Editeurs

T. Ali Ziane N. Kahoul D. E. Teniou

N. Zaidi O. Zair

Actes du 6ème Colloque sur les

Tendances dans les Applications Mathématiques en Tunisie, Algérie, Maroc

Alger, 27- 30 Avril 2013, Algérie

AMN EdP

USTHB ENS - Kouba EMI ENIT LAMSIN

Editeurs

T. Ali Ziane N. Kahoul
D. E. Teniou N. Zaidi
O. Zair

Actes du 6ème colloque sur les

Tendances des Applications Mathématiques

en Tunisie, Algérie, Maroc

Alger, 27 — 30 Avril 2013

AMNEDP - USTHB

Préface

TAM, Tunisie, Algérie, Maroc,

Trois pays liés entre eux, mais liés aussi à tant d'autres et en particulier à ceux qui se trouvent sur l'autre rive de la méditerranée, par la situation géographique, par l'histoire et aujourd'hui par un lien de nature scientifique, une occasion d'échanges entre tous les chercheurs sur les Tendances dans les Applications Mathématiques, d'où le second **TAM**. Ce lien est un colloque du nom de **TAMTAM**.

A une époque, pour le moins tumultueuse, où nous sommes témoins médiatiquement de toutes les relations qui se font et se défont au gré de fluctuations d'intérêts politiques et économiques, il peut s'avérer réconfortant d'assister au tissage d'un lien alimenté par l'intérêt scientifique, qui, par essence, ne saurait souffrir les affres d'une quelconque érosion, à la condition sine qua non que la même volonté qui a permis la création de **TAMTAM** continue d'exister pour le perpétuer.
Cette volonté de le préserver est exprimée à travers toutes les contributions, qu'elles soient purement scientifiques (conférences, communications), logistiques (organisation) ou financières (sponsors). Une volonté consignée dans les actes de **TAMTAM** depuis sa création.
Les actes de **TAMTAMXIII** ne dérogent pas à la règle; ils constituent un témoignage de cet événement, ainsi qu'une reconnaissance envers tous ses acteurs.

Avril 2013

Les Editeurs

Comité d'organisation

Présidente du Comité d'organisation : Pr. O. Zair (USTHB, Alger, Algerie)

A.	Aïnouz (USTHB, Alger)	A.	Mokrane (ENS, Kouba)
B.	Belghazi (USTHB, Alger)	K.	Lemrabet (USTHB, Alger)
C.	Bouadjenak-Titri (USTHB, Alger)	D.	Rebbah (USTHB, Alger)
A. K.	Boutarene (USTHB, Alger)	F.	Smadhi (USTHB, Alger)
D.	Hamroun (USTHB, Alger)	D. E.	Teniou (USTHB, Alger)
N.	Kahoul (USTHB, Alger)	N.	Zaidi (USTHB, Alger)
O.	Zair (USTHB, Alger)		

Comité scientifique

Président du Comité scientifique : Pr. D. E. Teniou (USTHB, Alger, Algerie)

B. Abdellaoui
U. Tlemcen, Algérie

B. Achchab
U. Hassan 1, Settat, Maroc

A. Aibeche
U. Sétif, Algérie

N. Aissa
USTHB, Alger, Algérie

F. Alabau Boussouira
U. Metz et CNRS, France

T. Ali Ziane
USTHB, Alger, Algérie

F. Ammar Khodja
U. Franche Comté, France

M. Bellassoued
U. Bizerte, Tunisie

A. Benabdallah
U. Provence, France

A. Benaissa
U. Bel Abbes, Algérie

A. Bendali
U. Toulouse, France

N. Benhamidouche
U. M'Sila, Algérie

F. Bentalha
U. Batna, Algérie

M. Bouchekif
U. Tlemcen, Algérie

T. Z. Boulmezaoued
U. Versailles, Paris, France

N. Boussetila
U. Guelma, Algérie

C. Bouzar
U. Oran, Algérie

D. Chacha
U. Ouargla, Algérie

L. Chorfi
U. Annaba, Algérie

S. Djebali
ENS Kouba, Alger, Algérie

R. Djouadi
USTHB, Alger, Algérie

M. El Alaoui Talibi
U. Marrakech, Maroc

N. Gmati
ENI Tunis, Tunisie

S. Guesmia
U. Zurich, Suisse

A. Habbal
U. Nice, France

H. Haddadou
ESI, Alger, Algérie

H. Haddar
CMAP Ecole Polytechnique,
Palaiseau, France

K. Hamdache
CMAP, Ecole Polytechnique,
Palaiseau, France

D. Hamroun
USTHB, Alger, Algerie

K. Lemrabet
USTHB, Alger, Algerie

M. Mechab
U. Bel Abbes, Algérie

H. Mechkour
ECE d'Ingenieurs, Paris, France

B. Messirdi
U. Oran, Algérie

A. Medeghri
U. Mostghanem, Algérie

M. S. Moulay
USTHB, Alger, Algérie

M. Moussaoui
ENS Kouba, Alger, Algérie

F. Z. Nouri
U. Annaba, Algérie

L. Rahmani
U. Tizi-Ouzou, Algérie

H. Ramoul
C. U. Kenchela, Algérie

D. Rebbah
USTHB, Alger, Algerie

F. Rebbani
U. Annaba, Algérie

A. Sili
U. Toulon, France S.

S. Tas
U. Bejaia, Algérie

M. Tilioua
U. Hassan1, Khouribga, Maroc

M. Tlemcani
USTO, Oran, Algérie

R. Touzani
U. Clermont-Ferrand, France

A. Youkana
U. Batna, Algérie

O. Zair
USTHB, Alger, Algerie

Conférenciers invités

F. Ammar Khodja
U. Franche Comté, France

A. Demidov
MIPT, Moscou, Russie

C. Dogbé
U. Caen, France

F. Fanelli
BCAM, Espagne

A. Gaudiello
U. Cassino, Italie

K. Hamdache
CMAP, Ecole Polytechnique,
Palaiseau, France

M. Hassine
Faculté des Sciences de Monastir, Tunisie

R. Labbas
U. Havre, France

D. Lannes
U. Paris, France

L. Maniar
U. Marrakech, Maroc

S. Tordeux
U. Pau, France

SOMMAIRE / CONTENTS

SOMMAIRE / CONTENTS

SOMMAIRE / CONTENTS

 SOMMAIRE / CONTENTS

Première partie

Conférences plénières

Some recent results on the null-controllability of parabolic systems

Farid Ammar Khodja

Laboratoire de Mathématiques de Besançon
farid.ammar-khodja@univ-fcomte.fr

ABSTRACT. The aim of this talk is to describe some recent results about the null-controllability of systems of parabolic equations. To be more precise, consider the following system

$$\begin{cases} y' = (D\Delta + A(t,x))\, y + B1_\omega u, & Q_T := (0,T) \times \Omega, \\ y = 1_{\Gamma_0} C v, & \Sigma_T := (0,T) \times \partial\Omega, \\ y_{|t=0} = y^0. & \Omega \end{cases}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ is a smooth bounded domain and

$$\begin{aligned} D &= diag\{d_1, \dots, d_n\},\ A \in L^\infty\left(Q_T, \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right)\right), \\ B &\in L^\infty\left(Q_T, \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^d\right)\right), C \in L^\infty\left(Q_T, \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^d\right)\right), \end{aligned}$$

while $\omega \subset \Omega$ and $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ are subsets and $u \in L^2(Q_T)$, $v \in L^2(\Sigma_T)$ play the role of controls. The null-controllability issue is then: for any $T > 0$ and $y^0 \in L^2(\Omega)$, find u, v such that the associated solution of the previous system satisfies $y(T) = 0$ on Ω.
This is a widely open problem, but these last years some results use interesting methods, some of them based on Carleman inequalities, and offer some perspectives for a solution of this control issue. The constant coefficient case will be developped.
We will also focus on the fact that, contrary to the scalar case, there are some differences between internal controllability ($C = 0$) and boundary controllability ($B = 0$).

The Vishik-Lyusternik Method and Two Problems in Magnetohydrodynamics for Plasma in a Tokamak

To the shining memory of Mark Iosifovich Vishik

A.S. Demidov

Moscow State University, Moscow, 119991, Russia
demidov.alexandre@gmail.com ; alexandre.demidov@mtu-net.ru

ABSTRACT. The Vishik-Lyusternik method for constructing asymptotics of solutions to singularly perturbed elliptic equations is applied to two problems in magnetohydrodynamics; one of the problems is related to the inverse problem for plasma equilibrium in a tokamak (see http://en.wikipedia.org/wiki/ITER) and the other concerns the study of instability of the plasma discharge with the resistivity of the tokamak casing taken into account.

RÉSUMÉ. Le rapport exposera les idées principales de la méthode de Vishik et Lyusternik construction de solutions asymptotiques d'équations elliptique singulièrement perturbées et l'application de cette méthode à deux problèmes magnétohydrodynamique. L'un d'eux est le soi-disant problème inverse de l'équilibre du plasma dans un tokamak. Dans ce problème, traite d'une question importante pour contrôler la réaction nucléaire de fusion, à savoir la distribution du courant circulant dans le plasma en fonction de la mesure du champ magnétique sur le tubage tokamak, à savoir sur coque métallique, ce qui limite la chambre toroidale tokamak. Un autre problème est lié ` l'étude de l'influence de la résistivité du tubage tokamak sur la stabilité du plasma.

This report will set forth the author's article, published in the Journal of Mathematical Sciences March 2013, Volume 189, Issue 4, dedicated to the memory of M.I. Vishik (1921 - 2012), one of the founders of the modern theory of partial differential equations (see also http://www.dynamics.iitp.ru/vishik/).

1. The Vishik-Lyusternik Method

To represent two main ideas of the Vishik–Lyusternik method [1, 2], we consider the following rather simple Dirichlet problem in a disk $D = \{ \, r = |x| < R\}$ with radius R :

$$\varepsilon^2 A v_\varepsilon = \varepsilon^2 \quad \text{in } \; D \,, \qquad v_\varepsilon\big|_{\Gamma=\partial D} = 0. \tag{1}$$

Here,$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{a}}$ is a small positive parameter and $A = \left(\partial_{rr} + \frac{1}{r}\partial_r\right) - a$, i.e.,

$$\varepsilon^2 A = \varepsilon^2 \Delta - 1 \,, \tag{2}$$

where Δ is the Laplace operator.

It is clear that a bounded solution $v = v_\varepsilon$ to the simpler problem of the same kind

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 v}{dx^2} - v = 1 \qquad x > 0 \,, \qquad v\big|_{x=0} = 0$$

differs from the limit solution $v_0 = -1$ (as $\varepsilon \to 0$) by some function $t \mapsto e^{-t}$ that exponentially rapidly decreases in the variable (called the fast variable) $t = \frac{x}{\varepsilon}$. This simple observation led M. I. Vishik and L. A. Lyusternik to the *first idea* of their method for constructing asymptotic expansions of solutions to rather general linear singularly perturbed elliptic problems. In accordance to this idea, an asymptotic expansion should be looked for in the form of the sum of two polynomial decompositions with respect to the parameter ε :

$$v_\varepsilon(x) \simeq [f_0(x) + \ldots + \varepsilon^n f_n(x)] + [g_0(t) + \ldots + \varepsilon^m g_m(t)] \;, \tag{3}$$

where $[g_0(t) + \ldots + \varepsilon^m g_m(t)$ rapidly decreases near the boundary of the domain, i.e., it is the so-called boundary layer function. Here, $t = \nu(x)/\varepsilon$, where $\nu(x)$ is the distance from a point x to the boundary of the domain. More exactly, the expression $\chi(x)\,[g_0(t) + \ldots + \varepsilon^m g_m(t)]$, should be considered (cf., for example, [3]), where χ is a smooth cut-off function that is equal to 1 in a neighborhood of the boundary and to 0 outside a larger neighborhood. However, we omit technical details for the sake of simplicity.

Returning to the problem (1.1) and following the first idea of the Vishik-Lyusternik method, we need to apply the operator A to $[f_0(x) + \ldots + \varepsilon^n f_n(x)]]$ and $[g_0(t) + \ldots + \varepsilon^m g_m(t)]$. Therefore, it is necessary to represent the operator A in the corresponding variables (i.e., x and t) for obtaining two decompositions with respect to ε. In our particular case, these decompositions have the form

$$\varepsilon^2 A = -1 + \varepsilon^2 \Delta \qquad \text{and} \qquad \varepsilon^2 A = (\partial_{tt} - 1) - \frac{\varepsilon}{R - \varepsilon t}\partial_t = B_0 + \varepsilon B_1 + \varepsilon^2 \widetilde{B} \,, \tag{4}$$

where

$$B_0 = \partial_{tt} - 1 \,, \quad B_1 = -\frac{1}{R}\partial_t \,, \quad \widetilde{B} = -\frac{t}{R^2(1 - \frac{\varepsilon t}{R})}\partial_t \,. \tag{5}$$

The second idea of the Vishik-Lyusternik method concerns justification of asymptotics, i.e., estimating the remainder term

$$z = v_\varepsilon - [f_0 + \ldots + \varepsilon^n f_n] - [g_0 + \ldots + \varepsilon^m g_m] \,.$$

For this purpose, one should use a priori estimates for solutions to elliptic problems. Such estimates for rather general strongly elliptic problems were first obtained by Vishik [4]. In the case of the problem (1.1), we have

$$\|z\|_\mu \leq \frac{C}{\varepsilon^2} \, \|(-\varepsilon^2 \, A)z\|_{\mu-2},$$

where $\|\cdot\|_s$ denotes the norm in the Sobolev space H^s and

$$(-\varepsilon^2 \, A)z = \varepsilon^2 A\Big[-v^R + (f_0 + \ldots + \varepsilon^n f_n) + (g_0 + \ldots + \varepsilon^m g_m)\Big] \overset{(4)}{=}$$

$$-\varepsilon^2 A \, v^R + (-1 + \varepsilon^2\Delta)(f_0 + \ldots + \varepsilon^n f_n) + (B_0 + \varepsilon B_1 + \varepsilon^2 \widetilde{B})(g_0 + \ldots + \varepsilon^m g_m) =$$

$$-[[f_0]] - \varepsilon[[f_1]] - \varepsilon^2[[1 + f_2 - \Delta f_0]] - \varepsilon^3[[f_3 - \Delta f_1]] - \ldots - \varepsilon^n[[f_n - \Delta f_{n-2}]]$$

$$-\varepsilon^{n+1}\Delta f_{n-1} - \varepsilon^{n+2}\Delta f_n +$$

$$[[B_{{}_0} g_0]] + \varepsilon[[B_{{}_0} g_1 + B_{{}_1} g_0]] + \varepsilon^2[[B_{{}_0} g_2 + B_{{}_1} g_1]] + ...$$

To make the norm $\|z\|_\mu$ of the remainder term small, one should require the coefficients of lower powers of ε to vanish. The fact that the coefficients closed in the brackets $[[\,\cdot\,]]$) vanish means that

$$f_0 = f_1 = 0 \,, \; f_2 = -1 \,, \; f_i = 0 \,, \quad i > 2 \,, \tag{6}$$

and the boundary layer functions are solutions to the ordinary differential equations

$$B_{{}_0} g_0 = 0 \quad \overset{(5)}{\Leftrightarrow} \quad (\partial_{tt} - 1) g_0 = 0 \,, \qquad B_{{}_0} g_j = -B_{{}_1} g_{j-1} \quad \overset{(5)}{\Leftrightarrow} \quad (\partial_{tt} - 1) g_j = -\partial_t g_{j-1} \,, j > 1 \,. \tag{7}$$

The function g_j satisfies the boundary condition $g_j(0) = f_j(R)$ which follows from the equality

$$[f_0(r) + \ldots + \varepsilon^n f_n(r)] \,\big|_{r=R} + [g_0(t) + \ldots + \varepsilon^m g_m(t)] \,\big|_{t=0} = 0 \,,$$

corresponding to the condition $v_\varepsilon(x)\big|_{|x|=R} \overset{(1)}{=} 0$. Thus, $g_0 = g_1 = 0$, $g_2 = e^{-t}$, $g_3 = -\frac{t}{2R} e^{-t}$.

