§2. Introduction générale sur les espaces de Sobolev

Espace de Sobolev $H^1(\Omega)$

On appelle espace de Sobolev d'ordre un sur l'ouvert Ω, et que l'on note par $H^1(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de $L^2(\Omega)$ ayant des dérivées au sens des distributions dans $L^2(\Omega)$.

En d'autre terme

$$H^1(\Omega) = \left\{ u;\ u \in L^2(\Omega),\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega),\ i = 1, ..., n \right\},$$

où les dérivée $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, .., n$ sont prises au sens des distributions.

Il est clair que $H^1(\Omega)$ est un espace vectoriel euclidien muni du produit scalaire

$$\langle u, v\rangle_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} dx,$$

et dont la norme est définie par

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \Big(\langle u, u\rangle_{H^1(\Omega)} \Big)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_\Omega |u|^2 \, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Exemple 1

Si Ω est un intervalle ouvert borné de $\mathbb{R}$, toute fonction continue sur $\overline{\Omega}$ et à dérivées continues par morceau sur $\overline{\Omega}$ appartient à $H^1(\Omega)$.

Remarque 1

Les fonctions à dérivées non continues sur $\overline{\Omega}$ ne sont pas nécessairement dans $H^1(\Omega)$.

Exemple 2

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$, contenant l'intervalle $[a, b]$ et soit u la fonction indicatrice définie par

$$u(x) = 1_{]a,b[}(x),$$

c'est à dire

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]a, b[\\ 0 & \text{si } x \notin]a, b[\end{cases}$$

alors la fonction $u \notin H^1(\Omega)$.

En effet, prenons $\Omega =]c, d[$, avec $c < a$ et $b < d$. D'où $[a, b] \subset]c, d[$.

La fonction $u \in L^2(\Omega)$ car, on a

$$\begin{aligned}\int_c^d |u(x)|^2\,dx &= \int_c^a |u(x)|^2\,dx + \int_a^b |u(x)|^2\,dx + \int_b^d |u(x)|^2\,dx \\ &= 0 + \int_a^b 1dx + 0 = b - a < \infty.\end{aligned}$$

La fonction u est continue, dérivable au sens usuel sauf aux points a et b, où elle admet une discontinuité de première espèce, alors

$$u'_{D'} = [u']_{\text{usuel}} + \sum_{i=1}^{n} [u(a_i + 0) - u(a_i - 0)]\delta_{a_i}$$

$$u'_{D'} = 0 + 1.\delta_a - 1.\delta_b = \delta_a - \delta_b \notin L^2(\Omega).$$

D'où la fonction dérivée $\dfrac{du}{dx}$ au sens des distributions n'appartient pas à $L^2(\Omega)$, ce qui implique

$$u \notin H^1(\Omega) = H^1(]c, d[).$$

Théorème

L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour son produit scalaire.

Démonstration

Soit u_n une suite de Cauchy dans $H^1(\Omega)$, c'est à dire

$$\forall \epsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \forall\, p, q > N, \quad \text{on a} \quad \|u_p - u_q\|_{H^1(\Omega)} < \epsilon.$$

En d'autre terme

$$\|u_p - u_q\|^2_{H^1(\Omega)} = \|u_p - u_q\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u_p}{\partial x_i} - \frac{\partial u_q}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)} < \epsilon$$

D'où les suites u_n et $\dfrac{\partial u_n}{\partial x_i}$ sont de Cauchy dans $L^2(\Omega)$, qui est un espace complet, il en résulte l'existence d'une fonction u de $L^2(\Omega)$ limite dans

$L^2(\Omega)$ de la suite u_n et une fonction v_i de $L^2(\Omega)$ limite dans $L^2(\Omega)$ de la suite $\dfrac{\partial u_n}{\partial x_i}$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} = v_i, \quad \text{dans l'espace } L^2(\Omega).$$

L'injection de l'espace $L^2(\Omega)$ dans l'espace $D'(\Omega)$

$$L^2(\Omega) \hookrightarrow D'(\Omega),$$

assure la convergence de la suite $u_n$vers u ainsi que la dérivée $\dfrac{\partial u_n}{\partial x_i}$ vers v_i dans $D'(\Omega)$.

