1]$, avec $u \in C^2[0, 1]$, on obtient $u'' \in C^2[0, 1]$ et donc $u \in C^4[0, 1]$ (si $k \geq 2$). De proche en proche, on obtient $u'' \in C^k[0, 1]$ et donc $u \in C^{k+2}[0, 1]$. On gagne de la régularité.

Remarque : Au travers de cette première partie, nous nous sommes intéressés à 4 propriétés :

- *Contrôle de la solution par les données du problème : une forme de continuité de la fonctionnelle qui au problème initial associe sa solution.*
- *Unicité de la solution comme conséquence de la linéarité du problème et du contrôle ci-dessus.*
- *Existence de la solution : la partie la moins triviale. Ici, on se ramène à un problème dont on connaît l'existence d'une solution.*
- *Régularité de la solution.*

.....

I-4- 4. Equation des ondes et cordes de guitare

Soit une corde de longueur L , considérée à l'horizontale dans la position de repos. L'équation vérifiée par l'amplitude $u(t, x)$ de déplacement de la corde (voir cours) est

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0, \quad t > 0, x \in]0, L[, \quad (\text{I.19})$$

où $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$, T étant la tension de la corde et μ sa masse linéique.

1. Dans cette question uniquement on considère la corde comme de longueur infinie, c'est-à-dire qu'on résout (I.19) pour x variant dans tout $\mathbb{R}$.

(a) Soit $\varphi, \theta \in C^2(\mathbb{R})$. Montrer que

$$u(t, x) := \varphi(x + ct) + \theta(x - ct)$$

satisfait (I.19).

(b) Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$, $g \in C^1(\mathbb{R})$. Déterminer la solution de (I.19) qui satisfait

$$u(0, x) = f(x), \quad \partial_t u(0, x) = g(x), \quad (\text{I.20})$$

pour $x \in \mathbb{R}$.

On revient au cas de la corde de longueur L finie. Dans le cas d'une corde de guitare, en plus de l'équation d'ondes (I.19), l'amplitude de déplacement u vérifie les conditions au bord

$$u(t, 0) = 0, \quad u(t, L) = 0, \quad t > 0. \quad (\text{I.21})$$

A t fixé, on peut alors prolonger $x \mapsto u(t, x)$ en une fonction *impair continue* $2L$ -périodique.

2. En utilisant un développement en séries de Fourier de $u(t, \cdot)$, montrer, sans justification de convergence des séries, que

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)) \sin(k_n x), \quad A_n, B_n \in \mathbb{R}, \quad (\text{I.22})$$

où

$$k_n := \frac{\pi n}{L}, \quad \omega_n := ck_n.$$

3. On considère (c'est approximatif pour plusieurs raisons), qu'une corde de guitare est mise en mouvement de la manière suivante : elle est déportée d'une hauteur h en son centre, donc avec le profil

$$f(x) = \min \left(\frac{2h}{L}x, \frac{2h}{L}(L - x) \right). \quad (\text{I.23})$$

et lâchée ainsi sans vitesse initiale. Trouver u sous la forme (I.22) satisfaisant la condition initiale (I.20) (pour $x \in]0, L[$) avec f données par (I.23) et g nulle. A t fixé, que dire de la convergence de la série obtenue ?

4. La vibration de la corde se propage à l'air puis à l'oreille (onde de pression). L'oreille entend les fréquences ω_n , d'autant moins nettement que le coefficient A_n est petit : ω_1 est donc la *fondamentale*. Pour $n \geq 2$, on appelle $\omega_n = n\omega_1$ la n -ième (fréquence) *harmonique*. Si n est une puissance de 2, la fréquence ω_n est perçue par l'oreille comme analogue à ω_1 (et plus aigue). Une note correspondant à la fréquence $\omega_{2^{k+1}}$ est dite à l'*octave* de la note correspondant à la fréquence ω_{2^k} , cf. le tableau ci-dessus, issu de la page wikipedia [http://fr.wikipedia.org/wiki/Harmonique_\(musique\)](http://fr.wikipedia.org/wiki/Harmonique_(musique)).

(a) Où poser¹ l'index gauche pour jouer la note à l'octave de la corde à vide ?

(b) Dans la *gamme tempérée*

do, ré, mi, fa, sol, la, si, do,

1. sur une guitare ou un ukulele, la douzième frette est en effet située au milieu de la corde

Harmonique	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Fréquence (Hz)	32,7	65,4	98,1	130,8	163,5	196,2	228,9	261,6	294,3	327	359,7	392,4
Note ^{octave} de la gamme la plus proche	do ⁻¹	do ¹	sol ¹	do ²	mi ²	sol ²	si ²	do ³	ré ³	mi ³	fa ³	sol ³
Écart à la note de la gamme la plus proche (cents)	0	0	2	0	-14	2	-31	0	4	-14	-49	2

FIGURE 4 –

l'écart entre notes est de deux tons sauf entre mi et fa et si et do : un seul ton. Connaissant la fréquence ω du do le plus bas, la fréquence du do à l'octave est 2ω . On obtient les notes intermédiaires (y compris les notes altérées) en considérant la progression géométrique

$$k \mapsto 2^{k/12}\omega$$

pour k entier entre 0 et 12. Certaines des valeurs de k (par exemple 1, ou 8) donnent les notes altérées (do[#] = ré^b et sol[#] = la^b en l'occurrence). Sur un ukulele ou une guitare, poser le doigt sur la première frette réduit la longueur de la corde d'un facteur $2^{-1/12}$. Quelles notes obtient-on en posant son doigt sur la première frette, sachant que sur la guitare les cordes sont successivement

mi, la, ré, sol, si, mi,

et sur un ukulele

sol, do, mi, la.

- (c) Revenons à la question des fondamentales et des harmoniques. Soit une note donnée de fréquence ω_1 (par exemple do¹ dans le tableau des harmoniques de do ci-dessus). La n -ième harmonique de fréquence $\omega_n = n\omega_1$ est-elle nécessairement une note de la gamme tempérée construite² sur do¹? Commenter les deuxième et troisième lignes du tableau des harmoniques de do ci-dessus.

I-4- 5. Minimisation et EDP

On renvoie au préambule de l'exercice 4.1 pour les notations dans le cadre périodique.

1. **Equation de Poisson :** Soit $f \in C^0(\mathbb{T}^n; \mathbb{R})$ de moyenne nulle :

$$\int_{\mathbb{T}^n} f(x) dx = 0. \quad (\text{I.24})$$

Soit $u_* \in C^2(\mathbb{T}^n; \mathbb{R})$ minimisant la fonctionnelle

$$J: u \in C^1(\mathbb{T}^n; \mathbb{R}) \mapsto \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^n} |\nabla_x u(x)|^2 dx - \int_{\mathbb{T}^n} f(x) u(x) dx$$

parmi les fonctions $u \in C^2(\mathbb{T}^n; \mathbb{R})$

- (a) Montrer que

$$-\Delta u_*(x) = f(x), \quad (\text{I.25})$$

pour tout $x \in \mathbb{T}^n$.

- (b) Pour $k \in \mathbb{Z}^n$, on note

$$\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{T}^n} f(x) e^{-2\pi i k \cdot x} dx$$

le k -ième coefficient de Fourier de f . Déterminer u_* solution de (I.25) en fonction des coefficients Fourier de f .

- (c) Quelle hypothèse sur f vous assurerait en effet que u_* est de classe C^2 ?
 (d) Montrer que si $u_* \in C^2(\mathbb{T}^n; \mathbb{R})$ vérifie (I.25), alors u_* minimise la fonctionnelle J parmi les fonctions $u \in C^1(\mathbb{T}^n; \mathbb{R})$.

2. elle est plutôt construite sur le la de fréquence 440 Hz

2. **Courbure Moyenne prescrite** : Soit $f \in C^0(\mathbb{T}^n; \mathbb{R})$. Soit $u_* \in C^2(\mathbb{T}^n; \mathbb{R})$ minimisant la fonctionnelle

$$\mathcal{A}: u \in C^1(\mathbb{T}^n; \mathbb{R}) \mapsto \int_{\mathbb{T}^n} \sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2} dx - \int_{\mathbb{T}^n} f(x)u(x) dx$$

parmi les fonctions $u \in C^2(\mathbb{T}^n; \mathbb{R})$. Montrer que u_* vérifie l'équation

$$-\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u_*(x)}{\sqrt{1 + |\nabla u_*(x)|^2}} \right) = f(x), \quad (\text{I.26})$$

pour tout $x \in \mathbb{T}^n$.

3. **Minimisation sous contrainte** : Soit $f \in C^0(\mathbb{T}^n; \mathbb{R}^n)$. Soit $u_* \in C^2(\mathbb{T}^n; \mathbb{R}^n)$ telle que $|u(x)| = 1$ pour tout $x \in \mathbb{T}^n$ (i.e. u_* est à valeurs dans $\mathbb{S}^{n-1}$, la sphère unité de $\mathbb{R}^n$). On suppose que u_* minimise la fonctionnelle

$$J: u \in C^1(\mathbb{T}^n; \mathbb{R}^n) \mapsto \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^n} |\nabla u(x)|^2 dx - \int_{\mathbb{T}^n} f(x) \cdot u(x) dx$$

parmi les fonctions $u \in C^2(\mathbb{T}^n; \mathbb{R}^n)$ à valeurs dans $\mathbb{S}^{n-1}$. Ici $\nabla u(x)$ est la matrice de composantes $\partial_{x_i} u_j$, $i, j = 1 \dots, n$. On a noté $|A|$ la norme euclidienne sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (norme euclidienne sur $\mathbb{R}^{n^2}$) associée au produit scalaire

$$(A, B) \mapsto A:B = \operatorname{trace}(A^t B).$$

Montrer que u_* vérifie l'équation

$$-\Delta u(x) = |\nabla u(x)|^2 u(x) + P_{\langle u_*(x) \rangle^\perp} f(x), \quad (\text{I.27})$$

pour tout $x \in \mathbb{T}^n$, où, pour $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, on a noté

$$P_{\langle u \rangle^\perp}: v \mapsto v - (u \cdot v)u$$

la projection orthogonal sur $\langle u \rangle^\perp$.

Indication :

- (a) Pour $v \in C^2(\mathbb{T}^n; \mathbb{R}^n)$, on pourra introduire la fonction

$$w(t) = \frac{u + tv}{|u + tv|},$$

pour t petit et on montrera que

$$w(t) = u + tP_{\langle u \rangle^\perp} v + \mathcal{O}(t^2).$$

- (b) On dérivera l'identité $u(x) \cdot u(x) = 1$ pour montrer $\partial_{x_i} u(x) \cdot u(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{T}^n$, $i \in \{1, \dots, n\}$, puis l'identité

$$\nabla u : \nabla((u \cdot v)u) = |\nabla u|^2 u \cdot v.$$

I-4- 6. Probas et EDP

Un champ très actif dans les probabilités est l'étude des limites d'échelles de processus probabilistes, souvent décrites à l'aide d'EDP ("limites hydrodynamiques"). En voici un exemple en dimension 1 (généralisable à toute dimension), où seule la question 1 demande des connaissances probabilistes très élémentaires.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, $h = \frac{1}{N}$. Sur l'intersection du réseau $h\mathbb{Z}$ avec le segment $] -1, 1[$ on considère une particule P se déplaçant de la manière suivante (marche au hasard) : soit une suite de temps $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots$. Si au temps t_n , la particule P est en $x_i := ih$ ($i \in \mathbb{Z}$, $|i| < N$), elle saute au hasard à droite ou à gauche avec probabilités respectives p et q ($p + q = 1$), de sorte qu'au temps t_{n+1} elle est en x_{i-1} avec probabilité p , en x_{i+1} avec probabilité q .

Pour $x \in h\mathbb{Z} \cap [-1, 1]$, on note $u_N(x)$ la probabilité de rencontrer la "frontière" gauche -1 avant la frontière droite $+1$ dans la marche au hasard, sachant qu'on se trouve en x .

- (a) Montrer que, pour $x \in h\mathbb{Z} \cap]-1, 1[$, on a

$$u_N(x) = qu_N(x - h) + pu_N(x + h). \quad (\text{I.28})$$

- (b) Donner les valeurs de $u_N(x)$ pour $x = \pm 1$.

On interpole u_N de manière affine et on fait l'hypothèse (H) suivante : il existe une fonction u de classe C^2 sur $[-1, 1]$ telle que $u_N \rightarrow u$ uniformément et assez rapidement sur $[-1, 1]$ lorsque $N \rightarrow +\infty$, au sens où

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} N^2 \|u_N - u\|_{C([-1, 1])} = 0. \quad (\text{I.29})$$

- (c) Montrer que, ainsi interpolée, u_N vérifie l'équation (I.28) pour tout $x \in]-1 + h, 1 - h[$.
 (d) Montrer que u est solution d'une certaine EDP sur $] - 1, 1[$ et vérifie certaines conditions au bord. On distinguera le cas symétrique ($p = q = \frac{1}{2}$) du cas non-symétrique $p \neq q$.
 (e) Déterminer u dans le cas symétrique.
 (f) Que dire de l'hypothèse (H) dans le cas non symétrique ? Qu'attend-t-on pour $\lim u_N(x)$?
 (g) On considère le cas "faiblement non symétrique" où p et q dépendent de N avec

$$p_N = \frac{1}{2} + \frac{1}{N}, \quad q_N = \frac{1}{2} - \frac{1}{N}.$$

Montrer que u vérifie l'EDP

$$u'' + 4u' = 0$$

avec conditions au bord $u(-1) = 1$, $u(1) = 0$ et déterminer u .

I-4- 7. Transport Optimal et équation de Monge-Ampère

Soit $n \geq 1$, soient f et g deux applications continues, positives (strictement), intégrables sur $\mathbb{R}^n$ d'intégrales 1. On note μ et ν les mesures de probabilité de densité respectives f et g par rapport à la mesure de Lebesgue :

$$\mu(A) = \int_A f(x) dx, \quad \nu(A) = \int_A g(x) dx,$$

pour tout borélien A de $\mathbb{R}^n$. Si $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est borélienne, on dit que T transporte μ sur ν si $T_*\mu = \nu$, *i.e.*

$$\mu(T^{-1}(A)) = \nu(A),$$

pour tout borélien A de $\mathbb{R}^n$.

1. On suppose que T est un C^1 -difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Montrer que si T transporte μ sur ν , alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\det(DT(x)) = \frac{f(x)}{g(T(x))}.$$

2. Soit c une fonction $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ s'annulant précisément sur la diagonale. On définit le coût d'une application transport T comme

$$\int_{\mathbb{R}^d} c(x, T(x)) f(x) dx.$$

On considère maintenant l'application de transport *optimale* qui minimise le coût de transport. Dans le cas où la distance $c(x, y)$ est la distance euclidienne au carré entre x et y , le théorème de Brenier affirme que l'application transport optimale T est le gradient d'une certaine fonction convexe $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. En supposant u régulière et Du un C^1 -difféomorphisme, montrer que

$$\det(D^2u(x)) = \frac{f(x)}{g(Du(x))}, \quad (\text{I.30})$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. L'équation (I.30) est une équation de type Monge-Ampère.

