

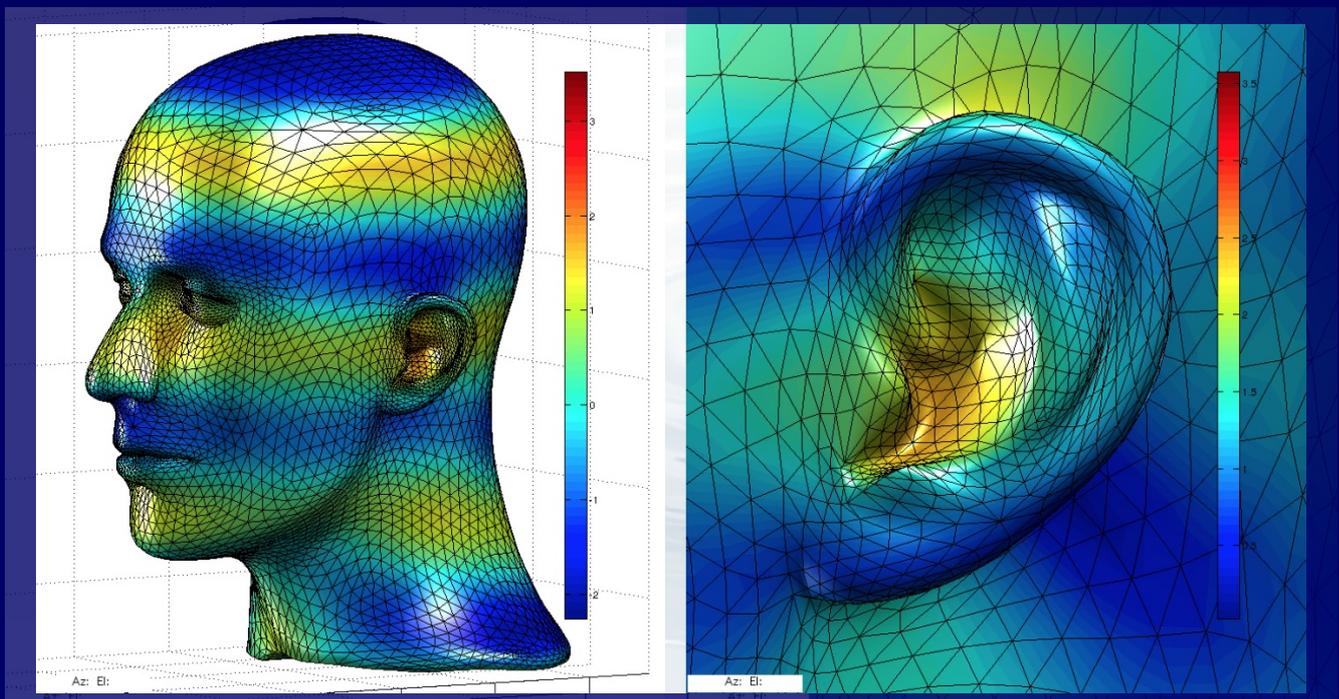
# **Analyse variationnelle des équations aux dérivées partielles**

## **POLYCOPIÉ DU COURS MAP 431**

**Département de Mathématiques Appliquées**

**Grégoire ALLAIRE - François ALOUGES**

**École Polytechnique, année 2015 - 2016**





# Sommaire

<b>Préface</b> .....	ii
<b>1 LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS</b> .....	1
I Introduction .....	1
II Éléments finis $\mathbb{P}_1$ en dimension 1 .....	2
III Éléments finis $\mathbb{P}_2$ en dimension 1 .....	5
IV Éléments finis en dimension $N \geq 2$ .....	6
V Pour aller plus loin... .....	13
V.1 Éléments finis rectangulaires .....	13
V.2 Notes historiques .....	16
V.3 Maillage uniforme ou non uniforme .....	16
<b>Exercices</b> .....	18
<b>2 FORMULATION VARIATIONNELLE DES PROBLÈMES ELLIPTIQUES</b> .....	20
I Généralités .....	20
II Approche variationnelle .....	21
II.1 Formules de Green .....	21
II.2 Formulation variationnelle .....	22
III Théorie de Lax-Milgram .....	24
III.1 Cadre abstrait .....	24
III.2 Application au Laplacien .....	26
IV Pour aller plus loin... .....	28
IV.1 Régularité des ouverts .....	28
IV.2 Notes historiques .....	29
<b>Exercices</b> .....	31
<b>3 ESPACES DE SOBOLEV</b> .....	33
I Introduction et avertissement .....	33
II Fonctions de carré sommable et dérivation faible .....	33
II.1 Quelques rappels d'intégration .....	33
II.2 Dérivation faible .....	34
III Définition et principales propriétés .....	36
III.1 Espace $H^1(\Omega)$ .....	36
III.2 Espace $H_0^1(\Omega)$ .....	37
III.3 Traces et formules de Green .....	39
III.4 Un résultat de compacité .....	41
III.5 Espaces $H^m(\Omega)$ .....	42
IV Pour aller plus loin... .....	45
<b>Exercices</b> .....	46

<b>4</b>	<b>ÉTUDE MATHÉMATIQUE DES PROBLÈMES ELLIPTIQUES</b>	<b>47</b>
I	Introduction	47
II	Étude du Laplacien	47
	II.1 Conditions aux limites de Dirichlet	47
	II.2 Conditions de Dirichlet non homogènes	51
	II.3 Conditions aux limites de Neumann	53
III	Pour aller plus loin...	57
	III.1 Principe du maximum	57
	III.2 Régularité	58
	III.3 Exemple de singularité	58
	<b>Exercices</b>	<b>61</b>
<b>5</b>	<b>ANALYSE DE LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS</b>	<b>63</b>
I	Approximation variationnelle	63
	I.1 Introduction	63
	I.2 Approximation interne générale	63
	I.3 Convergence et estimation d'erreur en dimension 1	65
	I.4 Éléments finis $\mathbb{P}_2$	69
	I.5 Propriétés qualitatives	69
	I.6 Convergence et estimation d'erreur en dimension $N \geq 2$	70
	<b>Exercices</b>	<b>73</b>
<b>6</b>	<b>APPLICATION EN MECANIQUE</b>	<b>74</b>
I	Introduction	74
II	Coefficients variables	74
III	Système de l'élasticité linéarisée	76
IV	Équations de Stokes	80
	<b>Exercices</b>	<b>83</b>
<b>7</b>	<b>PROBLÈMES AUX VALEURS PROPRES</b>	<b>84</b>
I	Motivation et exemples	84
	I.1 Introduction	84
	I.2 Résolution des problèmes instationnaires	85
II	Valeurs propres d'un problème elliptique	86
	II.1 Problème variationnel	86
	II.2 Valeurs propres du Laplacien	88
	II.3 Autres modèles	90
III	Méthodes numériques	92
	III.1 Discrétisation par éléments finis	92
IV	Calcul de valeurs et vecteurs propres	93
	IV.1 Méthode de la puissance	94
	IV.2 Méthode de Givens-Householder	96
	<b>Exercices</b>	<b>98</b>

<b>8 RAPPELS ET COMPLEMENTS SUR LES ESPACES DE HILBERT</b>	<b>100</b>
<b>I Introduction</b>	<b>100</b>
<b>II Les espaces de Hilbert</b>	<b>100</b>
<b>II.1 Théorème de Riesz</b>	<b>101</b>
<b>II.2 Convergence faible</b>	<b>102</b>
<b>III Application dans les espaces de Sobolev</b>	<b>103</b>
<b>III.1 Théorèmes de base</b>	<b>104</b>
<b>III.2 La méthode directe du calcul des variations</b>	<b>105</b>
<b>IV Pour aller plus loin...</b>	<b>107</b>
<b>Index</b>	<b>109</b>

# Préface

L'objectif de ce cours est d'introduire le lecteur au monde de la **modélisation mathématique** et de la **simulation numérique** qui ont pris une importance considérable ces dernières décennies dans tous les domaines de la science et des applications industrielles (ou sciences de l'ingénieur). La modélisation mathématique est l'art (ou la science, selon le point de vue) de représenter (ou de transformer) une réalité physique en des modèles abstraits accessibles à l'analyse et au calcul. La simulation numérique est, bien sûr, le processus qui permet de calculer sur ordinateur les solutions de ces modèles, et donc de simuler la réalité physique.

Plus que pour tout autre discipline l'ordinateur a été une révolution pour les mathématiques : il en a fait une science expérimentale ! On fait des "expériences numériques" comme d'autres font des expériences physiques, et la conception ainsi que l'analyse des méthodes de calcul sur ordinateur sont devenues une nouvelle branche des mathématiques : c'est la simulation numérique. Ces progrès ont aussi permis aux mathématiques de s'attaquer à des problèmes beaucoup plus complexes et concrets, issus de motivations immédiates industrielles ou scientifiques, auxquels on peut apporter des réponses à la fois qualitatives mais aussi quantitatives : c'est la modélisation mathématique. L'analyse numérique est donc la discipline qui conçoit et analyse les méthodes ou algorithmes de calcul numérique. C'est donc un outil essentiel pour la modélisation.

Les **objectifs de ce cours** sont multiples. Il s'agit tout d'abord de comprendre comment le point de vue variationnel permet d'aborder certains problèmes d'équations aux dérivées partielles sous un abord inhabituel. Ce point de vue s'avère riche et puissant. Il permet notamment d'introduire les éléments théoriques qui conduiront à la résolution du problème (démontrer l'existence et l'unicité de la solution dans un cadre adéquat) puis de construire la méthode des éléments finis, qui s'appuie sur les considérations théoriques de façon à fournir naturellement un moyen d'approcher la solution (qui, bien souvent, n'est pas calculable explicitement autrement).

L'ambition de ce cours est de donner les bases qui permettront aux futurs ingénieurs de bureau d'études ou de recherche et développement de créer de **nouveaux modèles** et de **nouveaux algorithmes numériques** pour des problèmes plus compliqués non discutés ici. Cependant, même ceux qui ne se destinent pas à une telle carrière ont intérêt à bien comprendre les enjeux de la simulation numérique. En effet, de nombreuses décisions industrielles ou politiques se prennent désormais sur la foi de calculs ou de simulations numériques. Il importe donc que les décideurs aient la capacité de juger de la **qualité** et de la **fiabilité** des calculs qui leur sont présentés. Ce cours leur permettra de connaître les premiers critères qui garantissent la validité et la pertinence des simulations numériques.

Ce cours est d'un niveau introductif et n'exige aucun autre prérequis que le niveau de connaissances acquis en classes préparatoires ou en premier cycle universitaire. Le polycopié a été écrit à partir de la classe mathbook de Stéphane Pasquet<sup>1</sup> qui fournit un résultat très agréable à lire. Les auteurs le remercient ainsi que tous ceux qui voudront bien signaler d'éventuelles erreurs ou imperfections de cette édition, par exemple par courrier électronique à l'adresse `francois.alouges@polytechnique.fr`.

G. ALLAIRE, F. ALOUGES  
Palaiseau, Janvier 2016

---

1. Voir [www.mathweb.fr](http://www.mathweb.fr).

## LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

### I Introduction

La méthode des éléments finis est à la base de ce cours. Bien qu'elle ait été introduite en dimension 1 lors du cours MAP411, nous allons en reprendre les concepts de base et en étendre largement les champs d'application. Nous verrons en particulier comment proposer des méthodes numériques permettant de résoudre des problèmes aux limites en dimension supérieure et comment la méthode débouche naturellement sur des concepts mathématiques puissants qui permettent de résoudre les mêmes problèmes en dimension infinie. Enfin, nous ferons le lien avec le point de vue variationnel qui permet également de mieux cerner les principes mathématiques fondamentaux sous-jacents. Nous considérons pour débiter l'exposition le problème modèle suivant

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{dans } ]0, 1[ \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Remarquons d'emblée qu'il s'agit d'une équation différentielle ordinaire du second ordre que l'on doit résoudre sur  $]0, 1[$ . L'originalité par rapport aux problèmes dits "de Cauchy" dans lesquelles la variable  $x$  est habituellement le temps et deux conditions initiales (le problème est du deuxième ordre) sont données, est qu'ici nous donnons une seule condition mais au bord de l'intervalle, c'est-à-dire à gauche, en 0, et à droite en 1.

La résolution explicite de cette équation différentielle est immédiate puisque l'on a d'abord

$$u'(s) = - \int_0^s f(t) dt + C_1,$$

où  $C_1$  est une constante à déterminer. On peut alors réintégrer en

$$u(x) = \int_0^x u'(s) ds = - \int_0^x \left( \int_0^s f(t) dt \right) ds + C_1 x + C_2$$

où  $C_2$  est une nouvelle constante à déterminer. Les deux conditions au bord ( $u(0) = u(1) = 0$ ) permettent alors de déterminer  $C_1$  et  $C_2$  et l'on obtient  $C_2 = 0$  puis  $C_1 = \int_0^1 \left( \int_0^s f(t) dt \right) ds$ . On a alors

$$u(x) = - \int_0^x \left( \int_0^s f(t) dt \right) ds + x \int_0^1 \left( \int_0^s f(t) dt \right) ds. \quad (1.2)$$

Notons enfin, que le calcul précédent a un sens dès que  $f \in L^1(0, 1)$ .

Le but de la méthode des éléments finis est de produire une méthode numérique qui permettra de calculer une approximation de la solution précédente sur un ordinateur. Dans le cas présent, la solution est connue explicitement et il serait facile de déterminer une approximation de (1.2). Néanmoins, nous allons voir que la méthode permettra de calculer une approximation *même dans le cas où la solution n'est pas connue explicitement*. Ce sera en particulier la situation générale en dimension plus grande que 1.

Le principe de base de la méthode des éléments finis consiste à considérer un maillage du domaine  $\Omega = ]0, 1[$ . En dimension 1 un maillage est simplement constitué d'une collection de points  $(x_j)_{0 \leq j \leq n+1}$  (comme pour la méthode des différences finies) tels que

$$x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = 1.$$

Le maillage sera dit **uniforme** si les points  $x_j$  sont équidistants, c'est-à-dire que

$$x_j = jh \quad \text{avec} \quad h = \frac{1}{n+1}, \quad 0 \leq j \leq n+1,$$

mais ce n'est pas nécessaire. Les points  $x_j$  sont aussi appelés les **sommets** (ou noeuds) du maillage. Dans tout ce qui suit on notera  $\mathbb{P}_k$  l'ensemble des polynômes à coefficients réels d'une variable réelle de degré inférieur ou égal à  $k$ .

## II Éléments finis $\mathbb{P}_1$ en dimension 1

La méthode des éléments finis  $\mathbb{P}_1$  repose sur l'espace discret des fonctions globalement continues et affines sur chaque maille

$$V_h = \left\{ v \in C([0, 1]) \text{ tel que } v|_{[x_j, x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_1, \forall 0 \leq j \leq n \text{ et } v(0) = v(1) = 0 \right\}, \quad (1.3)$$

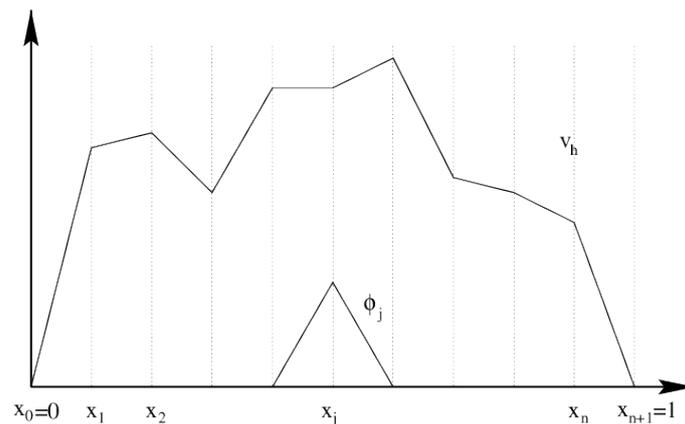


FIGURE 1.1 – Maillage de  $\Omega = ]0, 1[$  et fonction de base en éléments finis  $\mathbb{P}_1$ .

On peut représenter les fonctions de  $V_h$ , affines par morceaux, à l'aide de fonctions de base très simples appelées “fonctions chapeau” définies pour  $j = 1, \dots, n$  par

$$\phi_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [x_{j-1}, x_{j+1}], \\ \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} & \text{si } x \in [x_{j-1}, x_j], \\ \frac{x_j - x}{x_{j+1} - x_j} & \text{si } x \in [x_j, x_{j+1}]. \end{cases} \quad (1.4)$$

Lorsque le maillage est uniforme, les fonctions de base se définissent à partir d'une unique fonction  $\phi$  par

$$\phi_j(x) = \phi\left(\frac{x - x_j}{h}\right). \quad (1.5)$$

où

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

**Lemme 1.1.**

L'espace  $V_h$ , défini par (1.3), est un sous-espace de  $C^0(0,1)$  de dimension  $n$ , et toute fonction  $v_h \in V_h$  est définie de manière unique par ses valeurs aux sommets  $(x_j)_{1 \leq j \leq n}$

$$v_h(x) = \sum_{j=1}^n v_h(x_j) \phi_j(x) \quad \forall x \in [0,1].$$

**Démonstration.** C'est immédiat en remarquant que  $\phi_j(x_i) = \delta_{ij}$ , où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker qui vaut 1 si  $i = j$  et 0 sinon (voir la Figure 1.1).  $\square$

**Remarque 1.2.**

La base  $(\phi_j)$ , définie par (1.4), permet de caractériser une fonction de  $V_h$  par ses valeurs aux noeuds du maillage. Dans ce cas on parle **d'éléments finis de Lagrange**. Par ailleurs, comme les fonctions sont localement  $\mathbb{P}_1$ , on dit que l'espace  $V_h$ , défini par (1.3), est l'espace des éléments finis de Lagrange d'ordre 1.

Cet exemple des éléments finis  $\mathbb{P}_1$  paraît très naturel. En effet la solution du problème initial est de classe  $C^1$  et une approximation affine par morceaux semble adéquate. Toutefois, nous attirons l'attention sur le paradoxe suivant. Les fonctions de  $V_h$  ne sont pas deux fois dérivables sur le segment  $[0,1]$  et cela n'a, a priori, pas de sens de résoudre, même de manière approchée, l'équation (1.1) (en fait la dérivée seconde d'une fonction de  $V_h$  est une somme de masses de Dirac aux noeuds du maillage!).

Décrivons la **résolution pratique** du problème de Dirichlet (1.1) par la méthode des éléments finis  $\mathbb{P}_1$ . On commence par écrire le problème à résoudre sous une forme dite *faible* ou *variationnelle*. Celle-ci s'obtient en multipliant l'équation initiale (1.1) par une fonction  $v$  qui s'annule également sur le bord du domaine, à intégrer sur tout le domaine, et à faire une intégration par parties. On obtient successivement

$$-\int_0^1 u''(x)v(x) dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx,$$

puis, comme  $-\int_0^1 u''(x)v(x) dx = \int_0^1 u'(x)v'(x) dx$  (le terme tout intégré disparaît car  $v(0) = v(1) = 0$ , on arrive à

$$\int_0^1 u'(x)v'(x) dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx \quad (1.6)$$

pour toute fonction  $v$  suffisamment dérivable<sup>1</sup> pour que le calcul ait un sens.

Cette formulation variationnelle peut s'appliquer dans le cas de l'espace de fonction  $V_h$ , c'est-à-dire que l'on peut chercher à résoudre le problème suivant

$$\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } \int_0^1 u_h'(x)v_h'(x) dx = \int_0^1 f(x)v_h(x) dx \quad \forall v_h \in V_h. \quad (1.7)$$

On décompose alors  $u_h$  sur la base des  $(\phi_j)_{1 \leq j \leq n}$  et on prend  $v_h = \phi_i$  ce qui donne

$$\sum_{j=1}^n u_h(x_j) \int_0^1 \phi_j'(x)\phi_i'(x) dx = \int_0^1 f(x)\phi_i(x) dx.$$

1. Le terme suffisamment dérivable est volontairement flou pour l'instant. Il faudra plus tard lui donner un sens beaucoup plus rigoureux.

En notant  $U_h = (u_h(x_j))_{1 \leq j \leq n}$ ,  $b_h = \left( \int_0^1 f(x) \phi_i(x) dx \right)_{1 \leq i \leq n}$ , et en introduisant la **matrice de rigidité**

$$\mathcal{K}_h = \left( \int_0^1 \phi_j'(x) \phi_i'(x) dx \right)_{1 \leq i, j \leq n},$$

la formulation variationnelle dans  $V_h$  revient à résoudre dans  $\mathbb{R}^n$  le système linéaire

$$\mathcal{K}_h U_h = b_h.$$

En résolvant ce système linéaire, on obtient le vecteur  $U_h$  dont les composantes sont les valeurs de  $u_h$  aux sommets  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$  du maillage.

Notons également que comme les fonctions de base  $\phi_j$  ont un “petit” support, l’intersection des supports de  $\phi_j$  et  $\phi_i$  est souvent vide et la plupart des coefficients de  $\mathcal{K}_h$  sont nuls. Un calcul simple montre que

$$\int_0^1 \phi_j'(x) \phi_i'(x) dx = \begin{cases} -\frac{1}{x_{j+1} - x_j} & \text{si } j = i - 1 \\ \frac{1}{x_j - x_{j-1}} + \frac{1}{x_{j+1} - x_j} & \text{si } j = i \\ -\frac{1}{x_j - x_{j-1}} & \text{si } j = i + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et, dans le cas du maillage uniforme, on a

$$\int_0^1 \phi_j'(x) \phi_i'(x) dx = \begin{cases} -h^{-1} & \text{si } j = i - 1 \\ 2h^{-1} & \text{si } j = i \\ -h^{-1} & \text{si } j = i + 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La matrice  $\mathcal{K}_h$  est tridiagonale et s’écrit dans le cas du maillage uniforme

$$\mathcal{K}_h = h^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Pour obtenir le second membre  $b_h$  il faut calculer les intégrales

$$(b_h)_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) \phi_i(x) dx \quad \text{pour tout } 1 \leq i \leq n.$$

L’évaluation exacte du second membre  $b_h$  peut être difficile ou impossible si la fonction  $f$  est compliquée. En pratique on a recours à des **formules de quadrature** (ou formules d’intégration numérique) qui donnent une approximation des intégrales définissant  $b_h$ . Par exemple, on peut utiliser la formule du “point milieu”

$$\frac{1}{x_{i+1} - x_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \psi(x) dx \approx \psi\left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right),$$

ou la formule des “trapèzes”

$$\frac{1}{x_{i+1} - x_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \psi(x) dx \approx \frac{1}{2} (\psi(x_{i+1}) + \psi(x_i)).$$

Ces deux formules sont exactes pour les fonctions  $\psi$  affines. Si la fonction  $\psi$  est régulière quelconque, alors ces formules sont simplement approchées avec un reste de l'ordre de  $\mathcal{O}(h^2)$ .

**Remarque 1.3.**

La matrice de rigidité  $\mathcal{K}_h$  est très similaire à des matrices déjà rencontrées lors de l'étude des méthodes de différences finies, au moins dans le cas du maillage uniforme.

**III Éléments finis  $\mathbb{P}_2$  en dimension 1**

La méthode des éléments finis  $\mathbb{P}_2$  repose sur l'espace discret

$$V_h = \left\{ v \in C([0, 1]) \text{ tel que } v|_{[x_j, x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_2 \forall 0 \leq j \leq n \text{ et } v(0) = v(1) = 0 \right\}. \quad (1.9)$$

Les fonctions de  $V_h$  sont continues, paraboliques par morceaux et on peut les représenter à l'aide de fonctions de base très simples. Ci-dessous, nous donnons les formules dans le cas du maillage

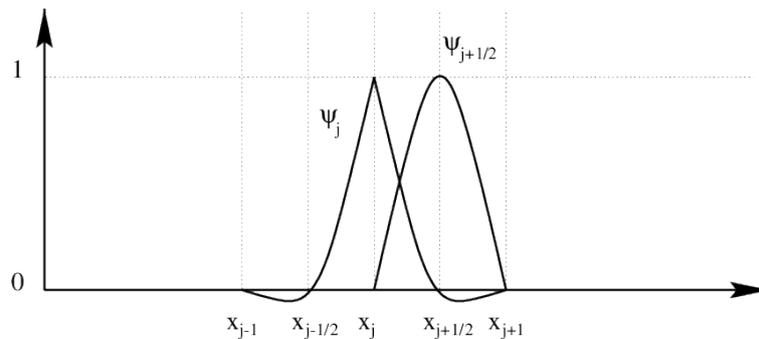


FIGURE 1.2 – Les fonctions de base des éléments finis  $\mathbb{P}_2$ .

uniforme et laissons le lecteur les généraliser au cas du maillage quelconque.

Introduisons tout d'abord les points milieux des segments  $[x_j, x_{j+1}]$  définis par  $x_{j+1/2} = x_j + h/2$  pour  $0 \leq j \leq n$ . On définit aussi deux fonctions "mères"

$$\phi(x) = \begin{cases} (1+x)(1+2x) & \text{si } -1 \leq x \leq 0, \\ (1-x)(1-2x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{si } |x| > 1, \end{cases}$$

et

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 - 4x^2 & \text{si } |x| \leq 1/2, \\ 0 & \text{si } |x| > 1/2. \end{cases}$$

Pour  $0 \leq j \leq n+1$  on définit les fonctions de base (voir la Figure 1.2)

$$\psi_j(x) = \phi\left(\frac{x-x_j}{h}\right), \quad 1 \leq j \leq n, \quad \text{et} \quad \psi_{j+1/2}(x) = \psi\left(\frac{x-x_{j+1/2}}{h}\right), \quad 0 \leq j \leq n.$$

**Lemme 1.4.**

L'espace  $V_h$ , défini par (1.9), est un sous-espace de  $C^0(0, 1)$  de dimension  $2n+1$ , et toute fonction  $v_h \in V_h$  est définie de manière unique par ses valeurs aux sommets  $(x_j)_{1 \leq j \leq n}$  et aux milieux  $(x_{j+1/2})_{0 \leq j \leq n}$

$$v_h(x) = \sum_{j=1}^n v_h(x_j) \psi_j(x) + \sum_{j=0}^n v_h(x_{j+1/2}) \psi_{j+1/2}(x) \quad \forall x \in [0, 1].$$



La solution explicite sous la forme d'une formule telle que (1.2) n'existe pas en général et c'est tout l'intérêt des méthodes numériques telles que la méthode des éléments finis d'en obtenir une (si possible bonne) approximation. Enfin, l'existence même d'une solution paraît peu clair. Nous verrons également comment résoudre des problèmes ayant d'autres types de conditions au bord.

- **La formulation variationnelle.** L'écriture de la formulation variationnelle du problème (1.6) a nécessité l'utilisation d'une fonction annexe  $v$  nulle au bord et une intégration par parties. Nous utilisons maintenant une intégration par parties multidimensionnelle, la *formule de Green*, qui sera développée dans le chapitre suivant qui permet d'écrire pour toute fonction  $v$  suffisamment régulière

$$-\int_{\Omega} \Delta u(x)v(x) dx = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x)v(x) ds.$$

Notons pour l'instant que l'on obtient dans le cas présent que la solution  $u$  vérifie pour toute fonction  $v$  suffisamment régulière et nulle au bord

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx. \quad (1.11)$$

Ici,  $\nabla u(x)$  est le vecteur gradient de  $u$

$$\nabla u(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial u}{\partial x_N}(x) \end{pmatrix}$$

de sorte que (1.11) est une écriture compacte pour

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx.$$

- **Des espaces d'éléments finis.** Il faut généraliser l'approche des paragraphes précédents et en particulier les notions de maillages et d'approximation polynomiale par morceaux. C'est ce que nous allons faire dans les paragraphes qui suivent.

Tout commence par la définition d'un maillage du domaine  $\Omega$  par des triangles en dimension  $N = 2$  et des tétraèdres en dimension  $N = 3$ . On regroupe les triangles et les tétraèdres dans la famille plus générale des  $N$ -simplexes. On appelle  $N$ -simplexe  $K$  de  $\mathbb{R}^N$  l'enveloppe convexe de  $(N + 1)$  points  $(a_j)_{1 \leq j \leq N+1}$  de  $\mathbb{R}^N$ , appelés sommets de  $K$ . Bien sûr un 2-simplexe est simplement un triangle et un 3-simplexe un tétraèdre (voir la Figure 1.5). On dit que le  $N$ -simplexe  $K$  est non dégénéré si les points  $(a_j)_{1 \leq j \leq N+1}$  n'appartiennent pas à un même hyperplan de  $\mathbb{R}^N$  (le triangle ou le tétraèdre est non "plat"). Si on note  $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq N}$  les coordonnées du vecteur  $a_j$ , la condition de non dégénérescence de  $K$  est que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,N+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,N+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N,1} & a_{N,2} & \dots & a_{N,N+1} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

soit inversible (ce que l'on supposera toujours par la suite). Un  $N$ -simplexe a autant de faces que de sommets, qui sont elles-mêmes des  $(N - 1)$ -simplexes.

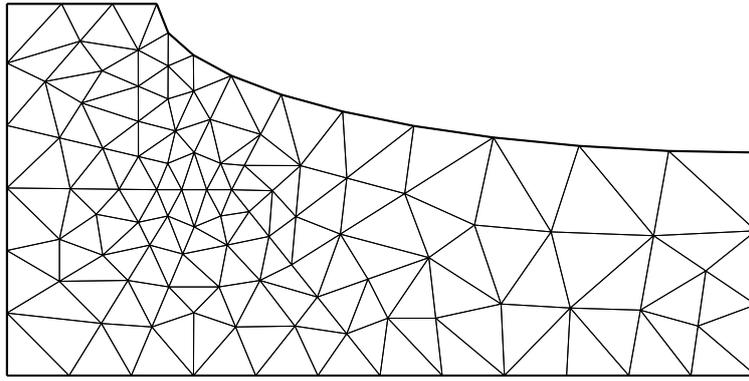


FIGURE 1.3 – Exemple de maillage triangulaire en dimension  $N = 2$ .

**Définition 1.6.**

Soit  $\Omega$  un ouvert connexe polyédrique de  $\mathbb{R}^N$ . Un **maillage** triangulaire ou une triangulation de  $\overline{\Omega}$  est un ensemble  $\mathcal{T}_h$  de  $N$ -simplexes (non dégénérés)  $(K_i)_{1 \leq i \leq n}$  qui vérifient

- 1  $K_i \subset \overline{\Omega}$  et  $\overline{\Omega} = \cup_{i=1}^n K_i$ ,
- 2 l'intersection  $K_i \cap K_j$  de deux  $N$ -simplexes distincts est un  $m$ -simplexe, avec  $0 \leq m \leq N - 1$ , dont tous les sommets sont aussi des sommets de  $K_i$  et  $K_j$ . (En dimension  $N = 2$ , l'intersection de deux triangles est soit vide, soit réduite à un sommet commun, soit une arête commune **entière**; en dimension  $N = 3$ , l'intersection de deux tétraèdres est soit vide, soit un sommet commun, soit une arête commune entière, soit une face commune entière.)

Les **sommets** ou **noeuds** du maillage  $\mathcal{T}_h$  sont les sommets des  $N$ -simplexes  $K_i$  qui le composent. Par convention, le paramètre  $h$  désigne le maximum des diamètres des  $N$ -simplexes  $K_i$ .

Il est clair que la Définition 1.6 ne peut s'appliquer qu'à un ouvert polyédrique et pas à un ouvert quelconque. La Définition 1.6 contient un certain nombre de restrictions sur le maillage : dans ce cas on parle souvent de **maillage conforme**. Un exemple de maillage conforme est donné à la Figure 1.3, tandis que la Figure 1.4 présente des situations interdites par la Définition 1.6.

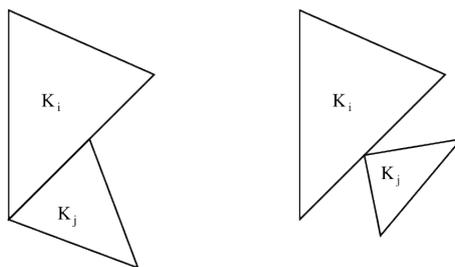


FIGURE 1.4 – Exemples de situations interdites pour un maillage triangulaire.

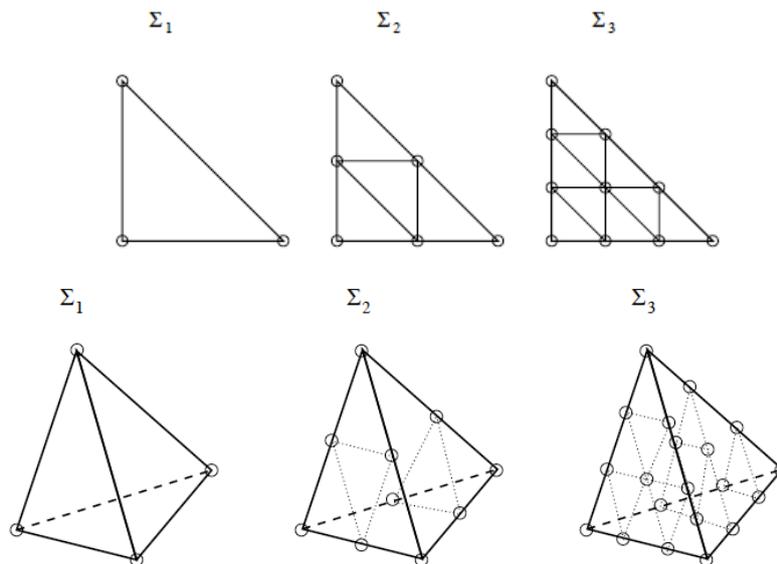


FIGURE 1.5 – Treillis d’ordre 1, 2, et 3 pour un triangle (en haut) et un tétraèdre (en bas). Les ronds représentent les points du treillis.

**Remarque 1.7.**

Nous ne disons rien ici des algorithmes qui permettent de construire un maillage triangulaire. Contentons nous de dire que, s’il est relativement facile de mailler des domaines plans (il existe de nombreux logiciels libres qui permettent de le faire), il est encore assez compliqué de mailler des domaines tridimensionnels. Nous renvoyons à l’ouvrage [19] le lecteur intéressé par ce sujet.

Dans un  $N$ -simplexe  $K$  il est commode d’utiliser des coordonnées barycentriques au lieu des coordonnées cartésiennes usuelles. Rappelons que, si  $K$  est un  $N$ -simplexe non dégénéré de sommets  $(a_j)_{1 \leq j \leq N+1}$ , les **coordonnées barycentriques**  $(\lambda_j)_{1 \leq j \leq N+1}$  de  $x \in \mathbb{R}^N$  sont définies par

$$\sum_{j=1}^{N+1} \lambda_j = 1, \quad \sum_{j=1}^{N+1} a_{i,j} \lambda_j = x_i \quad \text{pour } 1 \leq i \leq N, \tag{1.13}$$

qui admet bien une unique solution car la matrice  $A$ , définie par (1.12), est inversible. Remarquons que les  $\lambda_j$  sont des fonctions affines de  $x$ . On vérifie alors que

$$K = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \text{ tel que } \lambda_j(x) \geq 0 \text{ pour } 1 \leq j \leq N + 1 \right\},$$

et que les  $(N + 1)$  faces de  $K$  sont les intersections de  $K$  et des hyperplans  $\lambda_j(x) = 0$ ,  $1 \leq j \leq N + 1$ . On peut alors définir un ensemble de points de  $K$  qui vont jouer un rôle particulier pour la suite : pour tout entier  $k \geq 1$  on appelle **treillis d’ordre  $k$**  l’ensemble

$$\Sigma_k = \left\{ x \in K \text{ tel que } \lambda_j(x) \in \left\{ 0, \frac{1}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}, 1 \right\} \text{ pour } 1 \leq j \leq N \right\}. \tag{1.14}$$

Pour  $k = 1$  il s’agit de l’ensemble des sommets de  $K$ , et pour  $k = 2$  des sommets et des points milieux des arêtes reliant deux sommets (voir la Figure 1.5). Dans le cas général,  $\Sigma_k$  est un ensemble fini de points  $(\sigma_j)_{1 \leq j \leq n_k}$ .

Nous définissons maintenant l'ensemble  $\mathbb{P}_k$  des polynômes à coefficients réels de  $\mathbb{R}^N$  dans  $\mathbb{R}$  de degré inférieur ou égal à  $k$ , c'est-à-dire que tout  $p \in \mathbb{P}_k$  s'écrit sous la forme

$$p(x) = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_N \geq 0 \\ i_1 + \dots + i_N \leq k}} \alpha_{i_1, \dots, i_N} x_1^{i_1} \cdots x_N^{i_N} \text{ avec } x = (x_1, \dots, x_N).$$

L'intérêt de la notion de treillis  $\Sigma_k$  d'un  $N$ -simplexe  $K$  est qu'il permet de caractériser tous les polynômes de  $\mathbb{P}_k$  (on dit que  $\Sigma_k$  est **unisolvant** pour  $\mathbb{P}_k$ ).

**Lemme 1.8.**

Soit  $K$  un  $N$ -simplexe. Pour un entier  $k \geq 1$ , soit  $\Sigma_k$  le treillis d'ordre  $k$ , défini par (1.14), dont les points sont notés  $(\sigma_j)_{1 \leq j \leq n_k}$ . Alors, tout polynôme de  $\mathbb{P}_k$  est déterminé de manière unique par ses valeurs aux points  $(\sigma_j)_{1 \leq j \leq n_k}$ . Autrement dit, il existe une base  $(\psi_j)_{1 \leq j \leq n_k}$  de  $\mathbb{P}_k$  telle que

$$\psi_j(\sigma_i) = \delta_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq n_k.$$

**Démonstration.** Le cardinal de  $\Sigma_k$  et la dimension de  $\mathbb{P}_k$  coïncident

$$\text{card}(\Sigma_k) = \dim(\mathbb{P}_k) = \frac{(N+k)!}{N!k!}$$

(le vérifier en guise d'exercice, au moins pour  $k = 1, 2$ ). Comme l'application qui, à tout polynôme de  $\mathbb{P}_k$ , fait correspondre ses valeurs sur le treillis  $\Sigma_k$  est linéaire, il suffit de montrer qu'elle est injective pour montrer qu'elle est bijective. Soit donc un polynôme  $p \in \mathbb{P}_k$  qui s'annule sur  $\Sigma_k$ . Montrons, par récurrence sur la dimension  $N$ , que  $p$  est identiquement nul sur  $\mathbb{R}^N$ . Pour  $N = 1$ , il est clair qu'un polynôme de degré  $k$  qui s'annule en  $(k+1)$  points distincts est nul. Supposons le résultat vrai à l'ordre  $N - 1$ . Comme  $x$  dépend linéairement des coordonnées barycentriques  $(\lambda_j(x))_{1 \leq j \leq N+1}$ , on peut définir un polynôme  $q(\lambda) = p(x)$  de degré au plus  $k$  en la variable  $\lambda \in \mathbb{R}^{N+1}$ . Si l'on fixe une coordonnée  $\lambda_j$  dans l'ensemble  $\{0, 1/k, \dots, (k-1)/k, 1\}$  et que l'on pose  $\lambda = (\lambda', \lambda_j)$ , on obtient un polynôme  $q_j(\lambda') = q(\lambda)$  qui dépend de  $N - 1$  variables indépendantes (car on a la relation  $\sum_{j=1}^{N+1} \lambda_j = 1$ ) et qui est nul sur la section du treillis  $\Sigma_k$  correspondant à la valeur fixée de  $\lambda_j$ . Comme cette section est aussi le treillis d'ordre  $k$  d'un  $(N-1)$ -simplexe dans l'hyperplan  $\lambda_j$  fixé, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence et en déduire que  $q_j = 0$ . Autrement dit, le facteur  $\lambda_j(\lambda_j - 1/k) \cdots (\lambda_j - (k-1)/k)(\lambda_j - 1)$  divise  $q$ , ce qui est une contradiction avec le fait que le degré de  $q(\lambda)$  est inférieur ou égal à  $k$ , sauf si  $q = 0$ , ce qui est le résultat désiré.  $\square$

**Lemme 1.9.**

Soit  $K$  et  $K'$  deux  $N$ -simplexes ayant une face commune  $\Gamma = \partial K \cap \partial K'$ . Soit un entier  $k \geq 1$ . Alors, leurs treillis d'ordre  $k$ ,  $\Sigma_k$  et  $\Sigma'_k$  coïncident sur cette face  $\Gamma$ . De plus, étant donné  $p_K$  et  $p_{K'}$  deux polynômes de  $\mathbb{P}_k$ , la fonction  $v$  définie par

$$v(x) = \begin{cases} p_K(x) & \text{si } x \in K \\ p_{K'}(x) & \text{si } x \in K' \end{cases}$$

est continue sur  $K \cup K'$ , si et seulement si  $p_K$  et  $p_{K'}$  ont des valeurs qui coïncident aux points du treillis sur la face commune  $\Gamma$ .

**Démonstration.** Il est clair que la restriction à une face de  $K$  de son treillis d'ordre  $\Sigma_k$  est aussi un treillis d'ordre  $k$  dans l'hyperplan contenant cette face, qui ne dépend que des sommets de cette face. Par conséquent, les treillis  $\Sigma_k$  et  $\Sigma'_k$  coïncident sur leur face commune  $\Gamma$ . Si les polynômes  $p_K$  et  $p_{K'}$  coïncident aux points de  $\Sigma_k \cap \Gamma$ , alors par application du Lemme 1.8 ils sont égaux sur  $\Gamma$ , ce qui prouve la continuité de  $v$ .  $\square$

Nous avons maintenant tous les outils pour définir la méthode des éléments finis  $\mathbb{P}_k$ .

**Définition 1.10.**

Étant donné un maillage  $\mathcal{T}_h$  d'un ouvert connexe polyédrique  $\Omega$ , la méthode des éléments finis  $\mathbb{P}_k$ , ou **éléments finis triangulaires de Lagrange d'ordre  $k$** , associée à ce maillage, est définie par l'espace discret

$$V_h = \{v \in C(\overline{\Omega}) \text{ tel que } v|_{K_i} \in \mathbb{P}_k \text{ pour tout } K_i \in \mathcal{T}_h\}. \quad (1.15)$$

On appelle **noeuds des degrés de liberté** l'ensemble des points  $(\hat{a}_i)_{1 \leq i \leq n_{dl}}$  des treillis d'ordre  $k$  de chacun des  $N$ -simplexes  $K_i \in \mathcal{T}_h$ . On ne compte qu'une seule fois les points qui coïncident et  $n_{dl}$  est le nombre de degrés de liberté de la méthode des éléments finis  $\mathbb{P}_k$ . On appelle **degrés de liberté** d'une fonction  $v \in V_h$  l'ensemble des valeurs de  $v$  en ces noeuds  $(\hat{a}_i)_{1 \leq i \leq n_{dl}}$ . On définit aussi le sous-espace  $V_{0h}$  par

$$V_{0h} = \{v \in V_h \text{ tel que } v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}. \quad (1.16)$$

Lorsque  $k = 1$  les noeuds des degrés de liberté coïncident avec les sommets du maillage. Lorsque  $k = 2$  ces noeuds sont constitués d'une part des sommets du maillage et d'autre part des points milieux des arêtes reliant deux sommets.