L'opérateur de dérivation étant continu dans $D'(\Omega)$, alors

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left\langle \frac{\partial u_n}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle &= \lim_{n\to\infty} - \left\langle u_n, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle \\
&= - \left\langle \lim_{n\to\infty} u_n, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle \\
&= - \left\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle, \quad \forall \varphi \in D(\Omega).
\end{aligned}$$

D'où, on obtient

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \to \frac{\partial u}{\partial x_i} = v_i \;\; \text{dans } D'(\Omega),$$

et en vertu de l'unicité de la limite dans l'espace $D'(\Omega)$, on a

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = v_i \in L^2(\Omega).$$

D'où la convergence de $u_n$vers u dans $H^1(\Omega)$.

Lemme 1

Soit E un espace de Hilbert séparable et soit F un sous espace fermé de E alors, on a, la séparabilité de E entraîne celle de F.

En effet, si (e_n) est une suite dense dans E, la suite (f_n), où f_n est la projection de e_n sur F, est dense dans F.

Lemme 2
Le produit de deux espaces séparables est un espace séparable.

En effet, soient E et F deux espces séparables alors, si (e_n) est une suite dense dans E, et (f_n) suite dense dans F la suite produit $(e_n \times f_n)$ est dense dans $E \times F$.

Théorème
L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace séparable. C'est à dire, il existe une partie dénombrable dense dans $H^1(\Omega)$.

.

Démonstration
Soit J une application définie sur $H^1(\Omega)$ dans $(L^2(\Omega))^{n+1}$ par

$$\begin{array}{rcl} H^1(\Omega) & \rightarrow & (L^2(\Omega))^{n+1} \\ u & \mapsto & J(u) = (u, \dfrac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \dfrac{\partial u}{\partial x_n}). \end{array}$$

Il est à remarquer que la norme $\|J(u)\|_{(L^2(\Omega))^{n+1}}$ de $J(u)$ dans l'espace $(L^2(\Omega))^{n+1}$ est identique à celle $\|u\|_{H^1(\Omega)}$de u, dans l'espace $H^1(\Omega)$.
En effet,

$$\|J(u)\|_{(L^2(\Omega))^{n+1}} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} = \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

L'application J est une isométrie de $H^1(\Omega)$ dans $(L^2(\Omega))^{n+1}$. D'où l'espace $H^1(\Omega)$ est identifiable à l'espace $J(H^1(\Omega))$ qui est un sous espace fermé dans $(L^2(\Omega))^{n+1}$.
L'espace $(L^2(\Omega))^{n+1}$ étant séparable car $L^2(\Omega)$ l'est, alors $H^1(\Omega)$ est séparable.

Proposition
Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, l'espace $D(\Omega)$ n'est pas dense dans $H^1(\Omega)$.

Démonstration
Il est connu qu'un sous espace M d'un espace de Hilbert H est dense dans H si son orthogonal est réduit au sous espace nul. Autrement dit

$$\overline{M} = H \quad \text{si et seulement si} \quad M^{\perp} = \{0\}.$$

Dans notre cas, $D(\Omega)$ est un sous espace de $H^1(\Omega)$, on doit démontrer la relation suivante
$$D(\Omega)^\perp \neq \{0\}.$$

Soit u un élément de $D(\Omega)^\perp$ alors, on a

$$u \in D(\Omega)^\perp \Leftrightarrow \langle u, v\rangle_{H^1(\Omega)} = 0,\ \forall\ v \in D(\Omega),$$

l'expression du produit scalaire nous donne

$$\begin{aligned}
\langle u, v\rangle_{H^1(\Omega)} &= \langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&= \int_\Omega u(x)v(x)dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}dx \\
&= \int_\Omega u(x)v(x)dx - \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2}v(x)dx.
\end{aligned}$$

D'où

$$\int_\Omega \left(u(x) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2} \right).v(x)dx = \langle -\Delta u + u, v\rangle\,,\ \forall\ v \in D(\Omega).$$

ce qui implique que la relation d'orthogonalité nous mène à la relation

$$\langle u, v\rangle_{H^1(\Omega)} = 0 \Rightarrow \langle -\Delta u + u, v\rangle = 0$$

ou encore
$$-\Delta u + u = 0, \quad \forall v \in D(\Omega).$$

Cette équation admet des solutions différentes de la solution triviale si le domaine Ω est borné. C'est à dire, il existe une fonction $u \in H^1(\Omega)$ solution du problème $-\Delta u + u = 0$, avec $u \neq 0$ et Ω borné.