3. Déterminer T et u dans les cas $g(x) = f(x + z)$ ($z \in \mathbb{R}^n$ fixé) et $g(x) = \lambda^n f(\lambda x)$ ($\lambda > 0$ fixé).
4. Ecrire l'équation (I.30) dans le cas où les fonctions f, g, u sont radiales. On supposera $Du(x) \neq 0$ pour $x \neq 0$.

II. EDP linéaires du second ordre à coefficients constants

II-1. Solutions fondamentales de l'équation de Laplace

On s'intéresse dans cette section à l'équation de Laplace :

$$-\Delta u = f \quad (\text{II.1})$$

les dérivées étant entendues au sens des distributions et f étant une fonction continue à support compact. Rappelons que si l'on dispose d'une distribution u solution fondamentale du laplacien, c'est-à-dire de

$$-\Delta u = \delta_0$$

on a accès grâce à la convolution des distributions à une solution de II.1, à savoir $u * f$. Pour déterminer une telle solution fondamentale, remarquons que le laplacien est un opérateur invariant par rotation, de même que δ_0 vu comme distribution. Ceci nous incite à chercher la solution fondamentale sous la forme d'une fonction radiale, c'est-à-dire sous la forme $\Phi = \varphi(|\cdot|)$. Alors en tout $x \neq 0$, l'hypothèse $\Delta \Phi = 0$ s'écrit en coordonnées polaires

$$\Delta \Phi(x) = (\partial_{rr}^2 \varphi + \frac{n-1}{r} \partial_r \varphi)_{r=|x|} = 0$$

On peut résoudre cette équation différentielle, et obtenir le résultat suivant :

DÉFINITION II.1. On définit sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ la fonction Φ par

$$\Phi(x) := -\frac{1}{2\pi} \ln(|x|) \text{ si } n = 2$$

et

$$\Phi(x) := \frac{1}{(n-2)S_n|x|^{n-2}} \text{ si } n > 2$$

où $S_n := \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$. Φ est la **solution fondamentale du laplacien**.

LEMME II.1. La fonction Φ précédemment définie est bien solution fondamentale du laplacien au sens des distributions.

DÉMONSTRATION DU LEMME. On ne traite que le cas $n = 3$; le cas $n = 2$ se fait assez simplement et le cas $n > 3$ se traite de manière similaire. Montrons donc que

$$\Delta \left(\frac{1}{|x|} \right) = -4\pi \delta_0$$

Déjà, pour $|x| > 0$, $\Delta \left(\frac{1}{|x|} \right) = 0$ au sens classique. Ainsi, $\Delta \left(\frac{1}{|x|} \right) = \sum u_\alpha D^\alpha \delta_0$ où les u_α sont des coefficients réels et où la somme est finie³. Soit ensuite $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$. Alors

$$\begin{aligned} \langle \Delta \left(\frac{1}{|x|} \right), f \rangle &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\Delta f(x)}{|x|} d\mu^{(n)}(x) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\Delta f(x)}{|x|} d\mu^{(n)}(x) \end{aligned}$$

Définissons, pour $\varepsilon > 0$, $I_\varepsilon := \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\Delta f(x)}{|x|} d\mu^{(n)}(x)$. Calculons cette quantité grâce la formule de Green; on suppose $\text{supp}(f) \subseteq B(0, R)$. Alors la formule de Green appliquée à $B(0, R) \setminus B(0, \varepsilon)$ donne⁴

$$I_\varepsilon = \int_{|x|=\varepsilon} \left\{ \frac{1}{|x|} \cdot \frac{-y}{|y|} \cdot \nabla f(y) + f(y) \cdot \frac{y}{|y|} \cdot \nabla \frac{1}{|y|} \right\} dS(y) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -4\pi f(0)$$

3. On peut ici conclure grâce à la notion de degré d'homogénéité d'une distribution.

4. La formule de Green et les notions de mesure de surface sont rappelées dans la section suivante.

□

En effet :

$$\left| \int_{|x|=\varepsilon} \frac{y}{|y|^2} \cdot \nabla f(y) dS(y) \right| \leq \frac{1}{\varepsilon} \|\nabla f\|_{\infty} \underbrace{\int_{|x|=\varepsilon} dS(y)}_{=4\pi\varepsilon^2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

et

$$\begin{aligned} \int_{|x|=\varepsilon} -\frac{1}{|y|^2} f(x) dS(y) &= - \int_{|x|=\varepsilon} \frac{1}{|y|^2} (f(y) - f(0) + f(0)) dS(y) \\ &= - \underbrace{\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{|x|=\varepsilon} f(0) dS(y)}_{=-4\pi f(0)} - \underbrace{\int_{|x|=\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^2} (f(y) - f(0)) dS(y)}_{\leq 4\pi \sup_{|x|=\varepsilon} |f(x) - f(0)| \rightarrow 0} \end{aligned}$$

PROPOSITION II.1. Soit $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$. Soit $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$u(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \Phi(x - y) d\mu^{(n)}(y)$$

. Alors u est continue et est solution de

$$-\Delta u = f$$

au sens des distributions.

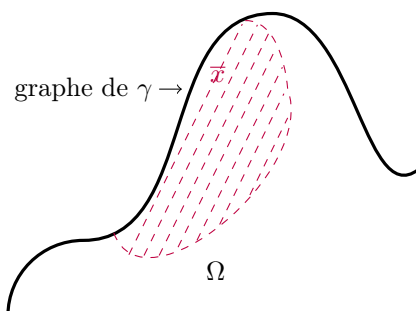
II-2. Mesure de surface et formule de Gauss

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ et soit $k \in \mathbb{N}^*$.

DÉFINITION II.2. On dit que Ω est un **ouvert de classe $\mathcal{C}^k$ de $\mathbb{R}^n$** si pour tout $\bar{x} \in \partial\Omega$ il existe $r > 0$ et $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ tel que, après renumérotation des coordonnées et réordonnement des axes éventuels, on ait

$$\Omega \cap B(\bar{x}, r) = \{(x', x^n) \in \mathbb{R}^n \cap B(\bar{x}, r), x' \in \mathbb{R}^{n-1}, x^n \in \mathbb{R}, x^n < \gamma(x')\}$$

En d'autres termes, on demande que deux conditions soient vérifiées : que la frontière $\partial\Omega$ soit une sous-variété de classe $\mathcal{C}^k$ de $\mathbb{R}^n$ et que Ω soit localement d'un seul côté de Ω . Que veut-on dire par "après renumérotation des coordonnées"? On veut pouvoir localement paramétrer le bord par un graphe, mais, dans le cas du cercle par exemple, au voisinage du point $(1, 0)$ le cercle ne peut pas s'écrire $(x, f(x))$. Et "après changement d'orientation des axes"? Il se peut que l'intérieur soit paramétré par $\{x^n > \gamma(x')\}$, ce qui justifie ce choix.



Cette définition nous permet de définir deux objets essentiels :

- i) La normale unité sortante à Ω : C'est l'application suivante, définie en cartes locales et de classe $\mathcal{C}^{k-1}$:

$$\nu : \begin{cases} \partial\Omega & \rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x', \gamma(x')) & \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla\gamma(x')|^2}} \begin{pmatrix} -\nabla\gamma(x') \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Il est important de noter que sa définition ne dépend pas de la carte locale choisie.

- ii) La mesure de surface sur $\partial\Omega$: C'est la mesure S sur $\partial\Omega$ définie localement par son action sur les fonctions à support compact, au sens où, pour toute fonction φ continue à support compact dans $B(\bar{x}, r)$ (où r est choisi comme dans la définition), on définit

$$\langle S, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi(x', \gamma(x')) \sqrt{1 + |\nabla \gamma(x')|^2} dx'$$

et cette définition est indépendante du choix de la carte locale. On obtient une mesure sur tout $\partial\Omega$ par un argument de partition de l'unité.

On a alors la fameuse **formule de Gauss** :

PROPOSITION II.2. Soit Ω un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ et $F \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. Alors

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(F) d\mu^{(n)} = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu dS \quad (\text{II.2})$$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION. Par partition de l'unité, on se ramène au cas de fonctions F telles que $\operatorname{supp}(F) \subset B(\bar{x}, R)$, ensuite de quoi la démonstration se ramène à une application du théorème de Fubini.

□

On en tire la non moins fameuse **formule de Green** :

COROLLAIRE II.1. Soient $f, g \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$. Alors

$$\int_{\Omega} (f \Delta g - g \Delta f) d\mu^{(n)} = \int_{\partial\Omega} f \partial_{\nu} g - g \partial_{\nu} f dS \quad (\text{II.3})$$

DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE. Il suffit de remarquer que $f \Delta g - g \Delta f = \operatorname{div}(f \nabla g - g \nabla f)$ et d'appliquer la formule de Gauss.

□

REMARQUE. Ce résultat constitue également un petit miracle de la théorie toute aussi miraculeuse des distributions, puisqu'elle exprime la dérivée au sens des distributions de χ_{Ω} :

$$\nabla \chi_{\Omega} = -\nu(\cdot) S$$

Revenons à présent à la solution fondamentale du laplacien. L'hypothèse que f est à support compact n'est absolument pas minimale ; il suffit que f décroisse suffisamment rapidement à l'infini. Par exemple, pour $n \geq 3$, l'expression a encore un sens pour $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $p \in [1; \frac{n}{2}[$. L'important est que cette formule donnée par convolution ne donne pas toujours la solution si f ne décroît pas suffisamment vite.

Parlons ensuite de la régularité de u : la solution donnée par convolution donne-t-elle une fonction de classe $\mathcal{C}^2$? En général, non : la fonction obtenue est de classe $\mathcal{C}^1$, mais pas $\mathcal{C}^2$. En fait, les espaces $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, longtemps considérés comme naturels pour l'étude des EDP y sont en fait très mal adaptés : les bons espaces de régularité sont les espaces de Hölder $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ et les espaces de Sobolev.

Ensuite, a-t-on unicité de la solution ? Il est clair que non : il suffit d'ajouter à u n'importe quelle fonction harmonique, et l'on obtient une nouvelle solution. Étudions, pour aller plus loin dans cette étude, les propriétés des fonctions harmoniques, en commençant par le lemme de Liouville :

LEMME II.2. Soit $v \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ harmonique dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Alors v est constante.

DÉMONSTRATION DU LEMME. Une fonction L^{∞} définit une distribution tempérée ; par transformée de Fourier, on a

$$\mathcal{F} \Delta v = 0$$

Mais

$$\mathcal{F}(-\Delta v)(\xi) = |\xi|^2 \mathcal{F}(v)(\xi)$$

et ainsi

$$\operatorname{supp}(\mathcal{F}(v)) \subseteq \{0\}$$

Ainsi, v est un polynôme, en passant par $\bar{\mathcal{F}}$. Comme v est bornée, v est constante.

□

En conséquence de ce résultat, si $n \geq 3$ et si $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ la solution u donnée par convolution est l'unique solution de $-\Delta u = f$ tendant vers 0 en $+\infty$. Ce résultat reste vrai en dimension 2 si $\int f = 0$.

II-3. Propriétés des fonctions harmoniques

DÉFINITION II.3. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une fonction $v \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ est dite **harmonique dans Ω** si $\Delta v = 0$ dans Ω .

De même que les fonctions holomorphes (dont les parties réelles et imaginaires sont harmoniques), les fonctions harmoniques possèdent une structure extrêmement rigide, mais jouissent également de propriétés remarquables. Commençons par la formule de la moyenne :

PROPOSITION II.3. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ harmonique dans Ω . Alors pour tout $x \in \Omega$ et tout $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset \Omega$

$$u(x) = \frac{1}{|S(x, r)|} \int_{S(x, r)} u(y) dS(y) \quad (\text{II.4})$$

$$= \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} u(y) d\mu^{(n)}(y) \quad (\text{II.5})$$

Rappelons que $|S(x, r)| = r^{n-1}|S(0, 1)|$.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION. Une fois la première formule établie, la deuxième en découle immédiatement, comme on va le voir. Définissons, pour $x \in \Omega$ et $r > 0$ suffisamment petit

$$\varphi(r) := \frac{1}{r^{n-1}|S(0, 1)|} \int_{S(x, r)} u(x) dS(x)$$

Par le changement de variable $x = ry$, on obtient

$$\varphi(r) = \frac{1}{|S(0, 1)|} \int_{S(x, 1)} \varphi(ry) dS(y)$$

Dérivons cette expression :

$$\varphi'(r) = \frac{1}{|S(0, 1)|} \int_{S(x, 1)} y \cdot \nabla u(ry) dS(y)$$

Par la formule de Gauss, cette dernière expression se ramène à

$$\varphi'(r) = \frac{1}{|S(0, 1)|} \int_{B(x, 1)} r \Delta u(rx) d\mu^{(n)}(x) = 0$$

car u est harmonique. Donc φ est constante. Nécessairement, par continuité, $\varphi(r) = u(x)$.

Pour établir la deuxième formule, on intègre sur les sphères :

$$\begin{aligned} \int_{B(x, r)} u(y) d\mu^{(n)}(y) &= \int_0^r \left(\int_{S(x, s)} u(y) dS(y) \right) ds \\ &= \int_0^r (s^{n-1} |S(0, 1)| u(x)) ds \\ &= u(x) r^n \frac{|S(0, 1)|}{n} \\ &= u(x) |B(x, r)| \end{aligned}$$

□

Cette proposition est en fait une équivalence : une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ est harmonique si et seulement si elle vérifie en tout point la propriété de la moyenne, ce qui permet de généraliser la notion d'harmonicité aux fonctions qui sont simplement continues ; ceci est une fausse généralisation puisque, comme nous le verrons plus bas, une fonction harmonique est automatiquement $\mathcal{C}^\infty$.