**Remarque 1.11.**

L'appellation "éléments finis de Lagrange" correspond aux éléments finis dont les degrés de liberté sont des valeurs ponctuelles des fonctions de l'espace  $V_h$ . On peut définir d'autres types d'éléments finis, par exemple les éléments finis de Hermite pour lesquels les degrés de liberté sont les valeurs ponctuelles de la fonction et de ses dérivées.

**Proposition 1.12.**

L'espace  $V_h$ , défini par (1.15), est un sous-espace de  $C^0(\overline{\Omega})$  dont la dimension est finie, égale au nombre de degrés de liberté. De plus, il existe une base de  $V_h$   $(\phi_i)_{1 \leq i \leq n_{dl}}$  définie par

$$\phi_i(\hat{a}_j) = \delta_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq n_{dl},$$

telle que

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n_{dl}} v(\hat{a}_i) \phi_i(x).$$

**Démonstration.** Les éléments de  $V_h$ , étant réguliers sur chaque maille  $K_i$  et continus sur  $\overline{\Omega}$ , appartiennent à  $C^0(\overline{\Omega})$ . Grâce au Lemme 1.9 les éléments de  $V_h$  sont exactement obtenus en assemblant sur chaque  $K_i \in \mathcal{T}_h$  des polynômes de  $\mathbb{P}_k$  qui coïncident sur les degrés de liberté des faces (ce qui prouve au passage que  $V_h$  n'est pas réduit aux seules fonctions constantes). Enfin, en assemblant les bases  $(\psi_j)_{1 \leq j \leq n_k}$  de  $\mathbb{P}_k$  sur chaque maille  $K_i$  (fournies par le Lemme 1.8) on obtient la base annoncée  $(\phi_i)_{1 \leq i \leq n_{dl}}$  de  $V_h$ .  $\square$

**Remarque 1.13.**

On obtient un résultat semblable pour le sous-espace  $V_{0h}$ , défini par (1.16), qui est un sous-espace de  $H_0^1(\Omega)$  de dimension finie égale au nombre de degrés de liberté intérieurs (on ne compte pas les noeuds sur le bord  $\partial\Omega$ ).

Décrivons la **résolution pratique** du problème de Dirichlet (1.10) par la méthode des éléments finis  $\mathbb{P}_k$ . La formulation variationnelle (1.11) de l'approximation interne devient ici :

$$\text{trouver } u_h \in V_{0h} \text{ tel que } \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h dx = \int_{\Omega} f v_h dx, \quad \forall v_h \in V_{0h}. \quad (1.17)$$

On décompose  $u_h$  sur la base des  $(\phi_j)_{1 \leq j \leq n_{dl}}$  et on prend  $v_h = \phi_i$  ce qui donne

$$\sum_{j=1}^{n_{dl}} u_h(\hat{a}_j) \int_{\Omega} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i dx = \int_{\Omega} f \phi_i dx.$$

En notant  $U_h = (u_h(\hat{a}_j))_{1 \leq j \leq n_{dl}}$ ,  $b_h = (\int_{\Omega} f \phi_i dx)_{1 \leq i \leq n_{dl}}$ , et en introduisant la **matrice de rigidité**

$$\mathcal{K}_h = \left( \int_{\Omega} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i dx \right)_{1 \leq i, j \leq n_{dl}},$$

la formulation variationnelle dans  $V_{0h}$  revient à résoudre dans  $\mathbb{R}^{n_{dl}}$  le système linéaire

$$\mathcal{K}_h U_h = b_h.$$

Comme les fonctions de base  $\phi_j$  ont un "petit" support autour du noeud  $\hat{a}_i$  (voir la Figure 1.6), l'intersection des supports de  $\phi_j$  et  $\phi_i$  est souvent vide et la plupart des coefficients de  $\mathcal{K}_h$  sont nuls. On dit que la matrice  $\mathcal{K}_h$  est **creuse**.

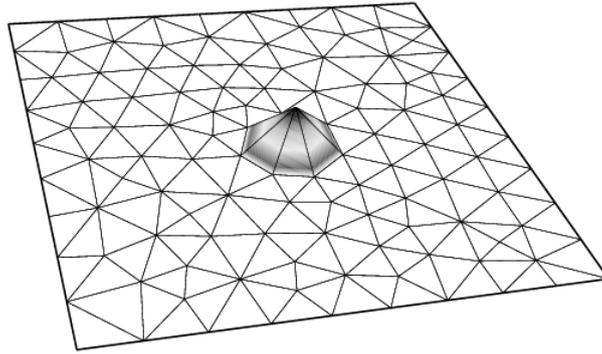


FIGURE 1.6 – Fonction de base  $\mathbb{P}_1$  en dimension  $N = 2$ .

Pour calculer les coefficients de  $\mathcal{K}_h$ , on peut utiliser la formule d'intégration exacte suivante. On note  $(\lambda_i(x))_{1 \leq i \leq N+1}$  les coordonnées barycentriques du point courant  $x$  d'un  $N$ -simplexe  $K$ . Pour tout  $\alpha_1, \dots, \alpha_{N+1} \in \mathbb{N}$ , on a

$$\int_K \lambda_1(x)^{\alpha_1} \dots \lambda_{N+1}(x)^{\alpha_{N+1}} dx = \text{Volume}(K) \frac{\alpha_1! \dots \alpha_{N+1}! N!}{(\alpha_1 + \dots + \alpha_{N+1} + N)!}. \quad (1.18)$$

Pour calculer le second membre  $b_h$  (et même éventuellement la matrice  $\mathcal{K}_h$ ), on utilise des **formules de quadrature** (ou formules d'intégration numérique) qui donnent une approximation des intégrales sur chaque  $N$ -simplexe  $K_i \in \mathcal{T}_h$ . Par exemple, si  $K$  est un  $N$ -simplexe de sommets  $(a_i)_{1 \leq i \leq N+1}$ , les formules suivantes généralisent les formules en dimension 1, dites du "point milieu" et des "trapèzes" :

$$\int_K \psi(x) dx \approx \text{Volume}(K) \psi(a_0), \quad (1.19)$$

avec  $a_0 = (N+1)^{-1} \sum_{i=1}^{N+1} a_i$ , le barycentre de  $K$ , et

$$\int_K \psi(x) dx \approx \frac{\text{Volume}(K)}{N+1} \sum_{i=1}^{N+1} \psi(a_i). \quad (1.20)$$

Comme le montre l'Exercice 4, ces formules sont exactes pour des fonctions affines et sont donc approchées à l'ordre 2 en  $h$  pour des fonctions régulières.

La construction de la matrice  $\mathcal{K}_h$  est appelée **assemblage de la matrice**. La mise en oeuvre informatique de cette étape du calcul peut être assez compliquée, mais son coût en terme de temps de calcul est faible. Ce n'est pas le cas de la résolution du système linéaire  $\mathcal{K}_h U_h = b_h$  qui est l'étape la **plus coûteuse** de la méthode en temps de calcul (et en place mémoire). En particulier, les calculs tridimensionnels sont encore très chers de nos jours dès que l'on utilise des maillages fins. L'Exercice 4 permet de s'en rendre compte. Heureusement, la matrice de rigidité  $\mathcal{K}_h$  est **creuse** (c'est-à-dire que la plupart de ses éléments sont nuls), ce qui permet de minimiser les calculs. Rappelons que la matrice  $\mathcal{K}_h$  est nécessairement inversible par application du Lemme 5.1 et qu'elle est symétrique.

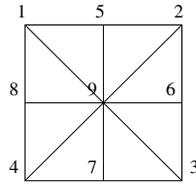


FIGURE 1.7 – Exemple de maillage et de numérotation des noeuds.

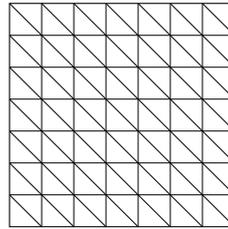


FIGURE 1.8 – Maillage triangulaire uniforme d'un carré.

## V Pour aller plus loin...

### V.1 Éléments finis rectangulaires

Si le domaine  $\Omega$  est de type rectangulaire (c'est-à-dire que  $\Omega$  est un ouvert polyédrique dont les faces sont perpendiculaires aux axes), on peut le mailler par des rectangles (voir la Figure 1.9) et utiliser une méthode d'éléments finis adaptée. Nous allons définir des éléments finis de type Lagrange (c'est-à-dire dont les degrés de liberté sont des valeurs ponctuelles de fonctions), dits éléments finis  $\mathbb{Q}_k$ . Commençons par définir un  $N$ -rectangle  $K$  de  $\mathbb{R}^N$  comme le pavé (non-dégénéré)  $\prod_{i=1}^N [l_i, L_i]$  avec  $-\infty < l_i < L_i < +\infty$ . On note  $(a_j)_{1 \leq j \leq 2^N}$  les sommets de  $K$ .

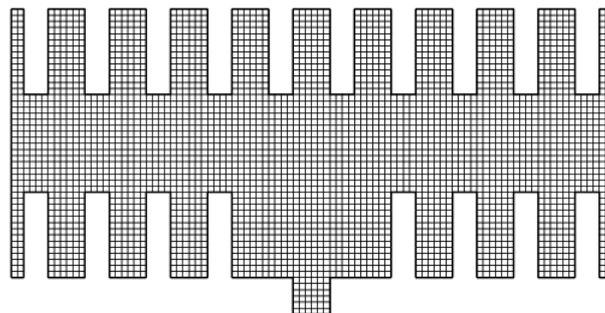


FIGURE 1.9 – Exemple de maillage rectangulaire en dimension  $N = 2$ .

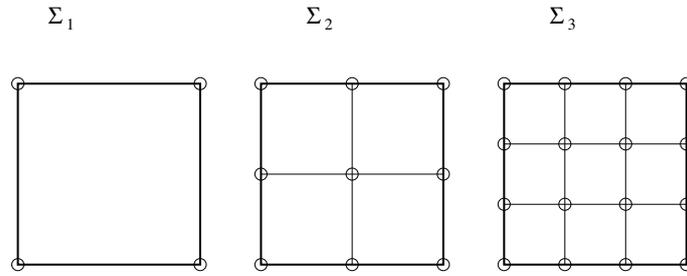


FIGURE 1.10 – Treillis d'ordre 1, 2, et 3 pour un rectangle (les ronds représentent les points du treillis).

**Définition 1.14.**

Soit  $\Omega$  un ouvert connexe polyédrique de  $\mathbb{R}^N$ . Un **maillage rectangulaire** de  $\overline{\Omega}$  est un ensemble  $\mathcal{T}_h$  de  $N$ -rectangles (non dégénérés)  $(K_i)_{1 \leq i \leq n}$  qui vérifient

- 1  $K_i \subset \overline{\Omega}$  et  $\overline{\Omega} = \cup_{i=1}^n K_i$ ,
- 2 l'intersection  $K_i \cap K_j$  de deux  $N$ -rectangles distincts est un  $m$ -rectangle, avec  $0 \leq m \leq N - 1$ , dont tous les sommets sont aussi des sommets de  $K_i$  et  $K_j$ . (En dimension  $N = 2$ , l'intersection de deux rectangles est soit vide, soit un sommet commun, soit une face commune entière.)

Les **sommets** ou **noeuds** du maillage  $\mathcal{T}_h$  sont les sommets des  $N$ -rectangles  $K_i$  qui le composent. Par convention, le paramètre  $h$  désigne le maximum des diamètres des  $N$ -rectangles  $K_i$ .

Nous définissons l'ensemble  $\mathbb{Q}_k$  des polynômes à coefficients réels de  $\mathbb{R}^N$  dans  $\mathbb{R}$  de degré inférieur ou égal à  $k$  **par rapport à chaque variable**, c'est-à-dire que tout  $p \in \mathbb{Q}_k$  s'écrit sous la forme

$$p(x) = \sum_{0 \leq i_1 \leq k, \dots, 0 \leq i_N \leq k} \alpha_{i_1, \dots, i_N} x_1^{i_1} \cdots x_N^{i_N} \text{ avec } x = (x_1, \dots, x_N).$$

Remarquons que le degré total de  $p$  peut être supérieur à  $k$ , ce qui différencie l'espace  $\mathbb{Q}_k$  de  $\mathbb{P}_k$ . Pour tout entier  $k \geq 1$  on définit le **treillis d'ordre  $k$**  du  $N$ -rectangle  $K$  comme l'ensemble

$$\Sigma_k = \left\{ x \in K \text{ tel que } \frac{x_j - l_j}{L_j - l_j} \in \left\{ 0, \frac{1}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}, 1 \right\} \text{ pour } 1 \leq j \leq N \right\}. \quad (1.21)$$

Pour  $k = 1$  il s'agit de l'ensemble des sommets de  $K$ , et pour  $k = 2$  et  $N = 2$  des sommets, des points milieu des arêtes reliant deux sommets, et du barycentre (voir la Figure 1.10).

Le treillis  $\Sigma_k$  d'un  $N$ -rectangle  $K$  est **unisolvant** pour  $\mathbb{Q}_k$ , c'est-à-dire qu'il permet de caractériser tous les polynômes de  $\mathbb{Q}_k$ .

**Lemme 1.15.**

Soit  $K$  un  $N$ -rectangle. Soit un entier  $k \geq 1$ . Alors, tout polynôme de  $\mathbb{Q}_k$  est déterminé de manière unique par ses valeurs aux points du treillis d'ordre  $k$ ,  $\Sigma_k$ , défini par (1.21).

**Démonstration.** On vérifie que le cardinal de  $\Sigma_k$  et la dimension de  $\mathbb{Q}_k$  coïncident

$$\text{card}(\Sigma_k) = \dim(\mathbb{Q}_k) = (k + 1)^N.$$

Comme l'application qui, à tout polynôme de  $\mathbb{Q}_k$ , fait correspondre ses valeurs sur le treillis  $\Sigma_k$  est linéaire, il suffit d'exhiber une base de  $\mathbb{Q}_k$  dont les éléments valent 1 en un point du treillis et 0

ailleurs pour démontrer le résultat. Soit un point  $x^\mu$  de  $\Sigma_k$  défini par

$$\frac{x_j^\mu - l_j}{L_j - l_j} = \frac{\mu_j}{k} \text{ avec } 0 \leq \mu_j \leq k, \forall j \in \{1, \dots, N\}.$$

On définit le polynôme  $p \in \mathbb{Q}_k$  par

$$p(x) = \prod_{j=1}^N \left( \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq \mu_j}}^k \frac{k(x_j - l_j) - i(L_j - l_j)}{(\mu_j - i)(L_j - l_j)} \right) \text{ avec } x = (x_1, \dots, x_N).$$

On vérifie facilement que  $p(x^\mu) = 1$  tandis que  $p$  s'annule sur tous les autres points de  $\Sigma_k$ , ce qui est le résultat désiré.  $\square$

Comme dans le cas triangulaire nous avons la condition suivante de continuité à travers une face (nous laissons la démonstration, tout à fait similaire à celle du Lemme 1.9, au lecteur).

**Lemme 1.16.**

Soit  $K$  et  $K'$  deux  $N$ -rectangles ayant une face commune  $\Gamma = \partial K \cap \partial K'$ . Soit un entier  $k \geq 1$ . Alors, leur treillis d'ordre  $k$   $\Sigma_k$  et  $\Sigma'_k$  coïncident sur cette face  $\Gamma$ . De plus, étant donné  $p_K$  et  $p_{K'}$  deux polynômes de  $\mathbb{Q}_k$ , la fonction  $v$  définie par

$$v(x) = \begin{cases} p_K(x) & \text{si } x \in K \\ p_{K'}(x) & \text{si } x \in K' \end{cases}$$

est continue sur  $K \cup K'$ , si et seulement si  $p_K$  et  $p_{K'}$  ont des valeurs qui coïncident aux points du treillis sur la face commune  $\Gamma$ .

En pratique, on utilise surtout les espaces  $\mathbb{Q}_1$  et  $\mathbb{Q}_2$ . La Figure 1.11 montre une fonction de base  $\mathbb{Q}_1$  en dimension  $N = 2$  (on peut y vérifier que les fonctions de  $\mathbb{Q}_1$  ne sont pas affines par morceaux comme celles de  $\mathbb{P}_1$ ).

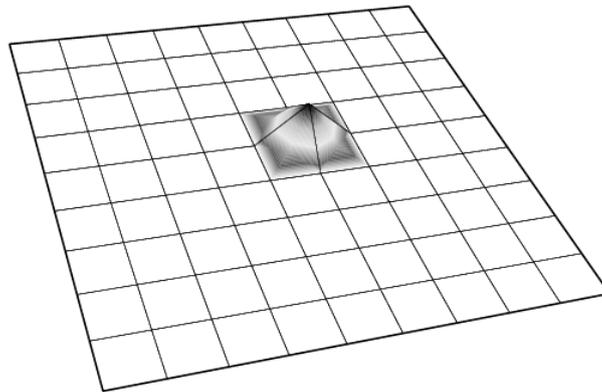


FIGURE 1.11 – Fonction de base  $\mathbb{Q}_1$  en dimension  $N = 2$ .

**Définition 1.17.**

Étant donné un maillage rectangulaire  $\mathcal{T}_h$  d'un ouvert  $\Omega$ , la méthode des éléments finis  $\mathbb{Q}_k$  est définie par l'espace discret

$$V_h = \left\{ v \in C(\overline{\Omega}) \text{ tel que } v|_{K_i} \in \mathbb{Q}_k \text{ pour tout } K_i \in \mathcal{T}_h \right\}. \quad (1.22)$$

On appelle noeuds des **degrés de liberté** l'ensemble des points  $(\hat{a}_i)_{1 \leq i \leq n_{dl}}$  des treillis d'ordre  $k$  de chacun des  $N$ -rectangles  $K_i \in \mathcal{T}_h$ .

Comme dans le cas triangulaire, la Définition 1.17 a un sens grâce à la proposition suivante (dont nous laissons la démonstration au lecteur en guise d'exercice).

**Proposition 1.18.**

L'espace  $V_h$ , défini par (1.22), est un sous-espace de  $C^0(\Omega)$  dont la dimension est le nombre de degrés de liberté  $n_{dl}$ . De plus, il existe une base de  $V_h$   $(\phi_i)_{1 \leq i \leq n_{dl}}$  définie par

$$\phi_i(\hat{a}_j) = \delta_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq n_{dl},$$

telle que

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n_{dl}} v(\hat{a}_i) \phi_i(x).$$

**V.2 Notes historiques**

La méthode des éléments finis est née dans l'industrie aéronautique et plus spécialement autour des équipes de recherche et développement de Boeing, dans les années 50. Ce n'est pas si surprenant puisque seule quelques grandes entreprises étaient en mesure de s'équiper de moyens digitaux indispensables à l'application de la méthode. Les premières publications sur le sujet remontent certainement à Turner, puis Argyris et Kelsey (voir par exemple [33, 3]) et traitent de la méthode de rigidité directe ("*direct stiffness method*"). Le vocabulaire "éléments fini" est dû à Clough [13] et la notion a été ensuite largement développée, en particulier par Zienkiewicz, puis au cours des années 70 par Strang et Fix, Aubin et Ciarlet [34, 31, 11] qui jetèrent les bases mathématiques de la méthode. Elle s'est très largement développée depuis jusqu'à envahir la plupart des domaines de l'ingénierie, des sciences appliquées ou même des marchés financiers. De nos jours, la méthode des éléments finis est implanté dans de nombreux logiciels commerciaux ou académiques. Elle reste un objet d'étude aussi bien qu'un outil de simulation "en aveugle" et connaît toujours de nombreux développements plus spécifiques (maillages mobiles ou déformables, problèmes tridimensionnels, applications sur des machines massivement parallèles ou des cartes graphiques, etc.).

**V.3 Maillage uniforme ou non uniforme**

Un des gros intérêts de la méthode des éléments finis par rapport à la méthode des différences finies est la souplesse due à l'utilisation d'un maillage. La méthode fonctionne dès que l'on est capable de fournir un maillage. Cette souplesse a un inconvénient qui est que les résultats peuvent dépendre fortement du maillage. La règle grossière consiste à retenir qu'il faut que le maillage soit "adapté" à la solution (qui pour l'instant est inconnue). En particulier nous devons pouvoir avoir suffisamment de points dans le maillage dans les zones où la solution varie beaucoup de façon à ce que l'approximation que l'on calcule puisse être de bonne qualité. Le maillage n'ayant pas besoin d'être uniforme, on essaiera de "raffiner" le maillage dans des zones où la solution exacte varie beaucoup, éventuellement en recalculant des maillages mieux adaptés en fonction de solutions calculées précédemment. Pour illustrer ce propos, nous considérons le problème suivant

$$\begin{cases} -\epsilon u'' + u' = 1 \text{ sur } ]0, 1[, \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (1.23)$$

où  $\epsilon > 0$  est un (petit) paramètre, dont la solution se calcule explicitement et est donnée par

$$u(x) = -\frac{\exp\left(\frac{x}{\epsilon}\right) - 1}{\exp\left(\frac{1}{\epsilon}\right) - 1} + x.$$

La figure 1.12 présente deux calculs effectués en résolvant par la méthode des éléments finis  $\mathbb{P}_1$  mais sur deux maillages différents. On remarque que sur le maillage uniforme, la solution calculée présente des oscillations qui ne correspondent pas à la solution exacte. Sur le maillage adapté et raffiné au voisinage de 1, la solution est de bien meilleure qualité. Pourtant le maillage est plus grossier et possède moins de points.

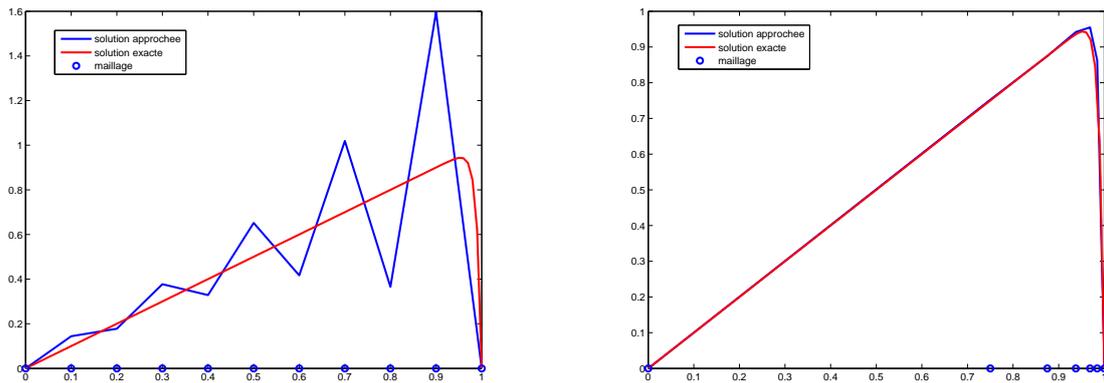


FIGURE 1.12 – La méthode des éléments finis avec deux maillages. On a pris  $\epsilon = 0.01$  et un maillage uniforme à gauche, tandis que pour la figure de droite le maillage n'est plus uniforme. Dans les deux figures, la solution exacte est en rouge, celle approchée, en bleu.

- 01** Soit  $K$  un  $N$ -simplexe de sommets  $(a_j)_{1 \leq j \leq N+1}$ . Montrer que tout polynôme  $p \in \mathbb{P}_1$  se met sous la forme

$$p(x) = \sum_{j=1}^{N+1} p(a_j) \lambda_j(x),$$

où les  $(\lambda_j(x))_{1 \leq j \leq N+1}$  sont les coordonnées barycentriques de  $x \in \mathbb{R}^N$ .

- 02** Soit  $K$  un  $N$ -simplexe de sommets  $(a_j)_{1 \leq j \leq N+1}$ . On définit les points milieux  $(a_{jj'})_{1 \leq j < j' \leq N+1}$  des arêtes de  $K$  par leur coordonnées barycentriques

$$\lambda_j(a_{jj'}) = \lambda_{j'}(a_{jj'}) = \frac{1}{2}, \quad \lambda_l(a_{jj'}) = 0 \text{ pour } l \neq j, j'.$$

Vérifier que  $\Sigma_2$  est précisément constitué des sommets et des points milieux des arêtes et que tout polynôme  $p \in \mathbb{P}_2$  se met sous la forme

$$p(x) = \sum_{j=1}^{N+1} p(a_j) \lambda_j(x) (2\lambda_j(x) - 1) + \sum_{1 \leq j < j' \leq N+1} 4p(a_{jj'}) \lambda_j(x) \lambda_{j'}(x),$$

où les  $(\lambda_j(x))_{1 \leq j \leq N+1}$  sont les coordonnées barycentriques de  $x \in \mathbb{R}^N$ .

- 03** Démontrer la formule (1.18) en dimension  $N = 2$ .

- 04** Montrer que les formules (1.19) et (1.20) sont exactes pour  $\psi \in \mathbb{P}_1$ .

- 05** On considère le carré  $\Omega = ]-1, +1[^2$  maillé suivant la Figure 1.7. Calculer la matrice de rigidité  $\mathcal{K}_h$  des éléments finis  $\mathbb{P}_1$  appliqués au Laplacien avec condition aux limites de Neumann (on utilisera les symétries du maillage).

- 06** Appliquer la méthode des éléments finis  $\mathbb{P}_1$  au problème de Dirichlet (1.10) dans le carré  $\Omega = ]0, 1[^2$  avec le maillage triangulaire uniforme de la Figure 1.8. Montrer que la matrice de rigidité  $\mathcal{K}_h$  est la même matrice que celle que l'on obtiendrait par application de la méthode des différences finies (à un facteur multiplicatif  $h^2$  près), mais que le second membre  $b_h$  est différent.

- 07** On reprend les notations de l'Exercice 3. On note  $n$  le nombre de points du maillage sur un coté du carré (supposé être le même pour chaque coté). On numérote "ligne par ligne" les noeuds du maillage (ou les degrés de liberté). Montrer que la matrice de rigidité  $\mathcal{K}_h$  des éléments finis  $\mathbb{P}_1$  est de taille de l'ordre de  $n^2$  et de largeur de bande de l'ordre de  $2n$  (pour  $n$  grand).

Montrer que la même méthode et le même type de maillage pour le cube  $\Omega = ]0, 1[^3$  conduisent à une matrice de taille de l'ordre de  $n^3$  et de largeur de bande de l'ordre de  $2n^2$  (où  $n$  est le nombre de noeuds le long d'une arête du cube  $\Omega$ ).

L'exercice suivant montre que la méthode des éléments finis  $\mathbb{P}_1$  vérifie le principe du maximum.

**08** On dit qu'une matrice carrée réelle  $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  est une M-matrice si, pour tout  $i$ ,

$$b_{ii} > 0, \quad \sum_{k=1}^n b_{ik} > 0, \quad b_{ij} \leq 0 \quad \forall j \neq i.$$

Montrer que toute M-matrice est inversible et que tous les coefficients de son inverse sont positifs ou nuls.

**09** On se place en dimension  $N = 2$ . Soit  $u_h$  la solution approchée du problème de Dirichlet (1.10) obtenue par la méthode des éléments finis  $\mathbb{P}_1$ . On suppose que tous les angles des triangles  $K_i \in \mathcal{T}_h$  sont inférieurs ou égaux à  $\pi/2$ . Montrer que  $u_h(x) \geq 0$  dans  $\Omega$  si  $f(x) \geq 0$  dans  $\Omega$ . Indication : on montrera que, pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $\mathcal{K}_h + \epsilon \text{Id}$  est une M-matrice, où  $\mathcal{K}_h$  est la matrice de rigidité.

## FORMULATION VARIATIONNELLE DES PROBLÈMES ELLIPTIQUES

### I Généralités

L'approximation par éléments finis de certaines équations aux dérivées partielles pose naturellement plusieurs questions. La première est celle de l'existence de solution à l'équation que l'on souhaite résoudre. En effet, si l'équation n'a pas de solution, que calcule-t-on numériquement? Néanmoins, même si le problème que l'on étudie possède une solution, ce n'est pas suffisant. Il faut également que cette solution varie continûment (dans un sens à préciser) en fonction des données. En effet, en pratique, les données du problème ne sont connues qu'approximativement et on ne souhaite pas que la solution que l'on calcule numériquement soit trop éloignée de la solution exacte. Enfin, on souhaiterait pouvoir quantifier l'erreur commise par la méthode en fonction des éléments à notre disposition (typiquement le maillage, le second membre de l'équation, la donnée au bord, etc.).

Dans ce chapitre nous nous intéressons à l'analyse mathématique des **équations aux dérivées partielles de type elliptique** qui correspondent à des modèles physiques stationnaires, c'est-à-dire indépendants du temps. Nous allons montrer que les problèmes aux limites sont bien posés pour ces e.d.p. elliptiques, c'est-à-dire qu'elles admettent une solution, unique, et dépendant continûment des données. L'approche que nous allons suivre est appelée **approche variationnelle**. Elle généralise en dimension infinie l'approche effectuée dans le premier chapitre. Disons tout de suite que l'intérêt de cette approche dépasse, et de loin, le cadre des e.d.p. elliptiques et même le cadre d'analyse mathématique "pure" auquel nous nous restreignons pour l'instant. En effet, elle sera cruciale pour comprendre la méthode numérique des éléments finis que nous avons vu. Par ailleurs, cette approche admet une interprétation physique ou mécanique très naturelle. Autant dire que le lecteur ne peut pas faire l'économie de la présentation qui suit de cette approche variationnelle!

Au cours de ce chapitre, nous utiliserons l'exemple déjà vu du Laplacien (1.10), qui est le prototype d'équation aux dérivées partielles de type elliptique que nous rappellerons ci-dessous

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

où nous imposons des conditions aux limites de Dirichlet. Dans (2.1),  $\Omega$  est un ouvert de l'espace  $\mathbb{R}^N$ ,  $\partial\Omega$  est son bord (ou frontière),  $f$  est un second membre (une donnée du problème), et  $u$  est l'inconnue. Bien sûr, nous donnerons au Chapitre 4 de nombreux autres exemples d'équations aux dérivées partielles de type elliptique qui peuvent s'étudier grâce à l'approche variationnelle.

#### Définition 2.1.

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ ,  $\overline{\Omega}$  sa fermeture. On note  $C(\Omega)$  (respectivement,  $C(\overline{\Omega})$ ) l'espace des fonctions continues dans  $\Omega$  (respectivement, dans  $\overline{\Omega}$ ). Soit un entier  $k \geq 0$ . On note  $C^k(\Omega)$  (respectivement,  $C^k(\overline{\Omega})$ ) l'espace des fonctions  $k$  fois continûment dérivables dans  $\Omega$  (respectivement, dans  $\overline{\Omega}$ ).

Une **solution classique** (on parle aussi de **solution forte**) de (2.1) est une solution  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ , ce qui implique que le second membre  $f$  doit appartenir à  $C(\Omega)$ . Cette formulation classique pose malheureusement un certain nombre de problèmes pour démontrer l'existence d'une solution. C'est pourquoi nous remplacerons la formulation classique de (2.1) par une formulation, dite variationnelle, beaucoup plus avantageuse que nous avons déjà croisée, au moins dans des cas particuliers au chapitre précédent.

Le plan de ce chapitre est le suivant. Dans la Section II nous rappelons quelques formules d'intégration par parties, dites **formules de Green**, puis nous définissons ce qu'est une **formulation variationnelle**. La Section III est consacrée au **théorème de Lax-Milgram** qui sera l'outil essentiel permettant de démontrer des résultats d'existence et d'unicité de solutions de formulation variationnelle. Nous verrons que pour pouvoir appliquer ce théorème il est inéluctable de devoir abandonner l'espace  $C^1(\overline{\Omega})$  des fonctions continûment différentiables au profit de sa "généralisation", l'espace de Sobolev  $H^1(\Omega)$ .

## II Approche variationnelle

Le principe de l'approche variationnelle pour la résolution des équations aux dérivées partielles est de remplacer l'équation par une formulation équivalente, dite variationnelle, obtenue en intégrant l'équation multipliée par une fonction quelconque, dite test. Comme il est nécessaire de procéder à des intégrations par parties dans l'établissement de la formulation variationnelle, nous commençons par donner quelques résultats essentiels à ce sujet.

### II.1 Formules de Green

Dans toute cette sous-section  $\Omega$  est un ouvert de l'espace  $\mathbb{R}^N$  (borné ou non), dont le bord (ou la frontière) est noté  $\partial\Omega$ . Nous supposons aussi que  $\Omega$  est un ouvert **régulier** de classe  $C^1$ . La définition précise d'un ouvert régulier est donné plus bas dans la Définition 2.14 au paragraphe IV.1, mais sa connaissance n'est absolument pas nécessaire pour la bonne compréhension de la suite de ce cours. Il suffit juste de savoir qu'un ouvert régulier est *grosso modo* un ouvert dont le bord est une hypersurface (une variété de dimension  $N - 1$ ) régulière, et que cet ouvert est localement situé d'un seul côté de sa frontière. On définit alors la **normale extérieure** au bord  $\partial\Omega$  comme étant le vecteur unité  $n = (n_i)_{1 \leq i \leq N}$  normal en tout point au plan tangent de  $\Omega$  et pointant vers l'extérieur de  $\Omega$ . Dans  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  on note  $dx$  la mesure volumique, ou mesure de Lebesgue de dimension  $N$ . Sur  $\partial\Omega$ , on note  $ds$  la mesure surfacique, ou mesure de Lebesgue de dimension  $N - 1$  sur la variété  $\partial\Omega$ . Le résultat principal de cette sous-section est le théorème suivant que nous admettrons (voir le théorème 5.4.9

dans [7]).

### Théorème 2.2.

[Formule de Green] Soit  $\Omega$  un ouvert régulier de classe  $C^1$ . Soit  $w$  une fonction de  $C^1(\overline{\Omega})$  à support borné dans le fermé  $\overline{\Omega}$ . Alors elle vérifie la formule de Green

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i}(x) dx = \int_{\partial\Omega} w(x) n_i(x) ds, \quad (2.2)$$

où  $n_i$  est la  $i$ -ème composante de la normale extérieure unité de  $\Omega$ .

### Remarque 2.3.

Dire qu'une fonction régulière  $w$  a son support borné dans le fermé  $\overline{\Omega}$  veut dire qu'elle s'annule à l'infini si le fermé n'est pas borné. On dit aussi que la fonction  $w$  a un support compact dans  $\overline{\Omega}$  (attention : cela n'implique pas que  $w$  s'annule sur le bord  $\partial\Omega$ ). En particulier, l'hypothèse du Théorème 2.2 à propos du support borné de la fonction  $w$  dans  $\overline{\Omega}$  est inutile si l'ouvert  $\Omega$  est borné. Si  $\Omega$  n'est pas borné, cette hypothèse assure que les intégrales dans (2.2) sont finies.

Le Théorème 2.2 a de nombreux corollaires qui sont tous des conséquences immédiates de la formule de Green (2.2). Le lecteur qui voudra économiser sa mémoire ne retiendra donc que la formule de Green (2.2)! Toutefois, nous ne saurions trop conseiller d'apprendre (par cœur) la formule de Green du Corollaire 2.5 ci-dessous.

### Corollaire 2.4.

[Formule d'intégration par parties] Soit  $\Omega$  un ouvert régulier de classe  $C^1$ . Soit  $u$  et  $v$  deux fonctions de  $C^1(\overline{\Omega})$  à support borné dans le fermé  $\overline{\Omega}$ . Alors elles vérifient la formule d'intégration par parties

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} v(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) dx + \int_{\partial\Omega} u(x) v(x) n_i(x) ds. \quad (2.3)$$

**Démonstration.** Il suffit de prendre  $w = uv$  dans le Théorème 2.2. □

### Corollaire 2.5.

Soit  $\Omega$  un ouvert régulier de classe  $C^1$ . Soit  $u$  une fonction de  $C^2(\overline{\Omega})$  et  $v$  une fonction de  $C^1(\overline{\Omega})$ , toutes deux à support borné dans le fermé  $\overline{\Omega}$ . Alors elles vérifient la formule d'intégration par parties

$$\int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) dx = - \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x) v(x) ds, \quad (2.4)$$

où  $\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)_{1 \leq i \leq N}$  est le vecteur gradient de  $u$ , et  $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n$ .

**Démonstration.** On applique le Corollaire 2.4 à  $v$  et  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  et on somme en  $i$ . □

## II.2

### Formulation variationnelle

Pour simplifier la présentation, nous supposons que l'ouvert  $\Omega$  est borné et régulier, et que le second membre  $f$  de (2.1) est continu sur  $\overline{\Omega}$ . Le résultat principal de cette sous-section est la proposition

suivante.

**Proposition 2.6.**

Soit  $u$  une fonction de  $C^2(\overline{\Omega})$ . Soit  $X$  l'espace défini par

$$X = \{ \phi \in C^1(\overline{\Omega}) \text{ tel que } \phi = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}.$$

Alors  $u$  est une solution du problème aux limites (2.1) si et seulement si  $u$  appartient à  $X$  et vérifie l'égalité

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx \text{ pour toute fonction } v \in X. \quad (2.5)$$

L'égalité (2.5) est appelée la **formulation variationnelle** du problème aux limites (2.1).

**Remarque 2.7.**

Un intérêt immédiat de la formulation variationnelle (2.5) est qu'elle a un sens si la solution  $u$  est seulement une fonction de  $C^1(\overline{\Omega})$ , contrairement à la formulation "classique" (2.1) qui requiert que  $u$  appartienne à  $C^2(\overline{\Omega})$ . On pressent donc déjà qu'il est plus simple de résoudre (2.5) que (2.1) puisqu'on est moins exigeant sur la régularité de la solution.

Dans la formulation variationnelle (2.5), la fonction  $v$  est appelée **fonction test**. La formulation variationnelle est aussi parfois appelée formulation faible du problème aux limites (2.1). En mécanique, la formulation variationnelle est connue sous le nom de "principe des travaux virtuels". En physique, on parle aussi d'équation de bilan ou de formule de réciprocité.

Lorsqu'on prend  $v = u$  dans (2.5), on obtient ce qu'il est convenu d'appeler une **égalité d'énergie**, qui exprime généralement l'égalité entre une énergie stockée dans le domaine  $\Omega$  (le terme de gauche de (2.5)) et une énergie potentielle associée à  $f$  (le terme de droite de (2.5)).

**Démonstration.** Si  $u$  est solution du problème aux limites (2.1), on multiplie l'équation par  $v \in X$  et on utilise la formule d'intégration par parties du Corollaire 2.5

$$\int_{\Omega} \Delta u(x)v(x) dx = - \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x)v(x) ds.$$

Or  $v = 0$  sur  $\partial\Omega$  puisque  $v \in X$ , donc

$$\int_{\Omega} f(x)v(x) dx = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx,$$

qui n'est rien d'autre que la formule (2.5). Réciproquement, si  $u \in X$  vérifie (2.5), en utilisant "à l'envers" la formule d'intégration par parties précédente on obtient

$$\int_{\Omega} (\Delta u(x) + f(x))v(x) dx = 0 \text{ pour toute fonction } v \in X.$$

Comme  $(\Delta u + f)$  est une fonction continue, grâce au Lemme 2.8 on conclut que  $-\Delta u(x) = f(x)$  pour tout  $x \in \Omega$ . Par ailleurs, comme  $u \in X$ , on retrouve la condition aux limites  $u = 0$  sur  $\partial\Omega$ , c'est-à-dire que  $u$  est solution du problème aux limites (2.1).  $\square$

**Lemme 2.8.**

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ . Soit  $g(x)$  une fonction continue dans  $\Omega$ . Si pour toute fonction  $\phi$  de  $C^\infty(\Omega)$  à support compact dans  $\Omega$ , on a

$$\int_{\Omega} g(x)\phi(x) dx = 0,$$

alors la fonction  $g$  est nulle dans  $\Omega$ .

**Démonstration.** Supposons qu'il existe un point  $x_0 \in \Omega$  tel que  $g(x_0) \neq 0$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que  $g(x_0) > 0$  (sinon on prend  $-g$ ). Par continuité, il existe un petit voisinage ouvert  $\omega \subset \Omega$  de  $x_0$  tel que  $g(x) > 0$  pour tout  $x \in \omega$ . Soit alors une fonction test positive, non nulle,  $\phi$  à support inclus dans  $\omega$ . On a

$$\int_{\Omega} g(x)\phi(x) dx = \int_{\omega} g(x)\phi(x) dx = 0,$$

qui est une contradiction avec l'hypothèse sur  $g$ . Donc  $g(x) = 0$  pour tout  $x \in \Omega$ .  $\square$

### Remarque 2.9.

En notation compacte on peut réécrire la formulation variationnelle (2.5) sous la forme : trouver  $u \in X$  tel que

$$a(u, v) = L(v) \text{ pour toute fonction } v \in X,$$

avec

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx$$

et

$$L(v) = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx,$$

où  $a(\cdot, \cdot)$  est une forme bilinéaire sur  $X$  et  $L(\cdot)$  est une forme linéaire sur  $X$ . C'est sous cette forme abstraite que nous résoudrons (avec quelques hypothèses) la formulation variationnelle dans la prochaine section.

L'idée principale de l'**approche variationnelle** est de montrer l'existence et l'unicité de la solution de la formulation variationnelle (2.5), ce qui entraînera le même résultat pour l'équation (2.1) à cause de la Proposition 2.6. En effet, nous allons voir qu'il existe une théorie à la fois simple et puissante pour analyser les formulations variationnelles. Néanmoins cette théorie ne fonctionne que si l'espace dans lequel on cherche la solution et dans lequel on prend les fonctions tests (dans les notations précédentes, l'espace  $X$ ) est un espace de Hilbert, ce qui n'est pas le cas pour  $X = \{v \in C^1(\overline{\Omega}), v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$  muni du produit scalaire "naturel" pour ce problème. La principale difficulté dans l'application de l'approche variationnelle sera donc qu'il faudra utiliser un autre espace que  $X$ , à savoir l'espace de Sobolev  $H_0^1(\Omega)$  qui est bien un espace de Hilbert (voir le Chapitre 3).

## III Théorie de Lax-Milgram

### III.1 Cadre abstrait

Nous décrivons une théorie abstraite pour obtenir l'existence et l'unicité de la solution d'une formulation variationnelle dans un espace de Hilbert réel  $V$ . Rappelons qu'un espace de Hilbert réel est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ , muni d'un produit scalaire, noté  $\langle x, y \rangle$ , qui est complet pour la norme associée à ce produit scalaire, notée  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ . (Un espace vectoriel normé est complet si toute suite de Cauchy est une suite convergente dont la limite appartient à cet espace.) Suivant la Remarque 2.9 nous considérons une formulation variationnelle du type :

$$\text{trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = L(v) \text{ pour toute fonction } v \in V. \quad (2.6)$$

Les hypothèses sur  $a$  et  $L$  sont

- 1  $L(\cdot)$  est une forme linéaire continue sur  $V$ , c'est-à-dire que  $v \rightarrow L(v)$  est linéaire de  $V$  dans  $\mathbb{R}$  et il existe  $C > 0$  tel que

$$|L(v)| \leq C\|v\| \text{ pour tout } v \in V;$$

2  $a(\cdot, \cdot)$  est une forme bilinéaire sur  $V$ , c'est-à-dire que  $w \rightarrow a(w, v)$  est une forme linéaire de  $V$  dans  $\mathbb{R}$  pour tout  $v \in V$ , et  $v \rightarrow a(w, v)$  est une forme linéaire de  $V$  dans  $\mathbb{R}$  pour tout  $w \in V$  ;

3  $a(\cdot, \cdot)$  est continue, c'est-à-dire qu'il existe  $M > 0$  tel que

$$|a(w, v)| \leq M\|w\|\|v\| \text{ pour tout } w, v \in V; \quad (2.7)$$

4  $a(\cdot, \cdot)$  est **coercive** (ou elliptique), c'est-à-dire qu'il existe  $\nu > 0$  tel que

$$a(v, v) \geq \nu\|v\|^2 \text{ pour tout } v \in V. \quad (2.8)$$

Comme nous le verrons au cours de cette sous-section, toutes les hypothèses ci-dessus sont nécessaires pour pouvoir résoudre (2.6). En particulier, la coercivité de  $a(\cdot, \cdot)$  est essentielle.