En particulier, si $\Omega =]a, b[$ alors l'équation devient

$$\int_\Omega \big(u(x) - u''(x)\big).v(x)dx = \big\langle -u'' + u, v\big\rangle\,,\ \forall\ v \in D(]a, b[)$$
ou encore
$$-u'' + u = 0,$$

cette équation admet une solution de la forme

$$u = c_1 e^{-x} + c_2 e^x, \quad \text{avec}\ \ c_1, c_2\ \in \mathbb{R}.$$

Espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$

La fermeture de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ est un sous espace de $H^1(\Omega)$ noté $H_0^1(\Omega)$

Proposition

Pour toute fonction $u(x) \in H_0^1(\Omega)$, le prolongement de $u(x)$ par 0 en dehors de Ω est un élément de $H^1(\mathbb{R}^n)$. C'est à dire

$$\forall u(x) \in H_0^1(\Omega), \text{ on a } \widetilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \notin \Omega \end{cases},$$

avec la fonction $\widetilde{u}(x) \in H^1(\mathbb{R}^n)$.

Remarque 2

Pour toute fonction $u(x) \in H_0^1(\Omega)$, le prolongement de $u(x)$ par 0 en dehors de Ω n'est pas toujours un élément de $H^1(\mathbb{R}^n)$. C'est à dire

$$\exists u(x) \in H^1(\Omega), \text{ telle que } \widetilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \notin \Omega \end{cases},$$

avec la fonction $\widetilde{u}(x) \notin H^1(\mathbb{R}^n)$.

Exemple 3

Soit Ω un ensemble borné inclus dans $\mathbb{R}^n$et soit $u(x)$ la fonction qui vaut 1 sur l'ensemble Ω, alors la fonction $\widetilde{u}(x)$définie par

$$\widetilde{u}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \notin \Omega \end{cases},$$

n'est pas un élément de $H^1(\mathbb{R}^n)$, voir que $\widetilde{u}(x) \notin H^1(\mathbb{R}^n)$.

En effet, prenons $\Omega =]-1,1[$, soit $u(x)$ la fonction qui vaut 1 sur l'ensemble $]-1,1[$ alors, on définit la fonction $\widetilde{u}(x)$ par

$$\widetilde{u}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in\ ]-1,1[\\ 0 & \text{si } x \notin\ ]-1,1[\end{cases},$$

il aisé de voir que la fonction $u(x) \in H^1(\Omega)$, par contre la fonction $\widetilde{u}(x) \notin H^1(\Omega)$ car, on a $\widetilde{u}(x) \in L^2(\mathbb{R})$ et sa dérivée $\dfrac{d\widetilde{u}}{dx}$ n'est pas dans $L^2(\mathbb{R})$. Autrement dit

$$\frac{d\widetilde{u}}{dx} = \delta_{-1} - \delta_1 \notin L^2(\mathbb{R}).$$

D'où le résultat voulu

$$\widetilde{u}(x) \notin H^1(\Omega).$$

Théorème

L'espace $D(\mathbb{R}^n)$ est dense dans l'espace $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration

La preuve de ce théorème se fait en deux étapes

- **Troncature**

Approcher toute fonction de $H^1(\mathbb{R}^n)$ par une fonction de même espace $H^1(\mathbb{R}^n)$ mais à support compact. Notons cet espace par $H_c^1(\mathbb{R}^n)$. C'est à dire

$$\overline{H_c^1(\mathbb{R}^n)} = H^1(\mathbb{R}^n)$$

- **Régularisation**

Approcher toute fonction de $H_c^1(\mathbb{R}^n)$ à support compact par une fonction de l'espace $D(\mathbb{R}^n)$. C'est à dire

$$\overline{D(\mathbb{R}^n)} = H_c^1(\mathbb{R}^n)$$

1 *Première étape, la troncature*

On introduit la fonction $M \in D(\mathbb{R}^n)$ vérifiant

$$M(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |x| < 1 \\ 0 \leq M(x) \leq 1 & \text{si} \quad 1 \leq |x| \leq 2 \\ 0 & \text{si} \quad |x| > 2 \end{cases}$$

Définissons la fonction $M_R(x)$ par

$$M_R(x) = M(\frac{x}{R}),$$

où R est un réel positif,

$$\frac{x}{R} = (\frac{x_1}{R}, ..., \frac{x_n}{R}), \quad M_R \in D(\mathbb{R}^n).$$