PROPOSITION II.4 : *Principe du maximum. Soit Ω un ouvert borné et $u \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ harmonique sur Ω . Alors*

- i) *Principe du maximum faible : $\max_{x \in \partial\Omega} u(x) = \max_{x \in \Omega} u(x)$ et de même pour les minima.*
- ii) *Principe du maximum fort : Supposons de plus Ω connexe. Alors s'il existe $y \in \Omega$ tel que $u(y) = \max_{x \in \Omega} u(x)$, u est constante, et de même pour les minima.*

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION. Il est clair que $ii) \Rightarrow i)$. Montrons donc $ii)$. Pour cela soit $M := \max_{\Omega} u$ et soit $E := \{x \in \Omega, u(x) = M\}$. E est un fermé de Ω et est non vide par hypothèse. Montrons qu'il est ouvert, ce qui permettra de conclure. Pour cela, soit $x \in E$. Soit $r > 0$ tel que $B(x, r) \subseteq \Omega$. Alors par la formule de la moyenne

$$\int_{B(x, r)} (M - u(y)) d\mu^{(n)}(y) = 0$$

car $u(x) \leq M$ dans Ω et donc, par continuité de u , la fonction u est constante sur $B(x, r)$. Comme Ω est connexe, $E = \Omega$, ce qui conclut la preuve. $\square$

Remarquons que ce principe du maximum est encore valable si u est simplement supposée sous-harmonique (i.e $\Delta u \geq 0$) car on a alors la propriété de la sous-moyenne :

$$\forall x \in \Omega, \forall r > 0 | B(x, r) \subset \Omega, u(x) \leq \frac{1}{|S(x, r)|} \int_{S(x, r)} u(y) dS(y)$$

En revanche, u ne vérifie alors plus le principe du minimum. Comme annoncé, parlons de la régularité des fonctions elliptiques :

PROPOSITION II.5. *Soit $u \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ harmonique sur Ω (i.e qui vérifie la formule de la moyenne). Alors $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.*

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION. Ici encore, on va voir que l'harmonicité fait des miracles : on va montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, en définissant

$$\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega | \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$$

alors u est $\mathcal{C}^\infty$ sur chacun des Ω_ε . Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ positive, radiale ($\varphi(x) = \tilde{\varphi}(|x|)$), de support inclus dans $B(0, \varepsilon)$ et d'intégrale 1. On définit alors :

$$u_\varepsilon : \begin{cases} \Omega_\varepsilon & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \varphi * u(x) \end{cases}$$

Mais

$$\begin{aligned} u_\varepsilon * \varphi(x) &= \int_{B(x, \varepsilon)} \tilde{\varphi}(|x - y|) u(y) d\mu^{(n)}(y) \\ &= \int_0^\varepsilon \left\{ \int_{S(x, r)} \tilde{\varphi}(r) u(y) dS(y) \right\} dr \\ &= \int_0^\varepsilon \tilde{\varphi}(r) r^{n-1} |S(0, 1)| u(x) dr \\ &= u(x) \int_0^\varepsilon \tilde{\varphi}(r) |S(0, r)| dr \\ &= u(x) \|\varphi\|_1 \\ &= u \end{aligned}$$

Donc $u = \varphi * u$ qui est $\mathcal{C}^\infty$. $\square$

Notons que tous les calculs précédents s'adaptent parfaitement dans le cadre d'une distribution harmonique. Toute distribution harmonique est donc, après régularisation, une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.

DÉFINITION II.4. Soit $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On appelle **support singulier** de u le complémentaire dans Ω du plus grand ouvert sur lequel u est $\mathcal{C}^\infty$.

Le support singulier de u est inclus dans le support de u . Par exemple, si $-\Delta u = f$, on a $\text{suppsing}(f) \subseteq \text{suppsing}(u)$. En fait, on a même

$$\boxed{\text{suppsing}(u) = \text{suppsing}(f)}$$

On dit que $-\Delta$ est un **opérateur hypoelliptique**. Dans le cas de l'opérateur des ondes, cette propriété disparaît : l'équation des ondes propage les singularités.

Démontrons que $\text{suppsing}(u) = \text{suppsing}(f)$. : soit V un ouvert de Ω sur lequel f est $\mathcal{C}^\infty$ et soit $x \in V$. Soit φ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact inclus dans V identiquement égale à 1 sur un voisinage W de x . Alors $-\Delta(u - \Phi * (\varphi f)) = 0$ sur W donc u est $\mathcal{C}^\infty$: $u = \Phi * (\varphi f) + z$ où z est harmonique sur W .

Passons à présent à un résultat d'estimation des dérivées :

PROPOSITION II.6. Si u est harmonique dans $B(x, r)$, alors

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists C(n, k) \in \mathbb{R} \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| = k, |\partial^\alpha u(x)| \leq \frac{C(n, k)}{r^{n+k}} \int_{B(x, r)} |u|$$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION. On le démontre par récurrence sur k . Pour $k = 0$, c'est la formule de la moyenne. Le passage du cas $k = 0$ au cas $k = 1$ étant représentatif, on se contente de ne faire que ce passage-là : Soit $i \in \mathbb{N}_n$. Le lemme de Schwarz implique que $\partial_i u$ est harmonique. En particulier,

$$\partial_i u(x) = \frac{1}{|B(x, \frac{r}{2})|} \int_{S(x, \frac{r}{2})} u \nu_i dS$$

d'où l'inégalité voulue en majorant brutalement.

□

II-4. Problème de Dirichlet et fonctions de Green

Dans toute la suite, on se fixe un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^k, k \geq 1$. Étant données deux fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\Omega; \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}^0(\partial\Omega; \mathbb{R})$, le **problème de Dirichlet classique** consiste à trouver $u \in \mathcal{C}^2(\Omega; \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}; \mathbb{R})$ telle que

$$\boxed{\begin{cases} -\Delta u &= f \text{ dans } \Omega \\ u &= g \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}} \quad (\text{II.6})$$

On parle de problème de Dirichlet "classique" car la solution est cherchée dans l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$; on s'intéressera plus tard à l'existence de solution pour des EDP dans des espaces plus généraux, comme par exemple les espaces de Sobolev.

On peut déjà dire un certain nombre de choses sur cette équation :

- S'il existe une solution u , alors elle est unique : soit en effet v une autre solution de II.6. Alors $u - v$ est harmonique dans Ω et identiquement nulle sur $\partial\Omega$. Par le principe du maximum et le principe du minimum, $u - v$ est nulle sur $\bar{\Omega}$.
- Toujours sous réserve de l'existence d'une solution u , u est positive si $f \geq 0$ et si $g \geq 0$. En effet, si $f \geq 0$, u est surharmonique (ou super harmonique) et son minimum est donc atteint sur $\partial\Omega$, en conséquence de quoi $u \geq \inf g \geq 0$. Si Ω est connexe, on a même mieux : $u > 0$ dans Ω , sauf si f et g sont identiquement nulles. Cela suit d'une application du principe du minimum fort : si u s'annule en un point $x \in \Omega$, ses valeurs sur le bord étant positives, elle est identiquement nulle.

L'existence d'une solution pour II.6 est en revanche beaucoup plus difficile à établir. On a le théorème suivant, que nous admettrons ici :

THÉORÈME II.1. Si Ω est un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^1$, si $f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega; \mathbb{R})$, $\alpha > 0$ et si $g \in \mathcal{C}^0(\partial\Omega; \mathbb{R})$, alors II.6 possède une unique solution $u \in \mathcal{C}^2(\Omega; \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega}; \mathbb{R})$.

Ce théorème implique en particulier que si l'on prescrit les valeurs d'une fonction sur $\partial\Omega$, on peut la relever en une fonction harmonique sur Ω .

Il y a deux données dans II.6, f et g . On peut se ramener au cas où $f = 0$: si $f \neq 0$, on peut construire une extension continue de f à support compact $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. On résout ensuite l'équation de Poisson $-\Delta v = f$ dans $\mathbb{R}^n$, en $v = \Phi * f$. Alors $w := u + v$ vérifie $\Delta w = 0$ dans Ω et $w|_{\partial\Omega} = g - v|_{\partial\Omega}$.

De même, mais c'est moins naturel, on peut se ramener au cas $g = 0$: soit $v \in \mathcal{C}^2(\Omega; \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}; \mathbb{R})$ un relèvement $\mathcal{C}^2$ de g (que l'on peut construire par cartes locales). On pose $w := u - v$ et alors $-\Delta w = f + \Delta v$ dans Ω , et est nulle sur $\partial\Omega$. Suivant le contexte, on travaillera avec l'une de ces deux formes.

Approches classiques de l'existence d'une solution :

- **La théorie du potentiel** : Cette théorie, développée par Hilbert et Courant, a été très à la mode au début du XX^e siècle, mais n'est plus beaucoup utilisée aujourd'hui. Elle consiste à placer une densité de charges g convenable sur $\partial\Omega$. Le potentiel électrostatique u qui en résulte alors vérifie $\Delta u = 0$ dans Ω et est égal à la densité sur $\partial\Omega$. La bonne méthode consiste en fait à considérer non pas une densité de charge mais un potentiel dipolaire sur $\partial\Omega$. Cette densité vérifie alors une équation intégrale sur $\partial\Omega$, et l'on peut ensuite appliquer la théorie de Fredholm et les outils d'analyse spectrale.
- **La méthode de Perron** : Cette méthode, qui date des années 20, est aussi appelée *méthode des fonctions sous-harmoniques*. Elle consiste à considérer $H^+(\Omega, g)$ l'ensemble des fonctions u sous-harmoniques sur Ω et vérifiant $u \leq g$ sur $\partial\Omega$. En posant $\varphi := \sup_{u \in H^+(\Omega, g)} u$, on montre que φ est harmonique sur Ω et égale à g sur $\partial\Omega$.
- **Les méthodes hilbertiennes** : On travaille, à la différence des deux méthodes précédentes, avec $g = 0$ dans II.6 et, en se plaçant dans un espace de Hilbert convenable, on utilise des outils d'analyse fonctionnelle (Lax-Milgram par exemple).

Notons néanmoins que les deux dernières méthodes fabriquent des solutions en un sens plus faible que la première ; nous y reviendrons plus tard.

Représentation des solutions et fonctions de Green Soit $x \in \Omega$. On définit une certaine fonction $G(x, \cdot)$ sur Ω de la forme

$$G(x, y) = \Phi(x - y) + w(y), y \in \Omega, y \neq x$$

où w est une fonction harmonique sur Ω . L'objectif est de faire de G une "solution fondamentale du laplacien dans Ω ". Pour ε suffisamment petit, appliquons la formule de Green à $\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus B(x, \varepsilon)$: si u est une solution du problème de Dirichlet, alors

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} \{u(y)\Delta_y G(x, y) - G(x, y)\Delta u(y)\} d\mu^{(n)}(y) &= \int_{\partial\Omega} \{u(y)\partial_{\nu_y} G(x, y) - G(x, y)\partial_{\nu_y} u(y)\} dS(y) \\ &\quad + \int_{S(x, \varepsilon)} \{u(y)\partial_{\nu_y} G(x, y) - G(x, y)\partial_{\nu_y} u(y)\} dS(y) \end{aligned}$$

Travaillons un peu plus sur le deuxième terme :

$$\int_{S(x, \varepsilon)} \{u(y)\partial_{\nu_y} G(x, y) - G(x, y)\partial_{\nu_y} u(y)\} dS(y)$$

Pour cela, on recycle nos calculs effectués pour trouver la solution fondamentale du laplacien.

$$\int_{S(x, \varepsilon)} u(y)\partial_{\nu_y} G(x, y) dS(y) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u(x)$$

et

$$\int_{S(x,\varepsilon)} G(x,y) \partial_{\nu_y} u(y) dS(y) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

Par ailleurs, la singularité de G en x est intégrable et $\Delta_y G(x,y) = 0$. On obtient donc la représentation suivante :

$$\forall x \in \Omega, \quad u(x) = \int_{\Omega} G(x,y) (-\Delta u(y)) d\mu^{(n)}(y) - \int_{\partial\Omega} \{u(y) \partial_{\nu_y} G(x,y) - G(x,y) \partial_{\nu_y} u(y)\} dS(y)$$

Si u est une solution du problème de Dirichlet, alors la seule donnée qui reste inconnue est la quantité $\partial_{\nu_y} u$ sur $\partial\Omega$, mais ce terme dépend de Δu et de $u|_{\partial\Omega}$. Pour lever cette difficulté, on va s'arranger pour trouver w harmonique dans Ω telle que $G(x,y) = 0, y \in \partial\Omega$. En d'autres termes, on veut résoudre le problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} -\Delta w &= 0 \text{ dans } \Omega \\ w(y) &= -\Phi(x-y) \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

En supposant que l'on ait réussi à trouver un tel w , les conditions voulues sont satisfaites. La fonction G qui en résulte est appelée **fonction de Green pour $-\Delta$ dans Ω** . On a alors la représentation suivante des solutions de II.6 :

$$\forall x \in \Omega, \quad u(x) = \int_{\Omega} G(x,y) f(y) d\mu^{(n)}(y) + \int_{\partial\Omega} K(x,y) g(y) dS(y) \quad (\text{II.8})$$

La fonction $K(x,y) := -\partial_{\nu_y} G(x,y)$ est appelée **noyau de Poisson sur Ω** .

Propriétés de la fonction de Green si Ω est connexe

- i) Pour tout $x \neq y \in \Omega$, $G(x,y) > 0$: En effet, $\Delta_y G(x,y) = 0$ sur Ω_ε , $G(x,y) = 0$ sur $\partial\Omega$ et $\overline{G(x,y)} \geq 0$ sur $S(x,\varepsilon)$ pour ε suffisamment petit, puisque $G(x,y)$ tend vers $+\infty$ quand $y \rightarrow x$ et que w est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
- ii) $K(x,y) > 0$ pour tout $y \in \partial\Omega$: Cela demande un raffinement du principe du maximum, et nous ne le démontrerons pas ici.
- iii) $G(x,y) = G(y,x)$ pour tout $x \neq y$: En effet, si l'on applique la formule de Green à $\Omega'_\varepsilon := \Omega \setminus (B(x,\varepsilon) \cup \overline{B(y,\varepsilon)})$ aux fonctions $v(z) = G(x,z)$ et $w(z) := G(y,z)$, on obtient

$$0 = \int_{S(x,\varepsilon)} (v \partial_{\nu} w - w \partial_{\nu} v) dS + \int_{S(y,\varepsilon)} (v \partial_{\nu} w - w \partial_{\nu} v) dS$$

Le premier terme tend vers $-w(x)$, le second vers $v(y)$, toujours par la même méthode de calcul. On trouve ainsi $G(x,y) = v(y) = w(x) = G(y,x)$.

Fonction de Green dans la boule On connaît très peu de fonctions de Green de manière explicite ; néanmoins, dans le cas de la boule et du demi-espace, on a accès aux formules. Dans le cas de la boule, on travaille par la méthode des **images électriques**. Soit $\Omega := B(0,R)$ la boule de rayon R dans $\mathbb{R}^n$. On associe à $x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}$ le vecteur $\tilde{x}$ défini par

$$\tilde{x} := \frac{R^2}{|x|^2} x$$

LEMME II.3. Soit $\psi(x,y) := \frac{|x| \cdot |\tilde{x} - y|}{R}$ pour $x, y \in \overline{\Omega}, |x| \cdot |y| \neq 0$. Alors

$$\psi(x,y) = \psi(y,x)$$

et

$$\psi(x,y) \geq |x - y|$$

avec égalité si et seulement si $|x| = R$ ou $|y| = R$.

DÉMONSTRATION DU LEMME. On calcule brutalement :

$$\begin{aligned}\psi(x, y)^2 &= \frac{|x|^2}{R^2} |\tilde{x} - y|^2 \\ &= \frac{|x|^2}{R^2} (|\tilde{x}|^2 + |y|^2 - 2\langle \tilde{x}, y \rangle) \\ &= R^2 + \frac{|x|^2 \cdot |y|^2}{R^2} - 2\langle x, y \rangle\end{aligned}$$

On déduit que

$$\psi(x, y)^2 - |x - y|^2 = \frac{1}{R^2} (R^2 - |x|^2)(R^2 - |y|^2)$$

d'où les résultats annoncés. □

DÉFINITION II.5. Soit $G(x, y) := \Phi(x - y) - \Phi\left(\frac{|x|}{R}(\tilde{x} - y)\right)$, $y \neq x$, $|x|, |y| \in [0; R]$, $x \neq y$. Alors G est la fonction de Green de la boule.