### Théorème 2.10.

**[Lax-Milgram]** Soit  $V$  un espace de Hilbert réel,  $L(\cdot)$  une forme linéaire continue sur  $V$ ,  $a(\cdot, \cdot)$  une forme bilinéaire continue coercive sur  $V$ . Alors la formulation variationnelle (2.6) admet une unique solution. De plus cette solution dépend continûment de la forme linéaire  $L$ .

**Démonstration.** Pour tout  $w \in V$ , l'application  $v \rightarrow a(w, v)$  est une forme linéaire continue sur  $V$  : par conséquent, le théorème de représentation de Riesz entraîne qu'il existe un élément de  $V$ , noté  $A(w)$ , tel que

$$a(w, v) = \langle A(w), v \rangle \text{ pour tout } v \in V.$$

Par ailleurs, la bilinéarité de  $a(w, v)$  implique évidemment la linéarité de l'application  $w \rightarrow A(w)$ . De plus, en prenant  $v = A(w)$ , la continuité (2.7) de  $a(w, v)$  montre que

$$\|A(w)\|^2 = a(w, A(w)) \leq M\|w\|\|A(w)\|,$$

c'est-à-dire que  $\|A(w)\| \leq M\|w\|$  et donc  $w \rightarrow A(w)$  est continue. Une autre application du Théorème de représentation de Riesz implique qu'il existe un élément de  $V$ , noté  $f$ , tel que  $\|f\|_V = \|L\|_{V'}$  et

$$L(v) = \langle f, v \rangle \text{ pour tout } v \in V.$$

Finalement, le problème variationnel (2.6) est équivalent à :

$$\text{trouver } u \in V \text{ tel que } A(u) = f. \quad (2.9)$$

Pour démontrer le théorème il nous faut donc montrer que l'opérateur  $A$  est bijectif de  $V$  dans  $V$  (ce qui implique l'existence et l'unicité de  $u$ ) et que son inverse est continu (ce qui prouve la dépendance continue de  $u$  par rapport à  $L$ ).

La coercivité (2.8) de  $a(w, v)$  montre que

$$\nu\|w\|^2 \leq a(w, w) = \langle A(w), w \rangle \leq \|A(w)\|\|w\|,$$

ce qui donne

$$\nu\|w\| \leq \|A(w)\| \text{ pour tout } w \in V, \quad (2.10)$$

c'est-à-dire que  $A$  est injectif. Pour montrer que  $A$  est surjectif, c'est-à-dire que  $\text{Im}(A) = V$  (ce qui n'est pas évident si  $V$  est de dimension infinie), il suffit de montrer que  $\text{Im}(A)$  est fermé dans  $V$  et que  $\text{Im}(A)^\perp = \{0\}$ . En effet, dans ce cas on voit que  $V = \{0\}^\perp = (\text{Im}(A)^\perp)^\perp = \overline{\text{Im}(A)} = \text{Im}(A)$ , ce qui prouve bien que  $A$  est surjectif. Soit  $A(w_n)$  une suite dans  $\text{Im}(A)$  qui converge vers  $b$  dans  $V$ . En vertu de (2.10) on a

$$\nu\|w_n - w_p\| \leq \|A(w_n) - A(w_p)\|$$

qui tend vers zéro quand  $n$  et  $p$  tendent vers l'infini. Donc  $w_n$  est une suite de Cauchy dans l'espace de Hilbert  $V$ , c'est-à-dire qu'elle converge vers une limite  $w \in V$ . Alors, par continuité de  $A$  on en

déduit que  $A(w_n)$  converge vers  $A(w) = b$ , c'est-à-dire que  $b \in \text{Im}(A)$  et  $\text{Im}(A)$  est donc fermé. D'autre part, soit  $v \in \text{Im}(A)^\perp$ ; la coercivité (2.8) de  $a(w, v)$  implique que

$$v\|v\|^2 \leq a(v, v) = \langle A(v), v \rangle = 0,$$

c'est-à-dire que  $v = 0$  et  $\text{Im}(A)^\perp = \{0\}$ , ce qui prouve que  $A$  est bijectif. Soit  $A^{-1}$  son inverse : l'inégalité (2.10) avec  $w = A^{-1}(v)$  prouve que  $A^{-1}$  est continu, donc la solution  $u$  dépend continûment de  $f$ .  $\square$

### Remarque 2.11.

Si l'espace de Hilbert  $V$  est de dimension finie (ce qui n'est cependant jamais le cas pour les applications que nous visons), la démonstration du Théorème 2.10 de Lax-Milgram se simplifie considérablement. En effet, en dimension finie toutes les applications linéaires sont continues et l'injectivité (2.10) de  $A$  est équivalent à son inversibilité. On voit bien dans ce cas (comme dans le cas général) que l'hypothèse de coercivité de la forme bilinéaire  $a(w, v)$  est essentielle puisque c'est elle qui donne l'injectivité de  $A$ . Remarquons pour finir que, si  $V = \mathbb{R}^N$ , une formulation variationnelle n'est que l'écriture,  $\langle Au, v \rangle = \langle f, v \rangle$  pour tout  $v \in \mathbb{R}^N$ , d'un simple système linéaire  $Au = f$ .

Une formulation variationnelle possède souvent une interprétation physique, en particulier si la forme bilinéaire est symétrique. En effet dans ce cas, la solution de la formulation variationnelle (2.6) réalise le **minimum d'une énergie** (très naturelle en physique ou en mécanique).

### Proposition 2.12.

On se place sous les hypothèses du Théorème 2.10 de Lax-Milgram. On suppose en plus que la forme bilinéaire est symétrique  $a(w, v) = a(v, w)$  pour tout  $v, w \in V$ . Soit  $J(v)$  l'énergie définie pour  $v \in V$  par

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v). \quad (2.11)$$

Soit  $u \in V$  la solution unique de la formulation variationnelle (2.6). Alors  $u$  est aussi l'unique point de minimum de l'énergie, c'est-à-dire que

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v).$$

Réciproquement, si  $u \in V$  est un point de minimum de l'énergie  $J(v)$ , alors  $u$  est la solution unique de la formulation variationnelle (2.6).

**Démonstration.** Si  $u$  est solution de la formulation variationnelle (2.6), on développe (grâce à la symétrie de  $a$ )

$$J(u+v) = J(u) + \frac{1}{2}a(v, v) + a(u, v) - L(v) = J(u) + \frac{1}{2}a(v, v) \geq J(u).$$

Comme  $u+v$  est quelconque dans  $V$ ,  $u$  minimise bien l'énergie  $J$  dans  $V$ . Réciproquement, soit  $u \in V$  tel que

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v).$$

Pour  $v \in V$  on définit une fonction  $j(t) = J(u+tv)$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  (il s'agit d'un polynôme du deuxième degré en  $t$ ). Comme  $t = 0$  est un minimum de  $j$ , on en déduit que  $j'(0) = 0$  qui, par un calcul simple, est exactement la formulation variationnelle (2.6).  $\square$

## III.2 Application au Laplacien

Essayons d'appliquer le Théorème 2.10 de Lax-Milgram à la formulation variationnelle (2.5) du Laplacien avec conditions aux limites de Dirichlet. Celle-ci s'écrit bien sous la forme (2.6) avec

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx$$

et

$$L(v) = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx,$$

où clairement  $a(\cdot, \cdot)$  est une forme bilinéaire, et  $L(\cdot)$  une forme linéaire. L'espace  $V$  (noté précédemment  $X$ ) est

$$V = \{v \in C^1(\overline{\Omega}), v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}. \quad (2.12)$$

Comme produit scalaire sur  $V$  nous choisissons

$$\langle w, v \rangle = \int_{\Omega} \nabla w(x) \cdot \nabla v(x) dx, \quad (2.13)$$

qui a pour norme associée

$$\|v\| = \left( \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

On vérifie aisément que (2.13) définit un produit scalaire sur  $V$  : le seul point qui mérite de s'y attarder est la propriété  $\|v\| = 0 \Rightarrow v = 0$ . En effet, de l'égalité

$$\int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx = 0$$

on déduit que  $v$  est une constante dans  $\Omega$ , et comme  $v = 0$  sur  $\partial\Omega$  on a bien  $v = 0$ . La motivation du choix de (2.13) comme produit scalaire est bien sûr le fait que la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  est **automatiquement coercive** pour (2.13). On vérifie par ailleurs aisément que  $a$  est continue. Pour montrer que  $L$  est continue, il faut faire appel à l'inégalité de Poincaré du Lemme 2.13 : on a alors

$$\left| \int_{\Omega} f(x)v(x)dx \right| \leq \left( \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq C\|v\|,$$

où  $C$  est une constante qui dépend de  $f$  mais pas de  $v$ . Donc  $L$  est continue sur  $V$ . Toutes les hypothèses du Théorème 2.10 de Lax-Milgram semblent vérifiées, et pourtant il en manque une qui empêche son application : l'espace  $V$  n'est pas un espace de Hilbert car il n'est pas complet pour la norme induite par (2.13)! L'obstruction ne vient pas tant du choix du produit scalaire que de l'exigence de régularité  $C^1$  des fonctions de l'espace  $V$ . Une façon immédiate, quoique peu explicite, de résoudre la difficulté est de remplacer  $V$  par  $\overline{V}$ , sa fermeture pour le produit scalaire (2.13). Évidemment, on n'a fait que déplacer la difficulté : à quoi peut bien ressembler l'espace  $\overline{V}$ ? La réponse sera apporté au Chapitre 3 :  $\overline{V}$  est l'espace de Sobolev  $H_0^1(\Omega)$  dont les éléments ne sont plus des fonctions régulières mais seulement mesurables. Une autre difficulté sera de voir en quel sens la Proposition 2.6 (qui exprime l'équivalence entre le problème aux limites (2.1) et sa formulation variationnelle (2.5)) reste vrai lorsque on remplace l'espace  $V$  par  $\overline{V}$ .

Nous espérons avoir ainsi convaincu le lecteur du **caractère naturel et inéluctable des espaces de Sobolev dans la résolution des formulations variationnelles** d'équations aux dérivées partielles elliptiques. Terminons ce chapitre par un lemme technique, appelé inégalité de Poincaré, que nous avons utilisé un peu plus haut.

**Lemme 2.13.**

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  borné dans au moins une direction de l'espace. Il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour toute fonction  $v \in C^1(\overline{\Omega})$  qui s'annule sur le bord  $\partial\Omega$ ,

$$\int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx.$$

**Démonstration.** L'hypothèse sur le caractère borné de  $\Omega$  dit (après une éventuelle rotation) que pour tout  $x \in \Omega$  la première composante  $x_1$  est bornée,  $-\infty < a \leq x_1 \leq b < +\infty$ . Soit  $v$  une fonction de  $C^1(\overline{\Omega})$

qui est nulle sur  $\partial\Omega$ . On peut l'étendre par continuité par zéro en dehors de  $\Omega$  ( $v$  est alors une fonction continue de classe  $C^1$  par morceaux dans  $\mathbb{R}^N$ ) et écrire, pour  $x \in \Omega$ ,

$$v(x) = \int_a^{x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_N) dt,$$

d'où l'on déduit par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|v(x)|^2 \leq (x_1 - a) \int_a^{x_1} \left| \frac{\partial v}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_N) \right|^2 dt \leq (b - a) \int_a^b \left| \frac{\partial v}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_N) \right|^2 dt.$$

Intégrant sur  $\Omega$  on obtient

$$\int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \leq (b - a) \int_{\Omega} \int_a^b \left| \frac{\partial v}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_N) \right|^2 dt dx,$$

et permutant les deux intégrations par rapport à  $t$  et  $x_1$ , on conclut

$$\int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \leq (b - a)^2 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_1}(x) \right|^2 dx \leq (b - a)^2 \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx.$$

□

## IV Pour aller plus loin...

### IV.1 Régularité des ouverts

Nous avons abondamment parlé de formules de Green et d'intégration sur des ouverts qui font intervenir des termes où l'on doit intégrer sur le bord de l'ouvert. Si ce bord n'est pas assez régulier (on peut penser à des bords fractals par exemple) les formules ne trouvent pas de sens direct. Dans tout ce cours, les ouverts considérés seront suffisamment réguliers de sorte que les formules d'intégration par parties de Green seront licites. Pour que le lecteur intéressé puisse comprendre les difficultés inhérentes à ces questions, nous donnons ci-après les définitions correspondantes.

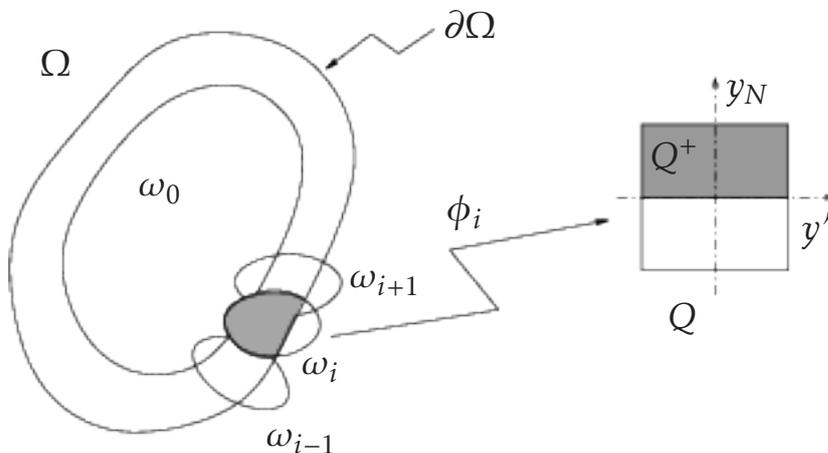


FIGURE 2.1 – Définition de la régularité d'un ouvert.

### Définition 2.14.

On dit qu'un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^N$  est régulier de classe  $C^k$  (avec un entier  $k \geq 1$ ) s'il existe un nombre fini d'ouverts  $(\omega_i)_{0 \leq i \leq I}$  tels que

$$\overline{\omega_0} \subset \Omega, \quad \overline{\Omega} \subset \bigcup_{i=0}^I \omega_i, \quad \partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^I \omega_i,$$

et que, pour chaque  $i \in \{1, \dots, I\}$  (voir la Figure 2.1), il existe une application bijective  $\phi_i$  de classe  $C^k$ , de  $\omega_i$  dans l'ensemble

$$Q = \{y = (y', y_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}, |y'| < 1, |y_N| < 1\},$$

dont l'inverse est aussi de classe  $C^k$ , et telle que

$$\begin{aligned} \phi_i(\omega_i \cap \Omega) &= Q \cap \{y = (y', y_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}, y_N > 0\} = Q^+, \\ \phi_i(\omega_i \cap \partial\Omega) &= Q \cap \{y = (y', y_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}, y_N = 0\}. \end{aligned}$$

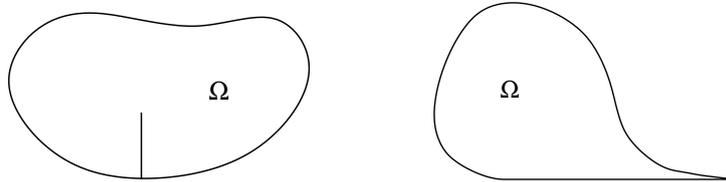


FIGURE 2.2 – Deux exemples d'ouvert non régulier : ouvert fissuré à gauche, ouvert avec un point de rebroussement à droite.

### Remarque 2.15.

Bien que la Figure 2.1 représente un ouvert régulier qui est borné, la Définition 2.14 s'applique aussi à des ouverts non bornés. La Définition 2.14 n'exclut pas seulement les ouverts dont le bord n'est pas une surface régulière, mais elle exclut aussi les ouverts qui ne sont pas localement situés d'un seul côté de leur frontière. La Figure 2.2 contient deux exemples typiques d'ouverts non réguliers qui présentent une singularité irrémédiable, soit le long de la fissure, soit en un point de rebroussement. Ces exemples ne sont pas des "inventions mathématiques" : l'ouvert fissuré est typiquement utilisé pour étudier les problèmes de fissures en mécanique des structures. On peut néanmoins généraliser un peu la classe des ouverts réguliers aux ouverts "réguliers par morceaux", à condition que ces morceaux de frontières se "recolent" en formant des angles différents de 0 (cas d'un point de rebroussement) ou de  $2\pi$  (cas d'une fissure).

## IV.2

### Notes historiques

Le théorème de Lax-Milgram est exactement une extension du théorème de représentation de Riesz, dans lequel on a "remplacé" le produit scalaire par la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$ . Il est facile de voir que dans le cas où la forme bilinéaire  $a$  est symétrique, le théorème de Lax-Milgram se réduit au théorème de représentation de Riesz. Toutefois, on constatera, par exemple en explorant les documents disponibles sur internet en partant des pages Wikipedia consacrées aux deux théorèmes

- [https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème\\_de\\_représentation\\_de\\_Riesz\\_\(Fréchet-Riesz\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_de_représentation_de_Riesz_(Fréchet-Riesz))
- [https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème\\_de\\_Lax-Milgram](https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_de_Lax-Milgram)

que le théorème de représentation de Riesz date de 1907 alors que celui de Lax-Milgram date de 1954 et est ainsi beaucoup plus contemporain.

Une version plus générale du théorème de Lax-Milgram appelée quelquefois le théorème de Lions-Lax-Milgram, et qui date de 1971, permet de remplacer l'hypothèse de coercivité par la condition, dite *inf sup*

$$\exists \alpha > 0, \inf_{u \in H^*} \sup_{v \in H^*} \frac{a(u, v)}{\|u\| \|v\|} \geq \alpha.$$

on laisse la preuve de ce théorème (qui suit les mêmes lignes que celles du théorème de Lax-Milgram classique) au lecteur.

Pour information, Peter Lax, mathématicien hongrois, né en 1926, est toujours vivant à l'écriture de ces lignes. Il a reçu le prix Abel, qui est une des plus hautes distinctions mathématiques, en 2005.

**01** Dédurre de la formule de Green (2.2) les formules

$$\int_{\Omega} \nabla \phi(x) dx = \int_{\partial\Omega} \phi(x)n(x) ds, \quad \int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma(x) dx = \int_{\partial\Omega} \sigma(x) \cdot n(x) ds$$

puis la formule de Stokes

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma(x) \phi(x) dx = - \int_{\Omega} \sigma(x) \cdot \nabla \phi(x) dx + \int_{\partial\Omega} \sigma(x) \cdot n(x) \phi(x) ds,$$

où  $\phi$  est une fonction scalaire de  $C^1(\overline{\Omega})$  et  $\sigma$  une fonction à valeurs vectorielles de  $C^1(\overline{\Omega})$ , à supports bornés dans le fermé  $\overline{\Omega}$ .

**02** En dimension  $N = 3$  on définit le rotationnel d'une fonction de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ , comme la fonction de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^3$  définie par

$$\operatorname{rot} \phi = \left( \frac{\partial \phi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \phi_2}{\partial x_3}, \frac{\partial \phi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \phi_3}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} \right).$$

Pour  $\phi$  et  $\psi$ , fonctions à valeurs vectorielles de  $C^1(\overline{\Omega})$ , à supports bornés dans le fermé  $\overline{\Omega}$ , déduire de la formule de Green (2.2)

$$\int_{\Omega} \operatorname{rot} \phi \cdot \psi dx - \int_{\Omega} \phi \cdot \operatorname{rot} \psi dx = - \int_{\partial\Omega} (\phi \times n) \cdot \psi ds.$$

**03** On considère le Laplacien avec condition aux limites de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.14)$$

Soit  $u$  une fonction de  $C^2(\overline{\Omega})$ . Montrer que  $u$  est une solution du problème aux limites (2.14) si et seulement si  $u$  appartient à  $C^1(\overline{\Omega})$  et vérifie l'égalité

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx \text{ pour toute fonction } v \in C^1(\overline{\Omega}). \quad (2.15)$$

En déduire qu'une condition nécessaire d'existence d'une solution dans  $C^2(\overline{\Omega})$  de (2.14) est que  $\int_{\Omega} f(x) dx = 0$ .

**04** On considère l'équation des plaques

$$\begin{cases} \Delta(\Delta u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.16)$$

On note  $X$  l'espace des fonctions  $v$  de  $C^2(\overline{\Omega})$  telles que  $v$  et  $\frac{\partial v}{\partial n}$  s'annulent sur  $\partial\Omega$ . Soit  $u$  une fonction de  $C^4(\overline{\Omega})$ . Montrer que  $u$  vérifie (2.16) si et seulement si  $u$  appartient à  $X$  et

$$\int_{\Omega} \Delta u(x) \Delta v(x) dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx \text{ pour toute fonction } v \in X. \quad (2.17)$$

**05** Le but de cet exercice est de montrer que l'espace  $V$ , défini par (2.12) et muni du produit scalaire (2.13), n'est pas complet. Soit  $\Omega$  la boule unité ouverte de  $\mathbb{R}^N$ . Si  $N = 1$ , on définit la suite

$$u_n(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } -1 < x < -n^{-1}, \\ (n/2)x^2 - 1 + 1/(2n) & \text{si } -n^{-1} \leq x \leq n^{-1}, \\ x - 1 & \text{si } n^{-1} < x < 1. \end{cases}$$

Si  $N = 2$ , pour  $0 < \alpha < 1/2$ , on définit la suite

$$u_n(x) = |\log(|x|^2 + n^{-1})|^{\alpha/2} - |\log(1 + n^{-1})|^{\alpha/2}.$$

Si  $N \geq 3$ , pour  $0 < \beta < (N - 2)/2$ , on définit la suite

$$u_n(x) = \frac{1}{(|x|^2 + n^{-1})^{\beta/2}} - \frac{1}{(1 + n^{-1})^{\beta/2}}.$$

Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy dans  $V$  mais qu'elle ne converge pas dans  $V$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.

## ESPACES DE SOBOLEV

### I Introduction et avertissement

Dans ce chapitre nous définissons les espaces de Sobolev qui sont les **espaces “naturels” de fonctions permettant de résoudre les formulations variationnelles d’équations aux dérivées partielles**. Physiquement, les espaces de Sobolev s’interprètent comme des espaces de **fonctions d’énergie finie**. Ce chapitre est le plus “technique” de cet ouvrage et relève en partie d’un cours de mathématiques “pures”. Il n’est pas nécessaire de connaître les démonstrations de tous les résultats de ce chapitre (sauf pour les plus simples et les plus utiles) : ce qui importe ici, c’est **l’esprit des résultats plus que la lettre de leurs démonstrations**.

Le plan de ce chapitre est le suivant. Comme les espaces de Sobolev se construisent à partir de la notion de fonction mesurable et de l’espace  $L^2$  des fonctions de carrés sommables, la Section II donne quelques rappels à ce sujet. On y introduit aussi la notion de **dérivation faible**. La Section III contient toutes les définitions et les résultats qu’il faut absolument connaître sur les espaces de Sobolev pour suivre le reste du cours. A la fin du chapitre le **Tableau 3.1 récapitule tous les résultats nécessaires pour la suite**.

### II Fonctions de carré sommable et dérivation faible

#### II.1 Quelques rappels d’intégration

Tous les résultats de cette sous-section sont détaillés dans le cours de mathématiques [7]. Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  muni de la mesure de Lebesgue. On définit l’espace  $L^2(\Omega)$  des fonctions mesurables de carré sommable dans  $\Omega$ . Muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x) dx,$$

$L^2(\Omega)$  est un espace de Hilbert (voir le théorème 3.3.2 de [7]). On note

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

la norme correspondante. Rappelons que les fonctions mesurables dans  $\Omega$  sont définies **presque partout** dans  $\Omega$  : si on change les valeurs d’une fonction mesurable  $f$  sur un sous-ensemble de  $\Omega$  de mesure nulle, on ne change pas la fonction mesurable  $f$ . Autrement dit, deux fonctions mesurables  $f$  et  $g$  seront dites égales si  $f(x) = g(x)$  presque partout dans  $\Omega$ , c’est-à-dire s’il existe  $E \subset \Omega$  tel que la mesure de Lebesgue de  $E$  est nulle et  $f(x) = g(x)$  pour tout  $x \in (\Omega \setminus E)$ .

On note  $C_c^\infty(\Omega)$  (ou  $\mathcal{D}(\Omega)$ ) l’espace des fonctions de classe  $C^\infty$  à support compact dans  $\Omega$ . Remarquons que l’espace  $C_c^\infty(\Omega)$  n’est pas réduit à la seule fonction nulle partout (ce qui n’est pas évident ! Voir le corollaire 3.2.6 dans [7]). Notons aussi que les fonctions de  $C_c^\infty(\Omega)$  s’annulent, ainsi que toutes leurs dérivées, sur le bord de  $\Omega$ . Nous rappelons le résultat de densité suivant (voir le théorème 3.4.3

de [7])

### Théorème 3.1.

L'espace  $C_c^\infty(\Omega)$  est dense dans  $L^2(\Omega)$ , c'est-à-dire que pour tout  $f \in L^2(\Omega)$  il existe une suite  $f_n \in C_c^\infty(\Omega)$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - f_n\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Comme corollaire nous obtenons la généralisation immédiate du Lemme 2.8.

### Corollaire 3.2.

Soit  $f \in L^2(\Omega)$ . Si pour toute fonction  $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$  on a

$$\int_{\Omega} f(x)\phi(x) dx = 0,$$

alors  $f(x) = 0$  presque partout dans  $\Omega$ .

## II.2 Dérivation faible

On définit tout d'abord le concept de dérivée faible dans  $L^2(\Omega)$ . Cette notion généralise la dérivation usuelle (parfois appelée, par opposition, dérivation forte) et est un cas particulier de la dérivation au sens des distributions (voir [7]).

### Définition 3.3.

Soit  $v$  une fonction de  $L^2(\Omega)$ . On dit que  $v$  est dérivable au sens faible dans  $L^2(\Omega)$  s'il existe des fonctions  $w_i \in L^2(\Omega)$ , pour  $i \in \{1, \dots, N\}$ , telles que, pour toute fonction  $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ , on a

$$\int_{\Omega} v(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} w_i(x) \phi(x) dx.$$

Chaque  $w_i$  est appelée la  $i$ -ème dérivée partielle faible de  $v$  et notée désormais  $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ .

La Définition 3.3 a bien un sens : en particulier, la notation  $w_i = \frac{\partial v}{\partial x_i}$  est univoque car, en vertu du Corollaire 3.2, les fonctions  $w_i$  sont uniques (si elles existent). Bien sûr, si  $v$  est dérivable au sens usuel et que ses dérivées partielles appartiennent à  $L^2(\Omega)$ , alors les dérivées usuelle et faible de  $v$  coïncident (utiliser le Corollaire 2.4). Donnons tout de suite un critère simple et pratique pour déterminer si une fonction est dérivable au sens faible.

### Lemme 3.4.

Soit  $v$  une fonction de  $L^2(\Omega)$ . S'il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour toute fonction  $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$  et pour tout indice  $i \in \{1, \dots, N\}$ , on a

$$\left| \int_{\Omega} v(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) dx \right| \leq C \|\phi\|_{L^2(\Omega)}, \quad (3.1)$$

alors  $v$  est dérivable au sens faible.

**Démonstration.** Soit  $L$  la forme linéaire définie par

$$L(\phi) = \int_{\Omega} v(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) dx.$$

A priori  $L(\phi)$  n'est définie que pour  $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ , mais grâce à l'inégalité (3.1), on peut étendre  $L$  par continuité à toutes les fonctions de  $L^2(\Omega)$  car  $C_c^\infty(\Omega)$  est dense dans  $L^2(\Omega)$  d'après le Théorème 3.1. En fait, l'inégalité (3.1) prouve que la forme linéaire  $L$  est continue sur  $L^2(\Omega)$ . En vertu du théorème de représentation de Riesz, il existe une fonction  $(-w_i) \in L^2(\Omega)$  telle que

$$L(\phi) = - \int_{\Omega} w_i(x) \phi(x) dx,$$

ce qui prouve que  $v$  est dérivable au sens faible dans  $L^2(\Omega)$ . □

On retrouve un résultat bien connu pour la dérivée usuelle.

**Proposition 3.5.**

Soit  $v$  une fonction de  $L^2(\Omega)$  dérivable au sens faible et telle que toutes ses dérivées partielles faibles  $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ , pour  $1 \leq i \leq N$ , sont nulles. Alors, pour chaque composante connexe de  $\Omega$ , il existe une constante  $C$  telle que  $v(x) = C$  presque partout dans cette composante connexe.

On peut facilement généraliser la Définition 3.3 de la dérivée faible à certains opérateurs différentiels qui ne font intervenir que certaines combinaisons de dérivées partielles (et non pas toutes). C'est par exemple le cas de la divergence d'une fonction à valeurs vectorielles qui nous sera utile par la suite.

**Définition 3.6.**

Soit  $\sigma$  une fonction de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^N$  dont toutes les composantes appartiennent à  $L^2(\Omega)$  (on note  $\sigma \in L^2(\Omega)^N$ ). On dit que  $\sigma$  admet une divergence au sens faible dans  $L^2(\Omega)$  s'il existe une fonction  $w \in L^2(\Omega)$  telle que, pour toute fonction  $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ , on a

$$\int_{\Omega} \sigma(x) \cdot \nabla \phi(x) dx = - \int_{\Omega} w(x) \phi(x) dx.$$

La fonction  $w$  est appelée la divergence faible de  $\sigma$  et notée désormais  $\operatorname{div} \sigma$ .

La justification de la Définition 3.6 est que, si  $\sigma$  est une fonction régulière, alors une simple intégration par parties (voir le Corollaire 2.4) montre que l'on a bien  $w = \operatorname{div} \sigma$ . Une généralisation facile du critère de dérivation faible du Lemme 3.4 est donnée par le résultat suivant (dont nous laissons la démonstration au lecteur en guise d'exercice).

**Lemme 3.7.**

Soit  $\sigma$  une fonction de  $L^2(\Omega)^N$ . S'il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour toute fonction  $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ , on a

$$\left| \int_{\Omega} \sigma(x) \cdot \nabla \phi(x) dx \right| \leq C \|\phi\|_{L^2(\Omega)},$$

alors  $\sigma$  admet une divergence au sens faible.

## III Définition et principales propriétés

### III.1 Espace $H^1(\Omega)$

#### Définition 3.8.

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ . L'espace de Sobolev  $H^1(\Omega)$  est défini par

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \forall i \in \{1, \dots, N\} \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\}, \quad (3.2)$$

où  $\frac{\partial v}{\partial x_i}$  est la dérivée partielle faible de  $v$  au sens de la Définition 3.3.

En physique ou en mécanique l'espace de Sobolev est souvent appelé **espace d'énergie** au sens où il est constitué des fonctions d'énergie finie (c'est-à-dire de norme  $\|u\|_{H^1(\Omega)}$  finie). Les fonctions d'énergie finie peuvent éventuellement être "singulières" ce qui a un sens physique possible (concentration ou explosion locale de certaines grandeurs). On consultera avec intérêt les exemples explicites de l'Exercice 6 et du Lemme 4.20.

#### Proposition 3.9.

Muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} \left( u(x)v(x) + \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \right) dx \quad (3.3)$$

et de la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} (|u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2) dx \right)^{1/2}$$

l'espace de Sobolev  $H^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert.

**Démonstration.** Il est évident que (3.3) est bien un produit scalaire dans  $H^1(\Omega)$ . Il reste donc à montrer que  $H^1(\Omega)$  est complet pour la norme associée. Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  une suite de Cauchy dans  $H^1(\Omega)$ . Par définition de la norme de  $H^1(\Omega)$ ,  $(u_n)_{n \geq 1}$  ainsi que  $(\frac{\partial u_n}{\partial x_i})_{n \geq 1}$  pour  $i \in \{1, \dots, N\}$  sont des suites de Cauchy dans  $L^2(\Omega)$ . Comme  $L^2(\Omega)$  est complet, il existe des limites  $u$  et  $w_i$  telles que  $u_n$  converge vers  $u$  et  $\frac{\partial u_n}{\partial x_i}$  converge vers  $w_i$  dans  $L^2(\Omega)$ . Or, par définition de la dérivée faible de  $u_n$ , pour toute fonction  $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ , on a

$$\int_{\Omega} u_n(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) \phi(x) dx. \quad (3.4)$$

Passant à la limite  $n \rightarrow +\infty$  dans (3.4), on obtient

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} w_i(x) \phi(x) dx,$$

ce qui prouve que  $u$  est dérivable au sens faible et que  $w_i$  est la  $i$ -ème dérivée partielle faible de  $u$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ . Donc,  $u$  appartient bien à  $H^1(\Omega)$  et  $(u_n)_{n \geq 1}$  converge vers  $u$  dans  $H^1(\Omega)$ .  $\square$

En dimension  $N \geq 2$ , les fonctions de  $H^1(\Omega)$  ne sont en général **ni continues ni bornées**, comme le montre l'exercice 6. La dimension  $N = 1$  fait "exception" à la non-continuité des fonctions de  $H^1(\Omega)$

comme l'affirme le lemme suivant où, sans perte de généralité, on prend  $\Omega = (0, 1)$ .

**Lemme 3.10.**

Pour toute fonction  $v \in H^1(0, 1)$  et pour tout  $x, y \in [0, 1]$ , on a

$$v(y) = v(x) + \int_x^y v'(s) ds. \tag{3.5}$$

Plus généralement, pour tout  $x \in [0, 1]$ , l'application  $v \rightarrow v(x)$ , définie de  $H^1(0, 1)$  dans  $\mathbb{R}$ , est une forme linéaire continue sur  $H^1(0, 1)$ . En particulier, toute fonction  $v \in H^1(0, 1)$  est continue sur  $[0, 1]$ .

Il est très important en pratique de savoir si **les fonctions régulières sont denses dans l'espace de Sobolev  $H^1(\Omega)$** . Cela justifie en partie la notion d'espace de Sobolev qui apparaît ainsi très simplement comme l'ensemble des fonctions régulières complété par les limites de suites de fonctions régulières dans la norme de l'énergie  $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ . Cela permet de démontrer facilement de nombreuses propriétés en les établissant d'abord sur les fonctions régulières puis en utilisant un argument de "densité".

**Théorème 3.11.**

[de densité] Si  $\Omega$  est un ouvert borné régulier de classe  $C^1$ , ou bien si  $\Omega = \mathbb{R}_+^N$ , ou encore si  $\Omega = \mathbb{R}^N$ , alors  $C_c^\infty(\overline{\Omega})$  est dense dans  $H^1(\Omega)$ .

Rappelons que la notation  $\mathbb{R}_+^N$  désigne le demi-espace  $\{x \in \mathbb{R}^N \text{ tel que } x_N > 0\}$ .

**Remarque 3.12.**

L'espace  $C_c^\infty(\overline{\Omega})$  qui est dense dans  $H^1(\Omega)$  est constitué des fonctions régulières de classe  $C^\infty$  à support borné (ou compact) dans le fermé  $\overline{\Omega}$ . En particulier, si  $\Omega$  est borné, toutes les fonctions de  $C^\infty(\overline{\Omega})$  ont nécessairement un support borné, et donc  $C_c^\infty(\overline{\Omega}) = C^\infty(\overline{\Omega})$ . Précisons que les fonctions de  $C_c^\infty(\overline{\Omega})$  ne s'annulent pas nécessairement sur le bord de l'ouvert  $\Omega$ , ce qui différencie cet espace de  $C_c^\infty(\Omega)$  (voir la Remarque 2.3). Par contre, si  $\Omega$  n'est pas borné, les fonctions de  $C_c^\infty(\overline{\Omega})$  s'annulent "à l'infini".

**Remarque 3.13.**

La notion de régularité d'un ouvert a été introduite dans la Définition 2.14. Il n'est pas nécessaire de connaître précisément cette définition de la régularité d'un ouvert. Il suffit de savoir *grosso modo* que l'on demande que le bord de l'ouvert soit une surface régulière et que l'on exclut certaines "pathologies" (voir la Remarque 2.15).

**III.2**

**Espace  $H_0^1(\Omega)$**

Définissons maintenant un autre espace de Sobolev qui est un sous-espace de  $H^1(\Omega)$  et qui nous sera très utile pour les problèmes avec conditions aux limites de Dirichlet.

**Définition 3.14.**

Soit  $C_c^\infty(\Omega)$  l'espace des fonctions de classe  $C^\infty$  à support compact dans  $\Omega$ . L'espace de Sobolev  $H_0^1(\Omega)$  est défini comme l'adhérence de  $C_c^\infty(\Omega)$  dans  $H^1(\Omega)$ .

On verra un peu plus loin (voir le Corollaire 3.21) que  $H_0^1(\Omega)$  est en fait le sous-espace de  $H^1(\Omega)$

constitué des **fonctions qui s'annulent sur le bord**  $\partial\Omega$  puisque tel est le cas des fonctions de  $C_c^\infty(\Omega)$ . En général,  $H_0^1(\Omega)$  est **strictement plus petit** que  $H^1(\Omega)$  car  $C_c^\infty(\Omega)$  est un sous-espace **strict** de  $C_c^\infty(\overline{\Omega})$  (voir le Théorème 3.11 et la Remarque 3.12). Une exception importante est le cas où  $\Omega = \mathbb{R}^N$  : en effet, dans ce cas  $\overline{\Omega} = \mathbb{R}^N = \Omega$  et le Théorème 3.11 affirme que  $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$  est dense dans  $H^1(\mathbb{R}^N)$ , donc on a  $H_0^1(\mathbb{R}^N) = H^1(\mathbb{R}^N)$ . Cette exception se comprend aisément puisque l'espace entier  $\mathbb{R}^N$  n'a pas de bord.

**Proposition 3.15.**

Muni du produit scalaire (3.3) de  $H^1(\Omega)$ , l'espace de Sobolev  $H_0^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert.

**Démonstration.** Par définition  $H_0^1(\Omega)$  est un sous-espace fermé de  $H^1(\Omega)$  (qui est un espace de Hilbert), donc c'est aussi un espace de Hilbert.  $\square$

Un résultat essentiel pour les applications du prochain chapitre est l'inégalité suivante.

**Proposition 3.16.**

[Inégalité de Poincaré] Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  borné dans au moins une direction de l'espace. Il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour toute fonction  $v \in H_0^1(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx. \tag{3.6}$$

**Démonstration.** Pour les fonctions  $v \in C_c^\infty(\Omega)$  on a déjà démontré l'inégalité de Poincaré (3.6) dans le Lemme 2.13. Par un argument de densité le résultat reste vrai pour toute fonction  $v \in H_0^1(\Omega)$ . En effet, comme  $C_c^\infty(\Omega)$  est dense dans  $H_0^1(\Omega)$  (par sa Définition 3.14), il existe une suite  $v_n \in C_c^\infty(\Omega)$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|v - v_n\|_{H^1(\Omega)}^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} (|v - v_n|^2 + |\nabla(v - v_n)|^2) dx = 0.$$

En particulier, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |v_n|^2 dx = \int_{\Omega} |v|^2 dx \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |\nabla v_n|^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx.$$

Par application du Lemme 2.13, on a

$$\int_{\Omega} |v_n(x)|^2 dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla v_n(x)|^2 dx. \tag{3.7}$$

On passe alors à la limite  $n \rightarrow +\infty$  dans chacun des deux termes de l'inégalité (3.7) pour obtenir le résultat recherché. Ce type d'argument "par densité" sera très souvent repris par la suite.  $\square$

**Remarque 3.17.**

L'inégalité de Poincaré (3.6) n'est pas vraie pour les fonctions de  $H^1(\Omega)$ . En effet, les fonctions constantes (non nulles) annulent le terme de droite dans (3.6) mais pas le terme de gauche. L'hypothèse sous-jacente essentielle dans l'inégalité de Poincaré est que les fonctions de  $H_0^1(\Omega)$  s'annulent sur le bord  $\partial\Omega$  de l'ouvert  $\Omega$  (voir la Remarque 3.22 pour des variantes de cette hypothèse).

Un corollaire important de l'inégalité de Poincaré est le résultat suivant qui fournit une norme équi-

valente plus simple dans  $H_0^1(\Omega)$ .

**Corollaire 3.18.**

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  borné dans au moins une direction de l'espace. Alors la semi-norme

$$|v|_{H_0^1(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

est une norme sur  $H_0^1(\Omega)$  équivalente à la norme usuelle induite par celle de  $H^1(\Omega)$ .

**Démonstration.** Soit  $v \in H_0^1(\Omega)$ . La première inégalité

$$|v|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} (|v|^2 + |\nabla v|^2) dx \right)^{1/2}$$

est évidente. D'autre part, l'inégalité de Poincaré du Lemme 2.13 conduit à

$$\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq (C+1) \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx = (C+1)|v|_{H_0^1(\Omega)}^2,$$

ce qui prouve que  $|v|_{H_0^1(\Omega)}$  est une norme équivalente à  $\|v\|_{H^1(\Omega)}$ . □

**III.3 Traces et formules de Green**

Nous avons vu qu'en dimension  $N \geq 2$  les fonctions de  $H^1(\Omega)$  ne sont pas continues (voir le contre-exemple de l'Exercice 6). Comme pour toute fonction mesurable, on ne peut donc parler de la valeur ponctuelle d'une fonction  $v \in H^1(\Omega)$  que "presque partout" dans  $\Omega$ . En particulier, il n'est pas clair de savoir si on peut définir la "valeur au bord", ou "trace" de  $v$  sur le bord  $\partial\Omega$  car  $\partial\Omega$  est un ensemble négligeable ou de mesure nulle. Fort heureusement pour les problèmes aux limites que nous étudions, il y a tout de même un moyen pour définir la trace  $v|_{\partial\Omega}$  d'une fonction de  $H^1(\Omega)$ . Ce résultat essentiel, appelé théorème de trace, est le suivant.

**Théorème 3.19.**

[de trace] Soit  $\Omega$  un ouvert borné régulier de classe  $\mathcal{C}^1$ , ou bien  $\Omega = \mathbb{R}_+^N$ . On définit l'application trace  $\gamma_0$

$$\begin{aligned} H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) &\rightarrow L^2(\partial\Omega) \cap C(\overline{\partial\Omega}) \\ v &\rightarrow \gamma_0(v) = v|_{\partial\Omega}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Cette application  $\gamma_0$  se prolonge par continuité en une application linéaire continue de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\partial\Omega)$ , notée encore  $\gamma_0$ . En particulier, il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour toute fonction  $v \in H^1(\Omega)$ , on a

$$\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)}. \tag{3.9}$$

**Remarque 3.20.**

Grâce au Théorème de trace 3.19 on peut donc parler de la valeur d'une fonction de  $H^1(\Omega)$  sur le bord  $\partial\Omega$ . Ce résultat est remarquable car il n'est pas vrai pour une fonction de  $L^2(\Omega)$ .