Montrons la densité de $H_c^1(\mathbb{R}^n)$ dans $H^1(\mathbb{R}^n)$. C'est à dire

$$\overline{H_c^1(\mathbb{R}^n)} = H^1(\mathbb{R}^n).$$

Soit la donnée d'une fonction $v \in H^1(\mathbb{R}^n)$, on définit la suite $M_R v \in H_c^1(\mathbb{R}^n)$ et on démontre que cette suite converge vers v dans $H^1(\mathbb{R}^n)$. En d'autres termes, il faut monter que

$$\lim_{R\to\infty} \|M_R v - v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0,$$

ainssi que

$$\lim_{R\to\infty} \left\| \frac{\partial M_R v}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Notons que les éléments de la suite $M_R v \in H_c^1(\mathbb{R}^n)$ sont à support compact. Alors, on a d'une part,

$$\begin{aligned}
\|M_R v - v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} |M_R v - v|^2 \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |(M_R - 1)\, v|^2 \, dx \\
&= \int_{|x|<R} |(M_R - 1)\, v|^2 \, dx + \int_{|x|\geq R} |(M_R - 1)\, v|^2 \, dx \\
&= \int_{|x|\geq R} |(M_R - 1)\, v|^2 \, dx \\
&\leq \int_{|x|\geq R} v^2 dx.
\end{aligned}$$

D'où, on obtient

$$\lim_{R\to+\infty} \|M_R v - v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \lim_{R\to+\infty} \int_{|x|\geq R} v^2 dx = 0.$$

En effet, soit $1_R(x)$ la fonction indicatrice définie par

$$1_R(x) = \begin{cases} 1 & \text{sur } \{x \in \mathbb{R}^n; \quad |x| \geq R\} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} ,$$

et soit $f_R(x)$ la suite de fonction définie par

$$f_R(x) = 1_R(x) v^2(x),$$

avec la relation suivante

$$\lim_{R\to+\infty} f_R(x) = \lim_{R\to+\infty} 1_R(x)v^2(x) = 0,$$

alors, il est aisé de remarquer que l'on a

- $f_R(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$,
- $|f_R| \leq v^2 \in L^1(\mathbb{R}^n)$,
- $\lim\limits_{R\to+\infty} f_R(x) = 0$, lorsque R tend vers$+\infty$.

D'après le théorème de la convergence dominée, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to+\infty} \int_{|x|\geq R} v^2(x)dx &= \lim_{R\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} 1_R(x)v^2(x)dx \\
&= \lim_{R\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_R(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{R\to+\infty} f_R(x)dx = 0.
\end{aligned}$$

Ce qui prouve la convergence de la suite $M_R v$ vers la fonction v dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^n)$. D'autre part, on a

$$\frac{\partial M_R v}{\partial x_i} = \frac{\partial M_R}{\partial x_i} v + M_R \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

avec

$$\frac{\partial M_R}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{R}\frac{\partial M}{\partial x_i}(\frac{x}{R}),$$

ou encore

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial M_R}{\partial x_i}(x) \right| = 0.$$

D'où

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty} \frac{\partial}{\partial x_i}(M_R v) &= \lim_{R\to\infty} \left(\frac{\partial M_R}{\partial x_i} v + M_R \frac{\partial v}{\partial x_i} \right), \\
&= \lim_{R\to\infty} M_R \frac{\partial v}{\partial x_i}, \\
&= \frac{\partial v}{\partial x_i}, \text{ dans } L^2(\Omega).
\end{aligned}$$

2 *Deuxième étape, la régularisation*

Il suffit de démontrer que $\forall\, v \in H^1_c(\mathbb{R}^n)$ à support compact, il existe une suite $v_h \in D(\mathbb{R}^n)$ telle que $\lim\limits_{h\to 0} v_h = v$ dans $H^1(\mathbb{R}^n)$.

On considère la fonction $\rho(x) \in D(\mathbb{R}^n)$ vérifiant

$$\begin{cases} \rho(x) \geq 0, & \text{si} \quad |x| < 1 \\ \rho(x) = 0, & \text{si} \quad |x| \geq 1 \\ \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)dx = 1 \end{cases}$$