Le fait que G soit bien la fonction de Green est laissé à titre d'exercice. On a par ailleurs une expression du noyau de Poisson dans la boule :

$$K(x, y) = \frac{|R|^2 - |x|^2}{R|S(0, 1)|} \cdot \frac{1}{|x - y|^n}$$

COROLLAIRE II.2. Si u est harmonique dans $B(0, R)$, alors

$$\forall r \in]0; R[, \forall x \in B(0, r), u(x) = \frac{r^2 - |x|^2}{r|S(0, 1)|} \int_{S(0, r)} \frac{1}{|x - y|^n} u(y) dS(y)$$

C'est un analogue de la formule de Cauchy en analyse complexe.

Les dernières propriétés miraculeuses que nous aborderons dans cette sections sont les fameuses **in-égalités de Harnack**, qui rigidifient encore les fonctions harmoniques ; le contenu de ce théorème est que si u est une fonction harmonique positive sur $B(0, R)$, si $r < R$, alors la quantité $\frac{\max(u)}{\min(u)}$ est bornée par une constante qui dépend uniquement de r et de R :

COROLLAIRE II.3. Si $u \geq 0$ est harmonique dans $B(0, R)$ alors

$$\forall x \in B(0, R), R^{n-1} \frac{R - |x|}{(R + |x|)^{n-1}} u(0) \leq u(x) \leq R^{n-2} \frac{R + |x|}{(R - |x|)^{n-1}} u(0)$$

On peut en fait montrer des formes plus générales des inégalités de Harnack, i.e dans un cadre où l'ouvert Ω peut avoir une géométrie plus compliquée que la boule.

II-5. L'équation de la chaleur

Soit $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On cherche à résoudre l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta_x u &= 0 \text{ pour } t \geq 0 \\ u(\cdot, 0) &= g(x) \end{cases} \quad (\text{II.9})$$

Pour cela, on va faire appel à la théorie de Fourier, développée pour l'occasion. Supposons que l'on dispose d'une solution de II.9 telle que pour tout $t \geq 0$ $u(\cdot, t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et qui soit $\mathcal{C}^1$ en la variable de temps.

À t fixé, prenons la transformée de Fourier de l'équation en espace, avec la convention

$$\hat{u}(\xi, t) := \int_{\mathbb{R}^n} u(x, t) e^{-ix \cdot \xi} d\mu^{(n)}(x)$$



de sorte que la formule d'inversion de Fourier s'écrit

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi, t) e^{i\xi \cdot x} d\mu^{(n)}(\xi)$$

Avec les hypothèses ci-dessus, l'équation de la chaleur devient

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall t \geq 0, \partial_t \hat{u}(\xi, t) = -|\xi|^2 \hat{u}(\xi, t)$$

Cette forme est beaucoup plus agréable : alors que Δ_x est un opérateur différentiel et couple les variables d'espaces, les ξ sont découplés dans l'équation obtenue via Fourier. Ainsi, en discrétisant, la matrice obtenue sera diagonale, tandis que la discrétisation du laplacien fait apparaître une matrice non diagonale en général. En quelque sorte, la transformée de Fourier diagonalise les opérateurs différentiels à coefficients constants.

En résolvant cette équation différentielle ordinaire, on obtient

$$\boxed{\hat{u}(\xi, t) = e^{-|\xi|^2 t} \hat{g}(\xi)} \quad (\text{II.10})$$

En d'autres termes, en Fourier, l'équation de la chaleur se contente de multiplier la donnée initiale par une gaussienne. Remarquons que les hypothèses ne sont pas auto-contradictoires. Par ailleurs, l'irréversibilité apparaît dans la forme précédente : on ne peut pas renverser le temps et autoriser $t < 0$, sinon le passage par la transformée de Fourier inverse deviendrait illicite. Pour inverser cette transformation, on introduit le **noyau de la chaleur** :

$$\Phi(x, t) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^2 t + i\xi \cdot x} d\mu^{(n)}(\xi) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

La solution de II.9 est alors donnée par convolution

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t > 0, \quad u(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) d\mu^{(n)}(y) \quad (\text{II.11})$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad u(x, 0) = g(x) \quad (\text{II.12})$$

et cette formule vérifie bien les conditions voulues.

PROPOSITION II.7. Si $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ alors u donnée par II.11 vérifie

- i) $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times]0; +\infty[)$
- ii) $\partial_t u(x, t) = \Delta_x u(x, t)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$
- iii) Pour tout $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $u(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow \bar{x}, t \rightarrow 0^+} g(\bar{x})$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION. a) Il s'agit d'applications successives des théorèmes généraux d'intégration.

b) Ce second point est évident une fois que l'on a remarqué que $\partial_t \Phi = \Delta_x \Phi$.

c) Ce point est un peu plus délicat : posant $y := x + \sqrt{t}z$. Alors

$$u(x, t) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|z|^2}{4}} g(x + z\sqrt{t}) d\mu^{(n)}(z)$$

et cette formule est encore valable pour $t = 0$. On conclut ensuite par convergence dominée :

$$|u(x, t) - g(\bar{x})| = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|z|^2}{4}} (g(x + z\sqrt{t}) - g(\bar{x})) d\mu^{(n)}(z) \right| \xrightarrow{x \rightarrow \bar{x}, t \rightarrow 0^+} 0$$

□

Remarquons que les hypothèses faites sur g ne sont absolument pas minimales : on peut demander que g soit à croissance polynômiale, ou bien que g définisse une distribution tempérée. On voit apparaître un principe du maximum parabolique : on a par exemple

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{t \geq 0} u(x, t) \leq \sup g$$

et de même pour les infimums. En outre, $g \geq 0$ entraîne $u \geq 0$ et même $u(x, t) > 0$ pour tout x et pour tout $t > 0$, sauf si g est identiquement nulle : la chaleur se transmet instantanément dans tout l'univers.

Une question qu'il est alors naturel de se poser est la suivante : la solution u donnée par II.11 est-elle l'unique solution de ce problème ? De manière équivalente, si $g = 0$, la solution nulle est-elle l'unique solution ? En fait, non. Le problème, c'est que les autres solutions sont alors non physiquement acceptables (par exemple, on peut avoir des croissances en $e^{|x|^2}$ en l'infini). Sous des hypothèses un peu plus restrictives cependant, on peut garantir l'unicité de la solution à II.9 :

PROPOSITION II.8. *Soit $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n \times [0; T]) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n \times [0; T])$ telle que*

$$\partial_t u = \Delta_x u$$

dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times]0; T[)$. Alors u est donnée par II.11 avec $g = u(\cdot, 0)$.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION. La démonstration est plutôt astucieuse et utilise la proposition précédente. Supposons dans un premier temps que u est en fait de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n \times [0; T]$ et que $x \mapsto \partial_x^\alpha \partial_t^\beta u(x, t)$ soit borné sur $\mathbb{R}^n$, pour $t \in]0; T[$ et $|\alpha| + |\beta| \leq 2$.

Passons à l'idée principale de la démonstration : définissons, pour $0 \leq s < t \leq T$, la fonction $v_{t,s}$ ⁵ comme

$$v(x, \tau) := \frac{1}{(4\pi(t-\tau))^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-\tau)}} u(y, \tau) d\mu^{(n)}(y), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tau \in]s; t[$$

Ainsi, en omettant d'écrire la dépendance spatiale des fonctions, on voit que

$$v(\tau) = \Phi(t - \tau) * u(\tau), \tau \in]s; t[$$

où la convolution est prise en espace. Dérivons les deux membres en τ . On pourra dériver sous l'intégrale le membre de droite, les hypothèses *ad hoc* ayant été imposées. Il vient alors

$$\begin{aligned} \partial_\tau v(\tau) &= \partial_\tau \Phi(t - \tau) * u(\tau) + \Phi(t - \tau) * \partial_\tau u(\tau) \\ &= -\Delta_x \Phi(t - \tau) * u(\tau) + \Phi(t - \tau) * \partial_t u(\tau) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc v n'a qu'une dépendance spatiale. On passe alors à la limite en t et s : la limite quand $\tau \rightarrow s$ ne pose pas de problème, et la limite $\tau \rightarrow s$ se traite en appliquant la proposition II.7. Remarquons ensuite que

$$u(t) = v(t) = v(s) = \Phi(t - s) * u(s)$$

Ainsi

$$u(t) = \Phi(t - s) * u(s)$$

Avec $s = 0$, on obtient le résultat. Si u ne vérifie pas les hypothèses plus strictes imposées au début de la démonstration, on la régularise et on travaille ensuite par approximation.

□

Comment se servir de ce genre de raisonnement pour traiter l'équation de la chaleur avec termes sources ? On va présenter ici un procédé très général et assez utile pour l'étude de certaines équations d'évolution. On s'intéresse désormais à l'équation suivante :

$$\boxed{\begin{cases} \partial_t u - \Delta_x u &= f(x, t) \text{ pour } t \geq 0 \\ u(\cdot, \cdot, 0) &= g(x) \end{cases}} \quad (\text{II.13})$$

En travaillant avec la bonne régularité et en passant en transformée de Fourier en espace, on obtient

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall t \geq 0, \partial_t \hat{u}(\xi, t) = -|\xi|^2 \hat{u}(\xi, t) + \hat{f}(\xi, t)$$

5. que l'on abrège en v pour alléger les notations.

En utilisant la théorie des équations différentielles et plus particulièrement la variation de la constante, on obtient donc, à ξ fixé,

$$\forall t \geq 0, \hat{u}(\xi, t) = e^{-|\xi|^2 t} \hat{u}(\xi, 0) + \int_0^t e^{-|\xi|^2 (t-s)} \hat{f}(\xi, s) ds$$

En passant en Fourier inverse (et en n'oubliant pas que $\bar{\mathcal{F}}$ est un opérateur linéaire), on obtient finalement

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t \geq 0, u(x, t) = (\Phi(\cdot, t) * u(\cdot, 0))(x) + \int_0^t \Phi(x, t-s) * f(s) ds$$

C'est la **formule de Duhamel**. On arrive alors à une "solution fondamentale de la chaleur" dans $\mathbb{R}^{n+1}$: Soit $\tilde{\Phi} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ définie par

$$\tilde{\Phi}(x, t) := H(t) \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \quad (\text{II.14})$$

où H est la fonction de Heaviside. Notons que $\tilde{\Phi}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Elle est en outre localement intégrable : en effet, $\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\Phi}(x, t) d\mu^{(n)}(x) = H(t) \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, et la positivité de $\tilde{\Phi}$ permet d'appliquer le théorème de Fubini. $\tilde{\Phi}$ définit ainsi une distribution, qui vérifie :

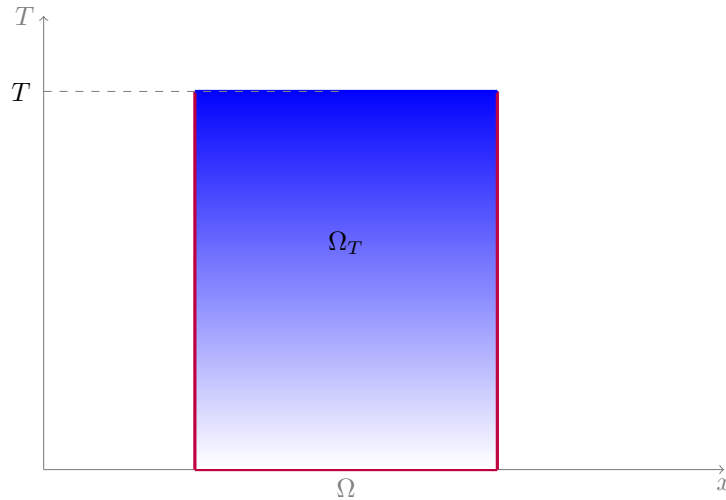
- $\text{suppsing}(\tilde{\Phi}) \subseteq \{0\}$.
- $\partial_t \tilde{\Phi} - \Delta_x \tilde{\Phi} = \delta_0$ au sens des distributions.

On va voir que, de même que le laplacien, l'opérateur des la chaleur est un opérateur hypoelliptique, c'est-à-dire que $\text{suppsing}(\partial_t u - \Delta_x u) = \text{suppsing}(u)$. Évoquons un peu le principe du maximum parabolique :

Principe du maximum parabolique Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné. Soit $T > 0$. On définit :

- Le cylindre parabolique $\Omega_T := \Omega \times]0; T]$, qui n'est ni ouvert, ni fermé.
- Le bord parabolique de Ω_T : $\Gamma_T := \overline{\Omega_T} \setminus \Omega_T = (\Omega \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0; T])$, qui est compact.

Les figures suivantes illustrent la situation dans le cas où Ω est un intervalle réel :



Dans ce schéma, la partie centrale et le "couvercle" supérieur représentent Ω_T , tandis que les parties violettes représentent le bord parabolique. On a alors des principes du maximum parabolique :

PROPOSITION II.9. Soit $u \in \mathcal{C}^2(\Omega_T) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega_T})$ telle que

$$\partial_t u(x, t) \leq \Delta_x u(x, t), (x, t) \in \Omega_T$$

Alors :

- i) Principe du maximum faible : $\max_{(x,t) \in \Omega_T} u(x, t) = \max_{(x,t) \in \Gamma_T} u(x, t)$.

ii) Principe du maximum fort : si de plus Ω est connexe et s'il existe $(\bar{x}, t) \in \Omega_T$ tel que

$$u(\bar{x}, t) = \max_{(x,t) \in \Omega_T} u(x, t)$$

alors u est constante dans $(\Omega_t :=) \Omega \times [0; t]$.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION. Rappelons avans tout que l'essence du principe du maximum réside dans le fait qu'en un maximum la hessienne est négative. Pour utiliser ce fait, on va perturber légèrement la solution u : pour $\varepsilon > 0$, introduisons la fonction v_ε définie sur Ω_T par

$$v_\varepsilon(x, t) := u(x, t) - \varepsilon t$$

La seule vertu de cette fonction est qu'elle est une sous-solution stricte de l'équation de la chaleur dans le domaine Ω_T :

$$\partial_t v_\varepsilon - \Delta_x v_\varepsilon \leq \varepsilon < 0$$

Pour cette perturbation v_ε , le maximum ne peut être atteint que sur Γ_T : si v_ε atteint son maximum en $(x, t) \in \Omega_T$, alors, en ce point,

$$\partial_t v_\varepsilon(x, t) \geq 0, \quad \Delta_x v_\varepsilon(x, t) \leq 0$$

ce qui contredit notre hypothèse. Il est par ailleurs assez clair que

$$\max_{\Omega_T} u(x, t) \leq \max_{(x,t) \in \Omega_T} v_\varepsilon(x, t) + \varepsilon T$$

en conséquence de quoi :

$$\begin{aligned} \max_{\Omega_T} u(x, t) &\leq \max_{(x,t) \in \Omega_T} v_\varepsilon(x, t) + \varepsilon T \\ &= \max_{\Gamma_T} v_\varepsilon + \varepsilon T \\ &\leq \max_{\Gamma_T} u + \varepsilon T \end{aligned}$$

On fait ensuite tendre ε vers 0. La démonstration du deuxième point est moins immédiate ; on peut utiliser plusieurs méthodes : la méthode de Nirenberg, développée dans le traité de Evans, une méthode utilisant les sous-solutions...