**Démonstration.** Démontrons le résultat pour le demi-espace  $\Omega = \mathbb{R}_+^N = \{x \in \mathbb{R}^N, x_N > 0\}$ . Soit  $v \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^N})$ . Avec la notation  $x = (x', x_N)$ , on a

$$|v(x', 0)|^2 = -2 \int_0^{+\infty} v(x', x_N) \frac{\partial v}{\partial x_N}(x', x_N) dx_N,$$

et, en utilisant l'inégalité  $2ab \leq a^2 + b^2$ ,

$$|v(x', 0)|^2 \leq \int_0^{+\infty} \left( |v(x', x_N)|^2 + \left| \frac{\partial v}{\partial x_N}(x', x_N) \right|^2 \right) dx_N.$$

Par intégration en  $x'$ , on en déduit

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |v(x', 0)|^2 dx' \leq \int_{\mathbb{R}_+^N} \left( |v(x)|^2 + \left| \frac{\partial v}{\partial x_N}(x) \right|^2 \right) dx,$$

c'est-à-dire  $\|v\|_{L^2(\partial\mathbb{R}_+^N)} \leq \|v\|_{H^1(\mathbb{R}_+^N)}$ . Par densité de  $C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^N})$  dans  $H^1(\mathbb{R}_+^N)$ , on obtient ainsi le résultat. Pour un ouvert borné régulier de classe  $C^1$ , on utilise un argument de cartes locales du bord qui permet de se ramener au cas de  $\Omega = \mathbb{R}_+^N$ . Nous ne détaillons pas cet argument de cartes locales (assez technique) et nous renvoyons le lecteur curieux à [1].  $\square$

Le Théorème de trace 3.19 permet de généraliser aux fonctions de  $H^1(\Omega)$  la formule de Green précédemment établie pour des fonctions de classe  $C^1$  au Corollaire 2.4.

**Théorème III.1 (Formule de Green)** Soit  $\Omega$  un ouvert borné régulier de classe  $C^1$ . Si  $u$  et  $v$  sont des fonctions de  $H^1(\Omega)$ , elles vérifient

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} v(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) dx + \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)n_i(x) ds, \quad (3.10)$$

où  $n = (n_i)_{1 \leq i \leq N}$  est la normale unité extérieure à  $\partial\Omega$ .

**Démonstration.** Rappelons que la formule (3.10) a été établie pour des fonctions de classe  $C^1$  dans le Corollaire 2.4. On utilise à nouveau un argument de densité. Par densité de  $C_c^\infty(\overline{\Omega})$  dans  $H^1(\Omega)$  (voir le Théorème 3.11), il existe des suites  $(u_n)_{n \geq 1}$  et  $(v_n)_{n \geq 1}$  dans  $C_c^\infty(\overline{\Omega})$  qui convergent dans  $H^1(\Omega)$  vers  $u$  et  $v$ , respectivement. En vertu du Corollaire 2.4 on a

$$\int_{\Omega} u_n \frac{\partial v_n}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} v_n \frac{\partial u_n}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} u_n v_n n_i ds. \quad (3.11)$$

On peut passer à la limite  $n \rightarrow +\infty$  dans les deux premiers termes de (3.11) car  $u_n$  et  $\frac{\partial u_n}{\partial x_i}$  (respectivement,  $v_n$  et  $\frac{\partial v_n}{\partial x_i}$ ) convergent vers  $u$  et  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  (respectivement,  $v$  et  $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ ) dans  $L^2(\Omega)$ . Pour passer à la limite dans la dernière intégrale de (3.11), on utilise la continuité de l'application trace  $\gamma_0$ , c'est-à-dire l'inégalité (3.9), qui permet d'affirmer que  $\gamma_0(u_n)$  (respectivement,  $\gamma_0(v_n)$ ) converge vers  $\gamma_0(u)$  (respectivement,  $\gamma_0(v)$ ) dans  $L^2(\partial\Omega)$ . On obtient ainsi la formule (3.10) pour des fonctions  $u$  et  $v$  de  $H^1(\Omega)$ .  $\square$

Comme conséquence du Théorème de trace 3.19 on obtient une caractérisation très simple de l'espace  $H_0^1(\Omega)$ .

### Corollaire 3.21.

Soit  $\Omega$  un ouvert borné régulier de classe  $C^1$ . L'espace  $H_0^1(\Omega)$  coïncide avec le sous-espace de  $H^1(\Omega)$  constitué des fonctions qui s'annulent sur le bord  $\partial\Omega$ .

**Démonstration.** Comme toute fonction de  $H_0^1(\Omega)$  est limite d'une suite de fonctions appartenant à  $C_c^\infty(\Omega)$  qui ont bien sûr une trace nulle, la continuité de l'application trace  $\gamma_0$  implique que la trace de la limite est aussi nulle. On en déduit que  $H_0^1(\Omega)$  est contenu dans le sous-espace de  $H^1(\Omega)$  des fonctions qui s'annulent sur le bord  $\partial\Omega$ . La réciproque est plus technique et découle d'un double procédé de cartes locales puis de régularisation et de translation. Nous renvoyons à [1], [8], [28] pour plus de détails.  $\square$

Grâce au Corollaire 3.21 nous pouvons donner une autre démonstration de la Proposition 3.16 à propos de l'inégalité de Poincaré. Cette nouvelle démonstration n'est plus "constructive" mais est

basée sur un argument de contradiction qui possède le mérite de se généraliser très facilement. En effet, il existe de nombreuses variantes de l'inégalité de Poincaré, adaptées aux différents modèles d'équations aux dérivées partielles. Au vu de l'importance de cette inégalité pour la suite, il n'est donc pas inutile d'en donner une démonstration aisément adaptable à tous les cas de figure.



**Autre démonstration de la Proposition 3.16.** On procède par contradiction. S'il n'existe pas de constante  $C > 0$  telle que, pour toute fonction  $v \in H_0^1(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx,$$

cela veut dire qu'il existe une suite  $v_n \in H_0^1(\Omega)$  telle que

$$1 = \int_{\Omega} |v_n(x)|^2 dx > n \int_{\Omega} |\nabla v_n(x)|^2 dx. \quad (3.12)$$

En particulier, (3.12) implique que la suite  $v_n$  est bornée dans  $H_0^1(\Omega)$ . Par application du Théorème de Rellich 3.23 ci-dessous, il existe une sous-suite  $v_{n'}$  qui converge dans  $L^2(\Omega)$ . De plus, (3.12) montre que la suite  $\nabla v_{n'}$  converge vers zéro dans  $L^2(\Omega)$  (composante par composante). Par conséquent,  $v_{n'}$  est une suite de Cauchy dans  $H_0^1(\Omega)$ , qui est un espace de Hilbert, donc elle converge dans  $H_0^1(\Omega)$  vers une limite  $v$ . Comme on a

$$\int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |\nabla v_n(x)|^2 dx \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

on en déduit, en vertu du Lemme 3.5, que  $v$  est une constante dans chaque composante connexe de  $\Omega$ . Mais comme  $v$  est nulle sur le bord  $\partial\Omega$  (en vertu du Corollaire 3.21),  $v$  est identiquement nulle dans tout  $\Omega$ . Par ailleurs,

$$\int_{\Omega} |v(x)|^2 dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |v_n(x)|^2 dx = 1,$$

ce qui est une contradiction avec le fait que  $v = 0$ . □



### Remarque 3.22.

La démonstration par contradiction de la Proposition 3.16 se généralise facilement. Prenons par exemple, le cas d'un ouvert  $\Omega$ , borné connexe et régulier de classe  $C^1$ , dont le bord  $\partial\Omega$  se décompose en deux parties disjointes régulières  $\partial\Omega_N$  et  $\partial\Omega_D$  dont les mesures superficielles sont non nulles. On définit un espace  $V$  par

$$V = \{v \in H^1(\Omega) \text{ tel que } v = 0 \text{ sur } \partial\Omega_D\}.$$

Par application du Théorème de trace 3.19, il est facile de voir que  $V$  est un sous-espace fermé de  $H^1(\Omega)$ , donc est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de  $H^1(\Omega)$ . Comme pour  $H_0^1(\Omega)$ , l'argument de contradiction permet de démontrer l'existence d'une constante  $C > 0$  telle que toute fonction  $v \in V$  vérifie l'inégalité de Poincaré (3.6).

## III.4

### Un résultat de compacité

Nous consacrons cette sous-section à l'étude d'une propriété de compacité connue sous le nom de théorème de Rellich qui jouera un rôle essentiel dans la théorie spectrale des problèmes aux limites (voir le Chapitre 7) que nous utiliserons pour résoudre les problèmes d'évolution en temps. Rappelons tout d'abord que, dans un espace de Hilbert de dimension infinie, il n'est pas vrai que, de

toute suite bornée, on puisse extraire une sous-suite convergente (au contraire de ce qui se passe en dimension finie, voir l'Exercice 7).

**Théorème 3.23.**

[Théorème de Rellich] Si  $\Omega$  est un ouvert borné régulier de classe  $C^1$ , alors de toute suite bornée de  $H^1(\Omega)$  on peut extraire une sous-suite convergente dans  $L^2(\Omega)$  (on dit que l'injection canonique de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$  est compacte).

Le Théorème 3.23 peut être faux si l'ouvert  $\Omega$  n'est pas borné. Par exemple, si  $\Omega = \mathbb{R}^N$ , l'injection canonique de  $H^1(\mathbb{R}^N)$  dans  $L^2(\mathbb{R}^N)$  n'est pas compacte. Pour s'en convaincre il suffit de considérer la suite  $u_n(x) = u(x + ne)$  où  $e$  est un vecteur non nul et  $u$  une fonction de  $H^1(\mathbb{R}^N)$  (on translate  $u$  dans la direction  $e$ ). Il est clair qu'aucune sous-suite de  $u_n$  ne converge dans  $L^2(\mathbb{R}^N)$ .

**Remarque 3.24.**

Si l'on remplace  $H^1(\Omega)$  par  $H_0^1(\Omega)$ , alors non seulement le Théorème 3.23 de Rellich reste vrai, mais en plus il n'est pas nécessaire de supposer que l'ouvert  $\Omega$  est régulier.

**III.5 Espaces  $H^m(\Omega)$**

On peut aisément généraliser la Définition 3.8 de l'espace de Sobolev  $H^1(\Omega)$  aux fonctions qui sont  $m \geq 0$  fois dérivables au sens faible. Commençons par donner une convention d'écriture bien utile. Soit  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$  un **multi-indice**, c'est-à-dire un vecteur à  $N$  composantes entières positives  $\alpha_i \geq 0$ . On note  $|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i$  et, pour une fonction  $v$ ,

$$\partial^\alpha v(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}(x).$$

A partir de la Définition 3.3 de la dérivée première faible, on définit par récurrence sur  $m$  la dérivée d'ordre  $m$  faible : on dit qu'une fonction  $v \in L^2(\Omega)$  est  $m$  fois dérivable au sens faible si toutes ses dérivées partielles faibles d'ordre  $m - 1$  sont dérivables faiblement au sens de la Définition 3.3. Remarquons que, dans la définition d'une dérivée croisée, l'ordre de dérivation n'est pas important, à cause du théorème de Schwarz  $\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_i}$ , ce qui justifie la notation  $\partial^\alpha v$  où l'ordre de dérivation n'est pas indiqué.

**Définition 3.25.**

Pour un entier  $m \geq 0$ , l'espace de Sobolev  $H^m(\Omega)$  est défini par

$$H^m(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) \text{ tel que, } \forall \alpha \text{ avec } |\alpha| \leq m, \partial^\alpha v \in L^2(\Omega) \right\}, \tag{3.13}$$

où la dérivée partielle  $\partial^\alpha v$  est à prendre au sens faible.

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier le résultat facile suivant.

**Proposition 3.26.**

Muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha u(x) \partial^\alpha v(x) dx \tag{3.14}$$

et de la norme  $\|u\|_{H^m(\Omega)} = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ , l'espace de Sobolev  $H^m(\Omega)$  est un espace de Hilbert.

Les fonctions de  $H^m(\Omega)$  ne sont pas toujours continues ou régulières (cela dépend de  $m$  et de la dimension  $N$ ), mais si  $m$  est suffisamment grand alors toute fonction de  $H^m(\Omega)$  est continue. Rappelons qu'en vertu du Lemme 3.10, en dimension d'espace  $N = 1$ , les fonctions de  $H^1(\Omega)$  sont continues. Nous admettrons le résultat suivant qui généralise le Lemme 3.10 aux dimensions supérieures.

**Théorème 3.27.**

Si  $\Omega$  est un ouvert borné régulier de classe  $C^1$ , et si  $m > N/2$ , alors  $H^m(\Omega)$  est un sous-espace de l'ensemble  $C(\overline{\Omega})$  des fonctions continues sur  $\overline{\Omega}$ .

**Remarque 3.28.**

Par application réitérée du Théorème 3.27 à une fonction et à ses dérivées, on peut en fait améliorer sa conclusion. S'il existe un entier  $k \geq 0$  tel que  $m - N/2 > k$ , alors  $H^m(\Omega)$  est un sous-espace de l'ensemble  $C^k(\overline{\Omega})$  des fonctions  $k$  fois différentiables sur  $\overline{\Omega}$ .

La "morale" du Théorème 3.27 est que plus  $m$  est grand, plus les fonctions de  $H^m(\Omega)$  sont régulières, c'est-à-dire dérivables au sens usuel (il suffit d'appliquer successivement le Théorème 3.27 à une fonction  $v \in H^m(\Omega)$  et à ses dérivées  $\partial^\alpha v \in H^{m-|\alpha|}(\Omega)$ ).

Comme pour  $H^1(\Omega)$ , les fonctions régulières sont denses dans  $H^m(\Omega)$  (si du moins l'ouvert  $\Omega$  est régulier ; voir la Définition 2.14). La démonstration du Théorème de densité 3.11 se généralise très facilement à  $H^m(\Omega)$ . Nous ne la répétons pas et nous énonçons seulement le résultat de densité suivant.

**Théorème 3.29.**

Si  $\Omega$  est un ouvert borné régulier de classe  $C^m$ , ou bien si  $\Omega = \mathbb{R}_+^N$ , alors  $C_c^\infty(\overline{\Omega})$  est dense dans  $H^m(\Omega)$ .

On peut aussi obtenir des résultats de trace et des formules de Green d'ordre plus élevés pour l'espace  $H^m(\Omega)$ . Par souci de simplicité, nous nous contentons de traiter le cas  $m = 2$  (qui est le seul que nous utiliserons par la suite).

**Théorème 3.30.**

Soit  $\Omega$  un ouvert borné régulier de classe  $C^1$ . On définit l'application trace  $\gamma_1$

$$\begin{aligned} H^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) &\rightarrow L^2(\partial\Omega) \cap C(\overline{\partial\Omega}) \\ v &\rightarrow \gamma_1(v) = \left. \frac{\partial v}{\partial n} \right|_{\partial\Omega}, \end{aligned} \tag{3.15}$$

avec  $\frac{\partial v}{\partial n} = \nabla u \cdot n$ . Cette application  $\gamma_1$  se prolonge par continuité en une application linéaire continue de  $H^2(\Omega)$  dans  $L^2(\partial\Omega)$ . En particulier, il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour toute fonction  $v \in H^2(\Omega)$ , on a

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial n} \right\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|v\|_{H^2(\Omega)}. \tag{3.16}$$

**Démonstration.** L'existence de l'application trace  $\gamma_1$  (et ses propriétés) est une simple conséquence du précédent Théorème de trace 3.19 pour les fonctions de  $H^1(\Omega)$ . En effet, si  $v \in H^2(\Omega)$ , alors  $\nabla v \in H^1(\Omega)^N$  et on peut donc définir la trace de  $\nabla v$  sur  $\partial\Omega$  comme une fonction de  $L^2(\partial\Omega)^N$ . Comme la normale est une fonction continue bornée sur  $\partial\Omega$ , on en déduit bien que  $\frac{\partial v}{\partial n} \in L^2(\partial\Omega)$ .  $\square$

Le Théorème de trace 3.30 permet de généraliser aux fonctions de  $H^2(\Omega)$  une formule de Green

précédemment établie pour des fonctions de classe  $C^2$  au Corollaire 2.5.

**Théorème 3.31.**

Soit  $\Omega$  un ouvert borné régulier de classe  $C^2$ . Si  $u \in H^2(\Omega)$  et  $v \in H^1(\Omega)$ , on a

$$\int_{\Omega} \Delta u(x)v(x) dx = - \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x)v(x) ds. \quad (3.17)$$

**Démonstration.** Comme (3.17) est vraie pour des fonctions de classe  $C^2$  et que les fonctions régulières sont denses dans  $H^2(\Omega)$  et  $H^1(\Omega)$ , on utilise un argument de densité. Nous renvoyons à la démonstration du Théorème III.1 pour plus de détails. Le seul argument nouveau ici est qu'il faut utiliser la continuité de l'application trace  $\gamma_1$ , c'est-à-dire l'inégalité (3.16).  $\square$

Lemme 3.4 (dérivation faible)	$u \in L^2(\Omega)$ est dérivable au sens faible si, $\forall i$ , $\left  \int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx \right  \leq C \ \phi\ _{L^2(\Omega)} \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega)$
Proposition 3.9	$H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + uv) dx$
Théorème 3.11 (théorème de densité)	$C_c^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$
Proposition 3.16 (inégalité de Poincaré)	$\forall u \in H_0^1(\Omega)$ ( $\Omega$ borné) $\ u\ _{L^2(\Omega)} \leq C \ \nabla u\ _{L^2(\Omega)}$
Théorème 3.19 (théorème de trace)	$u \rightarrow u _{\partial\Omega}$ application continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$
Théorème III.1 (formule de Green)	$\forall u, v \in H^1(\Omega)$ $\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} uv n_i ds$
Corollaire 3.21 (caractérisation de $H_0^1(\Omega)$ )	$H_0^1(\Omega)$ est le sous-espace des fonctions de $H^1(\Omega)$ qui s'annulent sur $\partial\Omega$
Théorème 3.23 (théorème de Rellich)	l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte ( $\Omega$ borné régulier)
Théorème 3.31 (formule de Green)	$\forall u \in H^2(\Omega), v \in H^1(\Omega)$ $\int_{\Omega} v \Delta u dx = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v ds$

TABLE 3.1 – Principaux résultats sur les espaces de Sobolev qu'il faut absolument connaître.

## IV Pour aller plus loin...

La notion de dérivée faible apparaît pour la première fois dans l'article célèbre de J. Leray sur la construction de solutions aux équations de Navier-Stokes [23] qui est un sinon le papier fondateur de toute l'analyse fonctionnelle et la résolution d'équations aux dérivées partielles par ces méthodes. La dérivée faible a été généralisée dans la théorie des Distributions de L. Schwartz [30] peu de temps après, en 1937, qui lui vaudra la médaille Fields en 1950.

La questions des traces et de la régularité sous-jacente, en particulier la description de l'image de l'application trace de  $H^1(\Omega)$  et donc de sa potentielle surjectivité, a étonné les mathématiciens relativement tôt. Le lecteur intéressé pourra lire l'article de Hadamard, dont le niveau mathématique est largement accessible [22]. En effet, Hadamard montre que le principe de minimisation de Dirichlet n'est pas valide lorsque l'on souhaite résoudre un problème de Laplace sur un disque dont la condition au bord n'est pas assez régulière. On sait depuis que pour trouver une solution  $H^1(\Omega)$  il faut que la donnée au bord soit dans  $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ , c'est-à-dire que les données au bord doivent être  $\frac{1}{2}$  fois dérivable...

# Exercices

- 01** Soit  $\Omega = (0, 1)$ . Montrer que la fonction  $x^\alpha$  est dérivable au sens faible dans  $L^2(\Omega)$  si et seulement si  $\alpha > 1/2$ .
- 02** Soit  $\Omega$  un ouvert borné. Montrer qu'une fonction continue sur  $\overline{\Omega}$ , et  $C^1$  par morceaux est dérivable au sens faible dans  $L^2(\Omega)$ .
- 03** Soit  $\Omega$  un ouvert borné. Montrer qu'une fonction  $C^1$  par morceaux mais pas continue n'est pas dérivable au sens faible dans  $L^2(\Omega)$ .
- 04** Soit  $\Omega$  un ouvert borné constitué de deux ouverts  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  séparés par une surface  $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ . Montrer qu'une fonction vectorielle de classe  $C^1$  sur chaque morceau  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  admet une divergence faible dans  $L^2(\Omega)$  si et seulement si sa composante normale est continue à travers la surface  $\Gamma$ .
- 05** Montrer que les fonctions continues,  $C^1$  par morceaux et à support borné dans  $\overline{\Omega}$ , appartiennent à  $H^1(\Omega)$ .
- 06** Soit  $B$  la boule unité ouverte de  $\mathbb{R}^N$ . Si  $N = 2$ , montrer que la fonction  $u(x) = |\log(|x|)|^\alpha$  appartient à  $H^1(B)$  pour  $0 < \alpha < 1/2$ , mais n'est pas bornée au voisinage de l'origine. Si  $N \geq 3$ , montrer que la fonction  $u(x) = |x|^{-\beta}$  appartient à  $H^1(B)$  pour  $0 < \beta < (N - 2)/2$ , mais n'est pas bornée au voisinage de l'origine.
- 07** Soit  $\Omega = (0, 1)$  et  $u_n(x) = \sin(2\pi nx)$ . Montrer que la suite  $u_n$  est uniformément bornée dans  $L^2(\Omega)$ , mais qu'il n'existe aucune sous-suite convergente. Pour cela on montrera, grâce à une intégration par parties, que, pour toute fonction  $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 u_n(x) \phi(x) dx = 0,$$

et on en déduira une contradiction si une sous-suite de  $u_n$  converge dans  $L^2(\Omega)$ . Généraliser ce contre exemple à  $H^1(\Omega)$  en considérant une primitive de  $u_n$ .

## ÉTUDE MATHÉMATIQUE DES PROBLÈMES ELLIPTIQUES

### I Introduction

Dans ce chapitre nous terminons l'analyse mathématique des équations aux dérivées partielles de type elliptique commencée au Chapitre 2. Pour montrer que les problèmes aux limites sont bien posés pour ces e.d.p. elliptiques, c'est-à-dire qu'elles admettent une solution, unique, et dépendant continûment des données, nous suivons l'**approche variationnelle** présentée au Chapitre 2 et nous utilisons les **espaces de Sobolev** introduits au Chapitre 3.

Le plan de ce chapitre est le suivant. Dans la Section II nous expliquons en détail le fonctionnement de l'approche variationnelle pour le Laplacien avec divers types de conditions aux limites. Nous démontrons des **résultats d'existence et d'unicité des solutions**. Nous montrons aussi que ces solutions **minimisent une énergie** et qu'elles vérifient un certain nombre de **propriétés qualitatives** très naturelles et importantes du point de vue des applications (principe du maximum, régularité).

### II Étude du Laplacien

#### II.1 Conditions aux limites de Dirichlet

Nous considérons le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $\Omega$  est un ouvert borné de l'espace  $\mathbb{R}^N$ , et  $f$  est un second membre qui appartient à l'espace  $L^2(\Omega)$ . L'approche variationnelle pour étudier (4.1) est constituée de trois étapes que nous détaillons.

**Étape 1** : Établissement d'une formulation variationnelle.

Dans une première étape il faut *proposer* une formulation variationnelle du problème aux limites (4.1). Cette formulation variationnelle du problème va encoder à elle seule, à la fois l'équation et les conditions aux limites. De manière conceptuelle, il s'agit de trouver une forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$ , une forme linéaire  $L(\cdot)$ , et un espace de Hilbert  $V$  tels que (4.1) soit équivalent à :

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = L(v) \text{ pour tout } v \in V. \quad (4.2)$$

Le but de cette première étape est *seulement* de trouver la formulation variationnelle (4.2). Il ne s'agit pas de démontrer quoi que ce soit et les calculs effectués pour le moment peuvent rester à un niveau formel. On vérifiera l'équivalence précise avec (4.1) plus tard au cours de la troisième étape.

Pour trouver la formulation variationnelle, on multiplie l'équation (4.1) par une fonction test régulière  $v$  et on intègre par parties. Comme nous l'avons dit, ce calcul est principalement formel au sens où l'on suppose l'existence et la régularité de la solution  $u$  afin que tous les calculs effectués soient licites. À l'aide de la formule de Green (3.17) (voir aussi (2.4)) on trouve

$$\int_{\Omega} f v \, dx = - \int_{\Omega} \Delta u v \, dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds. \quad (4.3)$$

Comme  $u$  doit satisfaire une condition aux limites de Dirichlet,  $u = 0$  sur  $\partial\Omega$ , on choisit un espace de Hilbert  $V$  tel que toute fonction  $v \in V$  vérifie aussi  $v = 0$  sur  $\partial\Omega$ . Dans ce cas, l'égalité (4.3) devient

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx. \quad (4.4)$$

Pour que le terme de gauche de (4.4) ait un sens il suffit que  $\nabla u$  et  $\nabla v$  appartiennent à  $L^2(\Omega)$  (composante par composante), et pour que le terme de droite de (4.4) ait aussi un sens il suffit que  $v$  appartienne à  $L^2(\Omega)$  (on a supposé que  $f \in L^2(\Omega)$ ). Par conséquent, un choix raisonnable pour l'espace de Hilbert est  $V = H_0^1(\Omega)$ , le sous-espace de  $H^1(\Omega)$  dont les éléments s'annulent sur le bord  $\partial\Omega$ .

En conclusion, la formulation variationnelle proposée pour (4.1) est :

$$\text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que } \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (4.5)$$

Évidemment, nous avons fait un certain nombre de choix pour arriver à (4.5); d'autres choix nous auraient conduits à d'autres formulations variationnelles possibles. La justification de (4.5) s'effectuera donc a posteriori : tout d'abord, la deuxième étape consiste à vérifier que (4.5) admet bien une unique solution, puis la troisième étape que la solution de (4.5) est aussi une solution du problème aux limites (4.1) (dans un sens à préciser).

### Étape 2 : Résolution de la formulation variationnelle.

Dans cette deuxième étape nous vérifions que la formulation variationnelle (4.5) admet une solution unique. Pour cela nous utilisons le Théorème de Lax-Milgram 2.10 dont nous vérifions les hypothèses avec les notations

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx \text{ et } L(v) = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx.$$

On voit facilement en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz que  $a$  est une forme bilinéaire continue sur  $H_0^1(\Omega)$  et que  $L$  est une forme linéaire continue sur  $H_0^1(\Omega)$ . De plus, en vertu de l'inégalité de Poincaré (voir le Corollaire 3.18 ; on utilise ici le caractère borné de l'ouvert  $\Omega$ ), la forme bilinéaire  $a$  est coercive, c'est-à-dire qu'il existe  $\nu > 0$  tel que

$$a(v, v) = \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx \geq \nu \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Comme  $H_0^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert (voir la Proposition 3.15), toutes les hypothèses du Théorème de Lax-Milgram 2.10 sont satisfaites et on peut donc conclure qu'il existe une unique solution  $u \in H_0^1(\Omega)$  de la formulation variationnelle (4.5).

### Étape 3 : Équivalence avec l'équation.

La troisième étape (la dernière et la plus délicate) consiste à vérifier qu'en résolvant la formulation variationnelle (4.5) on a bien résolu le problème aux limites (4.1), et à préciser dans quel sens la solution de (4.5) est aussi une solution de (4.1). En d'autres termes, il s'agit d'interpréter la formulation variationnelle et de retourner à l'équation. Pour cela on procède aux mêmes intégrations par parties qui ont conduit à la formulation variationnelle, mais en sens inverse, et en les justifiant soigneusement, cette fois.

Cette justification est très facile si l'on suppose que la solution  $u$  de la formulation variationnelle (4.5) est régulière (précisément si  $u \in H^2(\Omega)$ ) et que l'ouvert  $\Omega$  est aussi régulier, ce que nous faisons dans un premier temps. En effet, il suffit d'invoquer la formule de Green (3.17) qui nous donne, pour  $v \in H_0^1(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = - \int_{\Omega} v \Delta u dx$$

puisque  $v = 0$  sur le bord  $\partial\Omega$ . On en déduit alors

$$\int_{\Omega} (\Delta u + f)v \, dx = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty(\Omega),$$

ce qui implique, en vertu du Corollaire 3.2, que  $-\Delta u = f$  dans  $L^2(\Omega)$ , et on a l'égalité

$$-\Delta u = f \text{ presque partout dans } \Omega. \quad (4.6)$$

De plus, si  $\Omega$  est un ouvert borné régulier de classe  $C^1$ , alors le Théorème de trace 3.19 (ou plus précisément son Corollaire 3.21) affirme que toute fonction de  $H_0^1(\Omega)$  a une trace sur  $\partial\Omega$  nulle dans  $L^2(\Omega)$ . On en déduit, en particulier, que

$$u = 0 \text{ presque partout sur } \partial\Omega \quad (4.7)$$

(ou plus précisément, la trace de  $u$  sur  $\partial\Omega$  est nulle presque partout). On a donc bien retrouvé l'équation et la condition aux limites de (4.1).



Si l'on ne suppose plus que la solution  $u$  de (4.5) et l'ouvert  $\Omega$  sont réguliers, il faut travailler davantage (on ne peut plus utiliser la formule de Green (3.17) qui nécessite que  $u \in H^2(\Omega)$ ). On note  $\sigma = \nabla u$  qui est une fonction à valeurs vectorielles dans  $L^2(\Omega)^N$ . Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on déduit de la formulation variationnelle (4.5) que, pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)$ ,

$$\left| \int_{\Omega} \sigma \cdot \nabla v \, dx \right| = \left| \int_{\Omega} f v \, dx \right| \leq C \|v\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.8)$$

Comme  $C_c^\infty(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ , (4.8) n'est rien d'autre que le critère d'existence d'une divergence faible de  $\sigma$  dans  $L^2(\Omega)$  (voir la Définition 3.6 et le Lemme 3.7) qui vérifie, pour tout  $v \in C_c^\infty(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \nabla v \, dx = - \int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma v \, dx.$$

On en déduit donc que

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \sigma + f)v \, dx = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty(\Omega),$$

ce qui implique, en vertu du Corollaire 3.2, que  $-\operatorname{div} \sigma = f$  dans  $L^2(\Omega)$ . Par conséquent  $\operatorname{div} \sigma = \Delta u$  appartient à  $L^2(\Omega)$  (rappelons que  $\operatorname{div} \nabla = \Delta$ ), et on retrouve l'équation (4.6). On retrouve la condition aux limites (4.7) comme précédemment si l'ouvert  $\Omega$  est régulier de classe  $C^1$ . Si  $\Omega$  n'est pas régulier, alors on ne peut pas invoquer le Théorème de trace 3.19 pour obtenir (4.7). Néanmoins, le simple fait d'appartenir à  $H_0^1(\Omega)$  est une généralisation de la condition aux limites de Dirichlet pour un ouvert non régulier, et on continuera à écrire **formellement** que  $u = 0$  sur  $\partial\Omega$ .

En conclusion nous avons démontré le résultat suivant.

#### Théorème 4.1.

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ . Soit  $f \in L^2(\Omega)$ . Il existe une unique solution  $u \in H_0^1(\Omega)$  de la formulation variationnelle (4.5). De plus,  $u$  vérifie

$$-\Delta u = f \text{ presque partout dans } \Omega, \quad \text{et } u \in H_0^1(\Omega). \quad (4.9)$$

Si on suppose en plus que  $\Omega$  est régulier de classe  $C^1$ , alors  $u$  est solution du problème aux limites (4.1) au sens où

$$-\Delta u = f \text{ presque partout dans } \Omega, \quad u = 0 \text{ presque partout sur } \partial\Omega.$$

On appelle la solution  $u \in H_0^1(\Omega)$  de la formulation variationnelle (4.5) **solution variationnelle** du problème aux limites (4.1). Par un raccourci de langage bien commode, on dira que **l'unique solution**

$u \in H_0^1(\Omega)$  de la formulation variationnelle (4.5) est l'unique solution du problème aux limites (4.1). Cette appellation est bien sûr justifiée par le Théorème 4.1.

La solution de (4.1), que nous venons d'obtenir, ne vérifie *a priori* l'équation et la condition aux limites que dans un sens "faible", c'est-à-dire presque partout (ou même pire pour la condition aux limites si l'ouvert n'est pas régulier). On parle alors de **solution faible** par opposition aux solutions fortes qu'on aurait pu espérer obtenir dans une formulation classique de (4.1). De même, on appelle parfois la formulation variationnelle **formulation faible** de l'équation.

**Remarque 4.2.**

En fait, la solution faible peut être une solution forte si le second membre  $f$  est plus régulier. Autrement dit, l'équation et la condition aux limites de (4.1) peuvent être vérifiées en un sens classique, c'est-à-dire pour tout  $x \in \Omega$ , et tout  $x \in \partial\Omega$ , respectivement. C'est ce qu'on appelle un résultat de régularité pour la solution (voir plus loin le Corollaire 4.18).

Pour que le problème aux limites (4.1) soit bien posé (au sens de Hadamard, il faut en plus de l'existence et de l'unicité de sa solution, montrer que la solution dépend continûment des données. C'est une conséquence immédiate du Théorème de Lax-Milgram 2.10 mais nous en donnons un nouvel énoncé et une nouvelle démonstration.

**Proposition 4.3.**

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ , et soit  $f \in L^2(\Omega)$ . L'application qui à  $f \in L^2(\Omega)$  fait correspondre la solution unique  $u \in H_0^1(\Omega)$  de la formulation variationnelle de (4.1) est linéaire et continue de  $L^2(\Omega)$  dans  $H^1(\Omega)$ . En particulier, il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour tout  $f \in L^2(\Omega)$ , on a

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}. \tag{4.10}$$

**Démonstration.** La linéarité de  $f \rightarrow u$  est évidente. Pour obtenir la continuité on prend  $v = u$  dans la formulation variationnelle (4.5)

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \int_{\Omega} f u dx.$$

On majore le terme de droite à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et on minore celui de gauche par la coercivité de la forme bilinéaire

$$\nu \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)},$$

d'où l'on déduit le résultat. □

**Remarque 4.4.**

L'inégalité (4.10) est ce qu'on appelle une **estimation d'énergie**. Elle garantit que l'énergie de la solution est contrôlée par celle de la donnée. Les estimations d'énergie sont très naturelles d'un point de vue physique et très utiles d'un point de vue mathématique.

Nous avons déjà dit que la formulation variationnelle possède souvent une interprétation physique (c'est, par exemple, le principe des travaux virtuels en mécanique). En fait, la solution de la formulation variationnelle (4.5) réalise le minimum d'une énergie (très naturelle en physique ou en

mécanique). Le résultat suivant est une application immédiate de la Proposition 2.12.

**Proposition 4.5.**

Soit  $J(v)$  l'énergie définie pour  $v \in H_0^1(\Omega)$  par

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - \int_{\Omega} f v dx. \quad (4.11)$$

Soit  $u \in H_0^1(\Omega)$  la solution unique de la formulation variationnelle (4.5). Alors  $u$  est aussi l'unique point de minimum de l'énergie, c'est-à-dire que

$$J(u) = \min_{v \in H_0^1(\Omega)} J(v).$$

Réciproquement, si  $u \in H_0^1(\Omega)$  est un point de minimum de l'énergie  $J(v)$ , alors  $u$  est la solution unique de la formulation variationnelle (4.5).

**Remarque 4.6.**

La Proposition 4.5 repose de manière cruciale sur le fait que la forme bilinéaire de la formulation variationnelle est symétrique. Si cela n'est pas le cas, la solution de la formulation variationnelle ne minimise pas l'énergie (voir le contre-exemple de l'Exercice 3).

Souvent l'origine physique du Laplacien est en fait la recherche des minima de l'énergie  $J(v)$ . Il est remarquable que ce problème de minimisation nécessite de la part de la solution  $u$  moins de régularité que l'équation aux dérivées partielles (une seule dérivée permet de définir  $J(u)$  tandis qu'il en faut deux pour  $\Delta u$ ). Cette constatation confirme le caractère "naturel" de la formulation variationnelle pour analyser une équation aux dérivées partielles.

**II.2 Conditions de Dirichlet non homogènes**

Nous considérons maintenant le même problèmes mais où l'on ne suppose plus que la donnée au bord est nulle :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = h & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.12)$$

où  $\Omega$  est un ouvert borné de l'espace  $\mathbb{R}^N$ , et  $f$  est un second membre qui appartient à l'espace  $L^2(\Omega)$ . Comme l'on va chercher une solution  $u \in H^1(\Omega)$  on suppose qu'il existe au moins une fonction  $u_0 \in H^1(\Omega)$  telle que  $h$  soit la trace de  $u_0$  sur  $\partial\Omega$  (sinon la condition au bord ne pourra pas avoir de sens pour les solutions recherchées). On sait par définition de la trace que  $h \in L^2(\partial\Omega)$ , mais il est utile de se souvenir que toutes les fonctions de  $L^2(\partial\Omega)$  ne sont pas des traces de fonctions de  $H^1(\Omega)$  (voir le commentaire de la section IV). Nous procédons ensuite comme dans le paragraphe précédent.

**Étape 1 :** Établissement d'une formulation variationnelle.

Dans cette première étape, nous proposons une formulation variationnelle. Comme l'inconnue et la fonction test doivent appartenir au même espace, nous commençons par relever la condition au bord, en écrivant  $u = u_0 + \tilde{u}$  où  $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ . Ensuite, on multiplie l'équation par  $v \in H_0^1(\Omega)$  et on intègre par parties de façon à trouver

$$\int_{\Omega} \nabla(u_0 + \tilde{u}) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx.$$

(Comme précédemment, le terme de bord disparaît.) En passant le terme en  $u_0$  à droite de l'égalité, on obtient la formulation variationnelle

$$\text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que } \int_{\Omega} \nabla \tilde{u} \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx - \int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (4.13)$$

## Étape 2 : Résolution de la formulation variationnelle.

Nous vérifions maintenant que la formulation variationnelle (4.5) admet une solution unique. Pour cela nous utilisons le Théorème de Lax-Milgram 2.10 dont nous vérifions les hypothèses avec les notations

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx \text{ et } L(v) = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx - \int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla v dx.$$

Le lecteur vérifiera aisément, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Poincaré, que  $a$  est une forme bilinéaire continue coercive sur  $H_0^1(\Omega)$  et que  $L$  est une forme linéaire continue sur  $H_0^1(\Omega)$ .

Comme  $H_0^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert, toutes les hypothèses du Théorème de Lax-Milgram 2.10 sont satisfaites et on peut donc conclure qu'il existe une unique solution  $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$  de la formulation variationnelle (4.14).

Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que la solution  $\tilde{u}$  est unique, mais dépend, a priori, du choix de  $u_0$ . Pour démontrer l'unicité de la solution au problème initial, il convient donc de montrer que  $u = u_0 + \tilde{u}$  est unique. On considère donc un autre relèvement  $u'_0$  et la solution  $\tilde{u}'$  du problème

$$\text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que } \int_{\Omega} \nabla \tilde{u}' \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx - \int_{\Omega} \nabla u'_0 \cdot \nabla v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (4.14)$$

On a alors pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla(u_0 + \tilde{u}) \cdot \nabla v dx &= \int_{\Omega} f v dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla(u'_0 + \tilde{u}') \cdot \nabla v dx \end{aligned}$$

De sorte que  $u = u_0 + \tilde{u}$  et  $u' = u'_0 + \tilde{u}'$  vérifient

$$\int_{\Omega} \nabla(u - u') \cdot \nabla v dx = 0.$$

En prenant dans cette dernière égalité  $v = u - u'$ , ce qui est licite car  $u$  et  $u'$  ont la même trace  $h$  sur  $\partial\Omega$ , de sorte que  $u - u' \in H_0^1(\Omega)$ , on obtient

$$u - u' = Cte$$

et la constante est nulle parce que sa trace sur le bord  $\partial\Omega$  est nulle.

**Étape 3 : Équivalence avec l'équation.**

Cette étape se fait de la même façon que précédemment.

#### Remarque 4.7.

**Point de vue énergétique.** En utilisant le même calcul que précédemment, on voit que  $\tilde{u}$  réalise le minimum sur  $H_0^1(\Omega)$  de l'énergie  $J(v)$  définie par

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla v dx. \quad (4.15)$$

En remarquant que

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla(u_0 + v)|^2 dx - \int_{\Omega} f v dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx$$

on s'aperçoit alors que  $u = u_0 + \tilde{u}$  est l'unique point de minimum de

$$J'(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - \int_{\Omega} f v dx$$

sur l'espace affine

$$u_0 + H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \text{ tel que } v = h \text{ sur } \partial\Omega\}$$

### II.3 Conditions aux limites de Neumann

Nous considérons le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.16)$$

où  $\Omega$  est un ouvert (non nécessairement borné) de l'espace  $\mathbb{R}^N$ ,  $f \in L^2(\Omega)$  et  $g \in L^2(\partial\Omega)$ . L'équation de (4.16) est une variante du Laplacien où nous avons ajouté un terme d'ordre zéro afin d'éviter (en premier abord) une difficulté que nous réglerons plus loin au Théorème 4.13. L'approche variationnelle pour étudier (4.16) est sensiblement différente de celle présentée à la sous-section précédente dans le traitement des conditions aux limites. C'est pourquoi nous détaillons à nouveau les trois étapes de l'approche.

**Étape 1 :** Établissement d'une formulation variationnelle.

Pour trouver la formulation variationnelle on multiplie l'équation (4.16) par une fonction test régulière  $v$  et on intègre par parties en admettant que la solution  $u$  est suffisamment régulière afin que tous les calculs effectués soient licites. La formule de Green (3.17) (voir aussi (2.4)) donne

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x)v(x) dx &= \int_{\Omega} (-\Delta u(x) + u(x))v(x) dx \\ &= \int_{\Omega} (\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) + u(x)v(x)) dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x)v(x) ds \\ &= \int_{\Omega} (\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) + u(x)v(x)) dx - \int_{\partial\Omega} g(x)v(x) ds. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Nous avons utilisé la condition aux limites de Neumann dans (4.17) et il n'est pas nécessaire de l'inscrire dans le choix de l'espace de Hilbert  $V$ . Pour que le premier et les deux derniers termes de (4.17) aient un sens il suffit de prendre  $V = H^1(\Omega)$  (on utilise le Théorème de trace 3.19 pour justifier l'intégrale de bord).

En conclusion, la formulation variationnelle proposée pour (4.16) est : trouver  $u \in H^1(\Omega)$  tel que

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + uv) dx = \int_{\partial\Omega} gv ds + \int_{\Omega} fv dx \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (4.18)$$

Les étapes suivantes justifieront le choix de (4.18).