As a result, we find

$$v_\varepsilon(x) = \varphi(t) + z \,, \quad \varphi(t) = -\varepsilon^2 + \varepsilon^2 \left(1 - \varepsilon\kappa \frac{t}{2}\right) e^{-t} \,, \tag{8}$$

where $t \stackrel{def}{=} |R-r|/\varepsilon$, $r=|x|$, $\kappa = R^{-1}$, and

$$\|z\|_\mu \le C\|A\|_{\mu-2} \le \frac{C}{\varepsilon^2}\|\varepsilon^4(B_1 g_3 + \widetilde{B} g_2) + \varepsilon^5 \widetilde{B} g_3\|_{\mu-2} \le C\varepsilon^{4+1/2-\mu}\,, \quad \varepsilon = a^{-1/2} \to 0\,.$$

We note that $H^\mu \subset C^{0,\lambda}(\bar{D})$ for every $\lambda < \delta$, if $\mu = 1+\delta$, $\delta > 0$.

2. The Inverse Problem For Plasma Equilibrium in a Tokamak

Control over thermonuclear fusion (including suppression of instability of the plasma discharge) essentially depends on our knowledge about current distribution through the plasma. In the case of cylindrical approximation, when the large radius R of the toroidal tokamak chamber is assumed to be infinite or, in other words, the tokamak chamber and the plasma discharge are modeled as infinite cylinders $\mathcal{S} \times \mathbb{R}$ and $\omega \times \mathbb{R}$ with simply connected crosssections $\mathcal{S} \ni \mathbb{R}^2$ and $\omega \ni \mathcal{S}$ respectively, the required current distribution is given by the mapping

$$f_u : \omega \ni (x,y) \mapsto j(x,y) = f\big(u(x,y)\big) \ge 0, \tag{9}$$

where[1] the sought functions $u \in C^2(\omega)$ and f are connected by the Grad–Shafranov equation[2]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \begin{cases} f\big(u(x,y)\big) \ge 0 & (x,y) \in \overline{\omega}\,, \\ 0 & (x,y) \in \Omega = \mathcal{S} \setminus \overline{\omega}\,; \end{cases} \tag{10}$$

moreover,

$$u\Big|_{\gamma=\partial\omega} = 0\,, \qquad u\Big|_{\Gamma=\partial\mathcal{S}} = M\,, \qquad \iint_\omega j(x,y)\,dxdy = 1 \quad \stackrel{j=\Delta u}{\Leftrightarrow} \quad \int_\gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}\,d\gamma = 1\,. \tag{11}$$

The condition $j=0$ in the domain Ω, the cross-section of the vacuum layer, means that there is no current in vacuum. The condition $u\Big|_{\gamma=\partial\omega} = 0$ means that the function u (the z-component of the vector potential of the magnetic field) is the level curve of the boundary γ of the cross-section of the equilibrium plasma discharge. If the metal tokamak casing (the metal jacket of the tokamak chamber) is a perfect conductor and there are no additional control currents, then the function $M = u\Big|_{\Gamma=\partial\mathcal{S}}$ is a constant equal to the (measurable) magnetic flux between γ and Γ. The condition

$$\iint_\omega j(x,y)\,dxdy = \iint_{\mathcal{S}} j(x,y)\,dxdy = 1$$

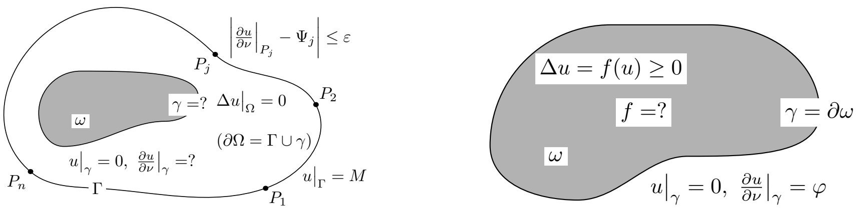
1. The inequality $j(x,y) \ge 0$ expresses the unidirectionality of the current
2. In the truly toroidal case $(R < \infty)$, the Grad–Shafranov equation takes the form $u_{xx} - \frac{1}{x}u_x + u_{yy} = F(u) + x^2 G(u)$, where $0 < R < x < R + d\,,$.

means that the total current (taken for the unit of measure of current strength) is known. The main difficulty is to find a current distribution. One could try to find it approximately by choosing $j = f_u$ such that the solution to the problem (2.2), (2.3) satisfies, in a sense, the condition

$$\Big| \nabla u \Big|_{P_j \in \Gamma} - \Psi_j \Big| \leq \varepsilon \,,$$

where ε is the accuracy of measurement of the magnetic field flux ∇u on Γ, and Ψ_j are its experimental values at points $P_j \in \Gamma$. The problem (2.2), (2.3) with a given function $j = f_u$ is referred to as the *direct problem* for plasma equilibrium. By the *inverse problem* one means the problem of finding a sufficiently exact approximation of $j = f_u$ from the relations (2.2), (2.3) and experimental measurements of the magnetic field flux at a number of points $P_j \in \Gamma$.

It is reasonable (cf. [5]) to divide the inverse problem into two subproblems : Problem (a) and Problem (b), as shown in Figure 1.



a) b)

Fig. 1. *Two subproblems of the inverse problem for plasma equilibrium in the case of cylindrical approximation.*

Problem (a) deals with the "vacuum" (sought) annulus like domain $\Omega = \mathcal{S} \setminus \overline{\omega}$. It is required to find approximately the free boundary $\gamma = \{u(x,y) = 0\}$ of the sought domain ω (the cross-section of the plasma discharge) and the gradient $\nabla u\big|_\gamma$ which is completely determined by the function $\varphi = \partial u/\partial\nu\big|_\gamma \varphi = \partial u/\partial\nu\big|_\gamma$ (since $u\big|_\gamma = 0$).) The main structural points of the solution of Problem (a) can be found in [6].

Provided that Problem (a) has been solved, one can proceed with *Problem* (b) formulated as a problem of finding in a given domain ω all "gessentially different" possible current distributions, i.e., mappings $f_u : \omega \ni (x,y) \mapsto f\big(u(x,y)\big)$ such that

$$\Delta u(x,y) \overset{(10)}{=} f\big(u(x,y)\big) \geq 0 \qquad \text{in} \quad \omega \,, \qquad u \overset{(11)}{=} 0 \qquad \text{on} \quad \gamma = \partial\omega \,, \tag{12}$$

$$\sup_\gamma \Big| \varphi - \ \Phi \Big| \leq \lambda \sup_\gamma \Big| \Phi \Big| \,, \quad \int_\gamma \varphi(s)\, d\gamma \overset{(11)}{=} 1 \,, \quad \varphi = \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_\gamma \,, \tag{13}$$

where $\lambda \geq 0$ is a small parameter. One can assume that the function Φ and the curve $\gamma = \partial\omega$ (consequently, the domain ω) are known [6]. Moreover, $\varphi = \Phi$ in the case $\lambda = 0$ (cf. Figure 1(b)), which is essentially different form the case where $\lambda > 0$ is as small as desired. The notion of "gessentially different" distributions $f_u^1 = f_{u_1}^1$ and $f_u^2 = f_{u_2}^1$, where (f_j, u_j) is a solution to the problem (2.4), (2.5), can be understood depending on particular physical characteristics of plasma discharge under consideration. In any case, the notion of essential difference between distributions f_u^1 and f_u^2 assumes that

$$\left| \frac{\|f_u^1\| - \|f_u^2\|}{\max\{\, \|f_u^1\|\,,\, \|f_u^2\|\,\}} \right| \geq \alpha \sim 0.1 \div 0.3\,, \qquad \|f_u^j\| \overset{def}{=} \max_{(x,y)\in\omega} \left| f_u^j(x,y) \right| . \tag{14}$$

One should keep in mind that A-like profiles concentrated near some subset (for example, in a neighborhood of the boundary £) are not essentially different from the physical point of view (which corresponds to the so-called skin effect [7]), in spite of the fact that such profiles may have as different maximal values as desired and, consequently, satisfy the condition (2.6) with α as close to 1 as desired.

If two distributions f_u^1 and f_u^2 satisfy, in addition to (2.6), the condition

$$(\hat{x},\hat{y}) \in \operatorname{absmin} f_u^1 \qquad \Rightarrow \qquad (\hat{x},\hat{y}) \in \operatorname{absmax} f_u^2, \tag{15}$$

then f_u^1 and f_u^2f1 are a priori essentially different from the physical point of view (cf. [5]).

It is natural to start the study of the inverse problem (2.4), (2.5) with the simplest class of functions f, namely, polynomials of the first degree, i.e., affine functions $f\,:\,u \mapsto au + b$ with sought real coefficients a and b. For the sake of brevity, we sometimes write $x = (x_1, x_2)$ instead of (x, y) for argument of the function u. Then the inverse problem (2.4), (2.5) in the class of affine functions f is written as

$$\Delta u(x) \overset{(10)}{=} a\,u(u(x)) + b \geq 0\,, \quad \text{where} \quad x \in \omega\,, \qquad u \overset{(11)}{=} 0 \qquad \text{-} \quad \gamma = \partial\omega\,, \tag{16}$$

$$\sup_\gamma \Big|\varphi - \ \Phi\Big| \leq \lambda \sup_\gamma \Big|\Phi\Big|\,, \quad \int_\gamma \varphi(s)\,d\gamma \overset{(11)}{=} 1\,, \qquad \varphi = \frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_\gamma\,, \tag{17}$$

First of all, we note that the condition $a\,u(u(x)) + b \geq 0$, and

$$\int\limits_{s\in\gamma} \frac{\partial u}{\partial\nu}(s)\,ds \;= 1$$

restrict the arbitrariness in the choice of parameters $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. In particular, we have

Lemme 2.1 *The solvability of the problem*

$$\Delta u = au + b \geq 0 \quad \textit{in} \quad \omega\,, \qquad u = 0 \quad \textit{on} \quad \gamma = \partial\omega\,, \tag{18}$$

implies

$$b \geq 0, \quad a \geq -\lambda_1\,; \qquad \textit{moreover} \qquad b = 0 \iff a = -\lambda_1, \tag{19}$$

where $\lambda_1 = \lambda_1(\omega)$ *is the first eigenvalue of the operator* $-\Delta : H_0^1(\omega) \to H^{-1}(\omega)$, *i.e.,*

$$-\Delta\psi = \lambda_1\psi \quad in \quad \omega, \qquad where \quad \psi > 0 \quad in \quad \omega, \quad \psi = 0 \quad on \quad \gamma. \tag{20}$$

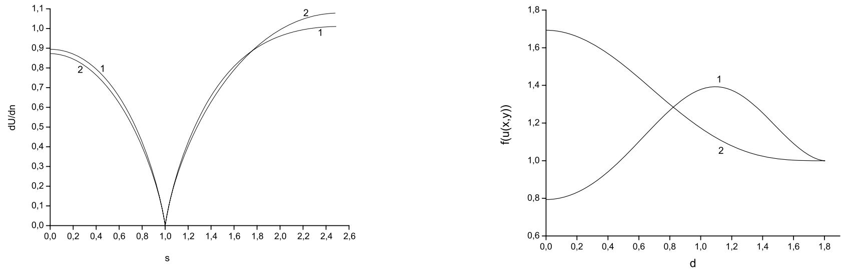


Fig. 2. Left : the graphs of the normal derivatives of u_1 and u_2 in the positive direction along the boundary of the rectangle $\omega = \{\, |x| < 3/2\,,\ |y| < 1\,\}$ in the first quadrant.
Right : the profiles of distributions f_u^k along the semidiagonal d of the rectangle ω drawn from its center to the vertex.

We formulate the main results for the inverse problem (2.8), (2.9).

Théorème 2.2 *Let the parameter* λ *in the problem (2.8), (2.9) vanish (i.e.,* $\Phi = \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\gamma}$*). Then the following assertions hold.*

(i) If ω *is a disk with radius* R*, then the problem (2.8), (2.9) has a solution for a continuum set of parameter* (a,b)*, and has no solution if* $\Phi \neq (2\pi R)^{-1}$

(ii) If a simply connected domain $\omega \ni \mathbb{R}^2\omega \ni \mathbb{R}^2$ *with boundary* $\gamma = \partial\omega$ *of class* $C^{3,\alpha}$ $C^{3,\alpha}$ *is different from a disk, then the problem (2.8), (2.9) has a solution if and only if* $\Phi = \Phi(a(b), b)$*, where* $b \geq 0$*; moreover, for each such a function* Φ *the number of solutions is finite (cf. [8, 9, 10]).*

Assertion 2.1 (cf. [11]). For a large class of domains ω, different from a disk, the problem (2.8), (2.9) has at most one solution if $\lambda = 0$.

Théorème 2.3 (cf. [12]). *For any small* $\lambda > 0$ *there exist countably many pairs of numbers* (a_j, b_j)*, where* $a_j \to \infty$*, and the corresponding functions* $u = u_j$ ¨ $\Phi = \Phi_j$ *satisfying the conditions of the problem (2.8), (2.9) with*

$$\|f_u^{j+1}\| - \|f_u^j\| > 1\,, \qquad \|f_u^j\| = \max_{x\in\omega} |f_u^j(x)|\,, \quad f_u^j(x) = a_j\, u_j(x) + b_j\,. \tag{21}$$

Moreover,

$$f_u^j : \omega \ni x \mapsto f_u^j(x) \to \delta\Big|_\gamma \quad \textit{as} \quad j \to \infty\,, \tag{22}$$

or, in other words, $\int\int_\omega f_u^j(x)\,\varphi(x)\,dx \;\to\; \int_\gamma \varphi(s)\,ds$ *as* $j \;\to\; \infty$ *for any* $\varphi \in C^\infty(\overline{\omega})$. *Furthermore,* $\lim\limits_{a\to\infty} |\gamma|\,b(a)/\sqrt{a} = 1.$

REMARQUE. — W
e can show that for any small $\lambda > 0$, in the class of affine functions f, there exists a countable set $\{f_u^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ of distributions satisfying the inequality (2.6) with any given $\alpha < 1$. However, these essentially different distributions (in the sense of the condition (2.6)) are members of a sequence converging to the δ-function supported on γ. Aswas already noted, such distributions are not essentially different from the physical point of view. Thus, we are led to the following important conclusion : in the class of polynomials $f \,:\, u \mapsto f(u) = \sum\limits_{m=0}^{N} a_n u^n$ essentially different distributions fu that can be of interest from the physical point of view, i.e., satisfying (2.6) and (2.7), can exist only if $N > 1$. Note that the functions

$$f^1(u) = 1 - 2.5u + 0u^2 + 15u^3 \qquad \text{and} \qquad f^2(u) = 1 + 0u + 2.2u^2 + 0.1u^3\,,$$

possessing the above property and normalized by the condition $u\big|_\gamma = 1$, which is not, in principle, different from the condition $\iint_\omega j(x,y)\,dxdy \overset{(11)}{=} 1)$ were found in [10], where for ω the rectangle $\omega = \{\,|x| < 3/2\,,\,|y| < 1\,\}$ was taken. The corresponding results are presented in Figures 2.

3. Instability of the Plasma Discharge with the Resistivity of the Tokamak Casing Taken into Account

The plasma maintained by magnetic fields is very instable. Experiments show that it is necessary to take into account the thickness of the metal tokamak casing and the fact that the casing is not a perfect conductor. At the same time, only two limiting cases have been investigated by physicists : the model of a perfectly conducting casing and the model of an infinitely thin resistive casing (cf. [13]-[16] and the references therein). Due to the Vishik–Lyusternik method, it is possible to consider the case of a resistive casing with account of its real thickness (cf. [17]).

Bibliographie

[1] M.I. Vishik and L.A. Lyusternik, "Regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with small parameter" [in Russian], Usp. Mat. Nauk 12, No. 5, 3-122 (1957).

[2] M.I. Vishik and L.A. Lyusternik, "the asymptotic behavior of solutions of linear differential equations with large or quickly changing coefficients and boundary conditions" [in Russian], Usp. Mat. Nauk 15, No. 4, 27-95 (1960) ; English transl. : Russ. Math. Surv. 15, No. 4, 23-91 (1960).

[3] A.S. Demidov, "Asymptotic behavior of the solution of a boundary value problem for elliptic pseudodifferential equations with a small parameter multiplying the leading operator" [in Russian], Tr. Mosk. Mat. Obshch. 32, 119-146 (1975) ; English transl. : Trans. Mosc. Math. Soc. 32, 115-142 (1977).

bibitem4 M.I. Vishik, "On strongly elliptic systems of differential equations" [in Russian], Mat. Sb. 29, No. 3, 615-676 (1951).

[4] A.S. Demidov, "Functional geometric method for solving free boundary problems for harmonic functions", Russ. Math. Surv. 65, No. 1, 1-94, (2010).