Soit M le maximum de u sur $\overline{\Omega_T}$ et soit v la fonction définie sur $\overline{\Omega_T}$ par $v(x, t) := M - u(x, t)$. Alors v est positive et $\partial_t v - \Delta_x v \geq 0$ sur $\overline{\Omega_T}$. Le principe du maximum parabolique fort est en fait équivalent à : si $v(\bar{x}, \bar{t}) > 0$ pour un certain $\bar{x} \in \Omega, \bar{t} \in [0; T[$, alors $v(x, t) > 0$ pour tout $x \in \Omega$ et $t \in]\bar{t}; T]$. On utilise ensuite le lemme suivant :

LEMME II.4. Pour tout $r > 0$, pour tout $e \in \mathbb{R}^n$, il existe $\alpha > 0$ suffisamment grand pour que l'application

$$w_{r,e,\alpha} : (x, t) \mapsto e^{-\alpha t} (r^2 - |x - te|^2)_+^3$$

définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ soit une sous-solution de l'équation de la chaleur, i.e

$$\partial_t w_{r,e,\alpha} \leq \Delta_x w_{r,e,\alpha}$$

sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION DU LEMME. La preuve est purement calculatoire.

□

Revenons à la preuve de ii). On choisit $r, \varepsilon > 0$ suffisamment petits pour que $v(x, \bar{t}) \geq \varepsilon(r^2 - |x - \bar{x}|^2)_+^3$. On considère ensuite la fonction $U(x, t) := v(x, t) - \varepsilon w(x - \bar{x}, t - \bar{t})$ où $w := w_{r,0,\alpha}$ avec $\alpha > 0$ comme dans le lemme. Par hypothèse,

$$\partial_t U - \Delta_x U \geq 0 \text{ sur } B(\bar{x}, r) \times [\bar{t}; T]$$

et

$$U(x, \bar{t}) \geq 0 \text{ sur } B(\bar{x}, r) \text{ et } U(x, t) = v(x, t) \geq 0 \text{ sur } \partial B(\bar{x}, r) \times [\bar{t}; T]$$

Par le principe du minimum faible, $U(x, t) \geq 0$ sur $B(\bar{x}, r) \times [\bar{t}; T]$. Ainsi, $v(x, t) > 0$ sur ce même cylindre. Comme on peut atteindre tous les points par des cylindres obliques (faire les schémas), la preuve est terminée. (**clarifier la preuve**).

□

On en déduit facilement que l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta_x u &= f(x, t) \text{ pour } (x, t) \in \Omega_T \\ u(x, 0) &= g(x) \text{ sur } \Omega \\ u(x, t) &= h(x, t) \text{ sur } \partial\Omega \times [0; T] \end{cases}$$

admet au plus une solution. Par contre, on ne peut espérer avoir une formule générale pour représenter les solutions. Pour conclure ce paragraphe, évoquons le problème de la régularité des solutions :

PROPOSITION II.10. *Si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega_T)$ vérifie $\partial_t u = \Delta_x u$ dans Ω_T , alors u est $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω_T .*

Ceci implique notamment que l'opérateur de la chaleur $\partial_t - \Delta_x$ est hypoelliptique.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION. Soit $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Omega_T$. Montrons que u est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de ce point. Pour $r > 0$ suffisamment petit, considérons le cylindre parabolique

$$C_r := \{(x, t) \in \Omega_T, |x - \bar{x}| \leq r, t \in [\bar{t} - r^2, \bar{t}]\}$$

Ce choix des puissances de r (simple et quadratique) s'explique par l'invariance de changement d'échelles dans l'équation. On considère ensuite une fonction de troncature χ de support contenu dans C_r et constante égale à 1 sur $C_{\frac{r}{2}}$. Regardons l'équation vérifiée par $\chi u =: v$ définie sur $\mathbb{R}^n \times [0; \bar{t}]$. Alors

$$\partial_t v = (\partial_t \chi)u + \chi \Delta_x u$$

et

$$\Delta_x v = u \Delta_x \chi + 2 \nabla \chi \cdot \nabla u + \chi \Delta_x u$$

et ainsi

$$\partial_t v - \Delta_x v = f$$

où $f = u(\partial_t \chi - \Delta_x \chi) - 2 \nabla \chi \cdot \nabla u$. On peut donc considérer que $v\chi$ est la solution d'une certaine équation de la chaleur dans tout l'espace⁶ Par ailleurs, $\text{supp}(f) \subseteq C_r \setminus C_{\frac{r}{2}}$. Ainsi, pour tout $(x, t) \in C_{\frac{r}{4}}$, on a

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{C_r} \tilde{\Phi}(x - y, t - s) f(y, s) d\mu^{(n)}(y) ds \\ &= \int_{C_r} \int_{C_r} \tilde{\Phi}(x - y, t - s) \{u(\partial_t \chi - \Delta_x \chi) - 2 \nabla \chi \cdot \nabla u\}(y, s) d\mu^{(n)}(y) ds \\ &= \int_{C_r} \int_{C_r} \tilde{\Phi}(x - y, t - s) \left\{ \partial_t \chi(y, s) + \Delta_x \chi(y, s) - 2 \nabla \tilde{\Phi}(x - y, t - s) \cdot \nabla \chi(y, s) \right\} u(y, s) d\mu^{(n)}(y) ds \end{aligned}$$

donc u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $C_{\frac{r}{4}}$ ⁷.

□

On tire de la démonstration des estimations sur les dérivées de u :

COROLLAIRE II.4. *Sous les mêmes hypothèses que précédemment, on a les estimations suivantes :*

$$\sup_{(x, t) \in C_{\frac{r}{4}}} |\partial_t^\alpha \partial_x^\beta u(x, t)| \leq \frac{C_{n, |\alpha|, |\beta|}}{r^{2|\alpha| + |\beta| + n + 2}} \|u\|_{L^1(C_r)} \quad (\text{II.15})$$

6. on l'étend par 0 hors de $\text{supp}(\chi)$.

7. Noter que si $(x, t) \in C_{\frac{r}{4}}$ et si $(y, s) \in C_r \setminus C_{\frac{r}{2}}$ alors $|x - y|^2 + |t - s| \geq \frac{r^2}{16}$.

II-6. L'équation des ondes

Dans cette section, on va s'intéresser à la résolution de l'équation suivante :

$$\boxed{\partial_t^2 u(x, t) - \Delta_x u(x, t) = f(x, t), x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}} \quad (\text{II.16})$$

Dans un premier temps, on va supposer que f est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$. Remarquons déjà que, pour la chaleur, on ne s'intéressait qu'aux temps futurs, tandis qu'ici on s'intéresse au comportement en tout temps. On peut imposer les données initiales. La fait que l'équation soit d'ordre 2 en temps nous montre qu'il nous faut imposer deux données initiales

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), x \in \mathbb{R}^n \\ \partial_t u(x, 0) = v_0(x), x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

où u_0 et v_0 sont supposées appartenir à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On prend la transformée de Fourier de II.16 en espace et l'on obtient l'équation différentielle :

$$\partial_t^2 \hat{u}(\xi, t) + |\xi|^2 \hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi, t), \xi \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$$

On obtient une expression de la solution :

$$\hat{u}(\xi, t) = \cos(|\xi|t) \hat{u}_0(\xi, t) + \frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|} \hat{v}_0(\xi) + \int_0^t \frac{\sin(|\xi|(t-s))}{|\xi|} \hat{f}(\xi, s) ds$$

Appelons cette solution (A). On peut également choisir de ne pas imposer de condition initiale mais choisir la solution dite **causale** ou **retardée**, c'est-à-dire tendant vers 0 en $-\infty$:

$$\hat{u}(\xi, t) = \int_{-\infty}^t \frac{\sin(|\xi|(t-s))}{|\xi|} \hat{f}(\xi, s) ds$$

Appelons cette solution solution (B). (A) et (B) correspondent à deux problèmes physiques différents. Soit Φ la distribution tempérée sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ définie par

$$\hat{\Phi}(\xi, t) = H(t) \frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|} \quad (\text{II.17})$$

C'est une solution fondamentale de l'équation des ondes ; on retombe sur un produit de convolution. Dans l'étude de l'équation de la chaleur, la décroissance en Fourier donnait la régularité de la solution, mais ici, la décroissance n'est pas suffisamment rapide, et l'on pourrait rencontrer des solutions non physiques. Avec cette définition, (B) se réécrit

$$u = \tilde{\Phi} * f$$

où la convolution est cette fois prise en espace et en temps. Notons que ce n'est pas la seule solution fondamentale ; elle est appelée **solution fondamentale causale** ou **solution fondamentale retardée**. Dans le cas des petites dimensions, on a des expressions explicites pour $\tilde{\Phi}$:

PROPOSITION II.11. *La solution fondamentale retardée de l'équation des ondes vérifie :*

- Cas $n = 1$: $\tilde{\Phi}(x, t) = \frac{1}{2} H(t - |x|)$
- Cas $n = 2$: $\tilde{\Phi}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{H(t - |x|)}{\sqrt{t^2 - |x|^2}}$
- Cas $n = 3$: $\tilde{\Phi}(x, t) = \frac{1}{4\pi t} \delta(t - |x|) = \frac{1}{4\pi|x|} \delta(t - |x|)$

Avant de passer à la démonstration, rappelons que $\delta(t - |x|)$ est défini, par dualité, comme la distribution sur $\mathbb{R}^{n+1}$ donnée par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1}), \langle \delta(t - |x|), \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \left\{ \int_{|x|=t} \varphi(x, t) dS(x) \right\} dt = \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(x, |x|) d\mu^{(3)}(x)$$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION. Dans cette démonstration, on va un peu tricher : on va partir des expressions de $\tilde{\Phi}$ et montrer qu'elles satisfont II.17.

- Cas $n = 1$: Calculons brutalement la transformée de Fourier en espace : si $\xi \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}(\xi, t) &= \frac{1}{2} \int_{-t}^t e^{-i\xi x} dx \\ &= \frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|} H(t)\end{aligned}$$

Le résultat annoncé est donc prouvé. Avant de passer aux autres dimensions, faisons quelques commentaires : par un calcul direct, la solution causale donnée par (B) devient

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} H(t - s - |x - y|) f(y, s) dy ds$$

Le heaviside sélectionne donc un certain domaine de l'espace temps :

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{C_-(x, t)} f(y, s) dy ds$$

où $C_-(x, t) := \{(y, s) : |x - y| \leq t - s\}$ est appelé **cône du passé du point** (x, t) . Faisons un schéma (la partie rouge symbolise le support de la source f) : $C_-(x, t)$ est parfois appelé **domaine de dépendance du point** (x, t) . Considérons à présent le point (y, s) sur la figure. Peut-il influencer $u(x, t)$? Oui, mais à condition que (x, t) soit dans le **domaine d'influence de** (y, s) , c'est-à-dire que $(x, t) \in C_+(y, s) := \{(x, t) : |x - y| \leq t - s\}$. On l'appelle également **cône du futur du point** (y, s) . Il est assez clair que

$$(y, s) \in C_-(x, t) \Leftrightarrow (x, t) \in C_+(y, s)$$

Cela traduit la propagation à vitesse finie des ondes, phénomène aussi connu sous le nom de principe de Huyghens. Passons à présent à la formule de d'Alembert, la formule (A). Celle ci prend la forme :

$$\forall t \geq 0, \forall x, u(x, t) = \frac{1}{2}(u_0(x - t) + u_0(x + t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} v_0(y) dy + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-\tau}^{x+\tau} f(y, t - \tau) dy d\tau$$

On retrouve la même idée : on peut définir les domaines d'influence, de dépendance, etc...

- Cas $n = 2$: On saute prudemment ce calcul, qui est plus sportif, et nous y reviendrons ensuite.
- Cas $n = 3$: Ici, à t fixé, $\delta(t - |x|)$ est simplement la mesure de surface sur $S(0, t)$. Sa transformée de Fourier en espace s'obtient donc par un calcul direct via la transformée de Fourier des mesures signées et, si $\xi \in \mathbb{R}^3, t > 0$ alors

$$\hat{\Phi}(\xi, t) = \frac{1}{4\pi t} \int_{S(0, t)} e^{-i\xi \cdot x} dS(x)$$

Nous voilà embêtés, mais c'est le moment de présenter un calcul fort instructif et spécifique aux dimensions impaires : Si l'on définit ψ par

$$\forall t > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^3, \psi(\xi, t) := \int_{S(0, t)} e^{-i\xi \cdot x} dS(x)$$

alors

$$\forall t > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^3, \psi(\xi, t) = 4\pi t \frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}$$

En définissant la valeur de $\psi(\xi, t)$ en $\xi = 0$ en passant à la limite. Pour $\xi = 0$, la formule est claire. Si $\xi \neq 0$ alors observons que ψ est invariante par rotation et donc, qu'en notant $e_3 := (0, 0, 1)$ le troisième vecteur de la base canonique, on a, pour tout $t > 0$

$$\psi(\xi, t) = \psi(|\xi|e_3, t)$$

Passons en coordonnées sphériques, c'est-à-dire que l'on paramètre $S(0, t)$, à un ensemble de mesure nulle près, par

$$S(0, t) = \{t(\sin(\theta) \cos(\varphi), \sin(\theta) \sin(\varphi), \cos(\theta)), 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi\}$$

faire le schéma Dans ce système de coordonnées $dS(x) = t^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi$ et ainsi

$$\begin{aligned}\psi(\xi, t) &= \psi(|\xi|e_3, t) = \int_{\theta=0}^{\pi} \left\{ \int_{\varphi=0}^{2\pi} e^{-it \cos(\theta)|\xi|} t^2 \sin(\theta) d\varphi \right\} d\theta \\ &= 2\pi t^2 \int_0^{\pi} e^{-it \cos(\theta)|\xi|} \sin(\theta) d\theta \\ &= 4\pi t \frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}\end{aligned}$$

Le miracle de la dimension impaire apparaît dans le passage de la deuxième à la troisième ligne, quand on arrive sur une fonction que l'on sait intégrer de manière simple. Cette formule conclut la preuve.

Écrivons les formules (A) et (B). La solution causale devient alors, la convolution étant prise en espace-temps

$$\begin{aligned}u(x, t) &= (\tilde{\Phi} * f)(x, t) \\ &= \int_0^{+\infty} \left\{ \int_{|y|=s} \frac{1}{4\pi|y|} f(x-y, t-|y|) dS(y) \right\} ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|y|} f(x-y, t-|y|) d\mu^{(3)}(y)\end{aligned}$$

On a donc la très belle formule :

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(y, t-|x-y|)}{4\pi|x-y|} d\mu^{(3)}(y) \quad (\text{II.18})$$

C'est une des belles formules de la physique classique. Ici, on intègre sur $|x-y| = t-s$. Ce que la source émet arrive avec un retard $t-|x-y|$ et le signal perçu est atténué, ce qui est exprimé par le facteur $\frac{1}{|x-y|}$, tandis qu'en dimension 1, le signal part soit vers la droite, soit vers la gauche, mais que les signaux perçus ont toujours pour intensité l'intensité initiale divisée par 2. On voit par ailleurs que $u(x, t)$ ne dépend que des valeurs de f sur $\partial C_-(x, t)$: c'est le principe de Huyghens fort.