#### Remarque 4.8.

La principale différence entre la formulation variationnelle (4.18) pour une condition aux limites de Neumann et celle (4.5) pour une condition aux limites de Dirichlet vient de ce que la condition de Dirichlet est inscrite dans le choix de l'espace alors que la condition de Neumann apparaît dans la forme linéaire mais pas dans l'espace. La condition de Dirichlet est dite **essentielle** (ou explicite) car elle est forcée par l'appartenance à un espace, tandis que la condition de Neumann est dite **naturelle** (ou implicite) car elle découle de l'intégration par parties qui conduit à la formulation variationnelle.

#### Étape 2 : Résolution de la formulation variationnelle.

Dans cette deuxième étape nous vérifions que la formulation variationnelle (4.18) admet une solution unique. Pour cela nous utilisons le Théorème de Lax-Milgram 2.10 dont nous vérifions les hypothèses avec les notations

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + uv) dx \text{ et } L(v) = \int_{\partial\Omega} gv ds + \int_{\Omega} fv dx.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et à l'aide du Théorème de trace 3.19, on voit clairement que  $a$  est une forme bilinéaire continue sur  $H^1(\Omega)$  et que  $L$  est une forme linéaire continue sur  $H^1(\Omega)$ . Par ailleurs, la forme bilinéaire  $a$  est manifestement coercive (c'est pour cela qu'on a ajouté un terme d'ordre zéro au Laplacien) car

$$a(v, v) = \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Comme  $H^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert (voir la Proposition 3.9), toutes les hypothèses du Théorème de Lax-Milgram 2.10 sont satisfaites et on peut donc conclure qu'il existe une unique solution  $u \in H^1(\Omega)$  de la formulation variationnelle (4.18).

#### Étape 3 : Équivalence avec l'équation.

Nous interprétons maintenant la formulation variationnelle (4.18) pour vérifier qu'on a bien résolu le problème aux limites (4.16), dans un sens à préciser. Nous allons supposer que les données sont régulières. Plus précisément nous allons supposer que nous sommes dans les conditions d'application du lemme suivant de régularité que nous admettrons (voir la sous-section III pour des résultats similaires).

#### Lemme 4.9.

Soit  $\Omega$  un ouvert régulier de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}^N$ . Soit  $f \in L^2(\Omega)$  et  $g$  la trace sur  $\partial\Omega$  d'une fonction de  $H^1(\Omega)$ . Alors la solution  $u$  de la formulation variationnelle (4.18) appartient à  $H^2(\Omega)$ .

Grâce au Lemme 4.9 on peut utiliser la formule de Green du Théorème 3.31

$$\int_{\Omega} \Delta u(x)v(x) dx = - \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x)v(x) ds. \quad (4.19)$$

qui est valable pour  $u \in H^2(\Omega)$  et  $v \in H^1(\Omega)$ . Rappelons que l'intégrale de bord dans (4.19) a bien un sens à cause du Théorème de trace 3.30 qui affirme que pour  $u \in H^2(\Omega)$  la dérivée normale  $\frac{\partial u}{\partial n}$  a un sens dans  $L^2(\partial\Omega)$ . On déduit alors de (4.18) et (4.19) que, pour tout  $v \in H^1(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} (\Delta u - u + f)v dx = \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial n} - g \right) v ds. \quad (4.20)$$

Si l'on prend  $v \in C_c^\infty(\Omega) \subset H^1(\Omega)$  dans (4.20), le terme de bord disparaît et l'on déduit, en vertu du Corollaire 3.2, que  $\Delta u - u + f = 0$  dans  $L^2(\Omega)$ , donc presque partout dans  $\Omega$ . Par conséquent, le membre de gauche de (4.20) est nul, donc

$$\int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial n} - g \right) v \, ds = 0 \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

D'après le Théorème 3.11 les fonctions régulières sont denses dans  $H^1(\Omega)$ . Par conséquent, l'égalité ci-dessus est vraie pour toute fonction  $v$  régulière sur  $\partial\Omega$ , et on déduit d'une version du Corollaire 3.2, adaptée au bord  $\partial\Omega$ , que  $\frac{\partial u}{\partial n} - g = 0$  dans  $L^2(\partial\Omega)$ , et donc presque partout sur  $\partial\Omega$ . En conclusion nous avons démontré le résultat suivant.

**Théorème 4.10.**

Soit  $\Omega$  un ouvert régulier de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}^N$ . Soit  $f \in L^2(\Omega)$  et  $g$  la trace sur  $\partial\Omega$  d'une fonction de  $H^1(\Omega)$ . Il existe une unique solution  $u \in H^1(\Omega)$  de la formulation variationnelle (4.18). De plus,  $u$  appartient à  $H^2(\Omega)$  et est solution de (4.16) au sens où

$$-\Delta u + u = f \text{ presque partout dans } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ presque partout sur } \partial\Omega.$$

Comme dans la sous-section précédente, on peut montrer que la solution de (4.16) minimise une énergie. Remarquons que, si  $g = 0$ , alors l'énergie (4.21) est la même que celle (4.11) définie pour le Laplacien avec conditions aux limites de Dirichlet (modulo le terme d'ordre zéro). Néanmoins, leurs minima ne sont en général pas les mêmes car on minimise sur deux espaces différents, à savoir  $H_0^1(\Omega)$  et  $H^1(\Omega)$ . La Proposition suivante est une application immédiate de la Proposition 2.12.

**Proposition 4.11.**

Soit  $J(v)$  l'énergie définie pour  $v \in H^1(\Omega)$  par

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + |v|^2) \, dx - \int_{\Omega} f v \, dx - \int_{\partial\Omega} g v \, ds. \quad (4.21)$$

Soit  $u \in H^1(\Omega)$  la solution unique de la formulation variationnelle (4.18). Alors  $u$  est aussi l'unique point de minimum de l'énergie, c'est-à-dire que

$$J(u) = \min_{v \in H^1(\Omega)} J(v).$$

Réciproquement, si  $u \in H^1(\Omega)$  est un point de minimum de l'énergie  $J(v)$ , alors  $u$  est la solution unique de la formulation variationnelle (4.18).

Nous revenons maintenant au véritable opérateur Laplacien (sans ajout d'un terme d'ordre zéro comme dans (4.16)) et nous considérons le problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.22)$$

où  $\Omega$  est un ouvert borné connexe de l'espace  $\mathbb{R}^N$ ,  $f \in L^2(\Omega)$  et  $g \in L^2(\partial\Omega)$ . La difficulté nouvelle dans (4.22) par rapport à (4.16) est qu'il n'existe une solution que si les données  $f$  et  $g$  vérifient une **condition de compatibilité**. En effet, il est facile de voir que s'il existe une solution  $u \in H^2(\Omega)$ , alors intégrant l'équation sur  $\Omega$  (ou bien utilisant la formule de Green (3.17)) on a nécessairement

$$\int_{\Omega} f(x) \, dx + \int_{\partial\Omega} g(x) \, ds = 0. \quad (4.23)$$

Remarquons aussi que si  $u$  est solution alors  $u + C$ , avec  $C \in \mathbb{R}$ , est aussi solution. En fait, (4.23) est une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution dans  $H^1(\Omega)$ , unique à l'addition d'une constante près. Remarquons que, si l'ouvert  $\Omega$  n'est pas connexe, alors il faut écrire (4.23) pour chaque composante connexe de  $\Omega$  et l'unicité de la solution vaudra à l'addition près d'une constante par composante connexe (avec ces modifications tous les résultats qui suivent restent valables).

**Remarque 4.12.**

Physiquement, la condition de compatibilité (4.23) s'interprète comme une **condition d'équilibre** :  $f$  correspond à une source volumique, et  $g$  à un flux entrant au bord. Pour qu'il existe un état stationnaire ou d'équilibre (c'est-à-dire une solution de (4.22)), il faut que ces deux termes se balancent parfaitement. De même, l'unicité "à une constante additive près" correspond à l'absence d'origine de référence sur l'échelle qui mesure les valeurs de  $u$  (comme pour la température, par exemple).

**Théorème 4.13.**

Soit  $\Omega$  un ouvert borné connexe régulier de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}^N$ . Soit  $f \in L^2(\Omega)$  et  $g \in L^2(\partial\Omega)$  qui vérifient la condition de compatibilité (4.23). Il existe une solution faible  $u \in H^1(\Omega)$  de (4.22), unique à l'addition d'une constante près.

**Démonstration.** Pour trouver la formulation variationnelle on procède comme pour l'équation (4.16). Un calcul similaire conduit à

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\partial\Omega} g v \, ds + \int_{\Omega} f v \, dx$$

pour toute fonction test régulière  $v$ . Pour donner un sens à tous les termes de cette égalité, on pourrait choisir  $H^1(\Omega)$  comme espace de Hilbert  $V$ , mais nous ne pourrions montrer la coercivité de la forme bilinéaire. Cette difficulté est intimement liée au fait que, si  $u$  est solution, alors  $u + C$  est aussi solution. Pour éviter cet inconvénient, on lève l'indétermination de cette constante additive en ne travaillant qu'avec des fonctions de moyenne nulle. Autrement dit, on pose

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} v(x) \, dx = 0 \right\}$$

et la formulation variationnelle de (4.22) est :

$$\text{trouver } u \in V \text{ tel que } \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\partial\Omega} g v \, ds + \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in V. \tag{4.24}$$

Pour pouvoir appliquer le Théorème de Lax-Milgram à la formulation variationnelle (4.24), la seule hypothèse délicate à vérifier est la coercivité de la forme bilinéaire. Celle-ci s'obtient grâce à une généralisation de l'inégalité de Poincaré, connue sous le nom d'inégalité de Poincaré-Wirtinger : si  $\Omega$  est borné et connexe, il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour tout  $v \in H^1(\Omega)$ ,

$$\|v - m(v)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \text{ avec } m(v) = \frac{\int_{\Omega} v \, dx}{\int_{\Omega} 1 \, dx}. \tag{4.25}$$

L'inégalité (4.25) se démontre par contradiction comme dans la deuxième démonstration de la Proposition 3.16 (nous laissons cela au lecteur en exercice). Comme  $m(v) = 0$  pour tout  $v \in V$ , (4.25) prouve que  $\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$  est une norme dans  $V$ , équivalente à la norme usuelle  $\|v\|_{H^1(\Omega)}$ , et donc que la forme bilinéaire est coercive sur  $V$ . Finalement, pour montrer que la solution unique de (4.24) est bien une solution du problème aux limites (4.22), on procède comme précédemment lors de la démonstration du Théorème 4.10. On obtient ainsi pour tout  $v \in V$ ,

$$\int_{\Omega} (\Delta u + f)v \, dx = \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial n} - g \right) v \, ds. \tag{4.26}$$

Or, quelque soit  $w \in H^1(\Omega)$ , la fonction  $v = w - m(w)$  appartient à  $V$ . En choisissant une telle fonction dans (4.26), en regroupant les termes en facteur de la constante  $m(w)$  et en utilisant la condition de compatibilité (4.23) ainsi que l'égalité  $\int_{\Omega} \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \, ds$ , on déduit donc de (4.26)

$$\int_{\Omega} (\Delta u + f)w \, dx = \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial n} - g \right) w \, ds \quad \forall w \in H^1(\Omega).$$

On peut donc conclure comme d'habitude que  $u$  vérifie bien le problème aux limites (4.22).  $\square$

### III Pour aller plus loin...

Dans cette partie nous étudions quelques propriétés qualitatives des solutions du Laplacien avec conditions aux limites de Dirichlet. Dans toute cette sous-section,  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$  et  $f \in L^2(\Omega)$ .

#### III.1 Principe du maximum

##### **Théorème 4.14.**

[Principe du maximum] Si  $f \geq 0$  presque partout dans  $\Omega$ , alors la solution de (4.1) vérifie  $u \geq 0$  presque partout dans  $\Omega$ .

##### **Remarque 4.15.**

Le principe du maximum ne fait que traduire une propriété parfaitement naturelle du point de vue physique : par exemple dans le contexte de l'équation stationnaire de la chaleur, si on chauffe ( $f \geq 0$ ), la température intérieure est toujours plus grande que la température au bord ( $u \geq 0$ ). Le principe du maximum reste valable si on remplace le Laplacien par l'opérateur plus général (6.1) à coefficients variables dans  $L^\infty(\Omega)$  ou bien si l'on considère le problème (4.16) avec condition aux limites de Neumann. La validité du principe du maximum est fondamentalement liée au caractère "scalaire" de l'équation (c'est-à-dire que l'inconnue  $u$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ). Ce principe du maximum tombe généralement en défaut si l'inconnue  $u$  est à valeurs vectorielles (par exemple pour le système (6.8) de l'élasticité).

**Démonstration.** On utilise la formulation variationnelle (4.5) de (4.1) avec  $v = u^- = \min(u, 0)$  qui appartient bien à  $H_0^1(\Omega)$  en vertu du Lemme 4.16 (car  $u = u^+ + u^-$ ). On a

$$\int_{\Omega} f u^- \, dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u^- \, dx = \int_{\Omega} 1_{u < 0} \nabla u \cdot \nabla u \, dx = \int_{\Omega} |\nabla u^-|^2 \, dx \geq 0. \quad (4.27)$$

Mais  $u^- \leq 0$  et  $f \geq 0$  presque partout dans  $\Omega$ . Par conséquent, tous les termes de (4.27) sont nuls, et comme  $u^- \in H_0^1(\Omega)$  on en déduit que  $u^- = 0$ , c'est-à-dire que  $u \geq 0$  presque partout dans  $\Omega$ .  $\square$

##### **Lemme 4.16.**

Si  $v \in H_0^1(\Omega)$ , alors  $v^+ = \max(v, 0)$  appartient à  $H_0^1(\Omega)$  et

$$\nabla v^+ = 1_{v > 0} \nabla v \text{ presque partout dans } \Omega,$$

où  $1_{v > 0}(x)$  est la fonction qui vaut 1 là où  $v(x) > 0$  et 0 ailleurs.

**Théorème 4.17.**

[Théorème de régularité] Soit un entier  $m \geq 0$ . Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$  de classe  $\mathcal{C}^{m+2}$ . Soit  $f \in H^m(\Omega)$ . Alors, l'unique solution  $u \in H_0^1(\Omega)$  de (4.1) appartient à  $H^{m+2}(\Omega)$ . De plus, l'application  $f \rightarrow u$  est linéaire continue de  $H^m(\Omega)$  dans  $H^{m+2}(\Omega)$ , c'est-à-dire qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C \|f\|_{H^m(\Omega)}.$$

Par application immédiate du Théorème de régularité 4.17 et du Théorème 3.27 (sur la continuité des fonctions de  $H^m(\Omega)$ ), on montre que les solutions faibles d'équations aux dérivées partielles elliptiques sont en fait des solutions fortes, ou classiques, si les données sont régulières (comme annoncé dans la Remarque 4.2).

**Corollaire 4.18.**

Si  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$  de classe  $\mathcal{C}^{m+2}$ , si  $f \in H^m(\Omega)$ , et si  $m > N/2$ , alors la solution variationnelle  $u \in H_0^1(\Omega)$  de (4.1) est une solution forte car elle appartient à  $C^2(\overline{\Omega})$ .

En particulier, si  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , et si  $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$ , alors la solution  $u \in H_0^1(\Omega)$  de (4.1) est aussi dans  $C^\infty(\overline{\Omega})$ .

**Remarque 4.19.**

Le Théorème de régularité 4.17 et son Corollaire 4.18 restent valables pour des conditions aux limites de Neumann. Ils se généralisent aussi au cas des opérateurs elliptiques à coefficients variables (comme dans la Sous-section II). Dans ce dernier cas, il faut ajouter à l'hypothèse habituelle de coercivité des coefficients, l'hypothèse que les coefficients sont de classe  $\mathcal{C}^{m+1}$  dans  $\Omega$  (tandis que  $\Omega$  est borné régulier de classe  $\mathcal{C}^{m+2}$  et que  $f \in H^m(\Omega)$ ).

Voyons maintenant un exemple de solutions **singulières**, c'est-à-dire non régulières. Il s'agit d'un problème posé dans un ouvert non régulier pour lequel le Théorème de régularité 4.17 et son Corollaire 4.18 sont faux. En particulier, bien qu'il existe des solutions faibles (c'est-à-dire appartenant à l'espace de Sobolev  $H^1(\Omega)$ ) il n'y a pas de solutions fortes (c'est-à-dire deux fois dérivables) pour ce problème. Nous nous plaçons en dimension  $N = 2$  d'espace, et nous considérons un secteur angulaire  $\Omega$  défini en coordonnées radiales par (voir la Figure 4.1)

$$\Omega = \{(r, \theta) \text{ tel que } 0 \leq r < R \text{ et } 0 < \theta < \Theta\}$$

avec  $0 < R < +\infty$  et  $0 < \Theta \leq 2\pi$  (rappelons que  $x_1 = r \cos \theta$  et  $x_2 = r \sin \theta$ ). On note  $\Gamma_0$  la partie du bord de  $\Omega$  où  $r = R$ ,  $\Gamma_1$  celle où  $\theta = 0$  et  $\Gamma_2$  celle où  $\theta = \Theta$ . Cet ouvert  $\Omega$  présente trois "coins", mais seule l'origine (le coin entre les bords  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ ) peut poser problème pour la régularité dans les exemples ci-dessous. Physiquement, le cas d'un angle  $\Theta < \pi$  est représentatif d'un effet de pointe, tandis que le cas  $\Theta > \pi$  correspond à une encoche (ou même à une **fissure** si  $\Theta = 2\pi$ ).

Pour un entier  $k \geq 1$ , on étudie le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = \cos\left(\frac{k\pi\theta}{\Theta}\right) & \text{sur } \Gamma_0 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \end{cases} \quad (4.28)$$

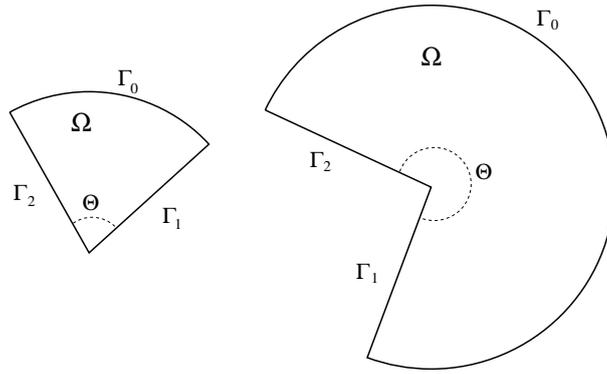


FIGURE 4.1 – Secteur angulaire  $\Omega$  d'angle  $\Theta$  (plus petit ou plus grand que  $\pi$ ).

**Lemme 4.20.**

Il existe une unique solution faible de (4.28) dans  $H^1(\Omega)$ , donnée par la formule

$$u(r, \theta) = \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{k\pi}{\Theta}} \cos\left(\frac{k\pi\theta}{\Theta}\right). \quad (4.29)$$

Si  $k = 1$  et  $\pi < \Theta$ , alors le gradient  $\nabla u$  n'est pas borné à l'origine, tandis que si  $k \geq 2$  ou  $\pi \geq \Theta$ , alors le gradient  $\nabla u$  est continu à l'origine.

**Démonstration.** On commence par “relever” la condition aux limites non-homogène en définissant une fonction  $u_0 \in H^1(\Omega)$  dont la trace sur le bord coïncide avec cette condition aux limites. On vérifie aisément que

$$u_0(r, \theta) = \frac{r^2}{R^2} \cos\left(\frac{k\pi\theta}{\Theta}\right)$$

répond à la question, c'est-à-dire que  $u = u_0 + v$  où  $v$  est la solution d'un problème homogène

$$\begin{cases} -\Delta v = \Delta u_0 & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2. \end{cases} \quad (4.30)$$

Remarquons que ce relèvement est possible car la donnée sur  $\Gamma_0$  est compatible avec les conditions aux limites sur  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , c'est-à-dire dans le cas présent que sa dérivée en  $\theta$  (i.e. sa dérivée normale) s'annule en  $\theta = 0$ , ou  $\Theta$ . Comme  $\Delta u_0$  appartient à  $L^2(\Omega)$ , il existe une unique solution de (4.30) dans  $H^1(\Omega)$ , et par conséquent (4.28) admet aussi une unique solution dans  $H^1(\Omega)$ . Vérifions que (4.29) est précisément cette unique solution. Rappelons que

$$\Delta\phi(r, \theta) = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}.$$

Un calcul simple montre que

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right) \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{k\pi}{\Theta}} = \left(\frac{k\pi}{\Theta}\right)^2 \frac{1}{r^2} \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{k\pi}{\Theta}},$$

donc (4.29) est bien solution de (4.28). On vérifie aussi facilement que (4.29) appartient à  $H^1(\Omega)$ . Finalement, la formule du gradient en coordonnées radiales dans la base  $(e_r, e_\theta)$

$$\nabla\phi(r, \theta) = \frac{\partial\phi}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} e_\theta$$

nous donne

$$\nabla u = \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{k\pi}{\Theta}-1} \frac{k\pi}{R\Theta} \left( \cos\left(\frac{k\pi\theta}{\Theta}\right) e_r - \sin\left(\frac{k\pi\theta}{\Theta}\right) e_\theta \right)$$

qui, clairement, n'est pas borné à l'origine si  $0 < k\pi < \Theta$  et est continu à l'origine si  $k\pi > \Theta$ . Le cas limite  $k\pi = \Theta$  correspond aussi à un gradient continu car en fait  $u = x_1/R$ !  $\square$

#### Remarque 4.21.

Puisque le gradient n'est pas borné, la solution de (4.28) ne peut pas être régulière au sens du Corollaire 4.18. D'un point de vue physique ou mécanique, ce gradient correspond à un flux de chaleur, au champ électrique, ou à un champ de contraintes : il importe de savoir si cette quantité est bornée continue ou non à l'origine. Physiquement, on interprète ce résultat de régularité en disant qu'une encoche ( $\Theta > \pi$ ) engendre une singularité, au contraire d'une pointe ( $\Theta \leq \pi$ ).

Dans le cas où  $\Theta = 2\pi$ , l'ouvert  $\Omega$  est un domaine **fissuré** et le Lemme 4.20 a une interprétation mécanique très importante car le problème (4.28) modélise le cisaillement anti-plan d'un cylindre de base  $\Omega$  et sa solution permet de calculer le **facteur d'intensité des contraintes** qui est souvent utilisé dans des modèles de propagation de fissures ou de rupture (voir par exemple [21]).

# Exercices

**01** A l'aide de l'approche variationnelle démontrer l'existence et l'unicité de la solution de

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.31)$$

où  $\Omega$  est un ouvert quelconque de l'espace  $\mathbb{R}^N$ , et  $f \in L^2(\Omega)$ . Montrer en particulier que l'ajout d'un terme d'ordre zéro au Laplacien permet de ne pas avoir besoin de l'hypothèse que  $\Omega$  est borné.

**02** Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ . A l'aide de l'approche variationnelle démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème suivant de convection-diffusion

$$\begin{cases} V \cdot \nabla u - \Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.32)$$

où  $f \in L^2(\Omega)$  et  $V$  est une fonction régulière à valeurs vectorielles telle que  $\operatorname{div} V = 0$  dans  $\Omega$ .

**03** On reprend les notations et hypothèses de l'Exercice 2. Montrer que tout  $v \in H_0^1(\Omega)$  vérifie

$$\int_{\Omega} v V \cdot \nabla v \, dx = 0.$$

Montrer que la solution de la formulation variationnelle du problème de convection-diffusion ne minimise pas dans  $H_0^1(\Omega)$  l'énergie

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + v V \cdot \nabla v) \, dx - \int_{\Omega} f v \, dx.$$

**04** Démontrer que l'unique solution  $u \in H^1(\Omega)$  de la formulation variationnelle (4.18) vérifie l'estimation d'énergie suivante

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}),$$

où  $C > 0$  est une constante qui ne dépend pas de  $u, f$  et  $g$ .

**05** On suppose que  $\Omega$  est un ouvert borné régulier de classe  $\mathcal{C}^1$ . A l'aide de l'approche variationnelle démontrer l'existence et l'unicité de la solution du Laplacien avec une condition aux limites de Fourier

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} + u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.33)$$

où  $f \in L^2(\Omega)$  et  $g$  est la trace sur  $\partial\Omega$  d'une fonction de  $H^1(\Omega)$ . On démontrera l'inégalité suivante (qui généralise celle de Poincaré)

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C (\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}) \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

**06** On suppose que  $\Omega$  est un ouvert borné connexe. A l'aide de l'approche variationnelle démontrer l'existence et l'unicité de la solution du Laplacien avec des conditions aux limites mêlées

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_N \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega_D \end{cases} \quad (4.34)$$

où  $f \in L^2(\Omega)$ , et  $(\partial\Omega_N, \partial\Omega_D)$  est une partition de  $\partial\Omega$  telle que les mesures superficielles de  $\partial\Omega_N$  et  $\partial\Omega_D$  sont non nulles. (Utiliser la Remarque 3.22.)

**07** Démontrer l'inégalité de Poincaré-Wirtinger (4.25).

**08** On suppose que  $\Omega$  est un ouvert borné connexe régulier. Soit  $f \in L^2(\Omega)$ . On considère la formulation variationnelle suivante : trouver  $u \in H^1(\Omega)$  tel que

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \left( \int_{\Omega} u \, dx \right) \left( \int_{\Omega} v \, dx \right) = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Démontrer l'existence et l'unicité de la solution de cette formulation variationnelle. Quel problème aux limites a-t-on ainsi résolu ? En particulier, si on suppose que  $\int_{\Omega} f \, dx = 0$ , quel problème déjà étudié retrouve-t-on ?

## ANALYSE DE LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

### I Approximation variationnelle

#### I.1 Introduction

Dans ce chapitre nous étudions les propriétés de la méthode des **éléments finis** qui a été présentée au chapitre 1. Elle est la méthode numérique de référence pour le calcul des solutions de problèmes aux limites. Nous allons voir que le principe de cette méthode est directement issu de **l'approche variationnelle** que nous avons étudiée en détail dans les chapitres précédents.

L'idée de base de la méthode des éléments finis est de remplacer l'espace de Hilbert  $V$  sur lequel est posée la formulation variationnelle par un sous-espace  $V_h$  de dimension finie. Le problème "approché" posé sur  $V_h$  se ramène (nous l'avons vu) à la simple résolution d'un système linéaire, dont la matrice est appelée **matrice de rigidité**. Par ailleurs, on peut choisir le mode de construction de  $V_h$  de manière à ce que le sous-espace  $V_h$  soit une bonne approximation de  $V$  et que la solution  $u_h$  dans  $V_h$  de la formulation variationnelle soit "**proche**" de la solution exacte  $u$  dans  $V$ .

#### I.2 Approximation interne générale

Nous considérons à nouveau le cadre général du formalisme variationnel introduit au Chapitre 2. Étant donné un espace de Hilbert  $V$ , une forme bilinéaire continue et coercive  $a(u, v)$ , et une forme linéaire continue  $L(v)$ , on considère la formulation variationnelle :

$$\text{trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V, \quad (5.1)$$

dont on sait qu'elle admet une unique solution par le Théorème 2.10 de Lax-Milgram. **L'approximation interne** de (5.1) consiste à remplacer l'espace de Hilbert  $V$  par un sous-espace de dimension finie  $V_h$ , c'est-à-dire à chercher la solution de :

$$\text{trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \quad (5.2)$$

La résolution de l'approximation interne (5.2) est facile comme le montre le lemme suivant.

#### Lemme 5.1.

Soit  $V$  un espace de Hilbert réel, et  $V_h$  un sous-espace de dimension finie. Soit  $a(u, v)$  une forme bilinéaire continue et coercive sur  $V$ , et  $L(v)$  une forme linéaire continue sur  $V$ . Alors l'approximation interne (5.2) admet une unique solution. Par ailleurs cette solution peut s'obtenir en résolvant un système linéaire de matrice définie positive (et symétrique si  $a(u, v)$  est symétrique).

**Démonstration.** L'existence et l'unicité de  $u_h \in V_h$ , solution de (5.2), découle du Théorème 2.10 de Lax-Milgram appliqué à  $V_h$ . Pour mettre le problème sous une forme plus simple, on introduit une

base  $(\phi_j)_{1 \leq j \leq N_h}$  de  $V_h$ . Si  $u_h = \sum_{j=1}^{N_h} u_j \phi_j$ , on pose  $U_h = (u_1, \dots, u_{N_h})$  le vecteur dans  $\mathbb{R}^{N_h}$  des coordonnées de  $u_h$ . Le problème (5.2) est équivalent à :

$$\text{trouver } U_h \in \mathbb{R}^{N_h} \text{ tel que } a\left(\sum_{j=1}^{N_h} u_j \phi_j, \phi_i\right) = L(\phi_i) \quad \forall 1 \leq i \leq N_h,$$

ce qui s'écrit sous la forme d'un système linéaire

$$\mathcal{K}_h U_h = b_h, \quad (5.3)$$

avec, pour  $1 \leq i, j \leq N_h$ ,

$$(\mathcal{K}_h)_{ij} = a(\phi_j, \phi_i), \quad (b_h)_i = L(\phi_i).$$

La coercivité de la forme bilinéaire  $a(u, v)$  entraîne le caractère défini positif de la matrice  $\mathcal{K}_h$ , et donc son inversibilité. En effet, pour tout vecteur  $U_h \in \mathbb{R}^{N_h}$ , on a

$$\mathcal{K}_h U_h \cdot U_h \geq \nu \left\| \sum_{j=1}^{N_h} u_j \phi_j \right\|^2 \geq C |U_h|^2 \text{ avec } C > 0,$$

car toutes les normes sont équivalentes en dimension finie ( $|\cdot|$  désigne la norme euclidienne dans  $\mathbb{R}^{N_h}$ ). De même, la symétrie de  $a(u, v)$  implique celle de  $\mathcal{K}_h$ . Dans les applications mécaniques la matrice  $\mathcal{K}_h$  est appelée **matrice de rigidité**. Le problème matriciel (5.3) possède donc une unique solution.  $\square$

Nous avons déjà vu dans le chapitre 1 que la méthode des éléments finis fournit un procédé *canonique* pour trouver des sous-espaces  $V_h$  de  $V$  de dimension finie.

Nous allons maintenant comparer l'erreur commise en remplaçant l'espace  $V$  par son sous-espace  $V_h$ . Plus précisément, nous allons majorer la différence  $\|u - u_h\|$  où  $u$  est la solution dans  $V$  de (5.1) et  $u_h$  celle dans  $V_h$  de (5.2). Précisons auparavant quelques notations : on note  $\nu > 0$  la constante de coercivité et  $M > 0$  la constante de continuité de la forme bilinéaire  $a(u, v)$  qui vérifie

$$\begin{aligned} a(u, u) &\geq \nu \|u\|^2 \quad \forall u \in V, \\ |a(u, v)| &\leq M \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in V \end{aligned}$$

Le lemme suivant, dû à Jean Céa, montre que la distance entre la solution exacte  $u$  et la solution approchée  $u_h$  est majorée **uniformément par rapport au sous-espace**  $V_h$  par la distance entre  $u$  et  $V_h$ .

### Lemme 5.2.

[Lemme de Céa] On se place sous les hypothèses du Lemme 5.1. Soit  $u$  la solution de (5.1) et  $u_h$  celle de (5.2). On a

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\nu} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|. \quad (5.4)$$

**Démonstration.** Puisque  $V_h \subset V$ , on déduit, par soustraction des formulations variationnelles (5.1) et (5.2), que

$$a(u - u_h, w_h) = 0 \quad \forall w_h \in V_h.$$

En choisissant  $w_h = u_h - v_h$  on obtient

$$\nu \|u - u_h\|^2 \leq a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h) \leq M \|u - u_h\| \|u - v_h\|,$$

d'où l'on déduit (5.4).  $\square$

Le lemme de Céa est très important. En effet, il relie l'erreur *d'approximation* entre  $u$  et son approximation supposée  $u_h$  et l'erreur *d'interpolation* de  $u$  par le meilleur élément de  $V_h$  (ou la projection de  $u$  sur  $V_h$ ). Il montre, qu'à un facteur près, l'approximation réalise la même erreur que l'interpolation. Au passage, si la solution exacte  $u$  appartient à l'espace discret  $V_h$  on aura  $u = u_h$ , c'est-à-dire que la méthode des éléments finis calculera la solution exacte.

Finalement, pour démontrer la convergence de cette approximation variationnelle, nous donnons un dernier lemme général. Rappelons que dans la notation  $V_h$  le paramètre  $h > 0$  n'a pas encore de signification pratique. Néanmoins, nous supposons que c'est dans la limite  $h \rightarrow 0$  que l'approximation interne (5.2) "converge" vers la formulation variationnelle (5.1).

### Lemme 5.3.

On se place sous les hypothèses du Lemme 5.1. On suppose qu'il existe un sous-espace  $\mathcal{V} \subset V$  dense dans  $V$  et une application  $r_h$  de  $\mathcal{V}$  dans  $V_h$  (appelée **opérateur d'interpolation**) tels que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|v - r_h(v)\| = 0 \quad \forall v \in \mathcal{V}. \quad (5.5)$$

Alors la méthode d'approximation variationnelle interne converge, c'est-à-dire que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\| = 0. \quad (5.6)$$

**Démonstration.** Soit  $\epsilon > 0$ . Par densité de  $\mathcal{V}$ , il existe  $v \in \mathcal{V}$  tel que  $\|u - v\| \leq \epsilon$ . Par ailleurs, il existe un  $h_0 > 0$  (dépendant de  $\epsilon$ ) tel que, pour cet élément  $v \in \mathcal{V}$ , on a

$$\|v - r_h(v)\| \leq \epsilon \quad \forall h \leq h_0.$$

En vertu du Lemme 5.2, on a

$$\|u - u_h\| \leq C\|u - r_h(v)\| \leq C(\|u - v\| + \|v - r_h(v)\|) \leq 2C\epsilon,$$

d'où l'on déduit le résultat. □

## 1.3

### Convergence et estimation d'erreur en dimension 1

On se place dans ce paragraphe en dimension 1 d'espace et nous considérons une approximation  $\mathbb{P}_1$ . Les fonctions de base  $(\phi_j)_j$  sont alors les fonctions chapeau données par (1.4). Pour démontrer la convergence de la méthode des éléments finis, nous définissons tout d'abord un **opérateur d'interpolation**  $r_h$  (comme dans le Lemme 5.3).

#### Définition 5.4.

On appelle opérateur d'interpolation  $\mathbb{P}_1$  l'application linéaire  $r_h$  de  $H^1(0,1)$  dans  $V_h$  définie, pour tout  $v \in H^1(0,1)$ , par

$$(r_h v)(x) = \sum_{j=0}^{n+1} v(x_j) \phi_j(x).$$

Cette définition a bien un sens car, en vertu du Lemme 3.10, les fonctions de  $H^1(0,1)$  sont continues et leurs valeurs ponctuelles sont donc bien définies. L'interpolée  $r_h v$  d'une fonction  $v$  est simplement la fonction affine par morceaux qui coïncide avec  $v$  sur les sommets du maillage  $x_j$  (voir la Figure 5.1). Remarquons qu'en une dimension d'espace l'interpolée est définie pour toute fonction de  $H^1(0,1)$ , et non pas seulement pour les fonctions régulières de  $H^1(0,1)$  (ce qui sera le cas en dimension supérieure).

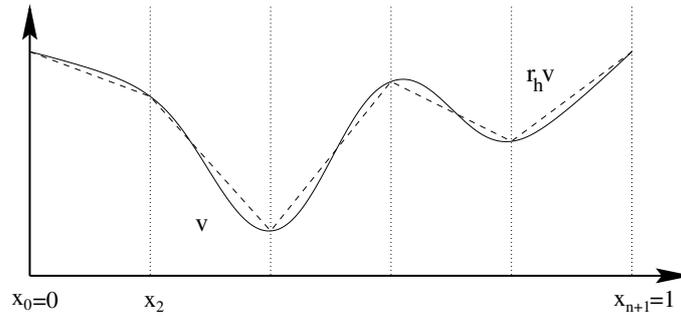


FIGURE 5.1 – Interpolation  $\mathbb{P}_1$  d'une fonction de  $H^1(0,1)$ .

La convergence de la méthode des éléments finis  $\mathbb{P}_1$  repose sur le lemme suivant.

**Lemme d'interpolation 5.5.**

Soit  $r_h$  l'opérateur d'interpolation  $\mathbb{P}_1$ . Pour tout  $v \in H^1(0,1)$ , il vérifie

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|v - r_h v\|_{H^1(0,1)} = 0.$$

De plus, si  $v \in H^2(0,1)$ , alors il existe une constante  $C$  indépendante de  $h$  telle que

$$\|v - r_h v\|_{H^1(0,1)} \leq Ch \|v''\|_{L^2(0,1)}.$$

Nous repoussons momentanément la démonstration de ce lemme pour énoncer tout de suite le résultat principal de cette sous-section qui établit la convergence de la méthode des éléments finis  $\mathbb{P}_1$  pour le problème de Dirichlet.

**Théorème 5.6.**

Soit  $u \in H_0^1(0,1)$  et  $u_h \in V_{0h}$  les solutions de (1.1) et (1.7), respectivement. Alors, la méthode des éléments finis  $\mathbb{P}_1$  converge, c'est-à-dire que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{H^1(0,1)} = 0. \tag{5.7}$$

De plus, si  $u \in H^2(0,1)$  (ce qui est vrai si  $f \in L^2(0,1)$ ), alors il existe une constante  $C$  indépendante de  $h$  telle que

$$\|u - u_h\|_{H^1(0,1)} \leq Ch \|u''\|_{L^2(0,1)} = Ch \|f\|_{L^2(0,1)}. \tag{5.8}$$

**Démonstration.** Le Lemme 5.5 permet d'appliquer le résultat de convergence du Lemme 5.3 qui entraîne immédiatement (5.7). Pour obtenir (5.8), on majore l'estimation du Lemme 5.2 de Céa

$$\|u - u_h\|_{H^1(0,1)} \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{H^1(0,1)} \leq C \|u - r_h u\|_{H^1(0,1)},$$

ce qui permet de conclure grâce au Lemme 5.5. □

**Remarque 5.7.**

On peut faire une analogie entre la convergence d'une méthode d'éléments finis et la convergence d'une méthode de différences finies. Rappelons que, d'après le Théorème de Lax, la convergence d'un schéma aux différences finies découle de sa stabilité et de sa consistance. Indiquons quels sont les équivalents (formels) de ces ingrédients dans le contexte des éléments finis. Le rôle de la consistance pour les éléments finis est joué par la propriété d'interpolation du Lemme 5.5, tandis que le rôle de la stabilité est tenu par la propriété de coercivité de la forme bilinéaire qui assure la résolution (stable) de toute approximation interne.

Nous donnons maintenant la démonstration du Lemme 5.5 sous la forme de deux autres lemmes techniques.

**Lemme 5.8.**

Il existe une constante  $C$  indépendante de  $h$  telle que, pour tout  $v \in H^2(0, 1)$ ,

$$\|v - r_h v\|_{L^2(0,1)} \leq Ch^2 \|v''\|_{L^2(0,1)}, \tag{5.9}$$

et

$$\|v' - (r_h v)'\|_{L^2(0,1)} \leq Ch \|v''\|_{L^2(0,1)}. \tag{5.10}$$

**Démonstration.** Soit  $v \in C^\infty([0, 1])$ . Par définition, l'interpolée  $r_h v$  est une fonction affine et, pour tout  $x \in ]x_j, x_{j+1}[$ , on a

$$\begin{aligned} v(x) - r_h v(x) &= v(x) - \left( v(x_j) + \frac{v(x_{j+1}) - v(x_j)}{x_{j+1} - x_j} (x - x_j) \right) \\ &= \int_{x_j}^x v'(t) dt - \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} \int_{x_j}^{x_{j+1}} v'(t) dt \\ &= (x - x_j) v'(x_j + \theta_x) - (x - x_j) v'(x_j + \theta_j) \\ &= (x - x_j) \int_{x_j + \theta_j}^{x_j + \theta_x} v''(t) dt, \end{aligned} \tag{5.11}$$

par application de la formule des accroissements finis avec  $0 \leq \theta_x \leq x - x_j$  et  $0 \leq \theta_j \leq h$ . On en déduit en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|v(x) - r_h v(x)|^2 \leq h^2 \left( \int_{x_j}^{x_{j+1}} |v''(t)| dt \right)^2 \leq h^3 \int_{x_j}^{x_{j+1}} |v''(t)|^2 dt. \tag{5.12}$$

En intégrant (5.12) par rapport à  $x$  sur l'intervalle  $[x_j, x_{j+1}]$ , on obtient

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} |v(x) - r_h v(x)|^2 dx \leq h^4 \int_{x_j}^{x_{j+1}} |v''(t)|^2 dt,$$

ce qui, par sommation en  $j$ , donne exactement (5.9). Par densité ce résultat est encore vrai pour tout  $v \in H^2(0, 1)$ . La démonstration de (5.10) est tout à fait similaire : pour  $v \in C^\infty([0, 1])$  et  $x \in ]x_j, x_{j+1}[$  on écrit

$$\begin{aligned} v'(x) - (r_h v)'(x) &= v'(x) - \frac{v(x_{j+1}) - v(x_j)}{h} = \frac{1}{h} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (v'(x) - v'(t)) dt \\ &= \frac{1}{h} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \int_t^x v''(y) dy dt. \end{aligned}$$

Élevant au carré cette inégalité, appliquant Cauchy-Schwarz deux fois et sommant en  $j$  on obtient (5.10), qui est aussi valide pour tout  $v \in H^2(0, 1)$  par densité.  $\square$

**Lemme 5.9.**

Il existe une constante  $C$  indépendante de  $h$  telle que, pour tout  $v \in H^1(0, 1)$ ,

$$\|r_h v\|_{H^1(0,1)} \leq C \|v\|_{H^1(0,1)}, \quad (5.13)$$

et

$$\|v - r_h v\|_{L^2(0,1)} \leq Ch \|v'\|_{L^2(0,1)}. \quad (5.14)$$

De plus, pour tout  $v \in H^1(0, 1)$ , on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|v' - (r_h v)'\|_{L^2(0,1)} = 0. \quad (5.15)$$

**Démonstration.** Les preuves de (5.13) et (5.14) sont dans le même esprit que celles du lemme précédent. Soit  $v \in H^1(0, 1)$ . Tout d'abord on a

$$\|r_h v\|_{L^2(0,1)} \leq \max_{x \in [0,1]} |r_h v(x)| \leq \max_{x \in [0,1]} |v(x)| \leq C \|v\|_{H^1(0,1)},$$

en vertu du Lemme 3.10. D'autre part, comme  $r_h v$  est affine, et grâce à la propriété (3.5) du Lemme 3.10 qui affirme que  $v$  est bien la primitive de  $v'$ , on a

$$\begin{aligned} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |(r_h v)'(x)|^2 dx &= \frac{(v(x_{j+1}) - v(x_j))^2}{h} \\ &= \frac{1}{h} \left( \int_{x_j}^{x_{j+1}} v'(x) dx \right)^2 \leq \int_{x_j}^{x_{j+1}} |v'(x)|^2 dx, \end{aligned}$$

par Cauchy-Schwarz, ce qui, par sommation en  $j$ , conduit à (5.13). Pour obtenir (5.14) on reprend la deuxième égalité de (5.11) d'où l'on déduit

$$|v(x) - r_h v(x)| \leq 2 \int_{x_j}^{x_{j+1}} |v'(t)| dt.$$

En élevant au carré, en utilisant Cauchy-Schwarz, en intégrant par rapport à  $x$ , puis en sommant en  $j$ , on obtient bien (5.14).