[5] A.S. Demidov and D.A. Platushchikhin, "Explicit formula for the gradient of a harmonic function from its analytic Cauchy data on the analytic curve" [in Russian], Mat. Zametki 87, No. 1, 141-143 (2010) ; English transl. : Math. Notes 87, No. 1, 135-137 (2010).

[6] A.S. Demidov, "The form of a steady plasma subject to the skin effect in a tokamak with non-circular cross-section", Nucl. Fusion 15, 765-768 (1975).

[7] A.S. Demidov, "On the inverse problem for the Grad-Shafranov equation with affine righthand side" [in Russian], Usp. Mat. Nauk 55, No. 6, 131-132 (2000) ; English transl. : Russ. Math. Surv. 55, No. 6, 1141-1142 (2000). 569

[8] A.S. Demidov and M. Moussaoui "An inverse problem originating from magnetohydrodynamics", Inverse Probl. 20, No. 1, 137-154 (2004).

[9] A.S. Demidov and V.V. Savelyev. "Essentially different current distributions in the inverse problem for the Grad-Shafranov equation," Rus. J. Math. Phys. 17, No. 1, 56-65 (2010).

[10] S.I. Bezrodnych and A.S. Demidov, "On the uniqueness of solution Cauchy's inverse problem for the equation u = au + b", Asymptotic Anal. 74, No. 1-2, 95-121 (2011).

[11] A.S. Demidov, "On the inverse problem for the Grad-Shafranov equation with affine right-hand side", Rus. J. Math. Phys. 17, No. 2, 145-153 (2010).

[12] V.D. Pustovitov and V. V. Yanovsky, "Dependence of the resistive wall mode growth rate on the wall thickness", In : 34th EPS Conference on Plasma Phys. Warsaw, 2-6 July ECA, Vol. 31F, P-4.115 (2007).

[13] V.D. Pustovitov, "Energy approach to the problem of plasma stability in tokamaks with a resistive wall", Phys. Lett., A 376, 2001-2003 (2012).

[14] V.D. Pustovitov, "Thick-wall effects in the theory of resistive wall modes", Phys. Lett. 19, 062503. (2012)

[15] V.D. Pustovitov, "A unified approach to description of the fast and slow resistive wall modes in tokamaks" [in Russian], Fiz. Plazmy 38, No. 9, 758-768 (2012) ; English transl. : Plasma Phys. Reports 38, No. 9, 697-707 (2012).

[16] A.S. Demidov, "The Vishik-Lyusternik Method and Two Problems in Magnetohydrodynamics for Plasma in a Tokamak", Journal of Mathematical Sciences, Vol. 189, No. 4, 546-567 (2013).

MODÉLISATION DE LA DYNAMIQUE DES FOULES D'UN POINT DE VUE SYSTÈME COMPLEXE : PERSPECTIVES DE RECHERCHE

C. DOGBE*

Résumé

Ces dernières années, l'intérêt pour la modélisation des flux de piétons (ou foules) s'est accru de façon remarquable. Nous avons affaire à un nouveau domaine de recherche en mathématiques appliquées plutôt ambitieux, du fait notamment des nombreuses applications en génie civile et dans les sciences sociales qui en découlent. Le défi qui est lancé là est celui d'arriver à mieux comprendre les systèmes dits complexes.

La recherche dans ce domaine s'intéresse tout particulièrement aux situations d'urgence qui peuvent surgir dans des zones, espaces, surpeuplés. Ce peut être le cas dans les lieux de transports comme les aéroports ou les gares, dans de grandes manifestations sportives ou culturelles d'importance comme dans les stades ou les musées. Ce peut être le cas aussi dans certains grands rassemblements religieux, ainsi qu'il est arrivé en Janvier 2006 dans le sud de l'Arabie avec la catastrophe qui s'est produite dans la zone du pont de Jamarat. Dans ce cas précis, la modélisation mathématique et la simulation numérique ont été utilisées, depuis la catastrophe, avec succès pour étudier la dynamique du flux de pèlerins. Elles ont mis en évidence les circonstances critiques dans lesquelles les accidents de foule ont tendance à se produire. Elles ont permis par ailleurs de dégager des contre-mesures afin d'améliorer la sécurité de tels évènements.

Notre exposé sera axé sur les points suivants :

• En premier lieu, nous ferons un tour rapide de la littérature existante portant sur les principaux modèles mathématiques se rapportant aux piétons. Notre rapide tour d'horizon couvrira les modèles à la fois microscopique, macroscopique et cinétique, d'un point de vue objectif et d'un point de vue subjectif. (voir un aspect général dans [4]). Le point de vue objectif repose sur les lois de la physique : les individus qui constituent ensemble une foule sont considérés comme autant de particules obéissant aux lois de la physique (cf [3]). Voir à ce sujet les travaux de R. Henderson (cf. [1]) sur les mouvements de foule d'étudiants sur un campus et d'enfants sur un terrain de jeu. Il montre

*Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme, CNRS UMR 6139, Université de Caen BP 5186 14032 Caen Cedex France.

que ces mouvements de foule peuvent s'adapter à la distribution de Maxwell-Boltzmann, les deux vitesses des particules de gaz et les vitesses des étudiants suivant une distribution Gaussienne. Le point de vue subjectif considère les individus constituant une foule comme des agents doués d'autonomie, c'est à dire ayant la capacité de prendre des décisions et interagissant entre eux selon certaines règles. Helbing dans [2] propose ainsi un modèle dit modèle de forces sociales, consistant à décrire le mouvement des piétons grâce à un système d'équations différentielles portant sur leurs vitesses, sachant que chaque individu a une direction et une vitesse de déplacement préférées.

• En second lieu, nous proposerons une analyse critique de ces modèles.

• Enfin pour terminer, nous donnerons des résultats théoriques du point de vue du caractère bien posé de certains modèles pertinents présentés.

References

[1] L. F. Henderson, On the fluid mechanic of human crowd motion, Transp. Research, 8 (1975), pp. 509-515.

[2] D. Helbing, A mathematical model for the behaviour of pedestrians. Behavioural Science, 36, (1991) 298-310.

[3] R. L. Hughes, A continuum theory for the flow of pedestrians, Transp. Research B, 36 (2002), pp. 507-536.

[4] N. Bellomo et C. Dogbe, On the modeling of traffic and crowds. A survey of models, speculations and perspectives. SIAM Review, Vol. 53, No. 3, (2011) PP ; 409–463.

OPÉRATEURS DES ONDES À COEFFICIENTS ZYGMUND

ESTIMATIONS D'ÉNERGIE ET D'OBSERVABILITÉ

Francesco Fanelli

* BCAM - Basque Center for Applied Mathematics
Alameda de Mazarredo, 14 - 48009 Bilbao - Basque Country, Spain
ffanelli@bcamath.org

RÉSUMÉ. Dans cet exposé on s'intéresse à un opérateur strictement hyperbolique du deuxième ordre avec des coefficients dans la classe de Zygmund :

$$Lu = \partial_t^2 - \sum_{j,k=1}^{n} \partial_j \left(a_{jk}(t,x) \partial_k u \right)$$

Dans la première partie on considère le problème de Cauchy pour L.
On va montrer une estimation de l'énergie sans perte de dérivées dans l'espace $H^{1/2} \times H^{-1/2}$. Donc, on peut en déduire le caractère bien posé du problème de Cauchy correspondant.
Ce résultat semble assez restrictif, car il est valable seulement pour des données initiales dans $H^{1/2} \times H^{-1/2}$. De l'autre côté, il va au délà de l'hypothèse de continuité Lipschitz : si les a_{jk} ne sont pas lipschitziens en temps, en général on attend un perte de dérivées dans l'estimation d'énergie.
Dans la deuxième partie de l'exposé, on va se restreindre au cas $N = 1$ et quand les coefficients ne dépendent que de la variable d'espace, et on va s'intéresser au problème du contrôle pour L.
On va montrer une "estimation d'observabilité" sans perte de régularité quand les coefficients de L satisfont une condition de continuité Zygmund. En particulier, ce résultat représente une amélioration par rapport à l'hypothèse classique de régularité BV.
Enfin, on va parler d'autres conditions, plus faibles que celle Zygmund : dans ce cas, on peut prouver des estimations d'observabilité avec un perte de dérivées.

Modèles de ferromagnétisme et de ferroélectricité dans des structures minces

Antonio Gaudiello

DIEI
Università di Cassino e del Lazio Meridionale
via G. di Biasio 43
03043 Cassino (FR)
Italia
gaudiell@unina.it

RÉSUMÉ. On présente des résultats en ferromagnétisme obtenus en collaboration avec Rejeb Hadiji (Université Paris Est, Creteil, France) et des résultats en ferroélectricité obtenus en collaboration avec Kamel Hamdache (Ecole Polytechnique, Palaiseau, France).
Dans ces travaux en partant de modèles variationnels 3D, non-convexes et non-locaux, on obtient, par un processus asymptotique, des modèles variationnels dans des structures minces, numériquement plus simples à traiter.

Transfert de chaleur dans un écoulement de fluide magnétique : solutions faibles globales

Youcef Amirat[*] — Kamel Hamdache[**]

[*] Laboratoire de Mathématiques, CNRS UMR 6620, Université Blaise Pascal (Clermont Ferrand 2)
63177 Aubière Cedex, France
amirat@math.univ-bpclermont.fr
[**] CMAP- Ecole Polytechnique, CNRS UMR 7641. Route de Saclay 91128 Palaiseau Cedex, France
kamel.hamdache@polytechnique.edu

ABSTRACT. In this work, we prove the global existence of weak solutions of a model of heat transfer in a magnetic fluid flow in a open and bouded domain of $\mathbb{R}^3$. The constitutive equations are the incompressible Navier-Stokes equations satisfied by the velocity U coupled with the heat transfer equation satisfied by the temperature θ and the magnetostatic equations satisfied by the magnetic field H. The coupling terms are the Kevin force $\mu(M \cdot \nabla)H$, the thermal power $\mu_0 \theta \frac{\partial M}{\partial \theta}(U \cdot \nabla)H$ where the magnetization M is given by the law $M = r(\theta)\frac{H}{|H|}$ and the viscous dissipation $\Phi(U) = \nabla U : (\nabla U + \nabla U^T)$.

RÉSUMÉ. Dans ce travail nous étudions le transfert de chaleur dans un fluide magnétique. Le modèle est décrit par la vitesse U du fluide incompressible vérifiant l'équation de Navier-Stokes, H le champ magnétique satisfaisant aux équations de la magnetostatique et θ la température modélisant le transfert de chaleur dans le fluide. Le couplage entre les équations est fait au travers de la force de Kelvin, de la puissance thermique et de la dissipation visqueuse. Nous établissons l'existence globale de solutions faibles d'énergie finie.

KEYWORDS : Navier-Stokes equations, Maxwell equations, heat transfert equations

MOTS-CLÉS : Fluides incompressible, Fluides magnétiques, Transfert de chaleur

1. Introduction

Le transfert de chaleur dans un fluide incompressible occupant un cylindre D et soumis à un champ magnétique est décrit dans $D_T = (0,T) \times D$ par le système déquations suivant. Les variables d'état sont U la vitesse du fluide, H le champ magnétique et θ la température dans le fluide.

$$\begin{cases} \text{div} U = 0 \\ \partial_t U + (U \cdot \nabla)U - \mu \Delta U + \nabla p = \mu_0 (M \cdot \nabla) H \\ \partial_t \theta + U \cdot \nabla \theta - \kappa \Delta \theta + \mu_0 \theta \frac{\partial M}{\partial \theta} .(U \cdot \nabla) H = \mu \Phi(U) \\ H = \nabla \varphi, \ \text{div}(\nabla \varphi + M) = F \end{cases} \tag{1}$$

soumis aux conditions initiales et aux limites

$$\begin{cases} U = 0, \ (\nabla \varphi + M) \cdot \mathbf{n} = 0 \ \kappa \nabla \theta \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_T \\ U(0) = U_0, \ \theta(0) = \theta_0 \geq 0 \text{ dans } D \end{cases} \tag{2}$$

où la dissipiation visqueuse

$$\Phi(U) = \nabla U : (\nabla U + \nabla U^T) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\partial_i U_j + \partial_j U_i)^2 \tag{3}$$

le champ M est l'aimantation dans le fluide est donné par la loi d'aimantation

$$M = r(\theta) \frac{H}{|H|}, \ r(\theta) = M_1 \Big(\frac{\theta_c - \theta}{\theta_1} \Big)^\beta, \ 0 \leq \theta \leq \theta_c \text{ et } r(\theta) = 0 \text{ sinon} \tag{4}$$

où $\beta, M_1, \theta_1, \theta_c$ sont des constantes positives avec $\beta \geq 2$. La force F represente le champ magnétique appliqué et vérifiant l'hypothèse de compatibilité $\int_D F(t)\, dxdz = 0$.
La force de Kelvin $\mu(M \cdot \nabla)H = \mu \chi(\theta) \nabla |H|$ s'écrit alors

$$\mathcal{K} := \mu_0 (M \cdot \nabla) H = \mu_0 \nabla (r(\theta)|H|) - \mu_0 r'(\theta) |H| \nabla \theta \tag{5}$$

on notera que $r(\theta)|H|$ est la pression magnétique qui peut être ajoutée à la pression statique p.

2. Energie et estimations à priori

On introduit l'entropie de chaleur $\alpha(\theta)$ définie par

$$\alpha(\theta) = \frac{1}{\beta} \Big(\theta - \theta_c \ln \Big(\frac{\theta}{\theta_c} \Big) \Big), \ \text{pour } \theta > 0 \tag{6}$$

qui vérifie les propriétés

$$
\begin{aligned}
\alpha(\theta) &\geq \frac{\theta_c}{\beta} \\
\alpha'(\theta) \leq 0 \text{ si } 0 < \theta \leq \theta_c,\ &\alpha'(\theta) \geq 0 \text{ si } \theta \geq \theta_c \\
\alpha''(\theta) &= \frac{\theta_c}{\beta}\ \frac{1}{\theta^2} \text{ pour } \theta > 0
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Le système satisfait à l'inégalité d'energie

$$
\mathcal{E}(t) + \int_0^t \mathcal{F}(s)\, ds \leq \mathcal{E}_0 \tag{8}
$$

où l'énergie $\mathcal{E}(t)$ et la dissipation d'énergie $\mathcal{F}(t)$ sont données par

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(t) &= \textstyle\int_D \alpha(\theta(t))\, dx + \frac{1}{2}\int_D |U(t)|^2\, dx \\
\mathcal{F}(t) &= \textstyle\frac{\mu}{\beta}(\beta-1)\int_D \|\nabla U(t)\|^2\, dx + \frac{\mu\theta_c}{\beta}\int_D \frac{\Phi(U(t))}{\theta(t)}\, dx + \frac{\mu\theta_c}{\beta}\int_D |\nabla \ln(\theta(t))|^2\, dx
\end{aligned}
\tag{9}
$$

on notera que $\int_D \Phi(U)\, dx = \int_D |\nabla U|^2\, dx$. L'équation de la magnétostatique s'écrit

$$
\begin{aligned}
\text{div}\left(\nabla\varphi + r(\theta)\tfrac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|}\right) &= F \in L^\infty(0,T;L^2(D)) \\
(\nabla\varphi + r(\theta)\tfrac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|}) \cdot \mathbf{n} &= 0 \\
\textstyle\int_D \varphi\, dx &= 0
\end{aligned}
\tag{10}
$$

on a pour le champ magnétique $H = \nabla\varphi$ l'estimation

$$
\|\nabla\varphi(t)\|^2 + \int_D r(\theta(t))|\nabla\varphi(t)|\, dx \leq C\|F(t)\|^2 \tag{11}
$$

et le potentiel φ satisfait, en utilisant l'inégalité de Poincaré, à

$$
\|\varphi(t)\| \leq C\|F(t)\| \tag{12}
$$

Dans la suite $\|\cdot\|$ désigne la norme de l'espace de Hilbert $L^2(D)$.