La formule (A) devient alors la célèbre **formule de Kirchhoff** :

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi t} \int_{|x-y|=t} v_0(y) dS(y) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{4\pi t} \int_{|x-y|=t} u_0(y) dS(y) \right) + \frac{1}{4\pi} \int_{|x-y|\leq t} \frac{f(y, t-|x-y|)}{4\pi|x-y|} d\mu^{(3)}(y) \quad (\text{II.19})$$

Pour $n = 2$, on a plusieurs possibilités : les fonctions de Bessel, la méthode de descente (traitée dans le livre d'Evans)...

□

Faisons un point sur le principe de Huyghens : que stipule-t-il ?

1. En toute dimension, le support singulier de $\tilde{\Phi}$ est $\partial C_+ = \{(x, |x|), x \in \mathbb{R}^n\}$. En particulier, l'opérateur des ondes $\partial_t^2 - \Delta_x$ n'est pas hypoelliptique (il propage des singularités, quand bien même la source n'aurait qu'une singularité à l'origine).
2. En dimension 1 et en toute dimension paire, le support de $\tilde{\Phi}$ est $C_+ = \{(x, t), |x| \leq t\}$.
3. En dimension impaire supérieure ou égale à 3, le support de $\tilde{\Phi}$ est ∂C_+ .

Remarquons finalement que vivre en dimension 3 est très commode : si l'on écoute un concert, le musicien étant placé à l'origine, et l'auditeur en x alors, en 2D on entendrait au temps t une moyenne pondérée de tout ce qui a été émis depuis le début du concert.

II-7. Exercices

II-7- 1. L'équation de Poisson dans $\mathbb{R}^3$

Soit ρ une fonction de classe C^∞ à support compact dans $\mathbb{R}^3$. On cherche une fonction $u(x)$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3$ telle que

$$-\Delta u = \rho, \quad (\text{II.20})$$

sous les conditions suivantes de décroissance à l'infini :

$$x \mapsto |x| u(x) \text{ bornée}, \quad x \mapsto |x|^2 \nabla u(x) \text{ bornée.} \quad (\text{II.21})$$

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{|x|}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ et calculer son Laplacien.
2. Soit Ω un ouvert borné et régulier de $\mathbb{R}^3$. On note $n(x)$ le vecteur normal unitaire sortant en tout point $x \in \partial\Omega$ et $d\sigma$ la mesure surfacique sur $\partial\Omega$. On se donne deux fonctions u et v de classe C^2 sur $\bar{\Omega}$. À l'aide de la formule de Stokes, démontrer la formule de Green pour le Laplacien :

$$\int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) dx = \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) d\sigma(x).$$

3. Pour $0 < \alpha < \beta$, on définit la sphère et l'anneau suivants :

$$S_{\alpha} = \{x \in \mathbb{R}^3, |x| = \alpha\}, \quad A_{\alpha,\beta} = \{x \in \mathbb{R}^3, \alpha \leq |x| \leq \beta\}$$

Soit $0 < \varepsilon < R$. Soit $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$ satisfaisant (II.21). Pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, montrer l'identité

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{S_{\varepsilon}} u(x+y) d\sigma(y) = \int_{A_{\varepsilon,R}} \frac{(-\Delta u)(x+y)}{|y|} dy + \mathcal{O}\left(\frac{1}{R}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

4. Montrer que l'unique solution de (II.20), (II.21) s'écrit

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(y)}{|x-y|} dy.$$

II-7- 2. Fonction de Green sur le demi-espace - I

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On note $x = (\bar{x}, x_n)$ le point courant dans $\mathbb{R}^n$, avec $\bar{x} = (x_1, \dots, x_{n-1})$ et on note $\mathbb{R}_+^n$ le demi-espace ouvert

$$\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}.$$

1. Pour $x \in \mathbb{R}_+^n$, on note $\tilde{x} = (\bar{x}, -x_n)$. Soit Φ la solution fondamentale de l'équation de Poisson dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que, à $x \in \mathbb{R}_+^n$ fixé, la fonction $W(y) = -\Phi(\tilde{x} - y)$ est solution de

$$\begin{aligned} -\Delta W(y) &= 0, \quad y \in \mathbb{R}_+^n, \\ W(y) &= -\Phi(x - y), \quad y \in \partial\mathbb{R}_+^n. \end{aligned}$$

2. En déduire l'expression suivante du noyau de Poisson sur $\mathbb{R}_+^n$:

$$K(x, y) = \frac{2}{S_n} \frac{x_n}{|x - y|^n}, \quad x \in \mathbb{R}_+^n, y \in \partial\mathbb{R}_+^n,$$

où S_n est la mesure de la sphère unité de $\mathbb{R}^n$.

3. Soit $g: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. On confond le point $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ avec le point $(y, 0) \in \partial\mathbb{R}_+^n$. On admet (voir exercices additionnels pour la preuve) que la formule

$$u(x) := \frac{2x_n}{S_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{g(y)}{|x - y|^n} dy$$

définit une fonction C^∞ bornée sur $\mathbb{R}_+^n$, solution de l'équation de Laplace $-\Delta u = 0$ dans $\mathbb{R}_+^n$, vérifiant la condition au bord

$$\lim u(x) = g(x_0),$$

où $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ et la limite est prise sur les $x \in \mathbb{R}_+^n$ tendant vers x_0 . On suppose que

$$g(y) = |y|,$$

pour $|y| \leq 1$. Montrer que ∇u n'est pas bornée au voisinage de 0.

Indication : on pourra évaluer le quotient différentiel $\frac{u(te_n) - u(0)}{t}$ pour $t > 0$ petit.

II-7- 3. Principe du maximum

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné. Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ vérifiant

$$-\Delta u \leq 0 \text{ dans } \Omega.$$

On veut montrer qu'on a alors

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \max_{x \in \partial\Omega} u(x). \quad (\text{II.22})$$

1. On suppose dans un premier temps

$$-\Delta u < 0 \text{ dans } \Omega.$$

On suppose d'autre part que u atteint son max sur $\overline{\Omega}$ en un point intérieur $x_0 \in \Omega$. Montrer que (au sens des matrices symétriques)

$$D^2u(x_0) \leq 0.$$

2. En déduire $\Delta u(x_0) \leq 0$ et une contradiction.

3. Prouver le principe du maximum dans le cas général. On pourra considérer la fonction

$$x \mapsto u(x) + \varepsilon e^{x_1}, \quad \varepsilon > 0.$$

4. Soit $w \in C^3(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ vérifiant

$$-\Delta w = 0 \text{ dans } \Omega.$$

Montrer que

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} |\nabla w|(x) = \max_{x \in \partial\Omega} |\nabla w|(x). \quad (\text{II.23})$$

Comparer au résultat de la question 3. de l'exercice 2.

II-7- 4. La formule de la moyenne et applications

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $u \in C^2(\Omega)$ telle que $\Delta u = 0$ dans Ω . On suppose $u \geq 0$ dans Ω .

1. Pour $a \in \mathbb{R}^N$ on note $B(a, R)$ la boule de centre a et de rayon R , $S(a, R)$ la sphère de centre a et de rayon R , et on rappelle que $|S(0, 1)| = N\omega_N$, où $\omega_N = |B(0, 1)|$ est le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^N$. Pour tout $R > 0$, on pose

$$\varphi(R) = \frac{1}{N\omega_N} \int_{S(0,1)} u(a + Rs) d\sigma(s).$$

où s est le vecteur unitaire normal extérieurement à $S(0, 1)$. Vérifier que

$$\varphi(0) = u(a), \quad \varphi'(R) = \frac{1}{N\omega_N} \int_{S(0,1)} \frac{\partial u}{\partial n}(a + Rs) d\sigma(s),$$

puis, en appliquant la formule de Green à $\int_{B(a,R)} \Delta u dx$, en déduire que

$$u(a) = \frac{1}{N\omega_N} \int_{S(0,1)} u(a + Rs) d\sigma(s).$$

2. En déduire que

$$u(a) = \frac{1}{R^N \omega_N} \int_{B(a,R)} u(x) dx.$$

3. Montrer l'existence de $C > 0$ indépendante de R telle que

$$\forall a \in \Omega, \quad \forall R > 0 \quad \text{tel que } \overline{B(a, 4R)} \subset \Omega, \quad \forall (x, y) \in B(a, R)^2, \quad u(x) \leq Cu(y).$$

Indication : on écrit $u(x) = \frac{1}{R^N \omega_N} \int_{B(x,R)} u dx$, et $u(y) = \frac{1}{(3R)^N \omega_N} \int_{B(y,3R)} u dx$.

4. *Application 1 : le théorème de Liouville.* Supposons $\Omega = \mathbb{R}^N$ et $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Montrer que u est une constante, et que le résultat reste vrai si l'on ne suppose plus $u \geq 0$. Le résultat reste-t-il vrai si $\Omega \neq \mathbb{R}^N$?
5. *Application 2.* Soit Ω' un ouvert connexe de $\mathbb{R}^N$ tel que $\overline{\Omega'} \subset \Omega$. Montrer l'existence de $C(\Omega') > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in \Omega'^2, \quad u(x) \leq Cu(y).$$

II-7- 5. Fonction de Green sur le demi-espace - II

Les notations sont celles de l'exercice "Fonction de Green sur le demi-espace - I". En particulier, le noyau de Poisson $K(x, y) = -\frac{\partial G}{\partial \nu_y} G(x, y)$ est

$$K(x, y) = \frac{2}{S_n} \frac{x_n}{|x - y|^n}, \quad x \in \mathbb{R}_+^n, y \in \partial \mathbb{R}_+^n.$$

Soit $g: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. On confond le point $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ avec le point $(y, 0) \in \partial \mathbb{R}_+^n$. On définit $u: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$u(x) := \frac{2x_n}{(n-2)S_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{g(y)}{|x - y|^n} dy, \quad x \in \mathbb{R}_+^n$$

- Justifier que, pour tout $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, $x \mapsto K(x, y)$ est harmonique sur $\mathbb{R}_+^n$.
- On admet la formule suivante :

$$\frac{S_{n-1}}{S_n} \int_0^\infty \frac{r^{n-2}}{(1+r^2)^{n/2}} dr = \frac{1}{2}. \quad (\text{II.24})$$

Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} K(x, y) dy = 1, \quad (\text{II.25})$$

pour tout $x \in \mathbb{R}_+^n$.

- Montrer que u est bornée.
- Justifier que $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ et u harmonique dans $\mathbb{R}_+^n$.
- Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$. Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ tel que

$$|g(y) - g(x_0)| < \varepsilon \text{ si } |y - x_0| < \delta.$$

Montrer que

$$|u(x) - g(x_0)| < 2\varepsilon,$$

pour $x \in \mathbb{R}_+^n$ assez proche de x_0 .

Indication : on notera que

$$u(x) - g(x_0) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (g(y) - g(x_0)) K(x, y) dy, \quad (\text{II.26})$$

par (II.25). On pourra considérer les $x \in \mathbb{R}_+^n$ à distance au plus $\delta/2$ de x_0 et séparer le domaine d'intégration dans (II.26) en deux parties : $B(x_0, \delta)$ et $\mathbb{R}^{n-1} \setminus B(x_0, \delta)$.

- Conclure.
- Prouver la formule (II.24). On rappelle que $S_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ où Γ est la fonction Γ d'Euler.

II-7- 6. L'équation de la chaleur sur le Tore

On renvoie à la fiche de TD1, Exercice 1, pour les notations au sujet du tore $\mathbb{T}^n$. On renvoie au même exercice pour la résolution de l'équation de la chaleur sur $\mathbb{T}^n$, plus précisément du problème de Cauchy

$$\partial_t u(t, x) - \Delta u(t, x) = 0, \quad \text{pour tout } (t, x) \in]0, +\infty[\times \mathbb{T}^n, \quad (\text{II.27})$$

$$u(0) = u_0. \quad (\text{II.28})$$

1. Donner le noyau de la chaleur ψ_t sur $\mathbb{T}^n$ en fonction du noyau Φ_t de la chaleur sur $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire $\psi_t: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tel que la solution de (II.27)-(II.28) s'écrive

$$u(t, x) = \psi_t * u_0(x) = \int_{\mathbb{T}^n} \psi_t(x - y) u_0(y) dy, \quad \forall t > 0, x \in \mathbb{T}^n.$$

2. Justifier les estimations

$$\|u(t)\|_{L^p(\mathbb{T}^n)} \leq \|u_0\|_{L^p(\mathbb{T}^n)}, \quad (\text{II.29})$$

pour tout $t \geq 0$, $p \in [1, +\infty]$.

L'équation de la chaleur avec terme source - Résolution Soit $T > 0$, $f \in C_b(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ (indice b pour "borné"). Soit $\Phi_t: x \rightarrow \Phi(t, x)$ le noyau de la chaleur sur $\mathbb{R}^n$. On rappelle l'inégalité de Young suivante pour la convolution sur $\mathbb{R}^m$ ($m \geq 1$) :

$$\|\varphi * \theta\|_{C_b(\mathbb{R}^m)} \leq \|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^m)} \|\theta\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^m)}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad (\text{II.30})$$

pour tout $p \in [1, +\infty]$: (II.30) contient l'assertion $\varphi * \theta \in C_b(\mathbb{R}^m)$ si $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^m)$ et $\theta \in L^{p'}(\mathbb{R}^m)$, avec borne sur les normes en jeu.

1. On pose

$$u(t) = \int_0^t f(s) * \Phi_{t-s} ds, \quad t \geq 0. \quad (\text{II.31})$$

Justifier que $u \in C_b(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$.

Indication : on remarquera que, pour $t \in [0, T]$, en notant χ la fonction caractéristique de l'intervalle $[0, T]$, on peut écrire χu comme la convolution en (t, x) de $f\chi$ et $\Phi\chi$.

2. Soit $\alpha, \beta \in]0, 1[$. On suppose $f \in C_b^{1+\alpha, 2+\beta}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$, c'est-à-dire : les dérivées partielles $\partial_t^k \partial_{x_i}^l \partial_{x_j}^m f$ existent et sont continues bornées pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$ et $k, l, m \leq 1$ et, de surcroît, $\partial_t f$ est une fonction α -Holderienne en t , et $\partial_{x_i, x_j}^2 f$ est une fonction β -Holderienne en x : il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$|\partial_t f(t, x) - \partial_t f(s, x)| \leq C|t - s|^\alpha, \quad |\partial_{x_i, x_j}^2 f(t, x) - \partial_{x_i, x_j}^2 f(t, y)| \leq C|x - y|^\beta, \quad (\text{II.32})$$

pour tout $t, s \geq 0$, $x, y \in \mathbb{R}^n$.