Passons à la démonstration de (5.15). Soit  $\epsilon > 0$ . Comme  $C^\infty([0, 1])$  est dense dans  $H^1(0, 1)$ , pour tout  $v \in H^1(0, 1)$  il existe  $\phi \in C^\infty([0, 1])$  tel que

$$\|v' - \phi'\|_{L^2(0,1)} \leq \epsilon.$$

Or  $r_h$  est une application linéaire qui vérifie (5.13), donc on en déduit

$$\|(r_h v)' - (r_h \phi)'\|_{L^2(0,1)} \leq C \|v' - \phi'\|_{L^2(0,1)} \leq C\epsilon.$$

Le choix de  $\phi$  et de  $\epsilon$  étant fixé, on déduit de (5.10) appliqué à  $\phi$  que, pour  $h$  suffisamment petit,

$$\|\phi' - (r_h \phi)'\|_{L^2(0,1)} \leq \epsilon.$$

Par conséquent, en sommant ces trois dernières inégalités on obtient

$$\|v' - (r_h v)'\|_{L^2(0,1)} \leq \|v' - \phi'\|_{L^2} + \|\phi' - (r_h \phi)'\|_{L^2} + \|(r_h v)' - (r_h \phi)'\|_{L^2} \leq C\epsilon,$$

ce qui implique (5.15).  $\square$

**Théorème 5.10.**

Soit  $u \in H_0^1(0,1)$  la solution exacte de (1.1) et  $u_h \in V_{0h}$  la solution approchée par la méthode des éléments finis  $\mathbb{P}_2$ . La méthode des éléments finis  $\mathbb{P}_2$  converge, c'est-à-dire que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{H^1(0,1)} = 0.$$

De plus, si  $u \in H^3(0,1)$  (ce qui est vrai si  $f \in H^1(0,1)$ ), alors il existe une constante  $C$  indépendante de  $h$  telle que

$$\|u - u_h\|_{H^1(0,1)} \leq Ch^2 \|u'''\|_{L^2(0,1)}.$$

Le Théorème 5.10 montre l'avantage principal des éléments finis  $\mathbb{P}_2$  : si la solution est régulière, alors la convergence de la méthode est **quadratique** (la vitesse de convergence est proportionnelle à  $h^2$ ) alors que la convergence pour les éléments finis  $\mathbb{P}_1$  est seulement linéaire (proportionnelle à  $h$ ). Bien sûr cet avantage a un prix : il y a deux fois plus d'inconnues (exactement  $2n + 1$  au lieu de  $n$  pour les éléments finis  $\mathbb{P}_1$ ) donc la matrice est deux fois plus grande, et en plus la matrice a cinq diagonales non nulles au lieu de trois dans le cas  $\mathbb{P}_1$ . Remarquons que si la solution n'est pas régulière ( $u \in H^3(0,1)$ ) il n'y a aucun avantage théorique (mais aussi pratique) à utiliser des éléments finis  $\mathbb{P}_2$  plutôt que  $\mathbb{P}_1$ .

Nous savons que la solution d'un problème de Dirichlet vérifie le principe du maximum (voir le Théorème 4.14). Il est important de savoir si cette propriété est conservée par l'approximation variationnelle interne.

**Proposition 5.11.**

[Principe du maximum discret] On suppose que  $f \geq 0$  presque partout dans  $]0, 1[$ . Alors, la solution  $u_h$  de l'approximation variationnelle (1.7) par la méthode des éléments finis  $\mathbb{P}_1$  vérifie  $u_h \geq 0$  dans  $[0, 1]$ .

**Démonstration.** Soit  $u_h$  la solution de (1.7). En vertu du Lemme 1.1, on a

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^n u_h(x_j) \phi_j(x),$$

où les fonctions  $\phi_j$  sont les fonctions de base des éléments finis  $\mathbb{P}_1$  dans  $V_{0h}$  et  $U_h = (u_h(x_j))_{1 \leq j \leq n}$  est solution du système linéaire

$$\mathcal{K}_h U_h = b_h. \quad (5.16)$$

Les fonctions  $\phi_j$  sont des fonctions "chapeaux" (voir la Figure 1.1) qui sont positives : il suffit donc de montrer que toutes les composantes du vecteur  $U_h = (U_h^j)_{1 \leq j \leq n}$  sont positives pour prouver que la fonction  $u_h$  est positive sur  $[0, 1]$ . Rappelons que, en posant  $U_h^0 = U_h^{n+1} = 0$ , le système linéaire (5.16) est équivalent à

$$-U_h^{j-1} + 2U_h^j - U_h^{j+1} = hb_h^j \text{ pour tout } 1 \leq j \leq n. \quad (5.17)$$

Soit  $U_h^{j_0} = \min_j U_h^j$  la plus petite composante de  $U_h$  : s'il y a plusieurs plus petites composantes, on choisit celle de plus petit indice  $j_0$ . Si  $j_0 = 0$ , alors  $U_h^j \geq U_h^0 = 0$  pour tout  $j$ , ce qui est le résultat

recherché. Si  $j_0 \geq 1$ , alors  $U_h^{j_0} < U_h^0 = 0$ , et comme  $U_h^{n+1} = 0$  on en déduit que  $j_0 \leq n$ . Comme  $b_h^j = \int_0^1 f \psi_j dx \geq 0$  par hypothèse sur  $f$ , on peut alors déduire de la relation (5.17) pour  $j_0$  que

$$\left( U_h^{j_0} - U_h^{j_0-1} \right) + \left( U_h^{j_0} - U_h^{j_0+1} \right) \geq 0,$$

ce qui est une contradiction avec le caractère minimal (strict) de  $U_h^{j_0}$ . Par conséquent la méthode des éléments finis  $\mathbb{P}_1$  vérifie le principe du maximum discret.  $\square$

## 1.6 Convergence et estimation d'erreur en dimension $N \geq 2$

Nous démontrons la convergence des méthodes d'éléments finis  $\mathbb{P}_k$  pour le problème de Dirichlet (1.10). Insistons sur le fait qu'il s'agit seulement d'un problème modèle, et que ces méthodes convergent pour d'autres problèmes, comme celui de Neumann. Nous allons avoir besoin d'hypothèses géométriques sur la qualité du maillage. Pour tout  $N$ -simplexe  $K$  on introduit deux paramètres géométriques : le **diamètre**  $\text{diam}(K)$  et la **rondeur**  $\rho(K)$ , définie comme le diamètre de la plus grande boule contenue dans  $K$ ,

$$\text{diam}(K) = \max_{x,y \in K} \|x - y\|, \quad \rho(K) = \max_{B_r \subset K} (2r).$$

Bien sûr, on a toujours  $\text{diam}(K)/\rho(K) > 1$ . Ce rapport est d'autant plus grand que  $K$  est "aplatis" : il mesure en quelque sorte la tendance à la dégénérescence de  $K$ . En pratique, comme en théorie, il faut éviter d'utiliser des  $N$ -simplexes  $K$  trop aplatis.

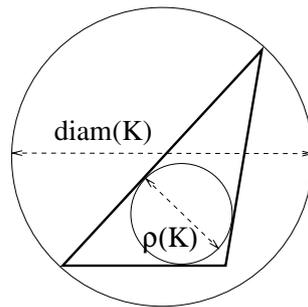


FIGURE 5.2 – Diamètre  $\text{diam}(K)$  et rondeur  $\rho(K)$  d'un triangle  $K$ .

### Définition 5.12.

Soit  $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$  une suite de maillages de  $\Omega$ . On dit qu'il s'agit d'une suite de **maillages réguliers** si

- 1 la suite  $h = \max_{K_i \in \mathcal{T}_h} \text{diam}(K_i)$  tend vers 0,
- 2 il existe une constante  $C$  telle que, pour tout  $h > 0$  et tout  $K \in \mathcal{T}_h$ ,

$$\frac{\text{diam}(K)}{\rho(K)} \leq C. \quad (5.18)$$

### Remarque 5.13.

En dimension  $N = 2$  la condition (5.18) est équivalente à la condition suivante sur les angles du triangle  $K$  : il existe un angle minimum  $\theta_0 > 0$  qui minore (uniformément en  $h$ ) tous les angles de tout  $K \in \mathcal{T}_h$ . Insistons sur le fait que la condition (5.18) est tout aussi importante en pratique que pour l'analyse de convergence qui va suivre.

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de cette sous-section qui affirme la convergence de la méthode des éléments finis  $\mathbb{P}_k$  et qui donne une estimation de la vitesse de convergence si la solution est régulière.

**Théorème 5.14.**

Soit  $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$  une suite de maillages réguliers de  $\Omega$ . Soit  $u \in H_0^1(\Omega)$ , la solution du problème de Dirichlet (1.10), et  $u_h \in V_{0h}$ , celle de son approximation interne (1.17) par la méthode des éléments finis  $\mathbb{P}_k$ . Alors la méthode des éléments finis  $\mathbb{P}_k$  converge, c'est-à-dire que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} = 0. \quad (5.19)$$

De plus, si  $u \in H^{k+1}(\Omega)$  et si  $k + 1 > N/2$ , alors on a l'estimation d'erreur

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^k \|u\|_{H^{k+1}(\Omega)}, \quad (5.20)$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $h$  et de  $u$ .

**Remarque 5.15.**

Le Théorème 5.14 s'applique en fait à toute méthode d'éléments finis de type Lagrange (par exemple, les éléments finis rectangulaires de la Sous-section V.1). En effet, le seul argument utilisé est la construction d'un opérateur d'interpolation basé sur la caractérisation des fonctions de  $V_h$  par leurs valeurs aux noeuds des degrés de liberté, ce qui est toujours possible pour des éléments finis de type Lagrange (voir la Remarque 1.11). Remarquons que, pour les cas physiquement pertinents  $N = 2$  ou  $N = 3$ , la condition  $k + 1 > N/2$  est toujours satisfaite dès que  $k \geq 1$ .

La démonstration du Théorème 5.14 repose sur la définition suivante d'un **opérateur d'interpolation**  $r_h$  et sur le résultat d'interpolation de la Proposition 5.16. Rappelons que nous avons noté  $(\hat{a}_i)_{1 \leq i \leq n_{dl}}$  la famille des noeuds des degrés de liberté et  $(\phi_i)_{1 \leq i \leq n_{dl}}$  la base de  $V_{0h}$  de la méthode des éléments finis  $\mathbb{P}_k$  (voir la Proposition 1.12). Pour toute fonction continue  $v$ , on définit son interpolée

$$r_h v(x) = \sum_{i=1}^{n_{dl}} v(\hat{a}_i) \phi_i(x). \quad (5.21)$$

La différence principale avec l'étude faite en dimension  $N = 1$  est que, les fonctions de  $H^1(\Omega)$  n'étant pas continues lorsque  $N \geq 2$ , l'opérateur d'interpolation  $r_h$  n'est pas défini sur  $H^1(\Omega)$  (les valeurs ponctuelles d'une fonction de  $H^1(\Omega)$  n'ont a priori pas de sens). Néanmoins, et c'est la raison de l'hypothèse  $k + 1 > N/2$ ,  $r_h$  est bien défini sur  $H^{k+1}(\Omega)$  car les fonctions de  $H^{k+1}(\Omega)$  sont continues ( $H^{k+1}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ ) d'après le Théorème 3.27).

**Proposition 5.16.**

Soit  $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$  une suite de maillages réguliers de  $\Omega$ . On suppose que  $k + 1 > N/2$ . Alors, pour tout  $v \in H^{k+1}(\Omega)$  l'interpolée  $r_h v$  est bien définie, et il existe une constante  $C$ , indépendante de  $h$  et de  $v$ , telle que

$$\|v - r_h v\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^k \|v\|_{H^{k+1}(\Omega)}. \quad (5.22)$$

En admettant la Proposition 5.16 nous pouvons conclure quant à la convergence de la méthode des éléments finis  $\mathbb{P}_k$ .

**Démonstration du Théorème 5.14.** On applique le cadre abstrait de la Sous-section I.2. Pour démontrer (5.19) on utilise le Lemme 5.3 avec  $\mathcal{V} = C_c^\infty(\Omega)$  qui est bien dense dans  $H_0^1(\Omega)$ . Comme

$C_c^\infty(\Omega) \subset H^{k+1}(\Omega)$ , l'estimation (5.22) de la Proposition 5.16 permet de vérifier l'hypothèse (5.5) du Lemme 5.3 (pour des fonctions régulières on n'a pas besoin de la condition  $k + 1 > N/2$  dans la Proposition 5.16).

Pour obtenir l'estimation d'erreur (5.20) on utilise le Lemme de Céa 5.2 qui nous dit que

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C \inf_{v_h \in V_{0h}} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|u - r_h u\|_{H^1(\Omega)},$$

si  $r_h u$  appartient bien à  $H^1(\Omega)$ . Par application de la Proposition 5.16 à  $u$  on obtient (5.20).  $\square$

# Exercices

- 01** Dans le cadre du Lemme de Céa 5.2, démontrer que, si la forme bilinéaire  $a(u, v)$  est symétrique, alors on améliore (5.4) en

$$\|u - u_h\| \leq \sqrt{\frac{M}{\nu}} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|.$$

Indication : on utilisera le fait que la solution  $u_h$  de (5.2) réalise aussi le minimum d'une énergie.

- 02** On considère le carré  $\Omega = ]-1, +1[^2$  maillé suivant la Figure 1.7. Calculer la matrice de rigidité  $\mathcal{K}_h$  des éléments finis  $\mathbb{P}_1$  appliqués au Laplacien avec condition aux limites de Neumann (on utilisera les symétries du maillage).

- 03** Appliquer la méthode des éléments finis  $\mathbb{P}_1$  au problème de Dirichlet (1.10) dans le carré  $\Omega = ]0, 1[^2$  avec le maillage triangulaire uniforme de la Figure 1.8. Montrer que la matrice de rigidité  $\mathcal{K}_h$  est la même matrice que celle que l'on obtiendrait par application de la méthode des différences finies (à un facteur multiplicatif  $h^2$  près), mais que le second membre  $b_h$  est différent.

- 04** On reprend les notations de l'Exercice 3. On note  $n$  le nombre de points du maillage sur un coté du carré (supposé être le même pour chaque coté). On numérote "ligne par ligne" les noeuds du maillage (ou les degrés de liberté). Montrer que la matrice de rigidité  $\mathcal{K}_h$  des éléments finis  $\mathbb{P}_1$  est de taille de l'ordre de  $n^2$  et de largeur de bande de l'ordre de  $2n$  (pour  $n$  grand).

Montrer que la même méthode et le même type de maillage pour le cube  $\Omega = ]0, 1[^3$  conduisent à une matrice de taille de l'ordre de  $n^3$  et de largeur de bande de l'ordre de  $2n^2$  (où  $n$  est le nombre de noeuds le long d'une arête du cube  $\Omega$ ).

- 05** On dit qu'une matrice carrée réelle  $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  est une M-matrice si, pour tout  $i$ ,

$$b_{ii} > 0, \quad \sum_{k=1}^n b_{ik} > 0, \quad b_{ij} \leq 0 \quad \forall j \neq i.$$

Montrer que toute M-matrice est inversible et que tous les coefficients de son inverse sont positifs ou nuls.

- 06** On se place en dimension  $N = 2$ . Soit  $u_h$  la solution approchée du problème de Dirichlet (1.10) obtenue par la méthode des éléments finis  $\mathbb{P}_1$ . On suppose que tous les angles des triangles  $K_i \in \mathcal{T}_h$  sont inférieurs ou égaux à  $\pi/2$ . Montrer que  $u_h(x) \geq 0$  dans  $\Omega$  si  $f(x) \geq 0$  dans  $\Omega$ . Indication : on montrera que, pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $\mathcal{K}_h + \epsilon \text{Id}$  est une M-matrice, où  $\mathcal{K}_h$  est la matrice de rigidité.

## APPLICATION EN MECANIQUE

### I Introduction

Dans ce chapitre, nous généralisons l'approche utilisée jusqu'à présent (formulation variationnelle) à trois problèmes de mécanique. Plus précisément, nous verrons successivement le cas des coefficients variables (dans le cas où la conductivité thermique du matériau dépend du point  $x$  où on la considère), celui de l'élasticité linéarisée et l'équation de Stokes. Ces trois équations fournissent les prototypes d'équations linéaires que l'on trouve en mécanique des milieux continus : une équation de thermique, une de mécanique du solide et enfin la dernière pour la mécanique des fluides. Nous renvoyons le lecteur à un cours de mécanique pour la dérivation de ces équations, et nous concentrons sur l'utilisation de la méthodologie développée jusqu'à présent pour leur résolution. Enfin, grâce aussi aux chapitres précédents, nous pourrions déduire (une difficulté supplémentaire apparaîtra dans le dernier cas néanmoins) la convergence de la méthode des éléments finis lorsqu'on l'appliquera à ces modèles.

### II Coefficients variables

Dans le chapitre 4 nous avons considéré des problèmes aux limites pour l'opérateur Laplacien. On peut facilement généraliser les résultats obtenus à des opérateurs plus généraux, dits elliptiques du deuxième ordre à **coefficients variables**. Ce type de problème est issu de la modélisation des milieux hétérogènes. Si l'on reprend l'exemple de la conduction de la chaleur, dans un milieu hétérogène la conductivité  $k(x)$  est une fonction variable d'un point à l'autre du domaine. Dans ce cas, on considère le problème aux limites

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(k\nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (6.1)$$

où  $\Omega$  est un ouvert borné de l'espace  $\mathbb{R}^N$ , et  $f \in L^2(\Omega)$ . Bien sûr, si  $k(x) \equiv 1$ , on retrouve le Laplacien. Il est facile de généraliser le Théorème 4.1.

#### Proposition 6.1.

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ . Soit  $f \in L^2(\Omega)$ . On suppose que le coefficient  $k(x)$  est une fonction mesurable et qu'il existe deux constantes strictement positives  $0 < k^- \leq k^+$  telles que

$$0 < k^- \leq k(x) \leq k^+ \text{ presque partout } x \in \Omega. \quad (6.2)$$

Alors, il existe une unique solution (faible)  $u \in H_0^1(\Omega)$  de (6.1).

**Démonstration.** Pour trouver la formulation variationnelle on multiplie l'équation (6.1) par une fonction test  $v$  et on intègre par parties en utilisant la formule de Green de l'Exercice 1

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma(x) v(x) dx = - \int_{\Omega} \sigma(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \sigma(x) \cdot n(x) v(x) ds,$$

avec  $\sigma = k\nabla u$ . A cause de la condition aux limites de Dirichlet on choisit  $H_0^1(\Omega)$  comme espace de Hilbert, et on trouve la formulation variationnelle de (6.1) :

$$\text{trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que } \int_{\Omega} k\nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (6.3)$$

Grâce à l'hypothèse (6.2) on vérifie que la forme bilinéaire de (6.3) est continue

$$\left| \int_{\Omega} k\nabla u \cdot \nabla v \, dx \right| \leq k^+ \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)},$$

et qu'elle est coercive

$$\int_{\Omega} k\nabla u \cdot \nabla u \, dx \geq k^- \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \geq \nu \|u\|_{H_0^1(\Omega)},$$

avec  $\nu > 0$  grâce à l'inégalité de Poincaré. On peut donc appliquer le Théorème de Lax-Milgram, ce qui démontre l'existence et l'unicité de la solution de la formulation variationnelle (6.3). Pour montrer que cette solution variationnelle est bien une solution du problème aux limites (6.1), on procède comme précédemment lors de la démonstration du Théorème 4.1.  $\square$

Il est très important de comprendre que l'équation (6.1) admet une solution même si  $k$  est discontinu ! En fait, son interprétation "au sens faible" contient plus d'informations que son écriture classique. Plus précisément, la notion de divergence faible contient implicitement ce qu'on appelle les **conditions aux limites de transmission** entre deux sous-domaines occupés par deux matériaux de conductivité différente. Considérons un exemple où  $(\Omega_1, \Omega_2)$  est une partition de  $\Omega$  sur laquelle  $k(x)$  est constant par morceaux

$$k(x) = k_i > 0 \text{ pour } x \in \Omega_i, \quad i = 1, 2. \quad (6.4)$$

On note  $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$  l'interface (supposée régulière et incluse dans  $\Omega$ ) entre  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , et  $u_i = u|_{\Omega_i}$  la restriction de la solution  $u$  à  $\Omega_i$ .

### Lemme 6.2.

Sous l'hypothèse (6.4) le problème (6.1) est équivalent à

$$\begin{cases} -k_i \Delta u_i = f & \text{dans } \Omega_i, \quad i = 1, 2, \\ u_1 = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ u_1 = u_2 & \text{sur } \Gamma, \\ k_1 \nabla u_1 \cdot n = k_2 \nabla u_2 \cdot n & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (6.5)$$

Les deux dernières lignes de (6.5) sont appelées **conditions aux limites de transmission** sur l'interface  $\Gamma$ .

**Démonstration.** Si  $u \in H_0^1(\Omega)$  est solution de (6.1), par application du Théorème de trace 3.19, on doit avoir  $u_1 = u_2$  sur  $\Gamma$ . Si on pose  $\sigma = k\nabla u$  et  $\sigma_i = \sigma|_{\Omega_i} = k_i \nabla u_i$  sa restriction à  $\Omega_i$ , on sait que  $\sigma$ , ainsi que sa divergence, appartient à  $L^2(\Omega)$ . Alors, un théorème de trace permet d'affirmer que la composante normale  $\sigma \cdot n$  a un sens sur  $\Gamma$  et on doit donc avoir  $\sigma_1 \cdot n = \sigma_2 \cdot n$  sur  $\Gamma$  (voir l'Exercice 4). Réciproquement, on construit une formulation variationnelle de (6.5) pour montrer qu'elle admet une unique solution qui coïncide avec la solution  $u$  de (6.1). On cherche  $u_i \in H^1(\Omega_i)$  et on multiplie chaque équation dans  $\Omega_i$  par la même fonction test  $v \in H_0^1(\Omega)$ . En intégrant par parties et en sommant on obtient

$$\int_{\Omega_1} \nabla u_1 \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega_2} \nabla u_2 \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Gamma} \left( k_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} + k_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_2} \right) v \, ds = \int_{\Omega_1} f v \, dx + \int_{\Omega_2} f v \, dx. \quad (6.6)$$

Comme  $n_1 = -n_2$  l'intégrale sur l'interface  $\Gamma$  disparaît à cause de la condition aux limites de transmission. D'autre part, si  $u$  est défini comme  $u_1$  dans  $\Omega_1$  et  $u_2$  dans  $\Omega_2$ , la condition de transmission  $u_1 = u_2$  sur  $\Gamma$  implique que  $u \in H^1(\Omega)$ . Par conséquent, (6.6) n'est rien d'autre que la formulation variationnelle (6.3).  $\square$

### III Système de l'élasticité linéarisée

Nous appliquons l'approche variationnelle à la résolution du système d'équations de l'élasticité linéarisée. Ces équations modélisent les déformations d'un solide sous l'hypothèse de petites déformations et de petits déplacements (hypothèse qui permet d'obtenir des équations linéaires; d'où le nom d'élasticité **linéarisée**, voir par exemple [29]). On considère les équations stationnaires de l'élasticité, c'est-à-dire indépendantes du temps. Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ . Soit une force  $f(x)$ , une fonction de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^N$ . L'inconnue  $u$  (le déplacement) est aussi une fonction de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^N$ . La modélisation mécanique fait intervenir le tenseur des déformations, noté  $e(u)$ , qui est une fonction à valeurs dans l'ensemble des matrices symétriques

$$e(u) = \frac{1}{2} \left( \nabla u + (\nabla u)^t \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)_{1 \leq i, j \leq N},$$

ainsi que le tenseur des contraintes  $\sigma$  (une autre fonction à valeurs dans l'ensemble des matrices symétriques) qui est relié à  $e(u)$  par la loi de Hooke

$$\sigma = 2\mu e(u) + \lambda \operatorname{tr}(e(u)) \operatorname{Id},$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé du matériau homogène isotrope qui occupe  $\Omega$ . Pour des raisons de thermodynamique les coefficients de Lamé vérifient

$$\mu > 0 \text{ et } 2\mu + N\lambda > 0.$$

On ajoute à cette loi constitutive le bilan des forces dans le solide

$$-\operatorname{div} \sigma = f \text{ dans } \Omega$$

où, par définition, la divergence de  $\sigma$  est le vecteur de composantes

$$\operatorname{div} \sigma = \left( \sum_{j=1}^N \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i \leq N}.$$

Utilisant le fait que  $\operatorname{tr}(e(u)) = \operatorname{div} u$ , on en déduit les équations pour  $1 \leq i \leq N$

$$-\sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda (\operatorname{div} u) \delta_{ij} \right) = f_i \text{ dans } \Omega \quad (6.7)$$

avec  $f_i$  et  $u_i$ , pour  $1 \leq i \leq N$ , les composantes de  $f$  et  $u$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^N$ . En ajoutant une condition aux limites de Dirichlet, et en utilisant des notations vectorielles, le problème aux limites considéré est

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(2\mu e(u) + \lambda \operatorname{tr}(e(u)) \operatorname{Id}) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (6.8)$$

Nous pouvons énoncer et démontrer un premier résultat d'existence et d'unicité du système de l'élasticité linéarisée.

#### Théorème 6.3.

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ . Soit  $f \in L^2(\Omega)^N$ . Il existe une unique solution (faible)  $u \in H_0^1(\Omega)^N$  de (6.8).

**Démonstration.** Pour trouver la formulation variationnelle on multiplie chaque équation (6.7) par une fonction test  $v_i$  (qui s'annule sur le bord  $\partial\Omega$  pour prendre en compte la condition aux limites de Dirichlet) et on intègre par parties pour obtenir

$$\int_{\Omega} \mu \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx + \int_{\Omega} \lambda \operatorname{div} u \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} f_i v_i dx.$$

On somme alors ces équations, pour  $i$  allant de 1 à  $N$ , afin de faire apparaître la divergence de la fonction  $v = (v_1, \dots, v_N)$  et de simplifier la première intégrale car

$$\sum_{i,j=1}^N \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = 2e(u) \cdot e(v).$$

Choisissant  $H_0^1(\Omega)^N$  comme espace de Hilbert, on obtient alors la formulation variationnelle : trouver  $u \in H_0^1(\Omega)^N$  tel que

$$\int_{\Omega} 2\mu e(u) \cdot e(v) dx + \int_{\Omega} \lambda \operatorname{div} u \operatorname{div} v dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)^N. \quad (6.9)$$

On vérifie aisément que chaque terme de (6.9) a bien un sens.

Pour pouvoir appliquer le Théorème de Lax-Milgram 2.10 à la formulation variationnelle (6.9), la seule hypothèse délicate à vérifier est la coercivité de la forme bilinéaire. On procède en trois étapes. Premièrement, montrons que

$$\int_{\Omega} 2\mu |e(v)|^2 dx + \int_{\Omega} \lambda |\operatorname{div} v|^2 dx \geq \nu \int_{\Omega} |e(v)|^2 dx,$$

avec  $\nu = \min(2\mu, (2\mu + N\lambda)) > 0$ . Pour cela, on utilise une inégalité algébrique : si on note  $A \cdot B = \sum_{i,j=1}^N a_{ij} b_{ij}$  le produit scalaire usuel des matrices symétriques, on peut décomposer toute matrice réelle symétrique  $A$  sous la forme

$$A = A^d + A^h \text{ avec } A^d = A - \frac{1}{N} \operatorname{tr} A \operatorname{Id} \text{ et } A^h = \frac{1}{N} \operatorname{tr} A \operatorname{Id},$$

de telle manière que  $A^d \cdot A^h = 0$  et  $|A|^2 = |A^d|^2 + |A^h|^2$ . On a alors

$$2\mu |A|^2 + \lambda (\operatorname{tr} A)^2 = 2\mu |A^d|^2 + (2\mu + N\lambda) |A^h|^2 \geq \nu |A|^2$$

avec  $\nu = \min(2\mu, (2\mu + N\lambda))$ , ce qui donne le résultat pour  $A = e(u)$ . Le fait que  $\nu > 0$  n'est pas un hasard : les arguments mécaniques et thermodynamiques qui conduisent aux inégalités  $\mu > 0$  et  $(2\mu + N\lambda) > 0$  sont précisément les mêmes. Deuxièmement, on utilise l'inégalité de Korn (ou plutôt un cas particulièrement simple de cette inégalité, voir le Lemme 6.4 ci-dessous) qui donne une constante  $C > 0$  telle que

$$\int_{\Omega} |e(v)|^2 dx \geq C \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx$$

pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)^N$ . Troisièmement, on utilise l'inégalité de Poincaré (composante par composante, voir la Proposition 3.16) qui donne une constante  $C > 0$  telle que, pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)^N$ ,

$$\int_{\Omega} |v|^2 dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx.$$

Au total, ces trois inégalités conduisent à la coercivité

$$\int_{\Omega} 2\mu |e(v)|^2 dx + \int_{\Omega} \lambda |\operatorname{div} v|^2 dx \geq C \|v\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Le Théorème de Lax-Milgram 2.10 donne donc l'existence et l'unicité de la solution de la formulation variationnelle (6.9). Finalement, pour montrer que la solution unique de (6.9) est bien une solution du problème aux limites (6.8), on procède comme lors de la démonstration du Théorème 4.1 pour le Laplacien.  $\square$

#### Lemme 6.4.

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ . Pour toute fonction  $v \in H_0^1(\Omega)^N$ , on a

$$\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{2} \|e(v)\|_{L^2(\Omega)}. \quad (6.10)$$

**Démonstration.** Soit  $v \in C_c^\infty(\Omega)^N$ . Par intégration par parties on obtient

$$2 \int_{\Omega} |e(v)|^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \int_{\Omega} \nabla v \cdot (\nabla v)^t dx = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \int_{\Omega} |\operatorname{div} v|^2 dx.$$

Par densité de  $C_c^\infty(\Omega)$  dans  $H_0^1(\Omega)$ , on en déduit (6.10).  $\square$

L'analyse du problème aux limites (6.8) avec une condition aux limites de Dirichlet **sur tout le bord**  $\partial\Omega$  est un peu trompeuse par sa simplicité. En effet, dès que l'on introduit une autre condition aux limites (par exemple, de Neumann) sur une partie du bord, la démonstration de la coercivité de la formulation variationnelle devient beaucoup plus difficile car on doit remplacer l'inégalité élémentaire du Lemme 6.4 par sa généralisation, nettement plus technique, dite inégalité de Korn (voir le Lemme 6.5 ci-dessous). Rappelons qu'on ne peut pas, en général, se contenter d'une condition aux limites de Dirichlet sur l'intégralité du bord  $\partial\Omega$  car elle s'interprète comme le fait que le solide est fixé et immobile sur son bord. En pratique, tout le bord n'est pas bloqué et souvent une partie du bord est libre de bouger, ou bien des forces surfaciques sont appliquées sur une autre partie. Ces deux cas de figures sont modélisés par des conditions aux limites de Neumann qui s'écrivent ici

$$\sigma n = g \text{ sur } \partial\Omega, \quad (6.11)$$

où  $g$  est une fonction à valeurs vectorielles. La condition de Neumann (6.11) s'interprète en disant que  $g$  est une force appliquée sur le bord (plus précisément,  $g$  est une densité de forces surfacique, homogène à une pression, tandis que  $f$  est une densité de forces volumique). Si  $g = 0$ , aucune force ne s'applique et le bord peut bouger sans restriction : on dit que le bord est libre.

Nous allons maintenant considérer le système de l'élasticité avec des conditions aux limites mêlées (un mélange de Dirichlet et de Neumann), c'est-à-dire

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(2\mu e(u) + \lambda \operatorname{tr}(e(u))\operatorname{Id}) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega_D \\ \sigma n = g & \text{sur } \partial\Omega_N, \end{cases} \quad (6.12)$$

où  $(\partial\Omega_N, \partial\Omega_D)$  est une partition de  $\partial\Omega$  telle que les mesures superficielles de  $\partial\Omega_N$  et  $\partial\Omega_D$  sont non nulles. L'analyse de ce nouveau problème aux limites est plus compliquée que dans le cas de la condition aux limites de Dirichlet : il faudra utiliser l'inégalité de Korn ci-dessous.

#### Lemme 6.5.

**[Inégalité de Korn]** Soit  $\Omega$  un ouvert borné régulier de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}^N$ . Il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour toute fonction  $v \in H^1(\Omega)^N$ , on a

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left( \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|e(v)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}. \quad (6.13)$$

L'inégalité (6.13) n'est pas une banalité : en effet, son membre de gauche contient toutes les dérivées partielles de  $v$  alors que son membre de droite fait intervenir seulement certaines combinaisons linéaires des dérivées partielles. Comme l'inégalité inverse de (6.13) est évidente, on en déduit que les deux membres de (6.13) sont des normes équivalentes. La démonstration du Lemme 6.5 est compliquée et dépasse le cadre de ce cours. Nous l'admettons donc en remarquant que nous avons bien démontré l'inégalité de Korn (6.13) lorsque  $v$  appartient à  $H_0^1(\Omega)^N$ . En effet, dans ce cas une combinaison du Lemme 6.4 et de l'inégalité de Poincaré (pour un ouvert borné) donne bien l'inégalité (6.13).

L'interprétation mécanique de l'inégalité de Korn est la suivante. L'énergie élastique, proportionnelle à la norme du tenseur des déformations  $e(u)$  dans  $L^2(\Omega)$ , contrôle la norme du déplacement  $u$  dans  $H^1(\Omega)^N$ , à l'addition près de la norme de  $u$  dans  $L^2(\Omega)$ . Comme nous allons le voir dans l'Exercice 2, ce dernier ajout est destiné à prendre en compte les **mouvements de corps rigides** c'est-à-dire les déplacements  $u$  non nuls mais d'énergie élastique nulle.

Nous pouvons maintenant énoncer un deuxième résultat d'existence et d'unicité pour le système de l'élasticité linéarisé avec conditions aux limites mêlées.

**Théorème 6.6.**

Soit  $\Omega$  un ouvert borné connexe régulier de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}^N$ . Soit  $f \in L^2(\Omega)^N$  et  $g \in L^2(\partial\Omega_N)^N$ . On définit l'espace

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega)^N \text{ tel que } v = 0 \text{ sur } \partial\Omega_D \right\}. \quad (6.14)$$

Il existe une unique solution (faible)  $u \in V$  de (6.12) qui dépend linéairement et continûment des données  $f$  et  $g$ .

**Démonstration.** La formulation variationnelle de (6.12) s'obtient comme dans la démonstration du Théorème 6.3. L'espace  $V$ , défini par (6.14), contient la condition aux limites de Dirichlet sur  $\partial\Omega_D$  et est bien un espace de Hilbert comme sous-espace fermé de  $H^1(\Omega)^N$  (par application du Théorème de trace 3.19). On obtient alors la formulation variationnelle : trouver  $u \in V$  tel que

$$\int_{\Omega} 2\mu e(u) \cdot e(v) dx + \int_{\Omega} \lambda \operatorname{div} u \operatorname{div} v dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx + \int_{\partial\Omega_N} g \cdot v ds \quad \forall v \in V. \quad (6.15)$$

Pour pouvoir appliquer le Théorème de Lax-Milgram 2.10 à la formulation variationnelle (6.15), la seule hypothèse délicate à vérifier est encore une fois la coercivité de la forme bilinéaire. Autrement dit, il faut montrer qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour toute fonction  $v \in V$ , on a

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|e(v)\|_{L^2(\Omega)}. \quad (6.16)$$

Tout d'abord, on note que  $\|e(v)\|_{L^2(\Omega)}$  est une norme sur  $V$ . Le seul point à vérifier qui mérite que l'on s'y attarde est que  $\|e(v)\|_{L^2(\Omega)} = 0$  implique  $v = 0$ . Supposons donc que  $\|e(v)\|_{L^2(\Omega)} = 0$  : alors l'Exercice 2 montre que  $v$  est un déplacement rigide, c'est-à-dire que  $v(x) = b + Mx$  avec  $M = -M^t$ . On vérifie facilement que, si  $M \neq 0$ , alors les points  $x$ , solutions de  $b + Mx = 0$ , forment une droite dans  $\mathbb{R}^3$  et un point dans  $\mathbb{R}^2$ . Or  $v(x) = 0$  sur  $\partial\Omega_D$ , qui est de mesure surfacique non nulle, donc nécessairement  $M = 0$  et  $b = 0$ . Démontrons maintenant (6.16) par un argument de contradiction (voir la Remarque 3.22). Si (6.16) est faux, il existe une suite  $v_n \in V$  telle que

$$\|v_n\|_{H^1(\Omega)} = 1 > n \|e(v_n)\|_{L^2(\Omega)}.$$

En particulier, la suite  $e(v_n)$  tend vers 0 dans  $L^2(\Omega)^{N^2}$ . D'autre part, comme  $v_n$  est bornée dans  $H^1(\Omega)^N$ , par application du Théorème de Rellich 3.23, il existe une sous-suite  $v_{n'}$  qui converge dans  $L^2(\Omega)^N$ . L'inégalité de Korn du Lemme 6.5 implique que

$$\|v_{n'} - v_{p'}\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \|v_{n'} - v_{p'}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|e(v_{n'}) - e(v_{p'})\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

d'où l'on déduit que la suite  $v_{n'}$  est de Cauchy dans  $H^1(\Omega)^N$ , donc convergente vers une limite  $v_{\infty}$  qui vérifie  $\|e(v_{\infty})\|_{L^2(\Omega)} = 0$ . Comme il s'agit d'une norme on en déduit que la limite est nulle  $v_{\infty} = 0$ , ce qui est une contradiction avec le fait que  $\|v_{n'}\|_{H^1(\Omega)} = 1$ .

L'interprétation de la formulation variationnelle (6.15) pour retrouver l'équation (6.12) est semblable à celle que nous avons fait lors de la démonstration du Théorème 4.10 sur le Laplacien avec condition aux limites de Neumann. Finalement, l'application  $(f, g) \rightarrow u$  est linéaire. Pour montrer qu'elle est continue de  $L^2(\Omega)^N \times L^2(\partial\Omega)^N$  dans  $H^1(\Omega)^N$ , nous prenons  $v = u$  dans la formulation variationnelle (6.15). En utilisant la coercivité de la forme bilinéaire et en majorant la forme linéaire, on obtient **l'estimation d'énergie**

$$C \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega_N)} \|u\|_{L^2(\partial\Omega)}. \quad (6.17)$$

Grâce à l'inégalité de Poincaré et au théorème de trace, on peut majorer le terme de droite de (6.17) par  $C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega_N)})\|u\|_{H^1(\Omega)}$ , ce qui prouve la continuité.  $\square$

**Remarque 6.7.**

Pour le système de l'élasticité avec des conditions aux limites de Dirichlet (ou de Neumann) on a les mêmes résultats de régularité qu'avec le Laplacien (voir le Théorème 4.17). Par contre, à la différence du Laplacien, il n'y a pas de principe du maximum pour le système de l'élasticité (comme pour la plupart des systèmes de plusieurs équations). Nous donnons un contre-exemple numérique à la Figure 6.2 : en l'absence de forces,  $f = 0$ , les conditions aux limites sont de Neumann sur les faces supérieure et inférieure du domaine, de Dirichlet  $u = 0$  à droite et  $u = e_1$  à gauche. Cela revient à étirer le domaine qui, du coup, s'amincit, conduisant ainsi à un déplacement vertical qui change de signe.

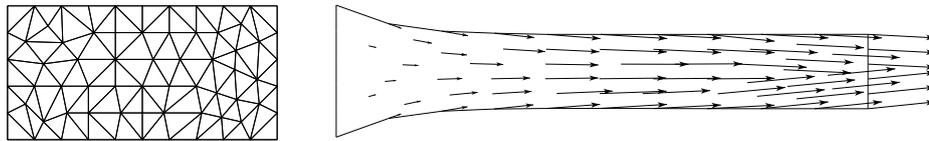


FIGURE 6.2 – Contre-exemple numérique pour le principe du maximum en élasticité. A gauche le domaine maillé au repos, et à droite le domaine déformé où les flèches représentent le déplacement (sa composante verticale change de signe).

Nous avons déjà dit que la formulation variationnelle n'est rien d'autre que le **principe des travaux virtuels** en mécanique. Poursuivant cette analogie, l'espace  $V$  est l'espace des **déplacements  $v$  cinématiquement admissibles**, et l'espace des tenseurs symétriques  $\sigma \in L^2(\Omega)^{N^2}$ , tels que  $-\text{div}\sigma = f$  dans  $\Omega$  et  $\sigma n = g$  sur  $\partial\Omega_N$ , est celui des tenseurs de **contraintes statiquement admissibles**. Comme pour le Laplacien, la solution de la formulation variationnelle (6.15) réalise le minimum d'une énergie mécanique définie pour  $v \in V$  par

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (2\mu|e(v)|^2 + \lambda|\text{div}v|^2) dx - \int_{\Omega} f \cdot v dx - \int_{\partial\Omega_N} g \cdot v ds. \tag{6.18}$$

En termes mécaniques  $J(v)$  est la somme de **l'énergie de déformation**

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} (2\mu|e(v)|^2 + \lambda|\text{div}v|^2) dx$$

et de **l'énergie potentielle des forces extérieures** (ou travail des forces extérieures au signe près)

$$- \int_{\Omega} f \cdot v dx - \int_{\partial\Omega_N} g \cdot v ds.$$

**IV Équations de Stokes**

Nous appliquons l'approche variationnelle à la résolution du système d'équations de Stokes. Soit  $\Omega$  un ouvert borné connexe de  $\mathbb{R}^N$ . Soit une force  $f(x)$ , une fonction de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^N$ . Il y a deux inconnues : la vitesse  $u$  qui est une fonction vectorielle, et la pression  $p$  qui est une fonction scalaire. En notation vectorielle, le problème aux limites considéré est

$$\begin{cases} \nabla p - \mu\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \text{div}u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{6.19}$$

où  $\mu > 0$  est la viscosité du fluide. La deuxième équation de (6.19) est la contrainte d'incompressibilité du fluide, tandis que la première est le bilan des forces. La condition aux limites de Dirichlet modélise l'adhérence du fluide sur les parois.

**Remarque 6.8.**

Le problème de Stokes (6.19) est un modèle **simplifié** d'écoulement d'un fluide visqueux incompressible (en régime stationnaire). En effet, les "vraies" équations du mouvement d'un tel fluide sont les équations de Navier-Stokes stationnaires (voir par exemple [32])

$$\begin{cases} (u \cdot \nabla)u + \nabla p - \mu \Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (6.20)$$

Lorsque la vitesse du fluide  $u$  est faible, le terme non-linéaire  $(u \cdot \nabla)u$  étant quadratique en  $u$  devient négligeable. On obtient alors les équations de Stokes. Il faut donc avoir à l'esprit que le domaine de validité de ce modèle est limité par cette hypothèse de petite vitesse.

**Théorème 6.9.**

Soit  $\Omega$  un ouvert borné connexe régulier de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}^N$ . Soit  $f \in L^2(\Omega)^N$ . Il existe une unique solution (faible)  $u \in H_0^1(\Omega)^N$  et  $p \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}$  de (6.19) (la pression est unique à une constante additive près dans  $\Omega$ ).