3. Le résultat principal

On établit le résultat suivant

Théorème 3.1 *On suppose $\theta_0 > 0$, $\theta_0,\ \ln\theta_0 \in L^1(D)$, $U_0 \in L^2(D)$ avec $\operatorname{div} U_0 = 0$ dans D, $U_0 \cdot \mathbf{n} = 0$ sur Γ $H \in L^\infty(0,T;L^q(D))$, $q \geq 5$ avec $\int_D F(t,x)\,dx = 0$ pour p.p t. Alors il existe une solution faible globale en temps et d'énergie finie. Si de plus $\theta_0 \in L^\sigma(D)$ pour $1 \leq \sigma < 5/4$ alors $\theta \in L^\sigma(0,T;L^{\sigma^\star}(D)) \cap L^\sigma(0,T;W^{1,\sigma}(D))$ où $\sigma^\star = 3\sigma/(3-\sigma)$ et θ vérifie au sens des distributions l'équation de transfert de chaleur relaxée*

$$\partial_t\theta) + U\cdot\nabla\theta - \kappa\Delta\theta + \mu_0\theta\frac{\partial M}{\partial\theta}\cdot(U\cdot\nabla)H \geq \mu\Phi(U) \tag{13}$$

La démonstration ce résultat repose sur la méthode d'approximation de Faedo-Galerkine pour l'équation de Navier-Stokes et des estimations précises pour les solutions de l'équation de la magnétostatique et l'équation de transfert de la chaleur.

Equation de la magnétostatique

On pose pour $\xi \in \mathbb{R}^3$, $A(t,x,\xi) = \xi + r(\theta(t,x))\frac{\xi}{|\xi|}$, $(t,x) \in D_T$ et on considère le problème

$$\begin{gathered} \operatorname{div}(A(t,x,\nabla\varphi)) = F \text{ dans } D_T \\ A(t,x,\nabla\varphi)\cdot\mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_T,\ \int_D \varphi\,dx = 0 \end{gathered} \tag{14}$$

L'operateur est monotone, hémicontinu et coercif. L'existence et l'unicité de la solution en découle et satisfait à l'estimation (11). Si $F \in L^\infty(0,T;L^q(D))$ pour $q \geq 2$ alors $\nabla\varphi \in L^\infty(0,T;L^q(D))$ et vérifie

$$\|\nabla\varphi\|_{L^\infty(0,T;L^q(D))} \leq C\big(1 + \|F\|_{L^\infty(0,T;L^q(D))}\big) \tag{15}$$

D'autre part on a le résultat de compacité : si (θ^n) est une suite de $L^\infty(0,T;L^1(D))$ telle que $\theta^n \geq 0$, $\theta^n \to \theta$ fortement dans $L^1(D_T)$ et p.p (t,x) alors la suite (H_n) avec $H_n = \nabla\varphi_n$ converge fortement dans $L^2(0,T;L^2(D))$ et la limite $H = \nabla\varphi$ est telle que φ est l'unique solution du problème associée à θ.

La force de Kelvin $M\cdot\nabla H$

On utilise l'écriture suivante de la force de Kelvin

$$(M\cdot\nabla)H = \operatorname{div}((H+M)\otimes H) - FH - \frac{1}{2}\nabla|H|^2 \tag{16}$$

et en utilisant l'estimation (15) et $\operatorname{div}(H+M) = F$ on montre l'estimation

$$\|(M\cdot\nabla)H\|_{L^\infty(0,T;H^{-1}(D))} \leq C\Big(1 + \|F\|_{L^\infty(0,T;L^q(D))}\Big) \tag{17}$$

pour tout $q \geq 4$.

La puissance thermique

La propriété importante satisfaite par la puissance themocalorique $\mathcal{P} := \mu_0 \theta \frac{\partial M}{\partial \theta} \cdot (U \cdot \nabla) H$ est la suivante

$$\theta \frac{\partial M}{\partial \theta} \cdot (U \cdot \nabla) H \alpha'(\theta) = \frac{1}{\beta} (\theta - \theta_c) \frac{\partial M}{\partial \theta} \cdot (U \cdot \nabla) H = M \cdot (U \cdot \nabla) H \qquad (18)$$

qui entraine la relation de compensation entre l'équation de Navier-Stokes et l'équation de la temperature

$$\mu_0 \int_D \mathcal{K} \cdot U \, dx - \mu_0 \int_D \theta \frac{\partial M}{\partial_\theta} (U \cdot \nabla) H \alpha'(\theta) \, dx = 0 \qquad (19)$$

L'équation de transfert de chaleur

Un point crucial dans la démonstration du théorème est l'établissement de la compacité d'un suite (θ^n). La régularité maximale du second membre $\Phi(U)$ de l'équation de transfert de la chaleur est $\Phi(U) \in L^1(0, T; L^1(D))$ et la puissance thermocalorique $\mathcal{P}$ est dans espace de Sobolev :'a exposant négatif du fait que l'on s'intéresse aux solutions faibles du système. On consière le problème

$$\begin{gathered} \partial_t \theta + U \cdot \nabla \theta - \kappa \Delta \theta = \mu \Phi(U) - \mu_0 \theta \tfrac{\partial M}{\partial \theta} .(U \cdot \nabla) H \\ \theta(0) = \theta_0 \;\; \kappa \nabla \theta \cdot \mathbf{n} = 0 \end{gathered} \qquad (20)$$

On montre alors le résultat suivant.
Soit $U \in L^\infty(0, T; L^2(D)) \cap L^2(0, T; H_0^1(D))$ tel que $\operatorname{div} U = 0$. Alors il esiste $C > 0$ tel que

$$\|\theta\|_{L^\sigma(0,T;L^{\sigma^\star}(D))} + \|\theta\|_{L^\sigma(0,T;W^{1,\sigma}(D))} \leq C \qquad (21)$$

pour tout $1 \leq \sigma < 5/4$ et ou $C > 0$ ne depend que de la norme de U et de cette de θ_0. En particulier si (U^n) est bornée dans $U \in L^\infty(0, T; L^2(D)) \cap L^2(0, T; H_0^1(D))$ alors (θ^n) est compact dans $L^\sigma(0, T; L^r(D))$ pour tout $1 \leq r < \sigma^\star$.

Remarques

Pour mettre en oeuvre la démonstration du théorème plusieurs régularisations du système sont nécessaires. La première est de considérer des données initiales telle que $\theta_0 \geq \theta_{min} > 0$ puis à utiliser la régualiration pour M définie par $M = r(\theta) = \frac{H \star \gamma_\omega}{\sqrt{\omega + |H \star \gamma_\omega|^2}}$ ou γ_ω est une suite régularisante en (t, x). La deuxième régularisation consiste à considérer l'entropie $\alpha(\theta + \delta_m)$, $\delta_m \to 0^+$ au lieu de $\alpha(\theta)$.
Les démonstrations précises sont dans [1]. L'article est disponible sur les pages web des auteurs.

Bibliographie

[1] Y. Amirat, K. Hamdache., Heat transfer in incompressible magnetic fluid. J. Math. Fluid Mech. 14, (2012), 217-247.

Topologycal sensitivity analysis method : Theory and Applications

Topologycal sensitivity analysis method

Maatoug Hassine

Department of Mathematics
University of Monastir
Faculty of Sciences
Tunisia
maatoug.hassine@enit.rnu.tn

ABSTRACT. In this talk, I will discuss the theoretical and numerical aspects of the topological sensitivity analysis method. The theoretical part will be illustrated by the Stokes system and will be discussed in both two and three dimensional cases. A topological asymptotic expansion is derived for the Stokes operator with respect to the presence of a small hole in the domain with Dirichlet and Naumann conditions on the geometric perturbation boundary. Such an expansion is obtained for a large class of cost functions and arbitrary shaped holes. In the numerical part, I will consider some engineering applications; control of a mechanical aeration process, optimal shape design for fluid flow in pipes, location of small cavities in Stokes flow, ...

KEYWORDS : sensitivity analysis, asymptotic formulas, topological optimization, shape optimization

MOTS-CLÉS : analyse de sensibilité, formules asymptotique, optimisation topologique, optimisation de forme,

1. Extended abstract

The topological sensitivity analysis method [1, 2, 3, 6, 7, 10, 10, 13, 14, 12] consists in studying the variation of a cost function with respect to a small topological perturbation of the domain. The most simple way of modifying the topology consists in creating a small hole in the domain. In the case of structural shape optimization, creating a hole means simply removing some material. In the case of fluid dynamics where the domain represents the fluid, creating a hole means inserting a small obstacle. The situation is similar in electromagnetism. Unlike the classical shape optimization, the topology of the domain may change during the optimization process. The objective is to find an optimal shape without any a priori assumption about its topology.

In order to present the basic idea, let us consider a domain $\Omega \subset \mathbb{R}^d,\ d = 2,3$ and a shape function $j(\Omega) = J(\Omega, u_\Omega)$ to be minimized, where u_Ω is the solution to a given PDE (partial differential equation) defined in Ω. For $\varepsilon > 0$, let $\Omega_\varepsilon = \Omega \backslash \overline{(x_0 + \varepsilon\omega)}$ be the perturbed domain obtained by removing a small part $\omega_\varepsilon = x_0 + \varepsilon\omega$ from Ω, where $x_0 \in \Omega$ and $\omega \subset \mathbb{R}^d$ is a fixed bounded domain containing the origin, whose boundary $\partial\omega$ is connected and piecewise of class $\mathcal{C}^1$. The topological sensitivity analysis method leads to an asymptotic expansion of the function j in the following form :

$$j(\Omega_\varepsilon) = j(\Omega) + f(\varepsilon)g(x_0) + o(f(\varepsilon)),$$

where $f(\varepsilon)$ is a scalar positive function going to zero with ε. This expression is called the topological asymptotic expansion and g is called the topological gradient. The function g is very easy to compute. In order to minimize the cost function, the best location to insert a small obstacle in Ω is where g is negative. In fact if $g(x_0) < 0$, we have $j(\Omega_\varepsilon) < j(\Omega)$ for small ε.

Starting with this observation, topological optimization algorithm can then be constructed. The optimal design is obtained using an iterative process building a sequence of geometries $(\Omega_k)_k$ with $\Omega_0 = \Omega$. At the k^{th} iteration the topological gradient g_k is computed in Ω_k and the new geometry Ω_{k+1} is obtained by inserting a geometric perturbation ω_k in the domain Ω_k ; $\Omega_{k+1} = \Omega_k \backslash \overline{\omega_k}$. The new perturbation ω_k is defined by a level set curve of g_k

$$\omega_k = \{x \in \Omega_k,\ \text{such that}\ g_k(x) \leq c_k < 0\},$$

where c_k is chosen in such a way that the shape function j decreases as most as possible.

This algorithm can be seen as a descent method where the descent direction is determined by the topological sensitivity g_k and the step length is given by the volume variation $meas(\Omega_k \backslash \Omega_{k+1})$.

The topological sensitivity analysis was introduced by Schumacher [13], Sokolowski and Zochowski [12] for the minimization of the compliance in linear elasticity with Neumann condition on the boundary of the inserted hole. A topological sensitivity framework using an adaptation of the adjoint method [8, 14] and a truncation technique was introduced by Masmoudi [14]. It was generalized in [9] to the elasticity equations in the case of arbitrary shaped holes. Recently, the topological asymptotic expansion was obtained for various problems[1, 2, 3, 4, 6, 7, 10, 9, 10].

In this talk, I will discuss the theoretical and numerical aspects of the topological sensitivity analysis method. The theoretical part will be illustrated by the Stokes system and will be discussed in both two and three dimensional cases. A topological asymptotic expansion is derived for the Stokes operator with respect to the presence of a small hole in the domain Ω with Dirichlet and Naumann conditions on the geometric perturbation boundary. Such an expansion is obtained for a large class of cost functions and arbitrary shaped holes.

In the numerical part, I will consider some engineering applications ; control of a mechanical aeration process, optimal shape design for fluid flow in pipes, location of small cavities in Stokes flow, ...

Bibliographie

[1] M. ABDELWAHED, M.HASSINE, M. MASMOUDI« Optimal shape design for fluid flow using topological perturbation technique », *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, n° 356, 2009, 548-563.

[2] G. ALLAIRE, F. JOUVE, A-M. TOADER « Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method », *J. Comput. Phys.*, n° 194 (1), 2004, 363-393.

[3] ALVES C., AMMARI H., « Boundary integral formulae for the reconstruction of imperfections of small diameter in an elastic medium », *SIAM, J. Appl. Math.*, n° 62, 94-106, 2001.

[4] AMMARI H., KANG H., « Reconstruction of small inhomogeneities from boundary measurements », *Lecture Notes in Mathematics*, n° 1846, Springer, 2004

[5] AMSTUTZ S., HORCHANI I., MASMOUDI M. « Crack detection by the topological gradient method », *Control and Cybernetics*, n° 34 (1), 2005, 81-101.

[6] BEN ABDA A., HASSINE M., JAOUA M., MASMOUDI M., « Topological sensitivity analysis for the location of small cavities in Stokes flow », *SIAM J. Contr. Optim.*, n° 48 (5), 2871–2900, 2009.

[7] M. BENDSOE « Optimal topology design of continuum structure : an introduction », *Technical report, Departement of mathematics, Technical University of Denmark, DK2800 Lyngby, Denmark*, 1996.

[8] J. CÉA, S. GARREAU, PH. GUILLAUME, M. MASMOUDI « The Shape and Topological Optimizations Connection », *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, n° 188 (4), 2000, 713-726.

[9] S. GARREAU, PH. GUILLAUME, M. MASMOUDI « The topological asymptotic for pde systems : the elasticity case », *SIAM J. Control Optim.*, n$^{\rm o}$ 39 (4), 2001, 1756-1778.

[10] PH. GUILLAUME, K.SID IDRIS « Topological sensitivity and shape optimization for the Stokes equations », *SIAM J. Control Optim.*, n$^{\rm o}$ 43(1), 2004, 1-31.

[11] GUZINA B.B., BONNET M. « Small-inclusion asymptotic of misfit functionals for inverse problems in acoustics », *Inverse Problems*, n$^{\rm o}$ 22, 2006, 1761-1785.

[12] M. HASSINE, S. JAN, M. MASMOUDI, « From differential calculus to $0-1$ topological optimization », *SIAM J. Cont. Optim.*, n$^{\rm o}$ 45 (6), 1965-1987, 2007.

[13] M. HASSINE, M. MASMOUDI « The topological sensitivity analysis for the Quasi-Stokes problem », *ESAIM, COCV J.*, vol. 10, 2004, 478-504.

[14] MASMOUDI M., « The topological asymptotic », Computational Methods for Control Applications*(R.Glowinski H.Kawarada and J.Periaux, Eds), GAKUTO Inte. Ser. Math. Sci. Appl.*, n$^{\rm o}$ 16, 52-73, 2002.

[15] J. SOKOLOWSKI, A. ZOCHOWSKI, « On the topological derivative in shape optimization », *SIAM J. Control Optim.*, n$^{\rm o}$ 37 (4), 1251-1272, 1999.

[16] A. SCHUMACHER « Topologieoptimierung von bauteilstrukturen unter verwendung von lopchpositionierungkrieterien », *thesis, Universitat-Gesamthochschule-Siegen*, 1995.

Etude unifiée d'une classe de problèmes elliptiques régis par des équations différentielles opérationnelles

Rabah Labbas

Laboratoire de Mathématiques Appliquées de l.Université du Havre,
U.F.R. Sciences et Techniques, B.P. 540, 76058 Le Havre Cedex, France
rabah.labbas@univ-lehavre.fr

RÉSUMÉ. Mon exposé portera sur le traitement unifié (existence, unicité et régularité optimale) d'une classe de problèmes elliptiques linéaires d'ordre 2 et 4 (provenant d'exemples concrets liés au laplacien ou au bilaplacien) posés dans des domaines cylindriques. Je m'attarderai plus particulièrement sur des modèles liés aux problèmes de transmission qui ont ont fait l'objet d'études assez variées ces dernières années par plusieurs doctorants travaillant avec moi en co–encadrement avec les professeurs K. Lemrabet (USTHB) et A. Medeghri (Université de Mostaganem).
On écrira ces problèmes à l'aide d'équations différentielles opérationnelles qui permettent d'avoir des représentations explicites des solutions grâce au calcul fonctionnel de Dunford (entre autres) et on se basera sur la théorie des semigroupes analytiques et l'interpolation, pour étudier toutes les propriétés de ces représentations.
Les techniques utilisées diffèrent des méthodes variationnelles utilisées en général puisqu.elles permettent de travailler dans divers espaces anisotropiques à valeurs vectorielles tels que $L^p(X)$ ou $C^\alpha(X)$, X étant un espace de Banach quelconque.

Quelques travaux publiés sur le sujet :

Bibliographie

[1] A. Favini, R. Labbas, K. Lemrabet, S. Maingot (2005) : Study of the limit transmission probelms in a thin layer by the sum theory of linear operators, Revista Matematica Complutense 18 (2005), 143.176.