- (a) Soit, pour $h > 0$,

$$v_h(t) = \int_0^t \frac{f(s+h) - f(s)}{h} * \Phi_{t-s} ds, \quad v_0(t) = \int_0^t \partial_t f(s) * \Phi_{t-s} ds.$$

Montrer que v_h tend vers v_0 dans $C_b(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ lorsque $h \rightarrow 0$.

- (b) Montrer que $\partial_t u$ existe, $\partial_t u \in C_b(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$, et

$$\partial_t u(t) = f(0) * \Phi_t + v_0(t).$$

- (c) On admet qu'on montrerait de même l'existence des dérivées partielles spatiales $\partial_{x_i}^l \partial_{x_j}^m u$ pour $k, l \leq 1$ et que

$$\partial_{x_i}^l \partial_{x_j}^m u(t) = \int_0^t \int_0^t \partial_t f(s) * \Phi_{t-s} ds.$$

Montrer que u vérifie

$$\partial_t u(t, x) - \Delta u(t, x) = f(t, x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t > 0 \quad (\text{II.33})$$

$$u(t, x) \rightarrow 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n \text{ lorsque } t \rightarrow 0. \quad (\text{II.34})$$

L'équation de la chaleur avec terme source - Effet régularisant Soit $f \in C_b^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ vérifiant (II.32), et soit $u \in C_b^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ définie par (II.31) la solution de (II.33)-(II.34). On rappelle qu'on note aussi

$$\Phi_t: x \mapsto \Phi(t, x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

le noyau de la chaleur sur $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que

$$\|\Phi_t\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_p t^{-\frac{n}{2p'}},$$

pour tout $t > 0$ et tout $p \in [1, +\infty]$, où p' est l'exposant conjugué de p : $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, et C_p est une constante dépendant de p .

2. Soit $T > 0$. Montrer que si $f \in L^r(\mathbb{R}_+; L^p(\mathbb{R}^n))$ sous la condition suivante

$$\frac{2}{r} + \frac{n}{p} < 2, \quad (\text{II.35})$$

alors $u \in L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^n)$ avec

$$\|u\|_{L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^n)} \leq C_T \|f\|_{L^r(\mathbb{R}_+; L^p(\mathbb{R}^n))},$$

où la constante C_T dépend de T, r, p, n .

3. Soit $T > 0$. Montrer que si $f = \operatorname{div}_x(G)$, où les composantes $G_i \in C_b^{1,3}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$, et si, pour tout i , $G_i \in L^r(\mathbb{R}_+; L^p(\mathbb{R}^n))$ sous la condition suivante (dite de Ladyzhenskaya-Prodi-Serrin),

$$\frac{2}{r} + \frac{n}{p} < 1, \quad (\text{II.36})$$

alors $u \in L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^n)$ avec

$$\|u\|_{L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^n)} \leq C_T \|G\|_{L^r(\mathbb{R}_+; L^p(\mathbb{R}^n))},$$

où la constante C_T dépend de T, r, p, n .

Inégalité de Varopoulos-Carne Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ (classe de Schwarz) et $\varphi: \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction à croissance au plus polynomiale en $-\infty$, on note $\varphi(\Delta)f$ la fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ définie par

$$\mathcal{F}[\varphi(\Delta)f](\xi) = \varphi(-|\xi|^2)\mathcal{F}f(\xi),$$

où $\mathcal{F}$ est la transformée de Fourier

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx.$$

1. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Qu'est-ce que $e^{t\Delta}f$?
2. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Qu'est-ce que $\cos(t\sqrt{-\Delta})f$?
3. En utilisant la formule de Kirchhoff, montrer que

$$\cos(t\sqrt{-\Delta})f(x) = \frac{1}{4\pi t} \int_{B(x,t)} \Delta f(y) dy + \frac{1}{4\pi t^2} \int_{S(x,t)} f(y) d\sigma(y). \quad (\text{II.37})$$

4. Montrer que, si f est à support compact, alors, pour tout $t \geq 0$, $\cos(t\sqrt{-\Delta})f$ est à support compact et son support est à distance au plus t du support de f . La distance entre deux ensembles E et G de $\mathbb{R}^n$ est définie par

$$d(E, G) = \inf \{|x - y|; x \in E, y \in G\},$$

où $|\cdot|$ est la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

5. Montrer la formule

$$e^{-\frac{t}{2}z^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{2t}} \cos(sz) ds, \quad z > 0.$$

On rappelle la transformée de Fourier de la Gaussienne en dimension m : $\mathcal{F}G(\xi) = e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}$, où $G(x) := \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} e^{-\frac{|x|^2}{2}}$.

6. En déduire

$$e^{t\Delta/2}f = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{2t}} \cos(s\sqrt{-\Delta})f ds, \quad (\text{II.38})$$

pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$

7. Soit $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ des fonctions à supports compacts, notés respectivement F et G . Montrer l'inégalité de Varopoulos-Carne :

$$\langle e^{t\Delta/2}f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \sqrt{\frac{2t}{\pi d(F, G)^2}} \exp\left(-\frac{d(F, G)^2}{2t}\right) \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}. \quad (\text{II.39})$$

8. Savez-vous montrer directement (II.39) à partir de l'identité

$$\langle e^{t\Delta/2}f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \iint_{F \times G} f(x)g(y) \frac{1}{(2\pi t)^{3/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}} dx dy ?$$

Remarque : l'inégalité de Varopoulos-Carne est vraie en toute dimension (même preuve que ci-dessus, excepté qu'on emploie la formule de représentation ad hoc pour $\cos(t\sqrt{-\Delta})f$).

II-7- 7. Propagation

1. Donner la solution fondamentale $\psi(t, x)$ de l'équation

$$\partial_t u - \Delta u = u \text{ dans }]0, +\infty[\times \mathbb{R}.$$

2. Montrer que l'ensemble de niveau 1

$$\{(t, x) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}; \psi(t, x) = 1\}$$

est proche (un en sens qu'on précisera) des droites de propagation

$$D_\pm = \{(t, x) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}; x = \pm 2t\}$$

pour t grand.

II-7- 8. Limite Hydrodynamique

Soit $N \geq 1$. Soit $\mathbb{R}^N$ muni du produit scalaire $x \cdot y$. On note $|x|$ la norme euclidienne associée. Pour $t > 0$, $x, y, v, w \in \mathbb{R}^n$, On pose

$$D(t) = \frac{1}{2} \left(1 - e^{-2t} \right) t - (1 - e^{-t})^2,$$

$$A(t, x, v) = \frac{1}{D(t)} \int_0^t |(1 - e^{-s})v - e^{-s}x|^2 ds$$

et

$$G_t(x, v; y, w) = \frac{1}{(4\pi)^N D(t)^{N/2}} \exp \left[-\frac{1}{4} A(t, x - y - (1 - e^{-t})w, v - e^{-t}w) \right]. \quad (\text{II.40})$$

On admet⁸ que G_t fournit la solution fondamentale de l'équation

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = Q(f), \quad Q(f) := \operatorname{div}_v (\nabla_v f + v f), \quad (\text{II.41})$$

au sens où, pour tout $f_{\text{in}} \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ ("in" pour "initiale"), la fonction

$$f(t, x, v) := \iint_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n} G_t(x, v; y, w) f_{\text{in}}(y, w) dy dw$$

est l'unique fonction

$$f \in C(\mathbb{R}_+; L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)) \cap C^\infty([0, +\infty[\times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N), \quad (\text{II.42})$$

satisfaisant (II.41) dans $]0, +\infty[\times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ et satisfaisant la condition initiale

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|f(t) - f_{\text{in}}\|_{L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)} = 0. \quad (\text{II.43})$$

1. Pour $\varepsilon > 0$, on pose

$$f^\varepsilon(t, x, v) = f(\varepsilon^{-2}t, \varepsilon^{-1}x, v). \quad (\text{II.44})$$

De quelle équation f^ε est-elle solution ?

2. On note $\mathcal{M}$ (lettre $\mathcal{M}$ pour "Maxwellienne", mais c'est aussi la gaussienne) la fonction

$$\mathcal{M}(v) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} e^{-\frac{|v|^2}{2}}.$$

Montrer que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^N} \int_{\mathbb{R}^N} G_{\varepsilon^{-2}t}(\varepsilon^{-1}x, v; \varepsilon^{-1}y, w) \mathcal{M}(w) dw = \Phi_t(x - y) \mathcal{M}(v), \quad (\text{II.45})$$

où Φ_t est le noyau de la chaleur sur $\mathbb{R}^N$.

3. Soit $\rho_{\text{in}} \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap C_b(\mathbb{R}^N)$. Soit

$$f_{\text{in}}(x, v) = \rho_{\text{in}}(x) \mathcal{M}(v).$$

Montrer que, pour tout $t > 0$, pour tout $x, v \in \mathbb{R}^N$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f^\varepsilon(t, x, v) = \rho(t, x) \mathcal{M}(v), \quad (\text{II.46})$$

où ρ est la solution d'un problème que l'on précisera.

Remarque : l'équation (II.41) est une équation dite cinétique. Elle résulte d'une description statistique de la matière, à une échelle intermédiaire, dite mésoscopique, entre l'échelle moléculaire (description microscopique) et l'échelle dite fluide (description macroscopique). L'équation de Boltzmann est probablement la plus célèbre des équations cinétiques. Ici, (II.41) est l'équation dite de Fokker-Planck. La limite (II.46), qui établit un lien (après remise à l'échelle) entre la description mésoscopique et la description macroscopique est un exemple de limite hydrodynamique.

⁸ ce qui se montre par le calcul direct, mais c'est long, ou bien, plus directement, par l'interprétation probabiliste de l'équation (II.41)

III. Opérateurs différentiels-Régularité elliptique-Propagation des singularités

III-1. Définitions générales

Dans toute la suite, Ω désignera un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On appelle **opérateur différentiel d'ordre m** un opérateur de la forme

$$L = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(\cdot) D^\alpha$$

où :

- $D = \frac{1}{i} \nabla$ (le facteur renormalisant permet d'avoir des expressions plus esthétiques une fois les équations fourierisées), et donc pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq m$ $D^\alpha = \frac{1}{i^{|\alpha|}} \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$.
- Pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $a_\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction régulière. On appelle les a_α les **coefficients de L** et on suppose qu'il existe α tel que $|\alpha| = m$ et $a_\alpha \not\equiv 0$.

DÉFINITION III.1. Avec les notations ci-dessus, on appelle **symbole** de L la fonction $\sigma : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\forall x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \sigma(x, \xi) := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$$

On appelle **symbole principal** de L la fonction $\sigma_m : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\forall x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \sigma_m(x, \xi) := \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$$

Si $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, on a donc

$$\begin{aligned} \forall x \in \Omega, (Lf)(x) &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) (D^\alpha f)(x) \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{a_\alpha(x)}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{D^\alpha f}(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\mu^{(n)}(\xi) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \sigma(x, \xi) \widehat{f}(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\mu^{(n)}(\xi) \end{aligned}$$

Remarquons que cette formule permet d'associer un opérateur L à tout symbole σ non nécessairement polynômial. Il s'agit de ce que l'on appelle les opérateurs pseudo-différentiels. Par ailleurs, si L est à coefficients constants, alors $\sigma(x, \xi) = \sigma(\xi)$ avec un abus de notations et alors

$$\widehat{(Lf)}(\xi) = \sigma(\xi) \widehat{f}(\xi)$$

DÉFINITION III.2. Un opérateur différentiel L est dit :

- Elliptique en $x \in \Omega$ si pour tout $\xi \neq 0$ $\sigma_m(x, \xi) \neq 0$.
- Elliptique s'il est elliptique en tout $x \in \Omega$.
- Uniformément elliptique sur Ω si $\inf_{x \in \Omega} \inf_{\xi \in S(0,1)} \sigma_m(x, \xi) > 0$.

EXEMPLE 1. • $L = -\Delta$, de symbole principal $\sigma_2(\xi) = |\xi|^2$, est uniformément elliptique.

- $L = \partial_t - \Delta_x$ de symbole $\sigma(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n) = i\xi_0 + \sum_{i=1, \dots, n} |\xi_i|^2$ et de symbole principal $\sigma_2(\xi_0, \tilde{\xi}) = |\tilde{\xi}|^2$ n'est pas elliptique.
- $L = \partial_{tt} - \Delta_x$ de symbole principale $\sigma_2(\xi) = -\xi_0 + |\tilde{\xi}|^2$ n'est pas elliptique.

III-2. EDP elliptiques d'ordre 2-Existence de solutions faibles

On considère l'opérateur différentiel

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n \partial_j (a^{i,j} \partial_i u) + \sum_{i=1}^n b^i \partial_i u + cu$$

Cette expression est dite sous **forme divergence**. On peut le mettre sous une autre forme :

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n a^{i,j} \partial_{i,j}^2 u + \sum_{i=1}^n b^i \partial_i u + cu$$

On suppose que les matrices $(a^{i,j}(x))_{i,j \in \mathbb{N}_n}$ sont symétriques en tout $x \in \Omega$. Le symbole principal d'un tel opérateur est alors

$$\sigma_2(x, \xi) = \sum_{i,j=1}^n a^{i,j}(x) \xi_i \xi_j$$

En notant $A(x) := (a^{i,j}(x))_{i,j \in \mathbb{N}_n}$ on voit donc que L est elliptique si et seulement si A est définie positive ou définie négative. On suppose dans toute la suite que L est uniformément elliptique, i.e

$$\exists \theta > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall x \in \Omega, \sum_{i,j=1}^n a^{i,j}(x) \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2$$

On fixe un tel θ . Supposons à présent que Ω est borné et régulier. Soit par exemple $f \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ et supposons que $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ est solution du problème de Dirichlet pour L :

$$\begin{cases} Lu = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

Soit $v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$. Si $v = 0$ sur $\partial\Omega$ alors, en intégrant par parties, en mettant L sous forme divergence

$$\int_{\Omega} f v d\mu^{(n)} = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i,j=1}^n a^{i,j} \partial_i u \partial_j v + \sum_{i=1}^n b^i v \partial_i u + cuv \right\} d\mu^{(n)}$$

On voit apparaître une forme bilinéaire, qui va nous mener sur la piste des solutions faibles :

DÉFINITION III.3. La **forme bilinéaire associée à L** est B définie sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ par

$$B(u, v) := \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i,j=1}^n a^{i,j} \partial_i u \partial_j v + \sum_{i=1}^n b^i v \partial_i u + cuv \right\} d\mu^{(n)}$$

DÉFINITION III.4. $u \in H_0^1(\Omega)$ est dite **solution faible de III.1** si

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), B(u, v) = (f|v)_{L^2(\Omega)}$$

Supposons les $a^{i,j}$, les b^i et c continus borné sur Ω . La forme bilinéaire B vérifie alors plusieurs propriétés :

PROPOSITION III.1. Il existe $\alpha, \beta > 0$ et $\gamma \geq 0$ tels que :