**Démonstration.** Pour trouver la formulation variationnelle on multiplie chaque équation du système (6.19) par une fonction test  $v_i$  (qui s'annule sur le bord  $\partial\Omega$  pour prendre en compte la condition aux limites de Dirichlet), on intègre par parties et on somme pour  $i$  allant de 1 à  $N$  (pour faire apparaître la divergence de la fonction  $v = (v_1, \dots, v_N)$ )

$$\int_{\Omega} \mu \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Omega} p \operatorname{div} v \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx,$$

avec la notation  $\nabla u \cdot \nabla v = \sum_{i=1}^N \nabla u_i \cdot \nabla v_i$ . Afin de tenir compte de la condition d'incompressibilité  $\operatorname{div} u = 0$ , on choisit comme espace de Hilbert le sous-espace suivant de  $H_0^1(\Omega)^N$

$$V = \{v \in H_0^1(\Omega)^N \text{ tel que } \operatorname{div} v = 0 \text{ p.p. dans } \Omega\}, \quad (6.21)$$

qui est bien un espace de Hilbert comme sous-espace fermé de  $H_0^1(\Omega)^N$ . On trouve alors la formulation variationnelle :

$$\text{trouver } u \in V \text{ tel que } \int_{\Omega} \mu \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx \quad \forall v \in V, \quad (6.22)$$

dans laquelle la pression a disparu ! On vérifie aisément que chaque terme de (6.22) a bien un sens. L'application du Théorème de Lax-Milgram à la formulation variationnelle (6.22) ne pose pas de problème. En particulier, la coercivité de la forme bilinéaire est évidente dans  $H_0^1(\Omega)^N$  (grâce à l'inégalité de Poincaré) donc dans  $V$  qui est un sous-espace de  $H_0^1(\Omega)^N$ .

Le point le plus délicat est ici de montrer que la solution unique de (6.22) est bien une solution du problème aux limites (6.19). Expliquons la difficulté en supposant même momentanément que  $u$  est régulière, c'est-à-dire appartient à  $H^2(\Omega)^N$ . Par intégration par parties, (6.22) implique que

$$\int_{\Omega} (\mu \Delta u + f) \cdot v \, dx = 0 \quad \forall v \in V,$$

mais on ne peut pas en déduire que  $(\mu \Delta u + f) = 0$  car l'orthogonal de  $V$  dans  $L^2(\Omega)^N$  n'est pas réduit au seul vecteur nul ! En effet, on voit facilement que si  $\phi$  est une fonction régulière, alors, pour tout

$v \in V$ , on a

$$\int_{\Omega} \nabla \phi \cdot v \, dx = - \int_{\Omega} \phi \operatorname{div} v \, dx = 0,$$

c'est-à-dire que l'orthogonal de  $V$  contient au moins tous les gradients. En fait le Théorème de de Rham 6.10 nous dit que l'orthogonal de  $V$  coïncide exactement avec l'espace des gradients.

Grâce au Théorème de de Rham 6.10 nous pouvons conclure comme suit. On pose

$$L(v) = \int_{\Omega} \mu \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Omega} f \cdot v \, dx,$$

qui est bien une forme linéaire continue sur  $H_0^1(\Omega)^N$  et nulle sur  $V$ . Par conséquent, il existe  $p \in L^2(\Omega)$ , unique à une constante additive près, tel que

$$L(v) = \int_{\Omega} p \operatorname{div} v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)^N.$$

Si on pose  $\sigma = \mu \nabla u - p \operatorname{Id}$  qui appartient à  $L^2(\Omega)^{N^2}$ , on a donc

$$\left| \int_{\Omega} \sigma \cdot \nabla v \, dx \right| = \left| \int_{\Omega} f \cdot v \, dx \right| \leq C \|v\|_{L^2(\Omega)},$$

ce qui prouve que  $\sigma$  admet une divergence faible dans  $L^2(\Omega)^N$ , et on a  $-\operatorname{div} \sigma = f$ . Par conséquent, on en déduit que

$$\nabla p - \mu \Delta u = f \quad \text{presque partout dans } \Omega. \quad (6.23)$$

D'autre part, comme  $u \in V$ ,  $\operatorname{div} u$  est nul dans  $L^2(\Omega)$ , ce qui implique

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{presque partout dans } \Omega.$$

De même, la condition aux limites s'interprète par le théorème de trace et on obtient que  $u = 0$  presque partout sur  $\partial\Omega$ .  $\square$

Nous énonçons maintenant le résultat très profond et difficile qui nous a permis de retrouver la pression à partir de la formulation variationnelle (6.22) du système de Stokes où elle avait disparu ! Sa démonstration dépasse très largement le cadre de ce cours (signalons qu'il n'est pas facile de trouver dans la littérature une démonstration "élémentaire" et auto-contenue ; voir néanmoins [20]).

### Théorème 6.10.

[Théorème de de Rham] Soit  $\Omega$  un ouvert borné connexe régulier de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}^N$ . Soit  $L$  une forme linéaire continue sur  $H_0^1(\Omega)^N$ . Alors  $L$  s'annule sur  $V$  si et seulement si il existe une fonction  $p \in L^2(\Omega)$  telle que

$$L(v) = \int_{\Omega} p \operatorname{div} v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)^N. \quad (6.24)$$

De plus  $p$  est unique à une constante additive près.

Comme pour le système de l'élasticité il existe un principe de minimisation de l'énergie (dite de **dissipation visqueuse**) pour les équations de Stokes (voir l'exercice 5).

# Exercices

**01** Montrer que l'application de  $L^2(\Omega)^N$  dans  $H_0^1(\Omega)^N$  qui à  $f$  fait correspondre  $u$ , l'unique solution faible de (6.8), est linéaire continue.

**02** Soit  $\Omega$  un ouvert connexe de  $\mathbb{R}^N$ . Soit l'ensemble  $\mathcal{R}$  des "mouvements rigides" de  $\Omega$  défini par

$$\mathcal{R} = \left\{ v(x) = b + Mx \text{ avec } b \in \mathbb{R}^N, M = -M^t \text{ matrice antisymétrique} \right\}. \quad (6.25)$$

Montrer que  $v \in H^1(\Omega)^N$  vérifie  $e(v) = 0$  dans  $\Omega$  si et seulement si  $v \in \mathcal{R}$ .

**03** Montrer que  $u \in V$  est l'unique solution de la formulation variationnelle (6.15) si et seulement si  $u$  réalise le minimum sur  $V$  de l'énergie  $J(v)$  définie par (6.18). (Indication : on pourra s'inspirer de la Proposition 2.12).

**04** Soit  $\Omega$  un ouvert borné connexe de  $\mathbb{R}^N$ . On considère le système de l'élasticité avec la condition de Neumann (6.11) sur tout le bord  $\partial\Omega$ . Montrer que la condition d'équilibre

$$\int_{\Omega} f \cdot (Mx + b) dx + \int_{\partial\Omega} g \cdot (Mx + b) ds = 0 \quad \forall b \in \mathbb{R}^N, \forall M = -M^t \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

est une condition nécessaire et suffisante d'existence et d'unicité d'une solution dans  $H^1(\Omega)^N$  (l'unicité étant obtenue à l'addition d'un "mouvement de corps rigide" près, voir (6.25)).

**05** Soit  $V$  l'espace des champs de vitesse à divergence nulle défini par (6.21). Soit  $J(v)$  l'énergie définie pour  $v \in V$  par

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mu |\nabla v|^2 dx - \int_{\Omega} f \cdot v dx. \quad (6.26)$$

Soit  $u \in V$  la solution unique de la formulation variationnelle (6.22). Montrer que  $u$  est aussi l'unique point de minimum de l'énergie, c'est-à-dire que  $J(u) = \min_{v \in V} J(v)$ . Réciproquement, montrer que, si  $u \in V$  est un point de minimum de l'énergie  $J(v)$ , alors  $u$  est la solution unique de la formulation variationnelle (6.22).

## PROBLÈMES AUX VALEURS PROPRES

### I Motivation et exemples

#### I.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la théorie spectrale des équations aux dérivées partielles, c'est-à-dire à l'étude des valeurs propres et des fonctions propres de ces équations. La motivation de cette étude est double. D'une part, cela va nous permettre d'étudier des solutions particulières, dites oscillantes en temps (ou vibrantes), des problèmes d'évolution associés à ces équations. D'autre part, cela permet de déduire une méthode de résolution générale de ces mêmes problèmes d'évolution qui dépasse l'objet de ce cours.

Donnons tout de suite un exemple de **problème aux valeurs propres** pour le Laplacien avec condition aux limites de Dirichlet. Si  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$  on cherche les couples  $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times H_0^1(\Omega)$ , avec  $u \neq 0$ , solutions de

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (7.1)$$

Le réel  $\lambda$  est appelé **valeur propre**, et la fonction  $u(x)$  **mode propre** ou **fonction propre**. L'ensemble des valeurs propres est appelé le spectre de (7.1). On peut faire l'analogie entre (7.1) et le problème plus simple de détermination des valeurs et vecteurs propres d'une matrice  $A$  d'ordre  $n$ ,

$$Au = \lambda u \quad \text{avec } (\lambda, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \quad (7.2)$$

en affirmant que l'opérateur  $-\Delta$  est une "généralisation" en dimension infinie d'une matrice  $A$  en dimension finie. La résolution de (7.1) sera utile pour résoudre les problèmes d'évolution, de type parabolique ou hyperbolique, associés au Laplacien, c'est-à-dire l'équation de la chaleur (7.5) ou l'équation des ondes (7.7). Néanmoins, les solutions de (7.1) ont aussi une interprétation physique qui leur est propre, par exemple comme modes propres de vibration.

Le plan de ce chapitre est le suivant. Après avoir motivé plus amplement le problème aux valeurs propres (7.1), nous développons dans la Section II une **théorie spectrale abstraite** dans les espaces de Hilbert. Le but de cette section est de généraliser en dimension infinie le résultat bien connu en dimension finie qui affirme que toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée. Cette section relève en partie d'un cours de mathématiques "pures", aussi nous insistons à nouveau sur le fait que c'est l'esprit des résultats plus que la lettre des démonstrations qui importe ici. Nous appliquons cette théorie spectrale aux équations aux dérivées partielles elliptiques dans la Section II. En particulier, nous démontrons que le problème spectral (7.1) **admet une infinité dénombrable de solutions**. Enfin, la Section III est consacrée aux questions d'**approximation numérique** des valeurs propres et fonctions propres d'une équation aux dérivées partielles. En particulier, nous introduisons la notion de **matrice de masse**  $\mathcal{M}$  qui vient compléter celle de matrice de rigidité  $\mathcal{K}$ , et nous montrons que des valeurs propres approchées de (7.1) se calculent comme les valeurs propres du système  $\mathcal{K}u = \lambda \mathcal{M}u$ , ce qui confirme l'analogie entre (7.1) et sa version discrète (7.2).

Avant de nous lancer dans les développements abstraits de la prochaine section, montrons en quoi la résolution d'un problème aux valeurs propres permet de résoudre aussi un problème d'évolution. Pour cela nous allons faire une analogie avec la résolution de systèmes différentiels en dimension finie. Dans tout ce qui suit  $A$  désigne une matrice symétrique réelle, définie positive, d'ordre  $n$ . On note  $\lambda_k$  ses valeurs propres et  $r_k$  ses vecteurs propres,  $1 \leq k \leq n$ , tels que  $Ar_k = \lambda_k r_k$ . On commence par un système différentiel du premier ordre

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + Au = 0 \text{ pour } t \geq 0 \\ u(t = 0) = u_0, \end{cases} \tag{7.3}$$

où  $u(t)$  est une fonction de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}^n$ , et  $u_0 \in \mathbb{R}^n$ . Il est bien connu que (7.3) admet une solution unique obtenue en diagonalisant la matrice  $A$ . Plus précisément, la donnée initiale se décompose sous la forme  $u_0 = \sum_{k=1}^n u_k^0 r_k$ , ce qui donne

$$u(t) = \sum_{k=1}^n u_k^0 e^{-\lambda_k t} r_k.$$

Un deuxième exemple est le système différentiel du deuxième ordre

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Au = 0 \text{ pour } t \geq 0 \\ u(t = 0) = u_0, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t = 0) = u_1, \end{cases} \tag{7.4}$$

où  $u(t)$  est une fonction de classe  $C^2$  de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}^n$ , et  $u_0, u_1 \in \mathbb{R}^n$ . En décomposant les données initiales sous la forme  $u_0 = \sum_{k=1}^n u_k^0 r_k$  et  $u_1 = \sum_{k=1}^n u_k^1 r_k$ , (7.4) admet comme solution unique

$$u(t) = \sum_{k=1}^n \left( u_k^0 \cos(\sqrt{\lambda_k} t) + \frac{u_k^1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin(\sqrt{\lambda_k} t) \right) r_k.$$

Il est clair sur ces deux exemples que la connaissance du spectre de la matrice  $A$  permet de résoudre les problèmes d'évolution (7.3) et (7.4). Aussi évident soient-ils, ces exemples sont tout à fait représentatifs de la démarche que nous allons suivre dans la suite. Nous allons remplacer la matrice  $A$  par l'opérateur  $-\Delta$ , l'espace  $\mathbb{R}^n$  par l'espace de Hilbert  $L^2(\Omega)$ , et nous allons "diagonaliser" le Laplacien pour résoudre l'équation de la chaleur ou l'équation des ondes.

Afin de se convaincre que (7.1) est bien la "bonne" formulation du problème aux valeurs propres pour le Laplacien, on peut passer par un argument de "séparation des variables" dans l'équation de la chaleur ou l'équation des ondes que nous décrivons formellement. En l'absence de terme source, et en "oubliant" (provisoirement) la condition initiale et les conditions aux limites, nous cherchons une solution  $\mathbf{u}$  de ces équations qui s'écrive sous la forme

$$\mathbf{u}(x, t) = \phi(t)u(x),$$

c'est-à-dire que l'on sépare les variables de temps et d'espace. Si  $\mathbf{u}$  est solution de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \Delta \mathbf{u} = 0, \tag{7.5}$$

on trouve (au moins formellement) que

$$\frac{\phi'(t)}{\phi(t)} = \frac{\Delta u(x)}{u(x)} = -\lambda$$

où  $\lambda \in \mathbb{R}$  est une constante indépendante de  $t$  et de  $x$ . On en déduit que  $\phi(t) = e^{-\lambda t}$  et que  $u$  doit être solution du problème aux valeurs propres

$$-\Delta u = \lambda u \quad (7.6)$$

muni de conditions aux limites adéquates.

De la même manière, si  $\mathbf{u}$  est solution de l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{u} = 0, \quad (7.7)$$

on trouve que

$$\frac{\phi''(t)}{\phi(t)} = \frac{\Delta u(x)}{u(x)} = -\lambda$$

où  $\lambda \in \mathbb{R}$  est une constante. Cette fois-ci on en déduit que, si  $\lambda > 0$  (ce qui sera effectivement le cas), alors  $\phi(t) = a \cos(\sqrt{\lambda}t) + b \sin(\sqrt{\lambda}t)$  et que  $u$  doit encore être solution de (7.6). Remarquons que, si le comportement en espace de la solution  $\mathbf{u}$  est le même pour l'équation de la chaleur et pour l'équation des ondes, il n'en est pas de même pour son comportement en temps : elle oscille en temps pour les ondes alors qu'elle décroît exponentiellement en temps (car  $\lambda > 0$ ) pour la chaleur.

On retrouve le même type de problème spectral que (7.6), à l'addition d'un terme d'ordre zéro près. Pour l'équation de Schrödinger la valeur propre  $\omega$  s'interprète comme une énergie. La plus petite valeur possible de cette énergie correspond à l'énergie de l'état fondamental du système décrit par (7.18). Les autres valeurs, plus grandes, donnent les énergies des états excités. Sous des conditions "raisonnables" sur le potentiel  $V$ , ces niveaux d'énergie sont discrets en nombre infini dénombrable (ce qui est cohérent avec la vision physique des *quanta*).

## II Valeurs propres d'un problème elliptique

### II.1 Problème variationnel

Nous revenons au cadre variationnel introduit au Chapitre 2. L'intérêt de ce cadre assez général est qu'il s'appliquera à de nombreux modèles différents. Dans un espace de Hilbert  $V$  nous considérons une forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$ , **symétrique**, continue et coercive, c'est-à-dire que  $a(w, v) = a(v, w)$ , et il existe  $M > 0$  et  $\nu > 0$  tels que

$$|a(w, v)| \leq M \|w\|_V \|v\|_V \text{ pour tout } w, v \in V$$

et

$$a(v, v) \geq \nu \|v\|_V^2 \text{ pour tout } v \in V.$$

Remarquons que l'hypothèse de symétrie de la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  est nouvelle puisqu'elle n'est pas nécessaire dans le cadre du théorème de Lax-Milgram. De plus, nous introduisons un nouvel ingrédient, à savoir un autre espace de Hilbert  $H$  sur lequel nous faisons l'hypothèse fondamentale suivante

$$\begin{cases} V \subset H \text{ avec injection compacte} \\ V \text{ est dense dans } H. \end{cases} \quad (7.8)$$

L'expression "injection compacte" veut dire que de toute suite bornée de  $V$  on peut extraire une sous-suite convergente dans  $H$ . Les espaces  $H$  et  $V$  ne partagent pas le même produit scalaire, et nous les noterons  $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$  pour éviter toute confusion.

Nous considérons le problème variationnel de valeurs propres suivant (ou problème spectral) : trouver  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $u \in V \setminus \{0\}$  tels que

$$a(u, v) = \lambda \langle u, v \rangle_H \quad \forall v \in V. \quad (7.9)$$

On dira que  $\lambda$  est une valeur propre du problème variationnel (7.9) (ou de la forme bilinéaire  $a$ ) et que  $u$  est le vecteur propre associé.

Les solutions de (7.9) sont données par le résultat suivant que nous admettrons.

### Théorème 7.1.

Soit  $V$  et  $H$  deux espaces de Hilbert réels de dimension infinie. On suppose que  $V \subset H$  avec injection compacte et que  $V$  est dense dans  $H$ . Soit  $a(\cdot, \cdot)$  une forme bilinéaire symétrique continue et coercive sur  $V$ . Alors les valeurs propres de (7.9) forment une suite croissante  $(\lambda_k)_{k \geq 1}$  de réels positifs qui tend vers l'infini, et il existe une base hilbertienne de  $H$   $(u_k)_{k \geq 1}$  de vecteurs propres associés, c'est-à-dire que

$$u_k \in V, \text{ et } a(u_k, v) = \lambda_k \langle u_k, v \rangle_H \quad \forall v \in V.$$

De plus,  $(u_k/\sqrt{\lambda_k})_{k \geq 1}$  est une base hilbertienne de  $V$  pour le produit scalaire  $a(\cdot, \cdot)$ .

### Remarque 7.2.

Dans le Théorème 7.1 on peut remplacer l'hypothèse de coercivité de la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  par l'hypothèse plus faible qu'il existe deux constantes positives  $\eta > 0$  et  $\nu > 0$  telles que

$$a(v, v) + \eta \|v\|_H^2 \geq \nu \|v\|_V^2 \text{ pour tout } v \in V.$$

Dans ce cas les valeurs propres  $(\lambda_k)_{k \geq 1}$  ne sont pas forcément positives, mais vérifient seulement  $\lambda_k + \eta > 0$ .

Nous donnons au passage une caractérisation très utile des valeurs propres du problème variationnel (7.9), appelée **principe du min-max ou de Courant-Fisher**. Pour cela on introduit le quotient de Rayleigh défini, pour chaque fonction  $v \in V \setminus \{0\}$ , par

$$R(v) = \frac{a(v, v)}{\|v\|_H^2}.$$

### Proposition Courant-Fisher 7.3.

Soit  $V$  et  $H$  deux espaces de Hilbert réels de dimension infinie. On suppose que  $V \subset H$  avec injection compacte et que  $V$  est dense dans  $H$ . Soit  $a(\cdot, \cdot)$  une forme bilinéaire symétrique continue et coercive sur  $V$ . Pour  $k \geq 0$  on note  $\mathcal{E}_k$  l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension  $k$  de  $V$ . On note  $(\lambda_k)_{k \geq 1}$  la suite **croissante** des valeurs propres du problème variationnel (7.9). Alors, pour tout  $k \geq 1$ , la  $k$ -ème valeur propre est donnée par

$$\lambda_k = \min_{W \in \mathcal{E}_k} \left( \max_{v \in W \setminus \{0\}} R(v) \right) = \max_{W \in \mathcal{E}_{k-1}} \left( \min_{v \in W^\perp \setminus \{0\}} R(v) \right). \quad (7.10)$$

En particulier, la première valeur propre vérifie

$$\lambda_1 = \min_{v \in V \setminus \{0\}} R(v), \quad (7.11)$$

et tout point de minimum dans (7.11) est un vecteur propre associé à  $\lambda_1$ .

**Démonstration.** Soit  $(u_k)_{k \geq 1}$  la base hilbertienne de  $H$  formée des vecteurs propres de (7.9). D'après le Théorème 7.1,  $(u_k/\sqrt{\lambda_k})_{k \geq 1}$  est une base hilbertienne de  $V$ . On peut donc caractériser les espaces

$H$  et  $V$  à partir de leur décomposition spectrale

$$H = \left\{ v = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k u_k, \|v\|_H^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k^2 < +\infty \right\},$$

$$V = \left\{ v = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k u_k, \|v\|_V^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \alpha_k^2 < +\infty \right\}.$$

On remarque au passage que, comme les valeurs propres  $\lambda_k$  sont minorées par  $\lambda_1 > 0$ , cette caractérisation fait bien apparaître  $V$  comme un sous-espace de  $H$ . On peut alors réécrire le quotient de Rayleigh

$$R(v) = \frac{\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \alpha_k^2}{\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k^2},$$

ce qui démontre immédiatement le résultat pour la première valeur propre. Introduisons le sous-espace  $W_k \in \mathcal{E}_k$  engendré par  $(u_1, u_2, \dots, u_k)$ . On a

$$R(v) = \frac{\sum_{j=1}^k \lambda_j \alpha_j^2}{\sum_{j=1}^k \alpha_j^2} \quad \forall v \in W_k \quad \text{et} \quad R(v) = \frac{\sum_{j=k}^{+\infty} \lambda_j \alpha_j^2}{\sum_{j=k}^{+\infty} \alpha_j^2} \quad \forall v \in W_{k-1}^\perp,$$

d'où l'on déduit

$$\lambda_k = \max_{v \in W_k \setminus \{0\}} R(v) = \min_{v \in W_{k-1}^\perp \setminus \{0\}} R(v).$$

Soit  $W$  un sous-espace quelconque dans  $\mathcal{E}_k$ . Comme  $W$  est de dimension  $k$  et  $W_{k-1}$  de dimension  $k-1$ , l'intersection  $W \cap W_{k-1}^\perp$  n'est pas réduite à  $\{0\}$ . Par conséquent,

$$\max_{v \in W \setminus \{0\}} R(v) \geq \max_{v \in W \cap W_{k-1}^\perp \setminus \{0\}} R(v) \geq \min_{v \in W \cap W_{k-1}^\perp \setminus \{0\}} R(v) \geq \min_{v \in W_{k-1}^\perp \setminus \{0\}} R(v) = \lambda_k,$$

ce qui prouve la première égalité dans (7.10). De même, si  $W$  est un sous-espace dans  $\mathcal{E}_{k-1}$ , alors  $W^\perp \cap W_k$  n'est pas réduit à  $\{0\}$ , et

$$\min_{v \in W^\perp \setminus \{0\}} R(v) \leq \min_{v \in W^\perp \cap W_k \setminus \{0\}} R(v) \leq \max_{v \in W^\perp \cap W_k \setminus \{0\}} R(v) \leq \max_{v \in W_k \setminus \{0\}} R(v) = \lambda_k,$$

ce qui prouve la deuxième égalité dans (7.10). Soit maintenant  $u$  un point de minimum dans (7.11). Pour  $v \in V$ , on introduit la fonction  $f(t) = R(u+tv)$  d'une variable réelle  $t \in \mathbb{R}$  qui admet un minimum en  $t = 0$ . Par conséquent sa dérivée s'annule en  $t = 0$ . En tenant compte de ce que  $f(0) = \lambda_1$ , un simple calcul montre que

$$f'(0) = 2 \frac{a(u, v) - \lambda_1 \langle u, v \rangle_H}{\|u\|_H^2}.$$

Comme  $v$  est quelconque dans  $V$ , la condition  $f'(0) = 0$  n'est rien d'autre que la formulation variationnelle (7.9), c'est-à-dire que  $u$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda_1$ .  $\square$

## II.2 Valeurs propres du Laplacien

On peut immédiatement appliquer le Théorème 7.1 à la formulation variationnelle du Laplacien avec conditions aux limites de Dirichlet, ce qui nous donne le résultat suivant.

### Théorème 7.4.

Soit  $\Omega$  un ouvert borné régulier de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}^N$ . Il existe une suite croissante  $(\lambda_k)_{k \geq 1}$  de réels positifs qui tend vers l'infini, et il existe une base hilbertienne de  $L^2(\Omega)$   $(u_k)_{k \geq 1}$ , telle que chaque  $u_k$  appartient à  $H_0^1(\Omega)$  et vérifie

$$\begin{cases} -\Delta u_k = \lambda_k u_k & \text{p.p. dans } \Omega \\ u_k = 0 & \text{p.p. sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (7.12)$$

**Démonstration.** Pour le Laplacien avec conditions aux limites de Dirichlet, on choisit  $V = H_0^1(\Omega)$ ,  $H = L^2(\Omega)$ , et la forme bilinéaire symétrique est définie par

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx,$$

et le produit scalaire sur  $L^2(\Omega)$  est bien sûr

$$\langle u, v \rangle_H = \int_{\Omega} uv \, dx.$$

On vérifie aisément les hypothèses du Théorème 7.1. Grâce au Théorème 3.23 de Rellich,  $V$  est bien compactement inclus dans  $H$ . Comme  $C_c^\infty(\Omega)$  est dense à la fois dans  $H$  et dans  $V$ ,  $V$  est bien dense dans  $H$ . Enfin, on a vu au Chapitre 4 que la forme bilinéaire  $a$  est bien continue et coercive sur  $V$ . Par conséquent, il existe une suite croissante  $(\lambda_k)_{k \geq 1}$  de réels positifs qui tend vers l'infini, et il existe une base hilbertienne de  $L^2(\Omega)$   $(u_k)_{k \geq 1}$ , tels que  $u_k \in H_0^1(\Omega)$  et

$$\int_{\Omega} \nabla u_k \cdot \nabla v \, dx = \lambda_k \int_{\Omega} u_k v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Par une simple intégration par parties (du même type que celle pratiquée dans la démonstration du Théorème 4.1) on obtient (7.12). Remarquons que nous n'utilisons la régularité de  $\Omega$  que pour pouvoir appliquer le Théorème de trace 3.19 et donner un sens "presque partout" à la condition aux limites de Dirichlet.  $\square$

#### Remarque 7.5.

L'hypothèse sur le caractère borné de l'ouvert  $\Omega$  est absolument fondamentale dans le Théorème 7.4. Si elle n'est pas satisfaite, le Théorème 3.23 de Rellich (sur l'injection compacte de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$ ) est en général faux, et on peut montrer que le Théorème 7.4 n'a pas lieu. En fait, il se peut qu'il existe une infinité (non dénombrable) de valeurs propres "généralisées" au sens où les fonctions propres n'appartiennent pas à  $L^2(\Omega)$ . A la lumière de l'Exercice 1 on méditera le cas du Laplacien dans  $\Omega = \mathbb{R}^N$ .

On peut montrer que les fonctions propres du Laplacien, avec conditions aux limites de Dirichlet ou de Neumann, sont régulières.

#### Proposition 7.6.

Soit  $\Omega$  un ouvert borné régulier de classe  $C^\infty$ . Alors les fonctions propres solutions de (7.12) appartiennent à  $C^\infty(\overline{\Omega})$ .

**Démonstration.** Soit  $u_k$  la  $k$ -ème fonction propre solution dans  $H_0^1(\Omega)$  de (7.12). On peut considérer que  $u_k$  est solution du problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\Delta u_k = f_k & \text{dans } \Omega \\ u_k = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

avec  $f_k = \lambda_k u_k$ . Comme  $f_k$  appartient à  $H^1(\Omega)$ , par application du Théorème 4.17 de régularité on en déduit que la solution  $u_k$  appartient à  $H^3(\Omega)$ . Du coup, le second membre  $f_k$  est plus régulier ce qui permet d'augmenter encore la régularité de  $u_k$ . Par une récurrence facile on montre ainsi que  $u_k$  appartient à  $H^m(\Omega)$  pour tout  $m \geq 1$ . En vertu du Théorème 3.27 sur la continuité des fonctions de  $H^m(\Omega)$  (voir aussi la Remarque 3.28), on en déduit que  $u_k$  appartient donc  $C^\infty(\overline{\Omega})$ .  $\square$

Nous admettons un résultat qualitatif important à propos de la première valeur propre.

### Théorème 7.7.

[Théorème de Krein-Rutman] On reprend les notations et les hypothèses du Théorème 7.4. On suppose que l'ouvert  $\Omega$  est connexe. Alors la première valeur propre  $\lambda_1$  est simple (i.e. le sous-espace propre correspondant est de dimension 1) et le premier vecteur propre peut être choisi positif presque partout dans  $\Omega$ .

### Remarque 7.8.

Le Théorème 7.7 de Krein-Rutman est spécifique au cas des équations "scalaires" (c'est-à-dire que l'inconnue  $u$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ). Ce résultat est faux en général si l'inconnue  $u$  est à valeurs vectorielles (voir plus loin l'exemple du système de l'élasticité). La raison de cette différence entre le cas scalaire et vectoriel est que ce théorème s'appuie sur le principe du maximum (voir le Théorème 4.14) qui n'est valable que dans le cas scalaire.

### Remarque 7.9.

L'ensemble des résultats de cette sous-section se généralise sans difficulté à d'autres conditions aux limites et à des opérateurs elliptiques généraux du second ordre (voir la Sous-section II).

## II.3

### Autres modèles

L'extension des résultats de la sous-section précédente à des équations aux dérivées partielles elliptiques plus compliquées que le Laplacien ne pose pas de problèmes conceptuels nouveaux. Nous décrivons brièvement cette généralisation pour un exemple significatif : le système de l'élasticité linéarisée.

Les équations (6.8) de l'élasticité linéarisée décrivent en fait le régime stationnaire des équations dynamiques suivantes (très semblables à l'équation des ondes)

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div}(2\mu e(u) + \lambda \operatorname{tr}(e(u)) \operatorname{Id}) = f & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_*^+, \end{cases} \quad (7.13)$$

où  $\rho > 0$  est la densité volumique du matériau et  $e(u) = (\nabla u + (\nabla u)^t)/2$ . Rappelons que les coefficients de Lamé du matériau vérifient  $\mu > 0$  et  $2\mu + N\lambda > 0$ . En l'absence de forces extérieures  $f$  (et en ne tenant pas compte d'éventuelles conditions initiales) on peut aussi chercher des solutions oscillantes en temps de (7.13) comme nous l'avons décrit pour l'équation des ondes dans Sous-section I.2. Cela conduit à chercher des solutions  $(\ell, u)$  du problème aux valeurs propres suivant

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(2\mu e(u) + \lambda \operatorname{tr}(e(u)) \operatorname{Id}) = \ell u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (7.14)$$

où  $\ell = \omega^2$  est le carré de la fréquence de vibration (nous avons changé la notation de la valeur propre pour éviter une confusion avec le coefficient de Lamé  $\lambda$ ). En mécanique, la fonction propre  $u$  est aussi appelée **mode propre de vibration**.

En suivant la méthode appliquée ci-dessus au Laplacien on peut démontrer le résultat suivant (nous

laissons les détails au lecteur en guise d'exercice).

**Proposition 7.10.**

Soit  $\Omega$  un ouvert borné régulier de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}^N$ . Il existe une suite croissante  $(\ell_k)_{k \geq 1}$  de réels positifs qui tend vers l'infini, et il existe une base hilbertienne de  $L^2(\Omega)^N$   $(u_k)_{k \geq 1}$ , telle que chaque  $u_k$  appartient à  $H_0^1(\Omega)^N$  et vérifie

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(2\mu e(u_k) + \lambda \operatorname{tr}(e(u_k))\operatorname{Id}) = \ell_k u_k & \text{p.p. dans } \Omega \\ u_k = 0 & \text{p.p. sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Rang du mode propre	1	2	3	4
Valeur propre	102.54	102.54	1885.2	2961.2

TABLE 7.1 – Valeurs propres correspondant aux modes propres de la Figure 7.1.

Le résultat de régularité sur les fonctions propres  $u_k$  de la Proposition 7.6 s'étend aussi facilement au cas de l'élasticité et du problème (7.14). Par contre le Théorème 7.7 sur la simplicité de la première valeur propre et la positivité de la première fonction propre est faux en général (comme est faux le principe du maximum). Comme exemple nous calculons par la méthode des éléments finis  $Q_1$  les 4 premiers modes propres d'une "tour" dont la base est fixée (condition aux limites de Dirichlet) et dont les autres parois sont libres (condition aux limites de Neumann). Les 2 premiers modes, dits de battement, correspondent à la même valeur propre (ils sont indépendants mais symétriques par rotation de  $90^\circ$  suivant l'axe  $z$ ) (voir la Figure 7.1 et le Tableau II.3). La première valeur propre est donc "double".

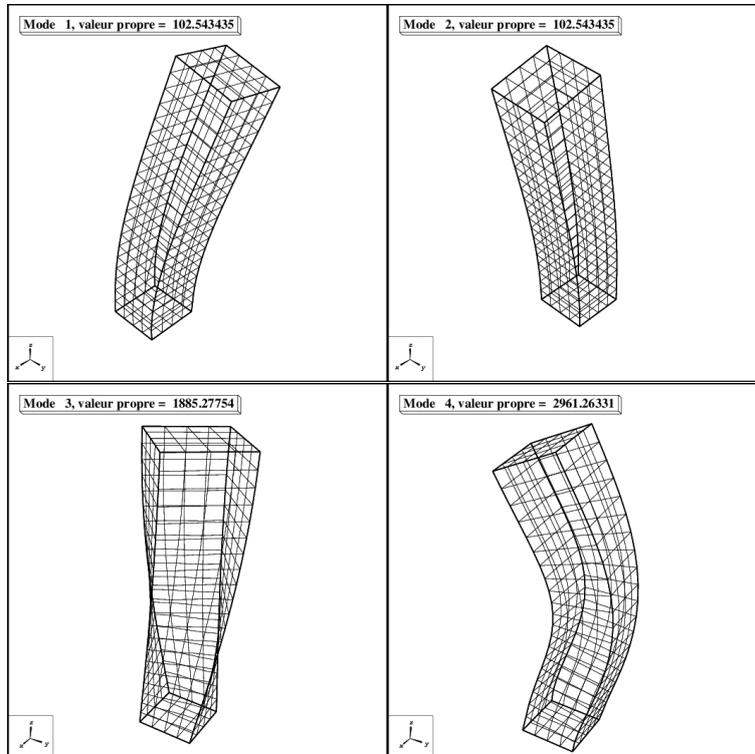


FIGURE 7.1 – Les 4 premiers modes propres d'une "tour" en élasticité.

## III Méthodes numériques

### III.1 Discrétisation par éléments finis

On va considérer une approximation interne de la formulation variationnelle introduite à la Sous-section II.1. Étant donné un sous-espace  $V_h$  de l'espace de Hilbert  $V$ , de dimension finie, on cherche les solutions  $(\lambda_h, u_h) \in \mathbb{R} \times V_h$  de

$$a(u_h, v_h) = \lambda_h \langle u_h, v_h \rangle_H \quad \forall v_h \in V_h. \quad (7.15)$$

Typiquement,  $V_h$  est un espace d'éléments finis comme ceux introduits par les Définitions 1.10 et 1.17, et  $H$  est l'espace  $L^2(\Omega)$ . La résolution de l'approximation interne (7.15) est facile comme le montre le lemme suivant.

#### Lemme 7.11.

On se place sous les hypothèses du Théorème 7.1. Alors les valeurs propres de (7.15) forment une suite croissante finie

$$0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{n_{dl}} \quad \text{avec } n_{dl} = \dim V_h,$$

et il existe une base de  $V_h$ , orthonormale dans  $H$ ,  $(u_{k,h})_{1 \leq k \leq n_{dl}}$  de vecteurs propres associés, c'est-à-dire que

$$u_{k,h} \in V_h, \quad \text{et } a(u_{k,h}, v_h) = \lambda_k \langle u_{k,h}, v_h \rangle_H \quad \forall v_h \in V_h.$$

**Démonstration.** Ce lemme peut être considéré comme une variante évidente du Théorème 7.1 (à la différence près qu'en dimension finie il existe un nombre fini de valeurs propres). Néanmoins nous en donnons une démonstration différente, purement algébrique, qui correspond plus à la démarche suivie en pratique. Soit  $(\phi_i)_{1 \leq i \leq n_{dl}}$  une base de  $V_h$  (par exemple, les fonctions de base d'une méthode d'éléments finis, voir la Proposition 1.12). On cherche  $u_h$  solution de (7.15) sous la forme

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{n_{dl}} U_i^h \phi_i(x).$$

Introduisant la **matrice de masse**  $\mathcal{M}_h$  définie par

$$(\mathcal{M}_h)_{ij} = \langle \phi_i, \phi_j \rangle_H \quad 1 \leq i, j \leq n_{dl},$$

et la **matrice de rigidité**  $\mathcal{K}_h$  définie par

$$(\mathcal{K}_h)_{ij} = a(\phi_i, \phi_j) \quad 1 \leq i, j \leq n_{dl},$$

le problème (7.15) est équivalent à trouver  $(\lambda_h, U_h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n_{dl}}$  solution de

$$\mathcal{K}_h U_h = \lambda_h \mathcal{M}_h U_h. \quad (7.16)$$

Les appellations "matrices de masse et de rigidité" proviennent des applications en mécanique des solides. Remarquons que, dans le cas où  $V_h$  est un espace d'éléments finis, la matrice de rigidité  $\mathcal{K}_h$  est exactement la même matrice que celle rencontrée au Chapitre 5 dans l'application de la méthode des éléments finis aux problèmes elliptiques. On vérifie immédiatement que les matrices  $\mathcal{M}_h$  et  $\mathcal{K}_h$  sont symétriques et définies positives. Le système (7.16) est un problème matriciel aux valeurs propres "généralisé". Le théorème de réduction simultanée (voir par exemple le théorème 2.3.6 dans [2]) affirme qu'il existe une matrice inversible  $P_h$  telle que

$$\mathcal{M}_h = P_h P_h^*, \quad \text{et } \mathcal{K}_h = P_h \text{diag}(\lambda_k) P_h^*.$$

Par conséquent, les solutions de (7.16) sont les valeurs propres  $(\lambda_k)$  et les vecteurs propres  $(U_{k,h})_{1 \leq k \leq n_{dl}}$  qui sont les vecteurs colonnes de l'inverse de  $P_h^*$ . Ces vecteurs colonnes forment donc une base, orthogonale pour  $\mathcal{K}_h$  et orthonormale pour  $\mathcal{M}_h$  (nous indiquerons brièvement à la Remarque 7.13

comment calculer cette base). Finalement, les vecteurs  $U_{k,h}$  sont simplement les vecteurs des coordonnées dans la base  $(\phi_i)_{1 \leq i \leq n_{dl}}$  des fonctions  $u_{k,h}$  qui forment une base orthonormale de  $V_h$  pour le produit scalaire de  $H$ .  $\square$

### Remarque 7.12.

Dans le Lemme 7.11 on a repris les hypothèses du Théorème 7.1 : en particulier, la forme bilinéaire  $a(u, v)$  est supposée **symétrique**. On voit bien l'importance de cette hypothèse dans la démonstration. En effet, si elle n'était pas symétrique, on ne saurait pas si le système (7.16) est diagonalisable, c'est-à-dire s'il existe des solutions du problème aux valeurs propres (7.15).

L'application du Lemme 7.11 à l'approximation variationnelle par éléments finis du problème de Dirichlet (7.12) est immédiate. On prend  $V = H_0^1(\Omega)$ ,  $H = L^2(\Omega)$ , et l'espace discret  $V_{0h}$  de la Définition 1.10 (rappelons que  $V_{0h}$  contient la condition aux limites de Dirichlet).

### Remarque 7.13.

Pour calculer les valeurs et vecteurs propres du problème spectral matriciel (7.16) il faut, en général, commencer par calculer la factorisation de Cholesky de la matrice de masse  $\mathcal{M}_h = \mathcal{L}_h \mathcal{L}_h^*$ , pour se ramener au cas classique

$$\tilde{\mathcal{K}}_h \tilde{U}_h = \lambda_h \tilde{U}_h \quad \text{avec } \tilde{\mathcal{K}}_h = \mathcal{L}_h^{-1} \mathcal{K}_h (\mathcal{L}_h^*)^{-1} \text{ et } \tilde{U}_h = \mathcal{L}_h^* U_h,$$

pour lequel on dispose d'algorithmes de calcul de valeurs et vecteurs propres. Nous renvoyons à la Section IV pour plus de détails sur ces algorithmes : disons seulement que c'est l'étape la plus coûteuse en temps de calcul.

On peut éviter de construire la matrice  $\tilde{\mathcal{K}}_h$  et faire l'économie de la factorisation de Cholesky de  $\mathcal{M}_h$  si on utilise une formule de quadrature pour évaluer les coefficients de la matrice  $\mathcal{M}_h$  qui la rende **diagonale**. Ce procédé d'intégration numérique est appelé **condensation de masse** (ou "mass lumping" en anglais) et est fréquemment utilisé. Par exemple, si on utilise la formule de quadrature (1.20) (qui utilise uniquement les valeurs aux noeuds d'une fonction pour calculer une intégrale), on voit facilement que la matrice de masse  $\mathcal{M}_h$  ainsi obtenue est diagonale (voir l'Exercice 10).

Une analyse numérique précise de la méthode des éléments finis montre que **seules les premières valeurs propres** discrètes  $\lambda_{k,h}$  (les plus petites) sont des approximations correctes des valeurs propres exactes  $\lambda_k$  (même chose pour les vecteurs propres). Il faut donc faire attention au fait que les dernières valeurs propres (les plus grandes) du problème discret (7.16) n'ont aucune signification physique ! Par conséquent, si on est intéressé par la millième valeur propre du problème de Dirichlet (7.12), il faut prendre un maillage suffisamment fin du domaine  $\Omega$  afin que la dimension de l'espace d'éléments finis  $V_h$  soit bien plus grande que mille.

## IV Calcul de valeurs et vecteurs propres

Dans cette section nous expliquons comment calculer les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice symétrique réelle. Pour plus de détails nous renvoyons aux ouvrages [2] et [10].