[2] A. Favini, R. Labbas, K. Lemrabet and B-K Sadallah (2008). Study of Complete Abstract Differential Equations of Elliptic Type with Variable Coefficients (Part I), Revista Matematica Complutense, 21 (2008), no 1, 89–133.

[3] O. Belhamiti, R. Labbas, K. Lemrabet and A. Medeghri (2009). Transmission Problems in a thin Layer set in the framework of the Hölder Spaces,Resolution and Impedance. J. Math. Anal. Appl. 358 (2009) 457–484.

[4] A. Favini, R. Labbas, K. Lemrabet, S. Maingot and H. Sidibé (2010). Transmission Problem for an Abstract Fourth-order Differential Equation of Elliptic Type In UMD Spaces, Advances in Differential Equations, Volume 15, Number 1–2, (2010), 43–72

[5] F. Bouziani, A. Favini, R. Labbas and A. Medeghri (2011). Study of Boundary Value and Transmission Problems Governed by a Class of VariableOperator Verifying The Labbas-Terreni Non Commutativity Assumption, Revista Matematica Complutense, Issue 1 (2011), p. 131–168.

[6] G. Dore, A. Favini, R. Labbas and K. Lemrabet (2011). An Abstract Transmission problem in a Thin Layer, I : Sharp Estimates, Journal of Functional Analysis 261, (2011), 1865–1922.

[7] A. Favini, R. Labbas, S. Maingot & M. Meisner (2012). Study of complete abstract elliptic differential equations in non-commutative cases, Applicable Analysis, Volume 91, Issue 8, 2012, (Special Issue : PDE's, Semigroup Theory, Inverse and Control Problems) p. 1495–1510.

[8] A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, K. Lemrabet, H. Sidibe (2012). Resolution and Optimal Regularity for a Biharmonic Equation with Impedance Boundary Conditions and Some Generalizations, accepté à DCDS (volume in honor of Jerry's 70th birthday).

[9] A. Favini, R. Labbas, S. Maingot and M.Meisner. Boundary Value Problem for Elliptic Differential Equations in Noncommutative Cases, accepté à DCDS (volume in honor of Jerry's 70th birthday).

Ondes internes et interfaces bifluides : un critère de stabilité

David Lannes

DMA,
Ecole Normale Supérieure,
45, rue d'Ulm, 75005 Paris.
David.Lannes@ens.fr

RÉSUMÉ. Les équations des vagues (Euler à surface libre) sont un cas particulier d'équations d'interface entre deux fluides (dans le cas où l'un des deux fluides est supposé de densité nulle). Dans le cas général où les deux fluides sont de densité non nulle, un phénomène nouveau apparaît : les instabilités de Kelvin-Helmholtz. Il est alors nécessaire de prendre en compte la tension de surface pour obtenir des équations bien posées. Pourtant, l'évolution de l'interface est parfaitement décrite par des modèles asymptotiques où la tension de surface est négligée. Pour comprendre ce paradoxe, nous montrerons un critère de stabilité qui généralise au cas de deux fluides le critère de Rayleigh-Taylor bien connu dans le cas des vagues.

Carleman Estimates and null controllability of coupled degenerate systems :

Lahcen Maniar

Cadi Ayyad University,
Faculty of Sciences Semlalia,
Laboratory of Mathematics and
Population Dynamics-Marrakesh
maniar@uca.ma

ABSTRACT. In this talk, I will present some recent results on the null controllability of degenerate parabolic systems with one force. We start with the cascade systems, and finish by the case of general non cascade systems. To obtain our aim, we develop some new global Carleman estimates for degenerate parabolic equations, with new weight functions, generalizing the ones of the previous results of Alabau-Boussouira, Cannarsa, Martinez and Vancostenoble.

Perforated and multiperforated plates in linear acoustic

Sebastien Tordeux

Université de Pau et des Pays de l'Adour
Avenue de l'Université
BP 1155
64013 PAU CEDEX
FRANCE
sebastien.tordeux@gmail.com

ABSTRACT. In a lot of physical problems, the boundary of the computational domain is perforated. This configuration can lead to numerical difficulties when the diameter of the holes are really smaller than the other characteristic lengths. Indeed, it can be very costly to compute a sharp numerical approximation of the solution of such problems for two main reasons: With a standard method like finite elements or finite differences, a refined mesh cannot be avoided in the neighborhood of the hole; the mesh generation of a perforated structure can be a hard task.
Many authors have studied the effect of perforations both from the theoretical and the numerical point of views, see for example [1-4]. In this talk we would like to present some new numerical methods which allows to avoid mesh refinement in the neighborhood of the holes.

Bibliographie

[1] R. R. Gadyl'shin, « Surface potentials and the method of matching asymptotic expansions in the Helmholtz resonator problem », *(Russian) Algebra i Analiz 4*, (1992), **no. 2**, 88–115, *translation in St. Petersburg Math. J. 4* (1993), **no. 2**, 273–296.

[2] J. Sanchez-Hubert and E. Snchez-Palencia, « Acoustic fluid flow through holes and permeabil- ity of perforated walls », *J. Math. Anal. Appl.*, **87** (1982), pp. 427–453.

[3] A. Taflov, K. Umashanker, B. Becker, F. Harfoush, and K. S. Yee, « Detailed fdtd analysis of electromagnetic fields penetrating narrow slots and lapped joints in think conducting screens », *IEEE Trans Antenna and Propagation*, **36** (1988), pp. 247–257.

[4] E. O. Tuck, « Matching problems involving flow through small holes », *in Advances in applied mechanics*, **Vol. 15**, *Academic Press*, *New York*, (1975), pp. 89–158.

Deuxième partie

Communications orales

Inversion of Robin parameter in a nonlinear Stokes model

Elyes AHMED* — Amel Ben ABDA* — Faten Khayat*

* LAMSIN
Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis
B .P 37, 1002 Tunis le Belvédère,
Tunisie
ahmed_elyes@yahoo.com
amel.benabda@enit.rnu.tn
Faten.Khayat@ept.rnu.tn

ABSTRACT. We propose a Conjugated Gradient-Based method for the solution of inverse problems governed by Generalized newtonian Stokes . The method is applied to the numerical recovery of the Robin cœfficient in general case. The inverse problem is formulated as a constrained optimization problem whose cost functional is the misfit between velocity measurements and model predictions. An optimality system is derived from which a solution of the problem is obtained. we give different numerical results.

RÉSUMÉ. Nous proposons la méthode du gradient conjugué pour la solution des problèmes inverses régies par la loi de Stokes dans le cas des fluides newtoniens généralisés. Le procédé est appliqué à la récupération numérique du cœfficient de Robin. Le problème inverse est formulé en tant que problème d'optimisation sous contraintes dont la fonction coût est l'écart entre la vitesse mesurée et la prédiction du modèle. Un système d'optimalité est déterminé à partir duquel une solution du problème est obtenue. Différents résultats numériques sont données.

KEYWORDS : Inverse problems, Robin cœfficient, least square, nonlinear Stokes, slip boundary condition.

MOTS-CLÉS : problèmes inverses, Cœfficient de Robin, Stokes non linèaire, condition de glissement.

1. Introduction

We consider the following boundary problem:

$$\left\{\begin{array}{rl} -\nabla\cdot(\nu(\mathbb{D}(u))\mathbb{D}(u))+\nabla p=f, & \text{in} \quad \Omega, \\ \nabla\cdot u=0, & \text{in} \quad \Omega, \\ u=\bar{u}, & \text{on} \quad \Gamma_e, \\ \sigma(u,p)\cdot n+\boldsymbol{\beta} u=0, & \text{on} \quad \Gamma_0, \end{array}\right. \tag{1}$$

where the fluid velocity is denoted by u, p is the pressure, $\mathbb{D}(u) = 1/2(\nabla u + \nabla u^T)$ denotes the strain-rate tensor, and with $\sigma(u,p)$ being the stress tensor fulfilling the following constitutive law: $\sigma(u,p) = -pI + \nu(\mathbb{D}(u))\mathbb{D}(u)\cdot n$. We denotes $\boldsymbol{\beta}$ the Robin parameter, which has to be determined, I the unit tensor, and n is the unit outward normal vector. Let us notice that the fluid viscosity, assumed to be a nonlinear function, depends on $|\mathbb{D}(u)| = \sqrt{\mathbb{D}(u)\colon \mathbb{D}(u)}$.

The above kind of equations arises in modeling flows of many important engineering and biological processes, such as blood flow in the cardiovascular system or airflow in the lungs (see [3]). The objective of the present paper is to estimate the Robin cœfficient on some inaccessible part of the boundary from known cauchy data on the accessible boundary part corresponding to the velocity measurement and normal stress vector. Similar problems can be found in many references. In [7], Robin parameter viewed as a corrosion cœfficient, is inversed for the Laplace equation.

A description of the notation used in this paper, the mathematical problem and the mixed variational formulation is given in section 2, moreover we give results that establish the solvability of the continuous problem. In section 3 we formulate an inverse Robin problem using a parametric optimization formulation, an optimality system is then derived. We consider finite element approximation of the optimality system and a computational algorithm in Section 4.

2. Direct model

Let Ω be an open Lipschitz bounded connected set domain of $\mathbb{R}^d$, with a smooth boundary $\Gamma = \partial\Omega$ composed of two parts Γ_e and Γ_0 such that $\Gamma_e \cup \Gamma_0 = \Gamma$ and $\Gamma_e \cap \Gamma_0 = \emptyset$. The nonlinear Stokes model is the following:

$$-\nu(\mathbb{D}(u))\nabla\cdot\mathbb{D}(u)+\nabla p=0, \quad \text{in} \quad \Omega, \qquad [2]$$

$$\nabla\cdot u=0, \quad \text{in} \quad \Omega, \qquad [3]$$

$$\sigma(u,p)\cdot n=g, \quad \text{on } \Gamma_e, \qquad [4]$$

$$\sigma(u,p)\cdot n+\boldsymbol{\beta} u=0, \quad \text{on } \Gamma_0, \qquad [5]$$

where we consider the cross model [5], used to model a large range of shear and strain rates.

$$\nu(\mathbb{D}(u)) = (\nu_\infty + \frac{\nu_0 - \nu_\infty}{1 + (k|\mathbb{D}(u)|)^{2-r}}) \qquad [6]$$

with viscosity parameters ν_0; ν_∞ and parameter k satisfying $\nu_0 > \nu_\infty$ and $k > 0$ and $1 \leq r \leq 2$. Let $X = H^{1,r}(\Omega)$ and $V := \{v \in X \mid \nabla \cdot v = 0 \,\text{on}\, \Omega\}$.

Proposition 2.1 *For $\boldsymbol{\beta} > \alpha > 0$, $\boldsymbol{\beta} \in L^\infty(\Gamma_0)$ and a stress tensor $g \in H^{-1/r,r}(\Gamma_e)$, the problem (**??**-2) admits a unique solution $(u,p) \in V \times L^{r'}(\Omega)$. Moreover, there exists a constant $C(\boldsymbol{\beta}) > 0$ such that*

$$||u||_{H^{1,r}(\Omega)^d} \leq C(||g||_{H^{-1/r,r}(\Gamma_e)^d}) \qquad (7)$$

3. Inverse problem

We are concerned in this section with the solution of inverse problems governed by the nonlinear Stokes (**??**-2), the problem we study is to recover the unknown cœfficient β on the inaccessible part of the boundary Γ_0 from cauchy data $(\bar{u}, g)$ on the accessible boundary part Γ_e.

We assume that $\boldsymbol{\beta}$ belongs to the fractional Sobolev-type space $H^{s,r}(\Gamma_0)$, where s is large enough so that $\boldsymbol{\beta} u \in H^{1-1/r,r}(\Gamma_0)$, therefore $\boldsymbol{\beta}$ belongs to the restricted set of admissible parameters Φ_{ad} defined by:

$$\Phi_{ad} = \{\boldsymbol{\beta} \in H^{s,r}(\Gamma_0), \text{ such that } ||\boldsymbol{\beta}||_{s,r} \leq M, \text{ and } \boldsymbol{\beta} \geq \alpha\}, \qquad (8)$$

Then an inverse problem is introduced using parametric optimization formulation as follows: given measured velocity $\bar{u}$ on the surface Γ_e, we aim to compute the unknown cœfficient $\boldsymbol{\beta}$ defined on the remaining part Γ_0. We use the following cost function or objective function that measures the misfit between the model output and the measured velocity:

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_e} |u(\boldsymbol{\beta}) - \overline{u}|^2 ds + \frac{\delta_{\boldsymbol{\beta}}}{2}\int_{\Gamma_0} |\nabla \boldsymbol{\beta}|^2 ds, \qquad [9]$$

where u depends on $\boldsymbol{\beta}$ through the solution of nonlinear Stokes problem (**??**-2) and the second term, we denotes $\mathbb{R}(\boldsymbol{\beta})$, is a regularization term.

3.1. Differentiability

To find the minimum of the objective function, we use Lagrange multiplier's rule. We define the Lagrangian functional $\mathcal{L} : \Psi \times \Psi \times \phi_{ad} \to \mathbb{R}$, to derive the adjoint equations and gradient: For (u, p, β) define :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u, p; \boldsymbol{\beta}; w, q) &= \mathcal{J}(\boldsymbol{\beta}) + \int_\Omega w \cdot (-\nu(\mathbb{D}(u)\nabla \cdot \mathbb{D}(u) + \nabla p)dx \\ &\quad + \int_\Omega q \nabla \cdot u dx, \end{aligned} \tag{10}$$

Next, we derive the Lagrangian with respect to (u, p) in all directions (w, q), here these variations are needed for solution of the optimality system.

$$\begin{cases} < \partial\mathcal{L}_u, v > &= (\nu(\mathbb{D}(u))\mathbb{D}(w), \mathbb{D}(v)) \\ &\quad +(\dfrac{(r-2)(\nu_0 - \nu_\infty)k}{(1 + k|\mathbb{D}(u)|^{r-2})^2 |\mathbb{D}(u)|^r})(\nu(\mathbb{D}(u))(\mathbb{D}(u), \mathbb{D}(w)), \mathbb{D}(v)) \\ &\quad -(q, \nabla \cdot v) + (\boldsymbol{\beta} w, v)_{\Gamma_0} - \displaystyle\int_{\Gamma_e} (u - \overline{u}) v ds, \\ < \partial\mathcal{L}_p, \xi > &= (\xi, \nabla \cdot w). \end{cases} \qquad [11]$$

Also it follows directly that the gâteaux derivative,i.e. which characterizes the perturbation of $u(\boldsymbol{\beta})$ caused by a small perturbation of the cœfficient in the direction λ satisfies

$$< \partial\mathcal{L}_{\boldsymbol{\beta}}, \lambda >= \delta_{\boldsymbol{\beta}} \int_{\Gamma_0} \nabla\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla\lambda ds + \int_{\Gamma_0} \lambda u w ds = 0 \qquad [12]$$

Note that this condition expressing a relation between the parameter $\boldsymbol{\beta}$, the direct velocity u and it's adjoint w, forming a differential equation to be solved for $\boldsymbol{\beta}$ on Γ_0.
To simplify notation we define the adjoint linear form $\bar{H}$ on $X \times X$ such as:

$$\begin{aligned} (\bar{H}(u)w, v) = (&\frac{(r-2)(\nu_0 - \nu_\infty)k}{(1 + k|\mathbb{D}(u)|^{r-2})^2 |\mathbb{D}(u)|^r})(\nu(\mathbb{D}(u))(\mathbb{D}(u), \mathbb{D}(w)), \mathbb{D}(v)) \\ &+(\nu(\mathbb{D}(u))\mathbb{D}(w), \mathbb{D}(v)). \end{aligned} \qquad [13]$$

3.2. Optimality system:

By exploiting the state governing equations (**??**-2), the optimality condition (12), the adjoint system (11) and the linear operator (13), we form an optimality system:

$$\begin{cases} (P)\begin{cases} (\nu(\mathbb{D}(u))\mathbb{D}(u),\mathbb{D}(v)) - (p,\nabla\cdot v) + (\boldsymbol{\beta} u, v)_{\Gamma_0} - (g,v)_{\Gamma_e} = 0, \\ (q,\nabla\cdot u) = 0, \end{cases} \\ \\ (A)\begin{cases} (\bar{H}(u)w,v) + (\boldsymbol{\beta} w,v)_{\Gamma_0} - (q,\nabla\cdot v) - \displaystyle\int_{\Gamma_e}(u-\overline{u})v ds = 0, \\ (\xi,\nabla\cdot w) = 0. \end{cases} \\ (C_{\boldsymbol{\beta}})\begin{cases} \displaystyle\int_{\Gamma_0}\nabla\boldsymbol{\beta}\cdot\nabla\lambda ds = -\frac{1}{\delta_{\boldsymbol{\beta}}}\int_{\Gamma_0}\lambda u w ds \end{cases} \end{cases} \quad [14]$$

The solvability of the adjoint problem (A) can be also obtained based on the strong monotonicity as shown in [5].