Pour tout $h > 0$, on définit la suite régularisante ρ_h par

$$\rho_h(x) = \frac{1}{h^n}\rho(\frac{x}{h}),\ \rho_h \in D(\mathbb{R}^n),$$

et la suite régularisée $v_h$de la fonction v donnée par $v_h = \rho_h * v$,

$$\begin{aligned} v_h(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} v(y)\rho_h(x-y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} v(x-y)\rho_h(y)dy. \end{aligned}$$

il est simple de voir que la suite $v_h(x)$ converge vers $v(x)$ pour la topologie de $H^1(\mathbb{R}^n)$, voir que

$$\begin{aligned} |v_h(x) - v(x)|^2 &= \left| \int_{|x-y|<h} \rho_h(x-y)v(y)dy - v(x)\int_{|x-y|<h} \rho_h(x-y)dy \right|^2 \\ &= \left| \int_{|x-y|<h} \rho_h(x-y)v(y)dy - \int_{|x-y|<h} \rho_h(x-y)v(x)dy \right|^2 \\ &= \left| \int_{|x-y|<h} \rho_h(x-y)\left(v(y) - v(x)\right)dy \right|^2 \\ &\leq \int_{|x-y|<h} \rho_h^2(x-y)dy \int_{|x-y|<h} |v(y)-v(x)|^2\, dy \\ &\leq \frac{C}{h^n}\int_{|x-y|<h} |v(y)-v(x)|^2\, dy. \end{aligned}$$

D'après le théorème de Fubini

$$\begin{aligned}
\|v_h - v\|^2_{L^2(R^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} |v_h(x) - v(x)|^2 \, dx \\
&\leq \frac{C}{h^n} \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{|x-y|<h} |v(y) - v(x)|^2 \, dy \\
&= \frac{C}{h^n} \int_{|x-y|<h} dy \int_{\mathbb{R}^n} |v(y) - v(x)|^2 \, dx.
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|x - y| \leq h \leq \delta \quad \text{implique} \quad |v(y) - v(x)| \leq \varepsilon.$$

D'où pour les valeurs de $h < \delta$, on a

$$\|v_h - v\|_{L^2(R^n)} \leq \frac{C}{h^n} h^n \varepsilon = \varepsilon.$$

La même démonstration pour la convergence de la dérivée $\dfrac{\partial v_h}{\partial x_j}$ vers la fonction $\dfrac{\partial v}{\partial x_j}$. En effet car, on a

$$\frac{\partial v_h}{\partial x_j} = \rho_h * \frac{\partial v}{\partial x_j} = \frac{\partial \rho_h}{\partial x_j} * v.$$

Théorème (Inégalité de Poincaré)

Soit Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, il existe une constante $c = c(\Omega) > 0$ telle que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega),\ \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq c(\Omega) \left(\sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Démonstration

On utilise la densité de $D(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$, et on démontre que l'inégalité est vraie pour tout $v \in D(\Omega)$, Ω étant borné, on peut supposer que Ω est contenu dans la bande $a \leq x_n \leq b$, en posant, pour tout $x \in \Omega$,

$$x = (x', x_n),\ x' = (x_1, \ldots.., x_{n-1}),\ \text{avec } a \leq x_n \leq b.$$

Soit $v \in D(\Omega)$, on définit la fonction $\widetilde{v}$ par

$$\widetilde{v}(x) = \begin{cases} v\ (x) & \text{si } x \in\ \Omega \\ 0 & \text{si } x \notin\ \Omega \end{cases},$$

alors, on a

$$\widetilde{v}(x^{'},x_n)=\int_a^{x_n}\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial t}(x^{'},t)dt,$$

ou encore

$$\begin{aligned}\left|\widetilde{v}(x^{'},x_n)\right|^2 &= \left|\int_a^{x_n}\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial t}(x^{'},t)dt\right|^2\\ &\leq \int_a^{x_n}1^2dt\int_a^{x_n}\left|\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial t}(x^{'},t)\right|^2dt,\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\left|\widetilde{v}(x^{'},x_n)\right|^2\leq(x_n-a)\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial t}(x^{'},t)\right|^2dt.$$

D'où, par intégration des deux membres par rapport à x', on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\left|\widetilde{v}(x^{'},x_n)\right|^2dx^{'}\leq(x_n-a)\int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial t}(x^{'},t)\right|^2dx.$$

Intégrons les deux membres par rapport à x_n, on écrit

$$\int_a^b\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\left|\widetilde{v}(x^{'},x_n)\right|^2dx^{'}dx_n\leq\int_a^b(x_n-a)dx_n\int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial t}(x^{'},t)\right|^2dx\ .$$