1. B est continue sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$: $\forall u, v \in H^1(\Omega)$, $|B(u, v)| \leq \alpha \|u\|_{H^1} \cdot \|v\|_{H^1}$.
2. B est coercive sur $H_0^1(\Omega)$: $\forall u \in H_0^1(\Omega)$, $\beta \|u\|_{H_0^1}^2 \leq B(u, u) + \gamma \|u\|_{L^2}^2$.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION. Pour le premier point, on introduit $A = \sup_{(i,j) \in \mathbb{N}_n^2} \|a^{i,j}\|_\infty$, B et C , les deux dernières quantités étant définies de manière similaire. Alors, en utilisant la convention d'Einstein, on peut écrire la suite d'inégalités suivante : pour tout $u, v \in H^1(\Omega)$, on a, en notant $\alpha := \sup(A, B, C)$

$$\begin{aligned} |B(u, v)| &\leq A \int_{\Omega} |\nabla u| \cdot |\nabla v| + B \int_{\Omega} |\nabla u| \cdot |v| + C \int_{\Omega} |u| \cdot |v| \\ &\leq \alpha (\|\nabla u\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}) (\|\nabla v\|_{L^2} + \|v\|_{L^2}) \\ &\leq \alpha \|u\|_{H^1(\Omega)} \cdot \|v\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

où le passage de la première à la deuxième ligne se fait en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Le deuxième point est plus délicat à démontrer ; on va également faire usage de l'inégalité de Young :

$$\forall a, b \geq 0, \forall \varepsilon > 0, ab \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2$$

Nous aurons également à utiliser l'inégalité de Poincaré, qui stipule que dans le cas d'un ouvert Ω borné dans une direction, il existe une constante $C(\Omega) > 0$ telle que

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

Déjà, par uniforme ellipticité de l'opérateur L , on a l'inégalité

$$\int_{\Omega} a^{i,j} \partial_i u \partial_j v \geq \theta \|\nabla u\|_{L^2}^2$$

Par ailleurs,

$$\left| \int_{\Omega} b^i u \partial_i u \right| \leq B \int_{\Omega} |\nabla u| \cdot |u| \leq \frac{B^2}{2\theta} \|u\|_{L^2}^2 + \frac{\theta}{2} \|\nabla u\|_{L^2}^2$$

et

$$\left| \int_{\Omega} cu \right| \leq C \int_{\Omega} |u|^2$$

Ainsi, on a l'estimation suivante, où $\gamma_1 = \frac{B^2}{2\theta} + C$:

$$B(u, u) \geq \frac{\theta}{2} \|\nabla u\|_{L^2}^2 - \gamma_1 \|u\|_{L^2}^2$$

Par ailleurs, par l'inégalité de Poincaré, pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\|u\|_{H^1}^2 \leq (1 + C(\Omega))^2 \|\nabla u\|_{L^2}^2$$

On obtient bien la coercivité voulue.

Pour obtenir l'existence de solutions faibles, il nous suffit ensuite de mettre en branle la machine "analyse fonctionnelle" :

THÉORÈME III.1. Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$ et L un opérateur elliptique d'ordre 2. Alors pour tout $\mu \geq \gamma$ et tout $f \in L^2(\Omega)$, le problème de Dirichlet associé $(L + \mu Id)u = f$ sur Ω , $u = 0$ sur $\partial\Omega$ (on note le problème D_μ) admet une unique solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. La formulation faible de D_μ est

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), B_\mu(u, v) = (f|v)_{L^2}$$

où B_μ est la forme bilinéaire associée à $(L + \mu Id)$. B_μ est une forme bilinéaire, continue et coercive sur $H_0^1(\Omega)$. Par le théorème de Lax-Milgram, il existe un unique $u \in H_0^1(\Omega)$ qui soit solution faible de (D_μ) .

REMARQUE. Dès que $\mu > \gamma$, B_μ est coercive sur tout $H^1(\Omega)$ et l'on peut donc appliquer le théorème de Lax-Milgram sur $H^1(\Omega)$, mais le $u \in H^1(\Omega)$ solution de

$$\forall v \in H^1(\Omega), B_\mu(u, v) = (f|v)_{L^2}$$

est une solution faible d'un problème de type Neumann :

$$\begin{cases} Lu = f & \text{dans } \Omega \\ a^{i,j} \partial_i u n_j = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Que dire du μ qui intervient dans le théorème? Est-il vraiment nécessaire? La raison derrière l'introduction d'un tel $\mu \geq 0$ est que L a des valeurs propres, et qu'il se peut que $(L - \lambda)u = 0$ ait des solutions non triviales. Le μ permet d'éviter ces valeurs propres. Développons cela dans le cas où L est un opérateur symétrique, au sens suivant : l'adjoint formel L^* de L est défini comme suit :

$$L^*v = - \sum_{i,j} \partial_i (a^{i,j} \partial_j v) - \sum_i b^i \partial_i v + \left(c - \sum_i \partial_i b^i \right) v$$

La forme bilinéaire associée est alors B^* , qui vérifie

$$\forall u, v \in H^1(\Omega), B^*(v, u) = B(u, v)$$

DÉFINITION III.5. L'opérateur L est dit symétrique si $L^* = L$ (ce qui implique $B^* = B$), ce qui revient à demander :

- i) $\forall i, j \in \mathbb{N}_n, a^{i,j} = a^{j,i}$
- ii) $\forall i \in \mathbb{N}^n, b^i = 0$

PROPOSITION III.2. Supposons que L soit symétrique. Alors

- Il existe $\Sigma \subseteq \mathbb{R}$ au plus dénombrable tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \Sigma$ le problème de Dirichlet (D_λ) admette une unique solution faible.
- En notant $\Sigma = \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}, -\gamma < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n \rightarrow \infty$. En outre, les λ_k sont des valeurs propres de L , et on peut choisir les fonctions propres associées φ_k de sorte que $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ forme une base orthonormée de $L^2(\Omega)$.

Pour montrer ce résultat, qui rappelle fortement les résultats de théorie spectrale, on va passer par l'inverse de L qui sera lui borné, auto-adjoint et compact. Ceci montre également que les opérateurs différentiels elliptiques d'ordre 2 ne sont pas bornés; ceci se montre simplement par le théorème de Riesz.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION. On a déjà démontré que pour tout $f \in L^2(\Omega)$, le problème de Dirichlet (D_γ) admet une unique solution faible $u_f \in H_0^1(\Omega)$. Notons K l'opérateur défini de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ par $K(f) = u_f$. Alors K est un opérateur borné : en effet, on a déjà vu que

$$\beta \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq B_\gamma(u, u) = (f|u)_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2} \|u\|_{H^1}$$

K est un opérateur symétrique : pour tout $f, g \in L^2(\Omega)$

$$B_\gamma(Kf, Kg) = (f|Kg)_{L^2} = B_\gamma(v, u) = (Kf|g)_{L^2}$$

Enfin, K est un opérateur compact : ceci est une conséquence du théorème de Rellich-Kondrachov.

La théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints assure l'existence d'une suite $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tendant vers 0 de valeurs propres, de fonctions propres associées $\varphi_k \in L^2(\Omega)$, et ces fonctions propres forment une base orthonormée de $L^2(\Omega)$. En fait, comme $\text{Im}(K) \subseteq H_0^1(\Omega)$, les φ_k sont des éléments de $H_0^1(\Omega)$.

Remarquons à présent que u est une solution faible de $Lu = \lambda u + f$ si et seulement si u est une solution

faible de $\begin{cases} (L + \gamma)u = (\gamma + \lambda)u + f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$ Ensuite, en posant $\lambda_k := -\gamma + \mu_k^{-1}$, on obtient le résultat voulu.

On vient de voir un exemple d'opérateur à résolvante compacte ; souvent, dans un domaine borné, la résolvante d'un opérateur différentiel est facilement compacte (c'est un peu le même phénomène qu'avec les opérateurs intégraux). Si l'opérateur L n'est pas symétrique, ses valeurs propres peuvent être complexes (et $\Re(\lambda_k) \rightarrow +\infty$, le raisonnement tient toujours), mais il faut avoir d'autres arguments pour montrer que les φ_k forment une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$.

On peut montrer que λ_1 , la plus petite valeur propre de L , en est toujours une valeur propre simple et que les fonctions propres associées gardent un signe constant sur Ω si Ω est connexe. Par exemple, dans le cas $\Omega =]0; \pi[$ et $L = -\frac{d^2}{dx^2}$, $\varphi_k(x) = \sin(kx)$ et on peut étudier les zéros des φ_k . Ce domaine est appelé étude des ensembles nodaux.

L'existence d'une base hilbertienne de fonctions propres de L est à la base de la méthode de séparation des variables, utilisée pour résoudre des problèmes d'évolution. Par exemple, la solution générale de $-\partial_t u = Lu$ sur Ω , $u = 0$ sur $\partial\Omega$ est, formellement :

$$u(x, t) = \sum_{k \geq 1} c_k e^{-\lambda_k t} \varphi_k(x)$$

III-3. Équations elliptiques d'ordre 2-Résultats de régularité

III-3- 1. Rappels sur les quotients différentiels

Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^n$, $V \subset \subset \Omega$ (i.e $\bar{V}$ est compact inclus dans Ω). Soit $\delta := \text{dist}(V, \partial\Omega) > 0$. Si $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, si $k \in \mathbb{N}_n$ et si $h \in \mathbb{R}$ vérifie $0 < |h| < \delta$, on définit le k -ième quotient différentiel de u sur V par

$$D_k^h u(x) := \frac{u(x + he_k) - u(x)}{h}$$

Alors, au sens des distributions, $D_k^h u \xrightarrow{h \rightarrow 0} \partial_k u$. On a également la proposition suivante :

PROPOSITION III.3. Si $u \in H^1(\Omega)$, alors il existe $C > 0$ tel que

$$\forall h, 0 < |h| < \delta, \|D^h u\|_{L^2(V)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2}$$

Réciproquement, si $u \in L^2(\Omega)$ et qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall h, 0 < |h| < \frac{\delta}{2}, \|D^h u\|_{L^2(V)} \leq C$$

alors $u \in H^1(V)$.

La démonstration est laissée à titre d'exercice.

III-3- 2. Régularité intérieure

THÉORÈME III.2. Les coefficients de L étant supposés continus bornés et les $a^{i,j}$ étant de plus supposés appartenir à C_b^1 , si $f \in L^2(\Omega)$ et si $u \in H^1(\Omega)$ est solution de $Lu = f$ alors $u \in H_{loc}^2(\Omega)$ et pour tout ouvert $V \subset\subset \Omega$, il existe $C > 0$, $C = C(\Omega, V, L)$ tel que

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)})$$

Avant de se lancer dans la démonstration, rappelons la formule de Leibniz pour les quotients différentiels : en notant $f^h(x) := f(x + he_k)$ on a

$$D_k^h f g = f^h D_k^h g + g D_k^h f$$

et remarquons que

$$D_k^{h*} = -D_k^{-h}$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. Soit $V \subset\subset \Omega$. Soit W tel que $V \subset\subset W \subset\subset \Omega$ et ξ une fonction de troncature lisse, $\xi : \mathbb{R}^n \rightarrow [0; 1]$, $\xi \equiv 1$ sur V , $\xi \equiv 0$ sur $\mathbb{R}^n \setminus W$.

Si $u \in H^1(\Omega)$ est solution faible du problème de Dirichlet associé à L , alors pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ on a

$$\int_{\Omega} a^{i,j} \partial_i u \partial_j v = \int_{\Omega} \tilde{f} v \quad (\text{III.2})$$

où $\tilde{f} = f - b^i \partial_i u - cu \in L^2$. Pour h suffisamment petit, utilisons cette identité avec $v = D_k^{h*} u (\xi^2 D_k^h u)$. Pourquoi ? Parce que l'on aurait envie d'appliquer notre identité à $v = -\partial_{kk}^2 u$. Si on le fait directement, l'hypothèse d'ellipticité uniforme aurait pu nous permettre de conclure. Cependant, rien ne garantit que ces dérivées soient bien L^2 . Lançons nous dans les calculs :

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} a^{i,j} \partial_i u D_k^{-h} \partial_j (\xi^2 D_k^h u) &= \int_{\Omega} D_k^h (a^{i,j} \partial_i u) \partial_j (\xi^2 D_k^h u) \\ &= \int_{\Omega} \left\{ a^{i,jh} D_k^h (\partial_i u) + D_k^h (a^{i,j}) \partial_i u \right\} \partial_j (\xi^2 D_k^h u) \\ &= \int_{\Omega} a^{i,jh} D_k^h (\partial_i u) D_k^h (\partial_j u) \xi^2 (= A_1) \\ &\quad + \int_{\Omega} \left\{ 2a^{i,jh} D_k^h (\partial_i u) D_k^h (u) \xi \partial_j \xi + D_k^h (a^{i,j}) \partial_i u [D_k^h \partial_j u + 2\xi \partial_j \xi D_k^h u] \right\} (= A_2) \end{aligned}$$

Par uniforme ellipticité, $A_1 \geq \theta \int_{\Omega} \xi^2 |D_k^h \nabla u|^2$. On borne tous les autres termes brutalement :

$$\begin{aligned} |A_2| &\leq C \int_{\Omega} \xi \{ |D_k^h \nabla u| \cdot |D_k^h u| + |D_k^h \nabla u| \cdot |\nabla u| + |D_k^h u| \cdot |\nabla u| \} \\ &\leq \frac{\theta}{2} \int_{\Omega} \xi^2 |D_k^h u|^2 + \tilde{C} \int_W (|D_k^h u|^2 + |\nabla u|^2) \\ &\leq \frac{\theta}{2} \int_{\Omega} \xi^2 |D_k^h \nabla u|^2 + \tilde{C} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \end{aligned}$$

Ceci termine l'étude du membre de gauche de III.2. Remarquons que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |v|^2 &\leq C_1 \int_{\Omega} |\nabla (\xi^2 D_k^h u)|^2 \\ &\leq C_2 \int_{\Omega} \{ \xi^4 |\nabla D_k^h u|^2 + \xi^2 |D_k^h u|^2 \} + C_3 \int_{\Omega} \{ \xi^2 |\nabla D_k^h u|^2 + |\nabla u|^2 \} \end{aligned}$$

Le membre de droite devient donc :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \tilde{f}v &\leq C_4 \int_{\Omega} (|f| + |\nabla u| + |u|) |v| \\ &\leq \frac{\theta}{4} \int_{\Omega} \xi^2 |D_k^h u|^2 + C_5 \int_{\Omega} (|f|^2 + |\nabla u|^2 + |u|^2) \end{aligned}$$

Finalement, en identifiant les deux membres :

$$\frac{\theta}{4} \int_V |D_k^h(\nabla u)|^2 \leq \frac{\theta}{4} \int_{\Omega} \xi^2 |D_k^h u|^2 \leq C_6 \int_{\Omega} (|f|^2 + |\nabla u|^2 + |u|^2)$$

Par conséquent, $\nabla u \in H^1(V)$, donc $u \in H^2(V)$ et $\|u\|_{H^2(V)} \leq C_7(\|f\|_{L^2} + \|u\|_{H^1})$.