3.3. Extension to Stokes case under slip boundary conditions of friction type

One convenient way to characterize the flow on an impenetrable part of the boundary is by introducing a slip with friction and no penetration boundary conditions:

$$u\cdot n = 0 \quad \text{on } \Gamma_0, \quad [15]$$

$$(\sigma(u,p)\cdot n)t + \boldsymbol{\beta} u\cdot\tau = 0 \quad \text{on } \Gamma_0. \quad [16]$$

Next, we consider the problem (**??**-**??**) with boundary conditions (**??**-15) on Γ_0. Using the trace inequality $||v||_{L^{r'}(\Gamma_0)} \leq ||v||_{H^{1-1/r',r'}(\Gamma_0)} \leq ||v||_{H^{1,r'}(\Omega)}$, we have $u\cdot\tau \in L^{r'}(\Gamma_0)$. Then using definition of Φ_{ad}, $\boldsymbol{\beta} u\cdot\tau \in L^{r'}(\Gamma_0)$. Thus, the mixed formulation of problem consists of finding $(u,p) \in \tilde{X}\times\mathcal{Q}$, ($\mathcal{Q} = L^{r'}(\Omega)$), such that

$$(\nu(\mathbb{D}(u))\mathbb{D}(u),\mathbb{D}(v)) - (p,\nabla\cdot v) + (\boldsymbol{\beta} u\cdot\tau, v\cdot\tau)_{\Gamma_0} = (g,v)_{\Gamma_e} \quad \forall v\in X \quad [17]$$

$$(q,\nabla\cdot u) = 0 \quad \forall q\in\mathcal{Q} \quad [18]$$

is meaningful, where $\tilde{X} = \{v\in X,\ v\cdot n = 0 \text{ on } \Gamma_0\}$.
We are interested in computing the friction cœfficient for Stokes equation, this physical consideration drives us to the following choice of regularization term:

$$\mathbb{R}(\boldsymbol{\beta}) = \frac{\delta_{\boldsymbol{\beta}}}{2}\int_{\Gamma_0}|\nabla\boldsymbol{\beta}\cdot\tau|^2 ds, \quad [19]$$

With this choice, only the variation of the parameter $\boldsymbol{\beta}$ along the tangential direction is minimized.

Repeating the analysis with this boundary condition leads to the following optimality system:

$$\left\{\begin{array}{l}(P)\left\{\begin{array}{l}(\nu(\mathbb{D}(u))\mathbb{D}(u),\mathbb{D}(v))-(p,\nabla\cdot v)+(\boldsymbol{\beta}u\cdot\tau,v\cdot\tau)_{\Gamma_0}-(g,v)_{\Gamma_e}=0,\\(q,\nabla\cdot u)=0,\end{array}\right.\\ \\(A)\left\{\begin{array}{l}(\bar{H}(u)w,v)+(\boldsymbol{\beta}w\cdot\tau,v\cdot\tau)_{\Gamma_0}-(q,\nabla\cdot v)-\displaystyle\int_{\Gamma_e}(u-\overline{u})vds=0,\\(\xi,\nabla\cdot w)=0.\end{array}\right.\\(C_{\boldsymbol{\beta}})\left\{\displaystyle\int_{\Gamma_0}\nabla_\tau\boldsymbol{\beta}\cdot\nabla_\tau\lambda ds\quad=\quad-\frac{1}{\delta_{\boldsymbol{\beta}}}\int_{\Gamma_0}\lambda\,u\cdot\tau w\cdot\tau ds\right.\end{array}\right. \tag{20}$$

References

[1] G. Jouvet, J. rappaz., « Analysis and Finite Element Approximation of a Nonlinear Stationary Stokes Problem Arising in Glaciology., Advances in Numerical Analysis « Volume 2011 (2011), Article ID 164581, 24 pages doi:10.1155/2011/164581.

[2] H. Lee., « Optimal control for quasi-Newtonian flows with defective boundary conditions « Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering Volume 200, Issues 33 to 36, 1 August 2011, Pages 2498 to 2506.

[3] M. Boulakia, A. C. Egloffe, C. Grandmon., « Stability estimates for the unique continuation property of the Stokes system., Application to an inverse problem « hal-00582559, version 3 - 4 Dec 2012

[4] D. Bothe, J. Prüss., « L_p-Theory for a Class of Non-Newtonian Fluids« , SIAM J. Math. Anal., 39(2), 379-421.

[5] S. S. Chow and G.F. Carey., « Numerical approximation of generalized Newtonian fluids using Powell-Sabin-Heindl elements: I. Theoretical estimates « Int. J. Numer. Meth. Fluids, 41:1085-1118, 2003.

[6] V.John., « Slip with friction and penetration with resistance boundary conditions for the Navier-Stokes equations-numerical tests and aspects of the implementation « Journal of Computational and Applied Mathematics 147 (2002) 287 - 300

[7] M. Jaoua, S. Chaabane, C. Elhechmi, J. Leblond, M. Mahjoub, J. R. Partington « On some robust algorithms for the Robin inverse problems « Revue Arima - Volume 9 - 2008, Pages 287 à 307

On solving equilibrium problems

Boualem ALLECHE

Laboratoire de Mécanique, Physique et Modélisation Mathématique.
Université de Médéa. Ain Dheb. 26000 Médéa.
Algérie
alleche.boualem@univ-medea.dz, alleche.boualem@gmail.com

ABSTRACT. In this paper, we study solving equilibrium problems with local conditions on equilibrium bifunctions. Although several results exist under various concepts of generalized convexity, we will be interested here in only continuity notions and more precisely, in upper hemicontinuity which is the upper semicontinuity on line segments. We introduce a notion weaker than upper hemicontinuity and establish that the hemicontinuity of bifunctions is not needed on the whole space. In particular, this notion provides us with an existence result for equilibrium problems involving locally upper hemicontinuous bifunctions on a suitable compact subset.

RÉSUMÉ. Dans ce papier, nous étudions la résolution des problèmes d'équilibre avec des conditions locales sur les bifonctions. Bien que plusieurs résultats existent sous différents concepts de convexité généralisée, nous nous intéressons ici à la notion de continuité seulement et, plus précisément, à l'hémicontinuité supérieure qui est la semi-continuité supérieure sur les segments. Nous introduisons une notion plus faible que l'hémicontinuité supérieure et établissons que l'hémicontinuité des bifonctions n'est pas nécessaire sur tout l'espace. En particulier, cette notion nous permet d'obtenir un résultat d'existence pour les problèmes d'équilibre avec bifonctions localement hémicontinues supérieurement sur une partie compacte appropriée.

KEYWORDS : Equilibrium, hemicontinuity, quasiconvexity, pseudomonotonicity, compact.

MOTS-CLÉS : Equilibre, hémicontinuité, quasiconvexité, pseudomonotonie, compact.

1. Introduction

We consider the following equilibrium problem: given a real topological Hausdorff vector space X and a nonempty, closed and convex subset C of X,

$$\text{Find} \quad x^* \in C \quad \text{such that} \quad \Phi(x^*, y) \geq 0 \quad \forall y \in C. \qquad [1]$$

where $\Phi : C \times C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ is a function such that $\Phi(x, x) \geq 0$, for every $x \in C$. The function Φ is called an equilibrium bifunction.

A large variety of problems arising in nonlinear analysis including problems of optimization, variational inequality, saddle points, Nash equilibrium, game theory, fixed point theory and complementarity are special cases of equilibrium problems. See, for example, [4] and the references therein. Results concerning existence of solutions of equilibrium problems are generally based on techniques related to the separation of convex sets or to fixed point theory. In recent years, several concepts of monotonicity of mappings and multivalued mappings have been adapted to equilibrium bifunctions and various continuity and generalized convexity notions have been investigated to carry out existence results for equilibrium problems; for an overview of the State-of-the-Art, one may refer to [5] and the references therein.

However, there does not seem to be any result in the literature with consideration of local conditions on equilibrium bifunctions. This paper is intended to show the importance of such considerations for equilibrium problems. Motivated by the approach first introduced in [1] for solving multivalued mixed variational inequalities involving locally Lipschitzian or cocoercive multivalued mappings, we continue developing our techniques and investigate the notion of hemicontinuity of equilibrium bifunctions which is the semicontinuity on line segments. We introduce a notion weaker than upper hemicontinuity and derive that the hemicontinuity of bifunctions is not needed on the whole space. This notion yields in particular, an existence result for equilibrium problems involving locally upper hemicontinuous bifunctions on a suitable compact subset.

2. Main results

Recall that Φ is called *pseudomonotone* on $C \times C$ if for every $x, y \in C$,

$$\Phi(x, y) \geq 0 \Longrightarrow \Phi(y, x) \leq 0.$$

A function $f : C \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ is said to be *semistrictly quasiconvex* on C if for every $x_1, x_2 \in C$ such that $f(x_1) \neq f(x_2)$, we have

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) < \max\{f(x_1), f(x_2)\} \quad \forall \lambda \in \left]0, 1\right[.$$

There is not any inclusion relationship between the class of semistrictly quasiconvex functions and that of quasiconvex functions. However, if f is a lower semicontinuous and semistrictly quasiconvex function, then f is quasiconvex. See [3].

The function f is said to be *upper hemicontinuous* on C if its restriction on each line segment of C is upper semicontinuous. That is, for every $x, \overline{x} \in C$ and every sequence $(t_n)_n$ in $]0,1[$ such that $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = 0$, we have

$$f(\overline{x}) \geq \limsup_{n \to +\infty} f(t_n x + (1 - t_n)\overline{x}).$$

Let A be a subset of C. We say that f is *upper weakly hemicontinuous* on A with respect to C if for every $x \in C$ and $\overline{x} \in A$, there exists a sequence $(t_n)_n$ in $]0,1[$ such that $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = 0$ and

$$f(\overline{x}) \geq \limsup_{n \to +\infty} f(t_n x + (1 - t_n)\overline{x}).$$

Obviously, every upper hemicontinuous function on C is upper weakly hemicontinuous on every subset of C with respect to C. Moreover, we have the following result.

Proposition 2.1 *Let $f : C \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ be a function and let A be a subset of C. Suppose one of the following conditions is true*

1) A is convex, f is upper hemicontinuous on A and, for every $x \in C$ and $\overline{x} \in A$, there exists a sequence $(t_n)_n$ in $]0,1[$ such that $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = 0$ and

$$\{t_n x + (1 - t_n)\overline{x} \mid t \in]0,1[\} \cap Int(A) \neq \emptyset$$

where $Int(A)$ denotes the interior of A.

2) There exists a convex open subset containing A on which f is upper hemicontinuous.

3) Every point of A has a convex neighborhood in C on which f is upper hemicontinuous.

Then, f is upper weakly hemicontinuous on A with respect to C.

Proof. To prove the first statement, note that if $t_{n_0} x + (1 - t_{n_0})\overline{x} \in Int(A)$ for some n_0, then all the open segment between $t_{n_0} x + (1 - t_{n_0})\overline{x}$ and $\overline{x}$ is contained in $Int(A)$. The other statements are obvious. □

Note that the first and second statements are very useful for constructing examples of non hemicontinuous functions on C which are upper weakly hemicontinuous functions on a subset A of C with respect to C.

The following theorem extends the well-known result on the existence of solutions of equilibrium problems with pseudomonotone bifunctions (see [2]).

Theorem 2.1 *Suppose the following conditions hold:*

1) Φ is pseudomonotone on $C \times C$.

2) Φ is semistrictly quasiconvex and lower semicontinuous in its second variable on the subset C.

3) There exists a compact subset K of X and $y_0 \in C \cap K$ such that

$$\Phi(x, y_0) < 0 \quad \forall x \in C \setminus K$$

4) Φ is upper weakly hemicontinuous in its first variable on $C \cap K$ with respect to the subset C.

Then, the equilibrium problem 1 has a solution.

Proof. For every $y \in C$, define the following sets

$$F(y) = \{x \in C \mid \Phi(y, x) \geq 0\} \quad \text{and} \quad G(y) = \{x \in C \mid \Phi(x, y) \leq 0\}.$$

Clearly, $x^* \in C$ is a solution of the equilibrium problem 1 if and only if $x^* \in \bigcap_{y \in C} F(y)$. Under assumptions (2) and (3), we can prove by using Ky Fan Lemma (see [2]) that

$$\bigcap_{y \in C} \overline{F(y)} \neq \emptyset.$$

Since $F(y_0) \subset K$, then $\bigcap_{y \in C} \overline{F(y)} = \bigcap_{y \in C} \left(\overline{F(y)} \cap K\right)$.

By assumption (2), the set $G(y)$ is closed and convex, for every $y \in C$. From pseudomonotonicity, we have $F(y) \subset G(y)$, for every $y \in C$. It follows that

$$\bigcap_{y \in C} \left(\overline{F(y)} \cap K\right) \subset \bigcap_{y \in C} (G(y) \cap K).$$

The theorem now holds after proving that

$$\bigcap_{y \in C} (G(y) \cap K) \subset \bigcap_{y \in C} F(y).$$

Let $\overline{x} \in \bigcap_{y \in C} (G(y) \cap K)$ and let $y \in C$. From (4), let $(t_n)_n$ in $]0, 1[$ be such that $\lim_{n \to +\infty} t_n = 0$ and

$$\Phi(\overline{x}, y) \geq \limsup_{n \to +\infty^+} \Phi(t_n y + (1 - t_n)\overline{x}, y).$$

Put $y_n = t_n y + (1 - t_n)\overline{x}$. It follows that $\overline{x} \in G(y_n)$ and then, $\Phi(y_n, \overline{x}) \leq 0$. By quasiconvexity of Φ in the second variable, we have

$$0 \leq \Phi(y_n, y_n) \leq \max\{\Phi(y_n, y), \Phi(y_n, \overline{x})\}.$$

This relation yields $\Phi(y_n, y) \geq 0$, otherwise $\Phi(y_n, \overline{x}) \geq 0$ and $\Phi(y_n, y) < \Phi(y_n, \overline{x})$. Hence, $\Phi(y_n, \overline{x}) = 0$ and by semistrict quasiconvexity, we obtain $\Phi(y_n, y_n) < 0$ which is impossible. It follows that

$$\Phi(\overline{x}, y) \geq \limsup_{n \to +\infty^+} \Phi(t_n y + (1 - t_n)\overline{x}, y) = \limsup_{n \to +\infty^+} \Phi(y_n, y) \geq 0$$

and then, $\overline{x} \in F(y)$. Since y is arbitrary, we have $\overline{x} \in \bigcap\limits_{y \in C} F(y)$. □

The above theorem deals with weakening hemicontinuity on the first variable of the equilibrium bifunction in presence of some generalized convexity notions which have been investigated rather intensively in the literature. With slight modifications, it can be used in presence of other generalized convexity notions to obtain similar results on the existence of solutions of equilibrium problems.

Here, we give a simple example of an equilibrium bifunction satisfying all the conditions of Theorem 2.1 without being hemicontinuous in its first variable on the whole subset C.

Example. Let $X = C = \mathbb{R}$, $K = [-1, +1]$ and $y_0 = 0$. Define $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ by

$$\Phi(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2 - x^2}{5} & \text{if} \quad (x, y) \in \{2\} \times [-3, 3], \\ y^2 - x^2 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

It is easy to see that all the conditions of Theorem 2.1 are satisfied. That is, Φ is pseudomonotone on $C \times C$, strictly quasiconvex and lower semicontinuous in its second variable on C, upper weakly hemicontinuous in its second variable on K with respect to C and $\Phi(x, 0) < 0$, for every $x \notin K$.

However, Φ is not hemicontinuous in its first variable on the whole C. Indeed, for $y = 3$, the function $x \in \mathbb{R} \mapsto \Phi(x, 3)$ is not hemicontinuous on the whole C. To see this, take a sequence $(x_n)_n$ converging to 2 such that $x_n \neq 2$, for every n. We have

$$\Phi(2, 3) = 1 < 5 = \limsup_{n \to +\infty} \Phi(x_n, 3).$$

Thus, the function $x \in \mathbb{R} \mapsto \Phi(x, 3)$ is not hemicontinuous on C. Note that by the same argument, we can also prove that the function $x \in \mathbb{R} \mapsto \Phi(x, -3)$ is not hemicontinuous on the whole C.