Puisque les valeurs propres d'une matrice  $A$  sont les racines de son polynôme caractéristique  $\det(A - \lambda \text{Id})$ , on pourrait penser naïvement que, pour les calculer, il "suffit" de factoriser son polynôme caractéristique. Il n'en est rien : on sait depuis Galois et Abel qu'on ne peut pas calculer par opérations élémentaires (addition, multiplication, extraction de racines) les racines d'un polynôme quelconque de degré supérieur ou égal à 5. Pour s'en convaincre, on peut remarquer que n'importe quel polynôme de degré  $n$ ,

$$P(\lambda) = (-1)^n (\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n),$$

est le polynôme caractéristique (le développer par rapport à la dernière colonne) de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, il ne peut pas exister de méthodes directes (c'est-à-dire qui donnent le résultat en un nombre fini d'opérations) pour le calcul des valeurs propres ! Il n'existe donc que des méthodes itératives pour calculer des valeurs propres (et des vecteurs propres). Il se trouve que le calcul pratique des valeurs et vecteurs propres d'une matrice est une tâche beaucoup plus difficile que la résolution d'un système linéaire. Fort heureusement, le cas des matrices symétriques réelles (auquel nous nous limitons puisqu'il suffit pour nos applications) est bien plus simple que le cas des matrices non auto-adjointes.

#### IV.1 Méthode de la puissance

Une méthode très simple pour calculer la plus grande ou la plus petite valeur propre (en module) d'une matrice (et un vecteur propre associé) est la méthode de la puissance. Une limitation de la méthode est que la valeur propre extrême que l'on calcule doit être simple (ou de multiplicité égale à 1, c'est-à-dire que la dimension du sous-espace propre correspondant est 1). Soit  $A$  une matrice symétrique réelle d'ordre  $n$ , de valeurs propres  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  avec  $\lambda_n > |\lambda_i|$  pour tout  $1 \leq i \leq n-1$ . La méthode de la puissance pour calculer la plus grande valeur propre  $\lambda_n$  est définie par l'algorithme ci-dessous.

- 1 Initialisation:  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\|x_0\| = 1$ .
- 2 Itérations: pour  $k \geq 1$ 
  1.  $y_k = Ax_{k-1}$
  2.  $x_k = y_k / \|y_k\|$
  3. test de convergence: si  $\|x_k - x_{k-1}\| \leq \varepsilon$ , on arrête.

Dans le test de convergence  $\varepsilon$  est un petit nombre réel, typiquement égal à  $10^{-6}$ . Si  $\delta_k = x_k - x_{k-1}$  est petit, alors  $x_k$  est un vecteur propre approché de  $A$  de valeur propre approchée  $\|y_k\|$  car  $Ax_k - \|y_k\|x_k = A\delta_k$ .

#### Proposition 7.14.

On suppose que la matrice  $A$  est symétrique réelle, de valeurs propres  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , associées à une base orthonormée de vecteurs propres  $(e_1, \dots, e_n)$ , et que la valeur propre de plus grand module  $\lambda_n$  est simple et positive, c'est-à-dire que  $|\lambda_1|, \dots, |\lambda_{n-1}| < \lambda_n$ . On suppose aussi que le vecteur initial  $x_0$  n'est pas orthogonal à  $e_n$ . Alors la méthode de la puissance converge, c'est-à-dire que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|y_k\| = \lambda_n, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = x_\infty \text{ avec } x_\infty = \pm e_n.$$

La vitesse de convergence est proportionnelle au rapport  $|\lambda_{n-1}|/|\lambda_n|$

$$\| \|y_k\| - \lambda_n \| \leq C \left| \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \right|^{2k}, \quad \|x_k - x_\infty\| \leq C \left| \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \right|^k.$$

**Démonstration.** Soit  $x_0 = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i$  le vecteur initial, avec  $\beta_n \neq 0$ . Le vecteur  $x_k$  est proportionnel à  $A^k x_0 = \sum_{i=1}^n \beta_i \lambda_i^k e_i$ , d'où il vient

$$x_k = \frac{\beta_n e_n + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_n}\right)^k e_i}{\left(\beta_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i^2 \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_n}\right)^{2k}\right)^{1/2}}.$$

Comme  $|\lambda_i| < \lambda_n$  on en déduit que  $x_k$  converge vers  $\text{sign}(\beta_n)e_n$ . De même, on a

$$\|y_{k+1}\| = \lambda_n \frac{\left(\beta_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i^2 \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_n}\right)^{2(k+1)}\right)^{1/2}}{\left(\beta_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i^2 \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_n}\right)^{2k}\right)^{1/2}},$$

qui converge vers  $\lambda_n$ . □

En pratique (et notamment pour le calcul des valeurs propres de la discrétisation d'un problème aux limites elliptiques), on est surtout intéressé par la **plus petite** valeur propre, en module, de  $A$ . On peut adapter les idées précédentes, ce qui donne la méthode de la puissance inverse dont l'algorithme est écrit ci-dessous. On considère une matrice symétrique réelle  $A$  dont la plus petite valeur propre en module est simple et strictement positive  $0 < \lambda_1 < |\lambda_i|$  pour tout  $2 \leq i \leq n$ .

1 Initialisation:  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\|x_0\| = 1$ .

2 Itérations: pour  $k \geq 1$

1. résoudre  $Ay_k = x_{k-1}$

2.  $x_k = y_k / \|y_k\|$

3. test de convergence: si  $\|x_k - x_{k-1}\| \leq \varepsilon$ , on arrête.

Si  $\delta_k = x_k - x_{k-1}$  est petit, alors  $x_{k-1}$  est un vecteur propre approché de valeur propre approchée  $1/\|y_k\|$  car  $Ax_{k-1} - \frac{x_{k-1}}{\|y_k\|} = -A\delta_k$ .

### Proposition 7.15.

On suppose que la matrice  $A$  est symétrique réelle, de valeurs propres  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , associées à une base orthonormée de vecteurs propres  $(e_1, \dots, e_n)$ , et que la valeur propre de plus petit module  $\lambda_1$  est simple et strictement positive, c'est-à-dire que  $0 < \lambda_1 < |\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|$ . On suppose aussi que le vecteur initial  $x_0$  n'est pas orthogonal à  $e_1$ . Alors la méthode de la puissance inverse converge, c'est-à-dire que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\|y_k\|} = |\lambda_1|, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = x_\infty \text{ avec } x_\infty = \pm e_1.$$

La vitesse de convergence est proportionnelle au rapport  $\lambda_1/|\lambda_2|$

$$\| \|y_k\|^{-1} - \lambda_1 \| \leq C \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right|^{2k}, \quad \|x_k - x_\infty\| \leq C \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right|^k.$$

La démonstration est similaire à celle de la Proposition 7.14 et nous la laissons au lecteur en guise d'exercice.

### Remarque 7.16.

Pour accélérer la convergence, on peut toujours procéder à une translation de la matrice  $A$  qu'on remplace par  $A - \sigma \text{Id}$  avec  $\sigma$  une approximation de  $\lambda_1$ .

La méthode de Givens-Householder se compose de deux étapes successives : tout d'abord l'algorithme de Householder qui réduit une matrice symétrique  $A$  en une matrice tridiagonale (cette étape s'effectue en un nombre fini d'opérations), ensuite l'algorithme de bisection de Givens qui fournit (de manière itérative) les valeurs propres d'une matrice tridiagonale.

**Lemme 7.17.**

[Lemme de Householder] Soit  $A$  une matrice symétrique réelle d'ordre  $n$ . Il existe  $(n-2)$  matrices orthogonales  $H_k$  telles que

$$T = (H_1 H_2 \cdots H_{n-2})^* A (H_1 H_2 \cdots H_{n-2})$$

soit tridiagonale. Bien sûr,  $A$  et  $T$  ont les mêmes valeurs propres.

**Démonstration.** A partir de  $A$ , on construit une suite de matrices  $(A_k)_{1 \leq k \leq n-1}$  telle que  $A_1 = A$  et  $A_{k+1} = H_k^* A_k H_k$  avec  $H_k$  une matrice orthogonale choisie de telle manière que  $A_k$  ait la structure par blocs suivante

$$A_k = \begin{pmatrix} T_k & E_k^* \\ E_k & M_k \end{pmatrix}$$

où  $T_k$  est une matrice carrée tridiagonale de taille  $k$ ,  $M_k$  est une matrice carrée de taille  $n-k$ , et  $E_k$  est une matrice rectangulaire à  $(n-k)$  lignes et  $k$  colonnes dont seule la dernière colonne, notée  $a_k \in \mathbb{R}^{n-k}$  est non nulle. Il est clair qu'ainsi  $A_{n-1}$  sera sous forme tridiagonale. On remarque que  $A$  est bien sous cette forme pour  $k=1$ . Soit la matrice  $H_k$  définie par

$$H_k = \begin{pmatrix} \text{Id}_k & 0 \\ 0 & \tilde{H}_k \end{pmatrix},$$

avec  $\text{Id}_k$  la matrice identité d'ordre  $k$  et  $\tilde{H}_k$  la matrice, dite de Householder, d'ordre  $n-k$  définie par

$$\tilde{H}_k = \text{Id}_{n-k} - 2 \frac{v_k (v_k)^*}{\|v_k\|^2}, \quad \text{avec } v_k = a_k + \|a_k\| e_1, \quad (7.17)$$

où  $e_1$  est le premier vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^{n-k}$ . Remarquons que  $\tilde{H}_k a_k = -\|a_k\| e_1$ , et que  $H_k$  est orthogonale et symétrique. Notons que  $\tilde{H}_k$  n'est bien définie que si  $v_k \neq 0$ , mais si ce n'est pas le cas alors la  $k$ -ème colonne de  $A_k$  est déjà du type désiré, et il suffit de prendre  $H_k = \text{Id}_n$ . Un simple calcul montre que  $A_{k+1} = H_k^* A_k H_k$  se met bien sous la forme désirée.  $\square$

Étudions maintenant l'algorithme de bisection de Givens pour une matrice tridiagonale symétrique réelle dont on suppose, sans perte de généralité, que les coefficients extra-diagonaux sont non-nuls.

Nous admettons les deux lemmes suivants.

**Lemme 7.18.**

Pour  $1 \leq i \leq n$ , on définit une matrice  $A_i$  de taille  $i$  par

$$A_i = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & 0 \\ c_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & c_{i-1} \\ 0 & & c_{i-1} & b_i \end{pmatrix}.$$

Soit  $p_i(\lambda) = \det(A_i - \lambda I)$  son polynôme caractéristique. La suite  $p_i$  vérifie la formule de récurrence

$$p_i(\lambda) = (b_i - \lambda)p_{i-1}(\lambda) - c_{i-1}^2 p_{i-2}(\lambda) \quad \forall i \geq 2,$$

avec  $p_1(\lambda) = b_1 - \lambda$  et  $p_0(\lambda) = 1$ . De plus, pour tout  $i \geq 1$ , le polynôme  $p_i$  possède les propriétés suivantes

- 1**  $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} p_i(\lambda) = +\infty$ ,
- 2** si  $p_i(\lambda_0) = 0$ , alors  $p_{i-1}(\lambda_0)p_{i+1}(\lambda_0) < 0$ ,
- 3**  $p_i$  admet  $i$  racines réelles distinctes qui séparent strictement les  $(i + 1)$  racines de  $p_{i+1}$ .

**Lemme 7.19.**

Pour tout  $\mu \in \mathbb{R}$ , on définit

$$\operatorname{sgn} p_i(\mu) = \begin{cases} \text{signe de } p_i(\mu) & \text{si } p_i(\mu) \neq 0, \\ \text{signe de } p_{i-1}(\mu) & \text{si } p_i(\mu) = 0. \end{cases}$$

Soit  $N(i, \mu)$  le nombre de changements de signe entre éléments consécutifs de la famille ordonnée  $E(i, \mu) = \{+1, \operatorname{sgn} p_1(\mu), \operatorname{sgn} p_2(\mu), \dots, \operatorname{sgn} p_i(\mu)\}$ . Alors,  $N(i, \mu)$  est le nombre de racines de  $p_i$  qui sont strictement inférieures à  $\mu$ .

**Algorithme pratique de Givens.** On note  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$  les valeurs propres de  $A$  rangées par ordre croissant. Pour calculer numériquement la  $i$ -ème valeur propre  $\lambda_i$ , on prend un intervalle  $[a_0, b_0]$  dans lequel on est sûr que  $\lambda_i$  se trouve (par exemple  $-a_0 = b_0 = \|A\|_2$ ). On calcule alors le nombre  $N(n, \frac{a_0+b_0}{2})$  défini dans le Lemme 7.19 (les valeurs de la suite  $p_j(\frac{a_0+b_0}{2})$ , pour  $1 \leq j \leq n$ , sont calculées par la formule de récurrence du Lemme 7.18). S'il se trouve que  $N(n, \frac{a_0+b_0}{2}) \geq i$ , alors on en déduit que  $\lambda_i$  appartient à l'intervalle  $[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}[$ . Si au contraire on trouve que  $N(n, \frac{a_0+b_0}{2}) < i$ , alors  $\lambda_i$  appartient à l'autre intervalle  $[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0]$ . Dans tous les cas on a divisé par deux l'intervalle initial qui contient  $\lambda_i$ . Par dichotomie, c'est-à-dire en répétant cette procédure de division de l'intervalle contenant  $\lambda_i$ , on approche la valeur exacte de  $\lambda_i$  avec la précision désirée.

# Exercices

**01** Soit  $\Omega = \mathbb{R}^N$ . Montrer que  $u(x) = \exp(ik \cdot x)$  est une solution de (7.6) si  $|k|^2 = \lambda$ . Une telle solution est appelée onde plane.

**02** Soit un potentiel régulier  $V(x)$ . Montrer que, si  $\mathbf{u}(x, t) = e^{-i\omega t} u(x)$  est solution de

$$i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \Delta \mathbf{u} - V \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_*^+, \quad (7.18)$$

alors  $u(x)$  est solution de

$$-\Delta u + Vu = \omega u \quad \text{dans } \mathbb{R}^N. \quad (7.19)$$

**03** Soit  $V(x) = Ax \cdot x$  avec  $A$  matrice symétrique réelle définie positive. Montrer que  $u(x) = \exp(-A^{1/2} x \cdot x/2)$  est une solution de (7.19) si  $\omega = \text{tr}(A^{1/2})$ . Une telle solution est appelée état fondamental.

**04** En dimension  $N = 1$ , on considère  $\Omega = ]0, 1[$ . Calculer explicitement toutes les valeurs propres et les fonctions propres du Laplacien avec conditions aux limites de Dirichlet (7.12). À l'aide de la décomposition spectrale de ce problème, montrer que la série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sin(k\pi x)$$

converge dans  $L^2(0, 1)$  si et seulement si  $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 < +\infty$ , et dans  $H^1(0, 1)$  si et seulement si  $\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 a_k^2 < +\infty$ .

**05** On considère un parallélépipède  $\Omega = ]0, L_1[ \times ]0, L_2[ \times \dots \times ]0, L_N[$ , où les  $(L_i > 0)_{1 \leq i \leq N}$  sont des constantes positives. Calculer explicitement toutes les valeurs propres et les fonctions propres du Laplacien avec conditions aux limites de Dirichlet (7.12).

**06** On considère le problème aux valeurs propres pour l'équation de Schrödinger avec un potentiel quadratique  $V(x) = Ax \cdot x$  où  $A$  est une matrice symétrique définie positive (modèle de l'oscillateur harmonique)

$$-\Delta u + Vu = \lambda u \quad \text{dans } \mathbb{R}^N. \quad (7.20)$$

On définit les espaces  $H = L^2(\mathbb{R}^N)$  et

$$V = \left\{ v \in H^1(\mathbb{R}^N) \text{ tel que } |x|v(x) \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\}.$$

Montrer que  $V$  est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_V = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 u(x) v(x) dx,$$

et que l'injection de  $V$  dans  $H$  est compacte. En déduire qu'il existe une suite croissante  $(\lambda_k)_{k \geq 1}$  de réels positifs qui tend vers l'infini et une base hilbertienne de  $L^2(\mathbb{R}^N)$   $(u_k)_{k \geq 1}$  qui sont les valeurs propres et les fonctions propres de (7.20). Calculer explicitement ses valeurs et fonctions propres (on cherchera  $u_k$  sous la forme  $p_k(x) \exp(-Ax \cdot x/2)$  où  $p_k$  est un polynôme de degré  $k - 1$ ). Interpréter physiquement les résultats.

**07** Soit  $\Omega$  un ouvert borné régulier et connexe. Montrer que la première valeur propre du Laplacien dans  $\Omega$  avec condition aux limites de Neumann est nulle et qu'elle est simple.

**08** On considère à nouveau un ouvert  $\Omega$  parallélépipédique comme dans l'Exercice 5. Calculer explicitement toutes les valeurs propres et les fonctions propres du Laplacien avec conditions aux limites de Neumann sur tout le bord  $\partial\Omega$ .

**09** Soit  $\Omega$  un ouvert borné régulier de  $\mathbb{R}^N$ . On considère le problème de vibrations pour l'équation des plaques avec condition aux limites d'encastrement

$$\begin{cases} \Delta(\Delta u) = \lambda u & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Montrer qu'il existe une suite croissante  $(\lambda_k)_{k \geq 1}$  de valeurs propres positives qui tend vers l'infini et une base hilbertienne dans  $L^2(\Omega)$  de fonctions propres  $(u_k)_{k \geq 1}$  qui appartiennent à  $H_0^2(\Omega)$ .

**10** On considère le problème aux valeurs propres en dimension  $N = 1$

$$\begin{cases} -u_k'' = \lambda_k u_k & \text{pour } 0 < x < 1 \\ u_k(0) = u_k(1) = 0. \end{cases}$$

On se propose de calculer la matrice de masse pour la méthode des éléments finis  $P_1$ . On reprend les notations du chapitre 1. Montrer que la matrice de masse  $\mathcal{M}_h$  est donnée par

$$\mathcal{M}_h = h \begin{pmatrix} 2/3 & 1/6 & & & 0 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 0 & & & 1/6 & 2/3 \end{pmatrix},$$

et que ses valeurs propres sont

$$\lambda_k(\mathcal{M}_h) = \frac{h}{3} (2 + \cos(k\pi h)) \text{ pour } 1 \leq k \leq n.$$

Montrer que, si on utilise la formule de quadrature (1.20), alors on trouve que  $\mathcal{M}_h = h \text{Id}$ . Dans ce dernier cas, calculer les valeurs propres du problème spectral discret.

## RAPPELS ET COMPLEMENTS SUR LES ESPACES DE HILBERT

### I Introduction

Nous avons rencontré dans ce cours à plusieurs reprises des espaces de Hilbert. Les espaces de Hilbert jouent un rôle fondamental en analyse fonctionnelle. Ainsi, les espaces de fonctions tels que  $L^2(\Omega)$ ,  $H^1(\Omega)$ ,  $H_0^1(\Omega)$  et leurs généralisations  $H^m(\Omega)$ , sont, munis de leurs produits scalaires respectifs des espaces de Hilbert. Dans cette partie, nous rappelons les principales propriétés des espaces de Hilbert et les illustrons dans les cas précédents. Nous verrons que les principaux théorèmes de l'analyse hilbertiennes fournissent des outils qui permettent de résoudre un certain nombre de problème de façon *automatique*. Dans cette partie, les espaces de Hilbert considérés seront supposés *séparables*, c'est-à-dire contenant une famille dénombrable dense. C'est le cas de tous les espaces de Sobolev que nous avons vus en particulier.

### II Les espaces de Hilbert

Les espaces de Hilbert généralisent en dimension quelconque (donc infinie dans les cas qui nous préoccupent) la notion plus familière d'espace vectoriels euclidiens que l'on connaît dans le cas de la dimension finie. Tous les espaces vectoriels considérés dans cette partie (et ce cours) seront réels. Des généralisations au cas d'espaces vectoriels complexes existent.

Dans toute cette partie on considère donc un espace vectoriel  $V$  sur  $\mathbb{R}$  et l'on suppose qu'il existe un produit scalaire (c'est-à-dire une forme bilinéaire définie positive sur  $V$ ) que l'on note  $(\cdot, \cdot)_V$ . On notera aussi  $\|\cdot\|_V$  la norme associée définie par

$$\forall v \in V, \|v\|_V = \sqrt{(v, v)_V}.$$

#### Définition 8.1.

On dit que l'espace  $V$  muni de la forme bilinéaire  $(\cdot, \cdot)_V$  est un espace de Hilbert s'il est complet pour la norme associée  $\|\cdot\|_V$ .

On rappelle qu'un espace (normé) complet est un espace dans lequel les suites de Cauchy convergent (pour la norme en question). Il est *indispensable* de connaître la définition suivante des suites de Cauchy.

#### Définition 8.2.

[Suites de Cauchy] Une suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $V$  est de Cauchy si elle vérifie

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N_0(\varepsilon), \|v_m - v_n\|_V < \varepsilon.$$

**Exemples 8.3.** Nous avons croisé plusieurs espaces de Hilbert. Ainsi, si  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^N$

- $L^2(\Omega)$  muni du produit scalaire  $(f, g)_{L^2} = \int_{\Omega} f(x)g(x) dx$
- $H^1(\Omega)$  muni du produit scalaire  $(f, g)_{H^1} = \int_{\Omega} (f(x)g(x) + \nabla f(x) \cdot \nabla g(x)) dx$
- $H_0^1(\Omega)$  lorsque  $\Omega$  est borné, muni du produit scalaire  $(f, g)_{H_0^1} = \int_{\Omega} \nabla f(x) \cdot \nabla g(x) dx$

## II.1 Théorème de Riesz

Le théorème de représentation de Riesz permet de représenter toute forme linéaire continue sur  $V$  comme le produit scalaire avec un vecteur de  $V$ . Le théorème de représentation de Riesz est un cas particulier du théorème de Lax-Milgram vu au chapitre 2 (d'ailleurs on a utilisé le théorème de Riesz pour sa démonstration).

### Définition 8.4.

Une forme linéaire continue sur  $V$  est une application linéaire  $l : V \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\exists C > 0, \forall v \in V, |l(v)| \leq C \|v\|_V.$$

On note  $V'$  le dual de  $V$  c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires continues sur  $V$ . Pour tout  $l \in V'$  on note

$$\|l\|_{V'} = \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{l(v)}{\|v\|_V}.$$

### Théorème 8.5.

[**Théorème de Riesz**] Soit  $l$  une forme linéaire continue sur un espace de Hilbert  $V$  alors il existe un unique vecteur  $u \in V$  tel que

$$\forall v \in V, (u, v)_V = l(v).$$

D'autre part  $\|l\|_{V'} = \|u\|_V$ .

**Démonstration.** Si  $l$  est la forme linéaire nulle  $u = 0$  convient. Sinon,  $H = \text{Ker } l$  est un hyperplan fermé de  $V$ . Ainsi,  $H^\perp$  est une droite vectorielle supplémentaire de  $H$  dans  $V$ . Soit  $b \in H^\perp$  non nul, on pose  $u = \frac{l(b)b}{\|b\|_V^2}$ . Les deux formes linéaires  $l$  et  $(u, \cdot)_V$  coïncident sur  $H$  (elles y sont nulles) et sur  $H^\perp$ . Elles coïncident donc sur tout  $V$ . Enfin, si  $v \in V$  on a

$$|l(v)| = |(u, v)_V| \leq \|u\|_V \|v\|_V$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, de sorte que  $\|l\|_{V'} \leq \|u\|_V$ . Mais  $l(u) = \|u\|_V^2$  montre que  $\|l\|_{V'} = \|u\|_V$ .  $\square$

### Remarque 8.6.

Le théorème de représentation de Riesz permet d'identifier un espace de Hilbert avec son dual.

La convergence faible dans les espaces de Hilbert joue un rôle fondamental. Plus souple que la convergence forte (en norme) elle permet également de généraliser les principaux théorèmes de la dimension finie.

**Définition 8.7.**

[Convergence faible] On dit que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments d'un espace de Hilbert  $V$  converge faiblement vers  $v_\infty \in V$  si

$$\forall v \in V, \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n, v)_V = (v_\infty, v)_V.$$

On note dans ce cas  $v_n \rightharpoonup v_\infty$  faiblement lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

La convergence faible est plus générale que la convergence forte.

**Proposition 8.8.**

Soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments d'un espace de Hilbert  $V$  qui converge fortement vers  $v_\infty \in V$ . Alors  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge faiblement vers  $v_\infty$ .

**Démonstration.** C'est une simple application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. En effet pour tout  $v \in V$ , on a

$$|(v_n - v_\infty, v)_V| \leq \|v_n - v_\infty\|_V \|v\|_V$$

qui tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . □

**Proposition 8.9.**

Toute suite faiblement convergente est bornée.

**Démonstration.** On considère une suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  faiblement convergente dans  $V$ . On considère aussi la forme linéaire  $l_n$  définie sur  $V$  par

$$\forall v \in V, l_n(v) = (v_n, v)_V.$$

Comme  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est faiblement convergente, pour tout  $v$  dans  $V$  la suite  $(l_n(v))_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente, donc elle est bornée. Par application du théorème de Banach-Steinhaus, on obtient que la suite  $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $V'$ . Enfin, comme on a vu que  $\|l_n\|_{V'} = \|v_n\|_V$  on en déduit que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $V$ . □

Plus généralement on a le théorème dit de convergence forte-faible suivant.

**Théorème 8.10.**

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites telles que

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u_\infty \text{ fortement quand } n \rightarrow +\infty, \\ v_n &\rightarrow v_\infty \text{ faiblement quand } n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n, v_n)_V = (u_\infty, v_\infty)_V.$$

**Démonstration.** Le théorème serait évident si l'on avait une convergence forte plutôt que faible pour la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . On écrit

$$(u_n, v_n)_V - (u_\infty, v_\infty)_V = (u_n - u_\infty, v_n)_V + (u_\infty, v_n - v_\infty)_V.$$

Le deuxième terme tend vers 0 par convergence faible. Pour le premier, on utilise le fait que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergeant faiblement est bornée grâce, à la proposition 8.9, par une constante  $C$ . L'inégalité de Cauchy-Schwarz fournit alors

$$|(u_n - u_\infty, v_n)_V| \leq C \|u_n - u_\infty\|_V \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

□

Par passage à la limite faible on peut éventuellement “perdre de la norme” comme le montre la proposition suivante.

**Proposition 8.11.**

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite qui converge faiblement vers  $u_\infty$  dans un espace de Hilbert  $V$ . Alors

- $\|u_\infty\|_V \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_V$
- Si de plus  $\|u_\infty\|_V = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_V$ , alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge fortement vers  $u_\infty$ .

**Démonstration.** On développe

$$\|u_n - u_\infty\|_V^2 = \|u_n\|_V^2 - 2(u_n, u_\infty)_V + \|u_\infty\|_V^2.$$

Or comme  $u_n \rightharpoonup u_\infty$  faiblement, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n, u_\infty)_V = \|u_\infty\|_V^2,$$

et l'on déduit

$$0 \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - u_\infty\|_V^2 = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_V^2 - \|u_\infty\|_V^2$$

et le premier résultat en découle. Pour le deuxième, l'hypothèse et le calcul précédent permettent de déduire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - u_\infty\|_V^2 = 0$$

d'après le calcul précédent. □

Enfin, nous terminons ces courtes notes par un théorème extrêmement important. Il précise que les bornés sont compacts pour la convergence faible, généralisant ainsi ce que l'on avait en dimension finie (les compacts sont les fermés bornés).

**Théorème 8.12.**

Soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite bornée de  $V$ . On peut extraire de  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une sous-suite qui converge faiblement.

**Remarque 8.13.**

Ainsi, les suites qui convergent faiblement sont bornées et des suites bornées on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement. Cette propriété est fondamentale. Elle permettra, à partir d'une borne, de trouver une limite potentielle. Nous l'utiliserons dans la deuxième partie de ce chapitre.

**III Application dans les espaces de Sobolev**

Du point de vue de l'analyse fonctionnelle, les notions précédentes de convergence prennent ainsi un sens complètement différent suivant l'espace de Hilbert dans lequel on se place. A titre d'exemple, on aura, si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de fonctions qui converge vers  $u_\infty$

- $u_n \rightharpoonup u_\infty$  faiblement dans  $L^2(\Omega)$  signifie que

$$\forall v \in L^2(\Omega), \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} u_n(x)v(x) dx = \int_{\Omega} u_\infty(x)v(x) dx.$$

- $u_n \rightharpoonup u_\infty$  faiblement dans  $H^1(\Omega)$  signifie que

$$\forall v \in H^1(\Omega), \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} u_n(x)v(x) + \nabla u_n(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} u_\infty(x)v(x) + \nabla u_\infty(x) \cdot \nabla v(x) dx.$$

Dit de manière équivalente, on a alors  $u_n \rightharpoonup u_\infty$  faiblement dans  $L^2(\Omega)$  et  $\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u_\infty$  faiblement dans  $L^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ .

- $u_n \rightharpoonup u_\infty$  faiblement dans  $H_0^1(\Omega)$  signifie que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \nabla u_n(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} \nabla u_\infty(x) \cdot \nabla v(x) dx.$$

De la même façon que précédemment il est équivalent de dire que  $\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u_\infty$  faiblement dans  $L^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ .

### III.1 Théorèmes de base

On considère  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^N$ . On a alors le résultat suivant qui permet de toute suite bornée de  $H^1(\Omega)$  d'extraire une sous-suite convergente.

#### Théorème 8.14.

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite bornée dans  $H^1(\Omega)$ . Alors on peut extraire une sous-suite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  notée  $(u_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ , et il existe  $u_\infty \in H^1(\Omega)$  telle que

$$u_{\phi(n)} \rightharpoonup u_\infty \text{ dans } H^1(\Omega)$$

$$u_{\phi(n)} \rightarrow u_\infty \text{ dans } L^2(\Omega)$$

**Démonstration.** Comme  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $H^1(\Omega)$ , on peut en extraire une première sous-suite qui converge dans  $H^1(\Omega)$  faiblement. De cette suite, toujours bornée, le théorème de Rellich nous permet d'extraire une seconde sous-suite qui converge dans  $L^2$  fortement. On arrive ainsi à l'extraction d'une sous-suite qui vérifie

$$u_{\phi(n)} \rightharpoonup u_\infty^1 \text{ dans } H^1(\Omega) \tag{8.1}$$

$$u_{\phi(n)} \rightarrow u_\infty^2 \text{ dans } L^2(\Omega) \tag{8.2}$$

et il reste juste à vérifier que  $u_\infty^1 = u_\infty^2$ . Pour cela, on considère simultanément les produits scalaires  $L^2$  et  $H^1$ . Prenons  $\xi \in L^2(\Omega)$  et considérons la forme linéaire  $l_\xi$  définie sur  $H^1(\Omega)$  par

$$l_\xi(v) = \int_{\Omega} \xi(x)v(x) dx.$$

Il est clair que  $l_\xi$  est une forme linéaire continue sur  $H^1(\Omega)$  et par le théorème de Riesz, il existe  $\eta \in H^1(\Omega)$  tel que

$$l_\xi(v) = (\eta, v)_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

En utilisant (8.1), on obtient d'abord

$$l_\xi(u_{\phi(n)}) = (\eta, u_{\phi(n)})_{H^1(\Omega)} \rightarrow (\eta, u_\infty^1)_{H^1(\Omega)} = l_\xi(u_\infty^1).$$

Puis en utilisant (8.2), on arrive à

$$l_\xi(u_{\phi(n)}) = (\xi, u_{\phi(n)})_{L^2(\Omega)} \rightarrow (\xi, u_\infty^2)_{L^2(\Omega)} = l_\xi(u_\infty^2).$$

Ainsi

$$\int_{\Omega} \xi(x)(u_\infty^1(x) - u_\infty^2(x)) dx = 0$$

pour tout  $\xi \in L^2(\Omega)$ , ce qui en prenant  $\xi = u_\infty^1 - u_\infty^2$  fournit le résultat.  $\square$

### Remarque 8.15.

On voit souvent le théorème de Rellich écrit sous la forme suivante :

Si  $(u_n)_n$  est une suite d'éléments de  $H^1(\Omega)$  telle que  $u_n \rightarrow u_\infty$  faiblement dans  $H^1(\Omega)$ , alors  $u_n \rightarrow u_\infty$  fortement dans  $L^2(\Omega)$ .



### Remarque 8.16.

Noter aussi que lorsque  $\Omega$  est borné, si  $(u_n)_n$  est une suite d'éléments de  $H^1(\Omega)$  telle que  $u_n \rightarrow u_\infty$  faiblement dans  $H^1(\Omega)$ , alors la proposition 8.11 permet d'écrire

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} (u_n(x))^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u_n(x)|^2 dx \geq \int_{\Omega} (u_\infty(x))^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u_\infty(x)|^2 dx.$$

Mais comme le théorème de Rellich permet de conclure que  $u_n \rightarrow u_\infty$  fortement dans  $L^2(\Omega)$ , on en déduit alors que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |\nabla u_n(x)|^2 dx \geq \int_{\Omega} |\nabla u_\infty(x)|^2 dx$$

## III.2

### La méthode directe du calcul des variations

La méthode directe du calcul des variations est une méthode permettant de trouver des solutions à des problèmes de minimisation par minimisation directe et sans passer par la résolution d'une équation de type Euler-Lagrange. A des fins d'illustration de la méthode, on considère pour  $v \in H_0^1(\Omega)$

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx - \int_{\Omega} f(x)v(x) dx,$$

et l'on souhaite montrer que  $J$  admet un minimum sur  $H_0^1(\Omega)$ . La méthode consiste à montrer successivement les étapes suivantes :

- 1 On montre que  $J$  est minorée sur  $H_0^1(\Omega)$ . Ceci entraîne que l'infimum  $m = \inf_{v \in H_0^1(\Omega)} J(v)$  existe.
- 2 On considère une suite minimisante de  $J$  sur  $H_0^1(\Omega)$ , c'est-à-dire une suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J(v_n) = m. \quad (8.3)$$

On extrait une sous-suite éventuelle de  $(v_n)_n$  qui converge (éventuellement faiblement) dans  $H_0^1(\Omega)$ . Pour cela, il suffit de montrer que le fait que  $(J(v_n))_{n \in \mathbb{N}}$  soit borné entraîne que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $H_0^1(\Omega)$ . On aura alors  $v_{\phi(n)} \rightarrow v_\infty$  faiblement dans  $H_0^1(\Omega)$ .

- 3 On montre enfin que  $J(v_\infty) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} J(v_{\phi(n)}) = m$ . Ceci conclut que  $v_\infty$  réalise le minimum de  $J$  sur  $H_0^1(\Omega)$  et donc que le minimum est atteint.

Les trois étapes précédentes sont résolues successivement très simplement avec les arguments vus dans ce chapitre.

1 Il suffit de réaliser que, grâce à l'inégalité de Poincaré, on a pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\left| \int_{\Omega} f(x)v(x) dx \right| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq C \|f\|_{L^2} \|v\|_{H_0^1}$$

de sorte que

$$J(v) \geq \frac{1}{2} \|v\|_{H_0^1}^2 - C \|f\|_{L^2} \|v\|_{H_0^1} \geq -\frac{C^2 \|f\|_{L^2}^2}{2}$$

et  $J$  est minorée sur  $H_0^1(\Omega)$ .

2 Du calcul précédent, on déduit que si  $J(v_n) < M$ , alors

$$\frac{1}{2} \|v_n\|_{H_0^1}^2 - C \|f\|_{L^2} \|v_n\|_{H_0^1} < M$$

mais comme  $C \|f\|_{L^2} \|v_n\|_{H_0^1} \leq C^2 \|f\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4} \|v_n\|_{H_0^1}^2$ , on a

$$\frac{1}{4} \|v_n\|_{H_0^1}^2 < M + C^2 \|f\|_{L^2}^2$$

et donc  $(v_n)_n$  est bornée dans  $H_0^1(\Omega)$ . On peut, quitte à extraire une sous-suite, considérer que

$$v_n \rightharpoonup v_{\infty} \text{ faiblement dans } H_0^1(\Omega).$$

puis, grâce au théorème de Rellich, que

$$v_n \rightarrow v_{\infty} \text{ fortement dans } L^2(\Omega).$$

3 On sait, par propriété de la convergence faible que

$$\|v_{\infty}\|_{H_0^1} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|v_n\|_{H_0^1}$$

et, grâce à la convergence forte dans  $L^2$  que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f(x)v_n(x) dx = \int_{\Omega} f(x)v_{\infty}(x) dx.$$

Ceci permet de conclure que

$$J(v_{\infty}) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} J(v_n) = m,$$

et le résultat.

### Remarque 8.17.

En utilisant le fait que  $v_{\infty}$  réalise le minimum de  $J$  sur  $H_0^1(\Omega)$  on a que  $v_{\infty}$  est solution de l'équation d'Euler-Lagrange du problème qui n'est autre que la formulation variationnelle. On a ainsi résolu le problème directement par minimisation sans passer par l'application du théorème de Lax-Milgram.

## IV Pour aller plus loin...

Lorsque le domaine  $\Omega$  est borné, nous avons vu que le lemme de Rellich permet d'extraire de toute suite bornée de  $H^1(\Omega)$  une sous-suite convergant fortement dans  $L^2(\Omega)$ . On note usuellement

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$$

se qui se signifie que l'injection de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$  est compacte.

### Proposition 8.18.

[Inégalités de Sobolev] Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ . On a

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

pour tout  $p < p^*$  où  $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{2} - \frac{1}{N}$ . L'inclusion de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^{p^*}$  n'étant que continue. Dans tous les cas, pour tout  $p \leq p^*$ , il existe une constante  $C(p)$  telle que l'on ait

$$\forall v \in H^1(\Omega), \|v\|_{L^p} \leq C(p) \|v\|_{H^1}.$$

Cette dernière inégalité est connue sous le nom d'*inégalité de Sobolev*. Ce résultat permet facilement d'étendre la méthode directe du calcul des variations à des énergie sensiblement plus complexes comme

$$J(v) = \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx + \int_{\Omega} F(v(x)) dx$$

où le dernier terme est continu dans  $L^{p^*}$ . Il est par exemple facile de voir ainsi que le modèle de transition de phase où il s'agit de minimiser sur  $H^1(\Omega)$  l'énergie

$$J(v) = \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} (v(x)^2 - 1)^2 dx$$

possède une solution  $u_\varepsilon$  pour tout  $\varepsilon > 0$ , qui vérifie l'équation d'Euler

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon + \frac{2}{\varepsilon}(u_\varepsilon^2 - 1)u_\varepsilon = 0 \text{ sur } \Omega \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (8.4)$$

Il s'agit là d'une équation non-linéaire dont on aurait du mal à démontrer l'existence d'une solution sans passer par la procédure de minimisation précédente. Notez que cette solution n'est en général pas unique, du moins si  $\varepsilon$  est assez petit, puisque l'on peut montrer que dans ce cas  $u_\varepsilon$  n'est pas identiquement nulle et qu'alors  $-u_\varepsilon$  est aussi solution du problème.

# Bibliographie

- [1] ALLAIRE G., *Analyse numérique et optimisation*, Editions de l'École Polytechnique, Palaiseau (2005).
- [2] ALLAIRE G., KABER S. M., *Algèbre linéaire numérique. Cours et exercices*, Éditions Ellipses, Paris (2002).
- [3] ARGYRIS, J. H., *Triangular elements with linearly varying strain for the Matrix Displacement Method*, J. Royal Aero. Soc, 69, 711-713 (1965).
- [4] BERNARDI Ch., MADAY Y., RAPETTI F., *Discrétisation variationnelle de problèmes aux limites elliptiques*, Mathématiques et Applications 45, Springer, Paris (2004).
- [5] BONNANS J., *Optimisation continue*, Mathématiques appliquées pour le Master / SMAI, Dunod, Paris (2006).
- [6] BONNANS J., GILBERT J.-C., LEMARECHAL C., SAGASTIZABAL C., *Optimisation numérique*, Mathématiques et Applications 27, Springer, Paris (1997).
- [7] BONY J.-M., *Cours d'analyse. Théorie des distributions et analyse de Fourier*, Éditions de l'École Polytechnique, Palaiseau (2001).
- [8] BREZIS H., *Analyse fonctionnelle*, Masson, Paris (1983).
- [9] CHVÁTAL V., *Linear programming*, Freeman and Co., New York (1983).
- [10] CIARLET P.G., *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Masson, Paris (1982).
- [11] CIARLET P.G., *The finite element methods for elliptic problems*, North-Holland, Amsterdam (1978).
- [12] CIARLET P.G., LIONS J.-L., *Handbook of numerical analysis*, North-Holland, Amsterdam (1990).
- [13] Clough, R.W., *The finite element method in plane stress analysis*, Proc. 2nd ASCE Conf. on Electronic Computation, Pittsburgh, Pa (1960).
- [14] CULIOLI J.-C., *Introduction à l'optimisation*, Éditions Ellipses, Paris (1994).
- [15] DANAILA I., HECHT F., PIRONNEAU O., *Simulation numérique en C++*, Dunod, Paris (2003).
- [16] DANAILA I., JOLY P., KABER S. M., POSTEL M., *Introduction au calcul scientifique par la pratique*, Dunod, Paris (2005).
- [17] DAUTRAY R., LIONS J.-L., *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, Masson, Paris (1988).
- [18] ERN A., GUERMOND J.-L., *Éléments finis : théorie, applications, mise en oeuvre*, Mathématiques et Applications 36, Springer, Paris (2002).

- [19] GEORGE P.L., *Génération automatique de maillages, application aux méthodes d'éléments finis*, Masson, Paris (1991).
- [20] GIRAULT V., RAVIART P.-A., *Finite element methods for Navier-Stokes equations : theory and algorithms*, Springer, Berlin (1986).
- [21] LEMAITRE J., CHABOCHE J.-L., *Mécanique des matériaux solides*, Dunod, Paris (1985).
- [22] HADAMARD, J., *Sur le principe de Dirichlet*, Bull. de la S. M. F., tome 34, 135–138 (1906).
- [23] LERAY, J., *Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace*, Acta Math. 63, 193–248 (1934).
- [24] LIONS J.-L., MAGENES E., *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Dunod, Paris (1970).
- [25] LUCQUIN B., PIRONNEAU O., *Introduction au calcul scientifique*, Masson, Paris (1996).
- [26] MOHAMMADI B., SAÏAC J.-H., *Pratique de la simulation numérique*, Dunod, Paris (2003).
- [27] PIRONNEAU O., *Méthodes des éléments finis pour les fluides*, Masson, Paris (1988).
- [28] RAVIART P.-A., THOMAS J.-M., *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson, Paris (1983).
- [29] SALENÇON J., *Mécanique des milieux continus*, Éditions de l'École Polytechnique, Palaiseau (2002).
- [30] SCHWARTZ, L., *Théorie des distributions*, Hermann, 1966 (1re éd. 1950-1951).
- [31] STRANG, G. et FIX, G., *An Analysis of the Finite Element Method*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ (1973).
- [32] TEMAM R., *Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis*, AMS Chelsea Publishing, Providence, RI (2001).
- [33] TURNER, M. J., DILL, E. H., MARTIN, H. C., et MELOSH, R.J., *Large deflection analysis of complex structures subjected to heating and external loads*, J. Aero. Sci., 27, 97-107 (1960).
- [34] ZIENKIEWICZ, O. C. et CHEUNG, Y. K., *Finite elements in the solution of field problems*, The Engineer, 507–510 (1965).