Notons que l'on a

$$\int_a^b\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\left|\widetilde{v}(x^{'},x_n)\right|^2dx^{'}dx_n=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\left|\widetilde{v}(x^{'},x_n)\right|^2dx^{'}dx_n.$$

D'où, il vient

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left|\widetilde{v}(x^{'},x_n)\right|^2dx^{'}\leq\int_a^b(x_n-a)dx_n\int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial t}(x^{'},t)\right|^2dx\ ,$$

ce qui donne par la suite

$$\|\widetilde{v}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\leq\frac{(b-a)^2}{2}\left\|\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial x_n}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

ou encore

$$\|v\|^2_{L^2(\Omega)}\leq\frac{(b-a)^2}{2}\left\|\frac{\partial v}{\partial x_n}\right\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Par passage à la limite et en utilisant la densité de $D(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$, on aura le résultat pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$.

Corollaire

Soit Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, alors la semi-norme

$$|v|_{1,\Omega} = \left(\sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme induite par celle de $H_0^1(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

Démonstration

Montrons que

$$|v|_{1,\Omega} = \left(\sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

représente une norme sur $H_0^1(\Omega)$.

$$\begin{aligned} |v|_{1,\Omega} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \left(\sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) = 0 \\ &\Rightarrow \quad \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} = 0, \ \forall \, i = 1, ..., n, \end{aligned}$$

il vient, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq c(\Omega) \left(\sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_n} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

D'où

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} = 0 \Rightarrow v = 0.$$

Montrons qu'il existe deux constantes c_1 et c_2 telles que,

$$c_1 \, |v|_{1,\Omega} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq c_2 \, |v|_{1,\Omega} \, .$$

En effet,

$$
\begin{aligned}
|v|_{1,\Omega}^2 &= \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\leq \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&= \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 .
\end{aligned}
$$

D'où

$$
|v|_{1,\Omega}^2 \leq \|v\|_{H^1(\Omega)} .
$$

Réciproquement,

$$
\begin{aligned}
\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 &= \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\leq c(\Omega) \left(\sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_n} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\leq (c(\Omega)+1) \left(\sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_n} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\
&\leq C(\Omega)\, |v|_{1,\Omega}^2 , \quad \text{avec} \quad C(\Omega) = c(\Omega) + 1.
\end{aligned}
$$

D'où l'équivalence des normes

$$
\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C(\Omega)\, |v|_{1,\Omega}^2 , \text{ avec } c_1 = 1 \text{ et } c_2 = C(\Omega).
$$

Exemple 4

Soit $\Omega =]-a, a[$, un ouvert de $\mathbb{R}$ avec $a > 0$, alors la fonction $f(x) = |x|$ appartient à l'espace $H^1(\Omega)$.

Il est clair que la fonction $f \in L^2(\Omega)$ car

$$
\|f(x)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{-a}^{a} |x|^2 \, dx = 2\frac{a^3}{3} \leq +\infty.
$$

De plus, $\forall\varphi \in D(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned}
\left\langle f', \varphi \right\rangle &= -\left\langle f, \varphi' \right\rangle = -\int_{-a}^{a} |x|\, \varphi' dx \\
\left\langle f', \varphi \right\rangle &= +\int_{-a}^{0} x\varphi' dx - \int_{0}^{a} x\varphi' dx \\
&= [x\varphi]_{-a}^{0} - \int_{-a}^{0} \varphi(x) dx - [x\varphi]_{0}^{a} + \int_{0}^{a} \varphi(x) dx \\
&= 0 - \int_{-a}^{0} \varphi(x) dx - 0 + \int_{0}^{a} \varphi(x) dx = \langle g, \varphi \rangle ,
\end{aligned}$$

où la fonction $g(x)$ est donnée par

$$g(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} .$$

D'où $f'(x) = g(x)$, avec $f'(x) \in L^2(\Omega)$ ce qui nous donne le résultat voulu, $f \in H^1(\Omega)$.

Bibliographie

[1] **V. MIKHAILOV.** Equations aux dérivées partielles. Editions Mir 1980.

[2] **M. NADIR.** Cours d'analyse fonctionnelle, université de Msila Algérie 2004.

[3] **P.A. RAVIART, J.M. THOMAS.** Introduction à l'Analyse Numérque l'Analyse des équations aux dérivées partielles. MAsSSON 1988.

[4] **VO-KHAC KHOAN.** Distributions Analyse de Fourier Opérateurs aux dérivées partielles. tome1. Vuibert 1972.