Acknowledgment. We would like to thank all TAMTAM organizers for their valuable time and efforts in order to prepare this international colloquium. We are also grateful to any reader of our work.

References

[1] B. Alleche. Multivalued mixed variational inequalities with locally Lipschitzian and locally cocoercive multivalued mappings. *J. Math. Anal. Appl.*, 399:625–637, 2013.

[2] M. Bianchi and S. Schaible. Generalized monotone bifunctions and equilibrium problems. *J. Optim. Theory Appl.*, 90(1):31–43, 1996.

[3] A. Cambini and L. Martein. Generalized Convexity and Optimization. Theory and Applications. volume 616 of *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*. Springer, 2009.

[4] F. Flores-Bazán. Existence Theory for Finite-Dimensional Pseudomonotone Equilibrium Problems. *Acta Appl. Math.*, 77:249–297, 2003. Kluwer Academic Publishers.

[5] G. Kassay. On Equilibrium Problems. In A. Chinchuluun, P. M. Pardalos, R. Enkhbat, and I. Tseveendorj, editors, *Optimization and Optimal Control: Theory and Applications*, volume 39 of *Optimization and Its Applications*, pages 55–83. Springer, 2010.

A remark on existence of semilinear

heat equation involving Hardy-Leray potential

Ahmed Attar*

* Département de Mathématiques, Université Abou Bakr Belkaid .Tlemcen.
Algeria.
ahm.attar@yahoo.fr

ABSTRACT. In this note we analyze the behavior of the problem

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \lambda \dfrac{u^p}{|x|^2} & \text{in } \Omega_T = \Omega \times (0,T), \\ u > 0 & \text{in } \Omega, \\ u(x,0) = u_0(x) > 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0,T), \end{cases} \tag{1}$$

where $p \geq 1$ and $\Omega \subset I\!R^N$ is a bounded domain such that $0 \in \partial\Omega$. If the pole of the potential is inside of the domain it is known that the behavior is very different.

RÉSUMÉ. Dans cette note on analyse le comportement du problème suivant :

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \lambda \dfrac{u^p}{|x|^2} & \text{dans } \Omega_T = \Omega \times (0,T), \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u(x,0) = u_0(x) > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T), \end{cases} \tag{2}$$

où $p \geq 1$ et $\Omega \subset I\!R^N$ un domaine borné telque $0 \in \partial\Omega$. Si le pôle du potentiel est à l'intérieur du domaine, il est connu que le comportement est très différent.

KEYWORDS : Parabolic problems, Hardy-Leray potential, singularity at the boundary, existence, regularity.

MOTS-CLÉS : Problèmes paraboliques, potentiel de Hardy-Leray, singularité au bord, existence, régularité.

This talk is a presentation of the submitted work in collaboration with Susana Merchán and Ireneo Peral cited in [3].

1. Introduction

The aim of this note is to discuss the existence of solution to the following parabolic problem

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \lambda \dfrac{u^p}{|x|^2} & \text{in } \Omega_T = \Omega \times (0,T), \\ u > 0 & \text{in } \Omega, \\ u(x,0) = u_0(x) > 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0,T). \end{cases} \tag{3}$$

Consider $p \geq 1$ and $\Omega \subset I\!R^N$ a bounded domain with $0 \in \partial\Omega$.

We will prove that the behavior of the problem (3) when $0 \in \partial\Omega$ is essentially different to the behavior when $0 \in \Omega$ that was studied by Baras-Goldstein in [4]. In [2], the authors studied the strong regularizing effect of the term $|\nabla u|^2$ in the left hand side of the equation. The elliptic case when the pole is inside the domain was studied in [7] and the regularizing effect by a term of the gradient type as above has been studied in [2].

The elliptic problem when $0 \in \partial\Omega$ has been studied recently in [9]. The linear problem, $p = 1$, has been treated in [11]. The authors define

$$\mu(\Omega) = \inf \Big\{ \frac{\int_\Omega |\nabla\phi|^2}{\int_\Omega \dfrac{\phi^2}{|x|^2}} : \phi \in W_0^{1,2}(\Omega),\, \phi \neq 0 \Big\}, \tag{4}$$

and show that if $\mu(\Omega) < \mu(\mathbb{R}^N_+) = \frac{N^2}{4}$, $\mu(\Omega)$ is attained and the associated linear equation has a positive solution. In the opposite case, $\mu(\Omega) \geq \mu(\mathbb{R}^N_+)$, there is no solution to the linear problem. Moreover, the authors give the following geometrical condition in order to have the attainability of the best constant, $\mu(\Omega)$.

Consider Ω a bounded smooth domain such that $0 \in \partial\Omega$ and such that for any $\delta > 0$, there exists a $\rho_\delta > 0$ and $\nu \in \mathbb{S}^{N-1}$ verifying

$$\Omega \supseteq \{x \in \mathbb{R}^N \mid \langle x, \nu \rangle > -\delta|x|, 0 < \alpha < |x| < \beta\},$$

with $\dfrac{\beta}{\alpha} > \rho_\delta$. Then, $\mu(\Omega)$ is attained.

The supercritical case has been studied in [9]. The authors give a sufficient condition to have a positive solution. Such condition is the geometrical and perturbative nature of the domain and we invite the reader to take a look to the reference for the details.

In the supercritical problem, $p > 1$, when $0 \in \partial\Omega$, it is relevant to point out that a sublinear reaction term produces a regularizing effect, in the sense that there is a positive solution without restriction on the shape of the domain. We will study the parabolic problem with this idea in mind.

2. Existence if $p = 1$: Linear problem

Lemma 2.1 *Let Ω be a bounded domain such that $0 \in \partial\Omega$. assume that $0 < q < 1$, then the problem*

$$\begin{cases} -\Delta w = \dfrac{w^q}{|x|^2} & \text{in } \Omega, \\ w = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5}$$

has unique positive solution w such that $w \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Theorem 2.2 *Let $\Omega \subset I\!R^N$ be a bounded domain and $0 \in \partial\Omega$. Assume that $u_0 \in L^1(\Omega)$ is a nonnegative function, then for all $\lambda > 0$, the problem*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \lambda \dfrac{u}{|x|^2} & \text{in } \Omega_T, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0,T). \end{cases} \tag{6}$$

has an unique solution u such that $\dfrac{u}{|x|^2} \in L^1(\Omega_T)$ and $u \in L^\sigma(0,T; W_0^{1,\sigma}(\Omega))$ for all $\sigma < \frac{N+2}{N+1}$.

In the next Theorem we analyze the asymptotic behavior of the solution to problem (3) found in Theorem 2.2.

Theorem 2.3 *Let u be the solution to problem* (3) *found in Theorem 2.2, then we have*

1) If $\lambda \le \mu(\Omega)$, then $u(x,t) \to 0$ in $L^1(\Omega)$ as $t \to \infty$,

2) If $\lambda > \mu(\Omega)$ then $u(x,t) \to \infty$ in $L^1(\delta(x)dx, \Omega)$ as $t \to \infty$,

where $\mu(\Omega)$ is the Hardy constant for Ω defined in (4) *and $\delta(x) = \min\limits_{y \in \partial\Omega}\{|x-y|\}$.*

3. Existence if $p > 1$: Supercritical problem

In this section, we are interested in the super-linear case, namely $p > 1$. In this case we can assume that $\lambda = 1$.

The main idea to get existence result is to find a suitable supersolution and then we proceed by iteration. The main existence result of this section is the following.

Theorem 3.1 *Assume that Ω is a bounded domain such that $0 \in \partial\Omega$ and let $p > 1$. Then, there exists $\bar{u} \in L^{\infty}(\Omega)$ such that if $0 \leq u_0 \leq \bar{u}$ the problem*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \dfrac{u^p}{|x|^2} & \textit{in } \Omega_T, \\ u(x,0) = u_0(x) & \textit{in } \Omega, \\ u = 0 & \textit{on } \partial\Omega \times (0,T). \end{cases} \tag{7}$$

has a unique solution $u \in L^2(0,T; W_0^{1,2}(\Omega)) \cap L^{\infty}(\Omega_T)$, for all $T > 0$.

3.1. Concave-convex term

In this section we consider a nonlinear parabolic problem with a convex-concave nonlinearities, more precisely we consider the problem

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \dfrac{u^p}{|x|^2} + \mu u^q & \text{in } \Omega \times (0, T(\mu)), \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, T(\mu)). \end{cases} \tag{8}$$

We analyze some questions about the local and global existence of solution and the behavior of such solutions as $t \to \infty$. These questions are related to the value of μ, p and the initial datum u_0.

Theorem 3.2 *Let $p > 1$, $0 < q < 1$, $\epsilon > 0$ and $0 \in \partial\Omega$. Then, there exists $\epsilon_0 > 0$, such that $\forall \epsilon \in (0, \epsilon_0)$ the following problem admits a solution $u \in L^2(0,T; W_0^{1,2}(\Omega)) \cap L^{\infty}(\Omega_T)$,*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \dfrac{u^p}{|x|^2} + \epsilon u^q & \textit{in } \Omega_T, \\ u(x,0) = u_0(x) & \textit{in } \Omega, \\ u = 0 & \textit{on } \partial\Omega \times (0,T). \end{cases} \tag{9}$$

Opposite to the elliptic case, we will show in the next Theorem a local existence result for all $\mu > 0$ and for all $p > 1$, under suitable hypothesis on u_0.

Theorem 3.3 *Assume that* $0 < q < 1 < p$*, then for all* $\mu > 0$*, there exists* $T(\mu) > 0$ *such that the problem* (8) *has a local solution under suitable hypotheses on* u_0*.*

REMARK. —

1) It seems to be natural to ask if the problem (8) has a local solution for all $\epsilon > 0$. In the case without the weight $|x|^{-2}$, the response is affirmative by constructing a suitable supersolution depending only on the time.

2) The optimal condition on u_0 to get a local solution seems to be also an interesting open problem.

References

[1] B. Abdellaoui, I. Peral, « Some results for semilinear elliptic equations with critical potential*Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect.* **A 132** (2002), 1, 1–24.

[2] B. Abdellaoui, I. Peral, A. Primo »Strong regularizing effect about a gradient term in the heat equation with Hardy potential *J. Funct. Anal.* **258** (2010), 1247-1272.

[3] A. Attar, S. Merchán, I. Peral, « A remark on existence of semilinear heat equation involving Hardy-Leray potential. *Submitted.*

[4] P. Baras and J. Goldstein , » The heat equation with a singular potential.*Trans. Amer. Math. Soc.* **294** (1984), 121-139.

[5] L. Boccardo, F. Murat, J.P. Puel, »Résultats d'existence pour certains problèmes elliptiques quasilinéaires,*Ann. Sc. Norm. Super. Pisa* **11** (1984), 2, 213-235.

[6] L. Boccardo, A. Dall'Aglio, T. Gallouet, L.Orsina, »Nonlinear parabolic equations with measure data *J. Funct. Anal.* **147 (1)** (1997) 237-258.

[7] H. Brezis, X. Cabré, »Some simple nonlinear PDE's without solutions. *Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat.* **(8) 1** (1998), 2, 223–262.

[8] A. Cianchi, V. Maz'ya, » Global Lipschitz regularity for a class of quasilinear elliptic equations. *Comm. Partial Differential Equations*, **no.1,36** (2011), 100–133.

[9] J. Dávila, I. Peral, » Nonlinear elliptic problems with a singular weight on the boundary. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, **41** (2011), no. 3-4, 567–586.

[10] E. Di Benedetto, »$C^{1+\alpha}$ local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations. *Nonlinear Anal.*, **7(8)** (1983), 827–850.

[11] M.M. Fall, R. Musina, » Hardy-Poincaré inequalities with boundary singularities, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect.A* **142** (2012) 1-18.

[12] G.M. Lieberman, » Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations. *Nonlinear Anal.*, **12(11)** (1988), 1203–1219.

[13] S. Merchán, I. Peral, » Remarks on the solvability of an elliptic equation with a supercritical term involving the Hardy-Leray potential. *J. Math. Anal. Appl* , **j.jmaa.2012.04.055**.(2012) doi:10.1016

[14] P. Tolksdorf, »Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations. *J. Differential Equations*, **51(1)** (1984), 126–150.

[15] J. L. Vázquez, » A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations. *Appl. Math. Optim.*, **12(3)** (1984), 191 – 202.

Un modèle d'élasticité 2D tenant compte de l'orientation du déplacement

Ayoub AZZAYANI* — Soumaya BOUJENA — Jérôme POUSIN*****

* Ayoub AZZAYANI
Faculté des Sciences de Aïn Chok Casablanca
Département mathématiques et informatiques
Maroc
ayoubsma@yahoo.fr
** Soumaya BOUJENA
Faculté des Sciences de Aïn Chok Casablanca
Département mathématiques et informatiques
Maroc
boujena@yahoo.fr
*** Jérôme POUSIN
Institut C. Jordan UMR CNRS 5208
INSA de Lyon 20 Av. A. Einstein F-69100
Villeurbanne Cedex
jerome.pousin@insa-lyon.fr

RÉSUMÉ. Dans ce présent travail, on présente un modèle d'élasticité en dimenesion deux prenant en compte l'orientation du déplacement dans la déformation. On donne d'abord une démonstration de l'existence et l'unicité de solution au problème mathématique. Ensuite le modèle a été testé numériquement sous le logiciel FreeFem et des simulations sont présentées.

ABSTRACT. In the present work, we present a 2D elasticity model taking into account the orientation of the displacement in the deformation. We give, at first, a demonstration of the existence and uniqueness of solution. The model is tested numerically using Free Fem and numerical simulations are presented.

MOTS-CLÉS : élasticité, orientation, déformation, contrainte

KEYWORDS : elasticity, orientation, deformation, stress

1. Modèle mathématique :

Dans cette section, on définit notre le modèle mathématique d'élasticité pour la segmentation d'images prenant en compte l'orientation des fibres du coeur dans la déformation. On représente une coupe du ventricule gauche du coeur par Ω, un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ dont la frontière est notée Γ. Et on note par u le vecteur qui décrit le déplacement d'un point appartenant à Ω. On définit ensuite le tenseur de déformation $\varepsilon(u) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}(u) & \varepsilon_{12}(u) \\ \varepsilon_{21}(u) & \varepsilon_{22}(u) \end{pmatrix}$ avec $\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ et le tenseur de contrainte $\sigma(u) = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(u) & \sigma_{12}(u) \\ \sigma_{21}(u) & \sigma_{22}(u) \end{pmatrix}$ où $\sigma_{ij}(u) = \beta\left(\sum_{k=1}^{2} \varepsilon_{kk}(u)\right)\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}(u)$ les paramètres $\beta \geq 0$ et $\mu > 0$ désignent les constantes de Lamé. Le modèle mathématique proposé est défini par le problème d'élasticité suivant $(P)\begin{cases} -div\sigma(u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$ mis sous la contrainte

$$\varepsilon(u).w = \theta.w \qquad [1]$$

sur une partie K de Ω avec $w = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et où $a, b \in \mathbb{R}$. Pour avoir la formulation faible du problème (P) sous contrainte, on passe par la méthode d'optimisation du Lagrangien, telle que la foction lagrangien s'écrit comme suit :

$$L(u,\lambda) = \int_\Omega [(\beta(div(u))^2 + 2\mu(\varepsilon(u))^2]dx - \int_\Omega f.vdx + \int_K \lambda(\varepsilon(u).w)qdx$$

λ est le multiplicateur de Lagrange. On dérive par rapport à u, puis par rapport à λ, et on tombe sur la formulation faible suivante :

$$(H)\begin{cases} Trouver\ (u,\lambda) \in (H_0^1(\Omega))^2 \times (L^2(K))^2 \text{ qui vérifient :} \\ \int_\Omega [(\beta div(u).div(v)) + 2\mu(\varepsilon(u) : \varepsilon(v))]dx + \int_K \lambda(\varepsilon(u).w)dx = \int_\Omega f.vdx \qquad \forall v \in (H_0^1(\Omega))^2 \\ b(u,q) = \int_K (\varepsilon(u).w)qdx = \int_K \theta.w.qdx \qquad \forall q \epsilon (L^2(K))^2 \end{cases}$$

2. Existence et unicité de solution :

Théorème 2.1 *Pour* $u \in (H_0^1(\Omega))^2$ *et* $\lambda \in (L^2(K))^2$*, on pose* $a(u,v) = \int_\Omega [(\beta div(u).div(v)) + (2\mu\varepsilon(u) : \varepsilon(v))]dx + \int_K \lambda(\varepsilon(u).w)dx$*. Alors*

1) La forme bilinéaire a(.,.) est continue et coercive sur $(H_0^1(\Omega))^2 \times (H_0^1(\Omega))^2$,

2) Il existe un réel $\gamma > 0$ *vérifiant la condition infsup suivante*

$$\inf_{\lambda \in (L^2(K))^2} \left(\sup_{v \in (H_0^1(\Omega))^2} \frac{b(v,\lambda)}{\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \|\lambda\|_{L^2(K)}} \right) \geq \gamma$$

3) le problème (H) admet une solution unique.

Démonstration 2.1 *La continuité et la coercivité de a(.,.) se démontrent facilement grâce aux inégalités de Hölder et Korn.*

Pour montrer la conditions inf sup nous considérons le problème intermidiaire suivant :

$$(I) \begin{cases} div(\varepsilon(u)) = div(\dfrac{\lambda^t w^t}{w^t.w}) \; dans \; K \\ u = 0 \qquad\qquad\qquad sur \;\; \partial K \end{cases}$$

dont une formulation faible est donnée par :

$$(T) \begin{cases} \textit{Trouver} \quad u \in (H_0^1(K))^2 \textit{ qui vérifie :} \\ \displaystyle\int_K \varepsilon(u) : \varepsilon(v) dx = \int_K \frac{\lambda^t w^t}{w^t.w} . \nabla v dx \qquad \forall v \in (H_0^1(\Omega))^2 \end{cases}$$

Pour montrer l'existence et l'unicité d'une solution au problème (T)*, on utilise les mêmes démarches que pour un problème d'élasticité classique ([5]) en prenant* $\beta = 0$ *et* $\mu = \dfrac{1}{2}$ *pour les constantes de Lamé. On pose* $A(u,v) = \displaystyle\int_K \varepsilon(u) : \varepsilon(v) dx$ *alors* $A(.,.)$ *est une forme bilinéaire continue qui vérifie* $A(u,u) \geq C_0 ||u||^2_{H_0^1(K)}$.

De même si on pose $L(v) = \displaystyle\int_K \frac{\lambda^t w^t}{w^t.w} . \nabla v dx$*, on a :*

$$|L(v)| \leq ||\frac{w^t}{w.w}||_\infty ||\lambda^t||_{L^2(K)} ||v||_{H_0^1(K)}$$

Donc :

$$b(u_T, \lambda) = ||\lambda||^2_{L^2(K)} \qquad [2]$$

puis en appliquant l'inégalité de Korn on déduit qu'il existe un réel $C > 0$ *tel que :*

$$\frac{\|\lambda\|_{L^2(K)}}{\|u\|_{H_0^1(K)}} \quad \geq \quad C \left\| \frac{w^t}{w^t.w} \right\|_\infty = \gamma > 0 \qquad [3]$$

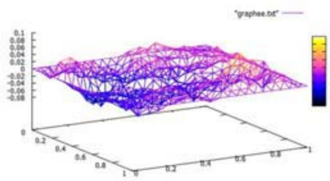
En utilisant les inégalités (1) et (13), on trouve :

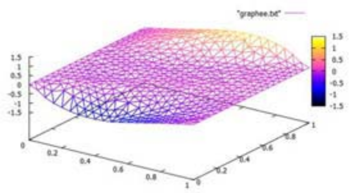
$$\begin{aligned}\frac{b(v,\lambda)}{\|v\|_{H_0^1(\Omega)}\,\|\lambda\|_{L^2(K)}} &= \frac{\|\lambda\|^2_{L^2(K)}}{\|v\|_{H_0^1(\Omega)}\,\|\lambda\|_{L^2(K)}}\\ &= \frac{\|\lambda\|_{L^2(K)}}{\|v\|_{H_0^1(\Omega)}} \geq \gamma\end{aligned}$$

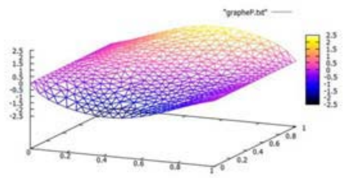
On déduit d'après ce qui précède que le problème initiale (H) *admet une solution unique.*

3. Simulation numérique sous FreeFem

Dans cette section, on donne les simulations numériques du problème réalisées sous le logiciel FreeFem. Dans un premier temps, on a pris, dans la formule (1), $\theta = 3$ fixé et $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans le premier cas puis $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en deuxième cas. Ensuite nous avons d'abord calculé les valeurs propres du problème (1) défini par la contrainte puis nous avons travaillé avec θ qui représente la valeur propre maximale et un vecteur propre associé w. Les tests numériques sont donnés ci-après :







Commentaires :
la figure en haut à gauche montre les valeurs de u sont presque nulles. La figure en haut à droite montre que la solution est constante suivant l’axe des y, et elle varie suivant l’axe des x. La figure au centre exprime la même chose que La figure en haut à droite sauf que dans ce cas les déplacement u sont plus importants .

Conclusion :
A titre de conclusion, ce travail a été consacré à l’étude d’un problème d’élasticité sous la contrainte de prendre en considération l’orientation du déplacement de la structure. Nous avons montré, en premier lieu, l’existence et l’unicité de solution au modèle mathématique proposé. Puis nous avons réalisé des simulations numériques sous Free Fem en programmant deux algorithmes. Dans le premier nous avons considéré le paramètre $\theta = 3$ fixé dans la contrainte pour deux valeurs de w choisies et dans le deuxième nous avons considéré le cas général, en calculant la valeur propre maximale du problème de la contrainte.

Remerciements. This work has been supported with a grant PHC Volubilis from the French foreign office and the moroccan ministry of education and research MA/11/246.

Bibliographie

[1] M. Faugeras and J. Pousin, (2004), « Variational asymptotic derivation of an elastic model arising from the problem of 3D automatic segmentation of cardiac images, Analysis and Applications, Vol. 2, No. 4 (2004) 275–307. »

[2] Jean-Pierre Demailly, « Analyse numérique et équations différentielles », EDP Sciences, 2006 - 343 pages.

[3] P.A. RAVIART, J.M.THOMAS, « Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles » , mathématiques appliquées pour la maîtrise,Masson Paris, 1983.

[4] Alexandre Ern, Jean-Luc Guermond, « Theory and Practice of Finite Elements »,Springer,2004.

[5] Sorin Mardare, « Sur quelques problèmes de géométrie différentielle liés à la théorie de l'élasticité »,Laboratoire Jacques-Louis Lions Université Paris 6.

[6] Grégoire Allaire, « Analyse numérique et optimisation »,Editions Ecole Polytechnique, 2005.

Time-discretization scheme for an integrodifferential Soblev type equation with integral conditions

D.Belakroum* — A. Guezane-lakoud**

* Université Constantine 1
Département de Mathématique
Constantine, Algérie
douniabelakroum@yahoo.fr
** Université Badji Mokhtar
département de Mathématique
Annaba, Algérie
a.guezane@yahoo.fr

ABSTRACT. This paper discusses in a nonclassical function space the weak solvability of one dimensional pseudoparabolic integrodifferential equations with nonlocal conditions. By using a time discretization scheme based on Rothe's method, the existence and uniqueness of a weak solution are established.

RÉSUMÉ. Nous proposons dans ce travail l'étude d'un problème pseudoparabolique integrodifferentiel avec des conditions non locales. En utilisant un schéma de discrétisation en temps basé sur la méthode Rothe, nous établissons les estimations a priori nécessaires dans un espace fonctionnel non classique, sur la base desquelles la convergence d'un schéma d'approximation semi discrétisé correspondant est prouvée.

KEYWORDS : Rothe's method, A priori estimate, Telegraph equation, Weak solution.

MOTS-CLÉS : Méthode de discrétisation en temps de Rothe, problèmes non locaux, conditions intégrales, estimation a priori, équation de Telegraphe.

1. Introduction

In this paper, we have discussed a new application of semi-discretization via Rothe's method in order to determine a function $\upsilon = \upsilon(x,t),\ x \in (0,1)\,,\ t \in I = [0,T]\,,$ which satisfies, in weak sense, the following integro-differential evolution equation with a memory term

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t} - \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2} - \lambda \frac{\partial^3 \upsilon}{\partial x^2 \partial t} = f\left(x,t\right) + \int_0^t a\left(t-s\right) k\left(s, \upsilon\left(x,s\right)\right) ds, \tag{1}$$

$$\forall \left(x,t\right) \in \left(0,1\right) \times \left[0,T\right] \tag{2}$$

subject to the initial conditions

$$\upsilon\left(x,0\right) = V_0\left(x\right), \tag{3}$$

and integral conditions

$$\int_0^1 \upsilon\left(x,t\right) dx = E\left(t\right). \tag{4}$$

$$\int_0^1 x\upsilon\left(x,t\right) dx = G\left(t\right) \tag{5}$$

Where f, υ_0, G, E are given functions and T, λ are positive constants.
A l'aide de la transformation

$$u\left(x,t\right) = \upsilon\left(x,t\right) - r\left(x,t\right), \left(x,t\right) \in \left(0,1\right) \times \left[0,T\right],$$

où

$$r\left(x,t\right) = 6(2G\left(t\right) - E\left(t\right))x - 2(3G\left(t\right) - 2E\left(t\right)),$$

The equivalent problem can be written as:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \lambda \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} &= f\left(x,t\right) + \int_0^t a\left(t-s\right) k\left(s, u\left(x,s\right)\right) ds \\
u\left(x,0\right) &= U_0\left(x\right), \\
\int_0^1 u\left(x,t\right) dx &= 0 \\
\int_0^1 xu\left(x,t\right) dx &= 0
\end{aligned}$$

For any positive integer n, we consider a partition $\{t_j\}_{j=1}^n$ of $[0,T]$ defined by $t_j = j.h$ and the length $h = \dfrac{T}{n}$ and we denote $u_j = u_j(x) = u_j(x, jh)$ the approximation of

u, then we replace $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ at each point $t = t_j$, $j = 1, \cdots, n$, by the difference quotients $\delta u_j = \dfrac{u_j - u_{j-1}}{h}$. Setting, $u_0 = U_0$ we successively solve then the linearized problem for $j = 1, \cdots, n$.

$$\begin{aligned} \delta u_j - \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} - \lambda \frac{\partial^2 \delta u_j}{\partial x^2} &= f_j + h \sum_{i=0}^{j-1} a_{ji} k_i, \quad x \in (0,1), \\ \int_0^1 u_j(x)\, dx &= 0, \quad \int_0^1 x u_j(x)\, dx = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

where $f_j = f(x, t_j)$, $a_{ji} = a(t_j - t_i)$, and $k_i = k(t_i, u_i)$. Thereafter,we put

$$w_j = u_j + \lambda \delta u_j, \quad j = 1, \cdots, n,$$

to obtain a system of n differential equations in x with the unknown functions

$$w_j(x) : [0,1] \to \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} + \frac{1}{\lambda + h} w_j &= \mathbf{F}_j, x \in (0.1) \\ \int_0^1 w_j(x)\, dx &= 0, \int_0^1 x w_j(x)\, dx = 0 \end{aligned}$$

where

$$\mathbf{F}_j = f_j + \frac{1}{\lambda + h} u_{j-1} + h \sum_{i=0}^{j-1} a_{ji} k_i$$

2. Notations, function spaces and assumptions

Let $H = L^2(0,1)$ be the usual space of Lebesgue square integrable real functions on $(0,1)$ whose inner product and norm will be denoted by $(.,.)$ and $\|.\|$ respectively. Let $H^2(0,1)$ be the real second order Sobolev space on $(0,1)$ with the norm $\|.\|_{H^2(0,1)}$. Let $B_2^1(0,1)$ (Bouziani space) be the completion of $C_0(0,1)$, the space of real continuous functions with compact support in $(0,1)$,whose inner product and norm are defined respectively by

$$\begin{aligned} (u,v)_{B_2^1(0,1)} &= \int_0^1 \Im_x u . \Im_x v dx \\ \|v\|_{B_2^1(0,1)} &= \sqrt{(v,v)_{B_2^1(0,1)}}, \end{aligned}$$

where $\Im_x u = \int_0^x u(\xi)\, d\xi, \forall x \in (0,1)$.
$C(0,1)$ is the set of all continuous functions $v : I \to X$ with

$$\|v\|_{C(0,1)} = \max_{t\in I} \|v(t)\|_X .$$

$C^{0.1}(0,1)$ is the set of all Lipschitz continuous functions $v : I \to X$.
$C^{1.1}(0,1)$ is the set of all $v \in C^{0.1}(0,1)$ such that $\frac{dv}{dt} \in C^{0.1}(0,1)$.
We denote by V the Hilbert space:

$$V = \left\{ \phi \in L^2(0,1) ; \int_0^1 x\phi(x)\, dx = \int_0^1 \phi(x)\, dx = 0 \right\}.$$

For solving our discretized problem we first assume the following hypotheses

$\mathscr{H}_1$**)** $f(t) \in L^2(0,1)$ and the condition

$$\|f(t) - f(t')\|_B \leq C_0 \|t - t'\|$$

holds for some positive constant C_0.

$\mathscr{H}_2$**)** $U_0 \in H^2(0,1)$.

$\mathscr{H}_3$**)** $U_0 \in V$ and $\int_0^1 xU_0(x)dx = \int_0^1 U_0(x)\, dx = 0$.

$\mathscr{H}_4$**)** The function $a : I \to \mathbb{R}$ is Lipschitz continuous, $\exists C_1 \in \mathbb{R}^+$

$$|a(t) - a(t')| \leq C_1 |t - t'| .$$

$\mathscr{H}_5$**)** The mapping $k : I \times B_2^1(0,1) \to H$ is continuous in both variables and satisfies $\exists C_2 \in \mathbb{R}^+$

$$\|k(t,u)\|_{B_2^1(0,1)} \leq \|u(t)\|_{B_2^1(0,1)} ,$$

$$|k(t,u) - k(t,v)| \leq C_2 \|u(t) - v(t)\|_{B_2^1(0,1)} ,$$

for $t \in I$ and all $u, v \in V$.

Definition 2.1 *By a weak solution of problem (6) we mean a function $u : I \to H$ such that:*

1) $u \in L^2(I, H) \cap C\left(I, B_2^1(0,1)\right)$

2) $\frac{du}{dt} \in L^2\left(I, B_2^1(0,1)\right)$.

3) $u(0) = U_0$ *in* V.

4) For all $\phi \in V$ and $t \in I$, the identity

$$\left(\frac{du}{dt}(t), \phi\right)_{B_2^1(0,1)} + (u(t), \phi) + \lambda\left(\frac{du}{dt}(t), \phi\right) = (f(t), \phi)_{B_2^1(0,1)} + (k(t), \phi)_{B_2^1(0,1)}$$

holds.

3. Discretization scheme and a priori estimates

Theorem 3.1 *There exists $n_0 \in \mathbb{N}$ for all $n \geq n_0$, and for $j = 1, \cdots, n$, the discretized problems admit a unique solution $u_j \in H^2(0,1)$.*

We construct Rothe's sequence $u^{(n)} : I \longrightarrow H^2(0,1) \cap V$:

$$u^{(n)}(t) = u_{j-1} + \delta u_j (t - t_j), \quad t \in [t_{j-1}, t_j], \quad j = 1, \cdots, n$$

and a sequence of step functions $\bar{u}^{(n)} : I \longrightarrow H^2(0,1) \cap V$:

$$\bar{u}^{(n)}(t) = \begin{cases} u_j & t \in (t_{j-1}, t_j], \ j = 1, \cdots, n \\ U_0 & t \in [-h, 0] \end{cases}$$

Now we prove some a priori estiamtes

Lemma 3.2 *We assume that the assumptions $(\mathscr{H}_1)$ and $(\mathscr{H}_5)$ hold, then there exists positive constant C such that for all $n \geq N_{0,}$ the solutions u_j of the discretized problem; $j = 1, \cdots, n$ satisfy*

$$\begin{aligned} \|u_j\| &\leq C \\ \|\delta u_j\| &\leq C, \end{aligned}$$

REMARK. —
As consequence of Lemma 3.2, it follows that for all $n > N_0$ the functions $u^{(n)}$ and $\overline{u}^{(n)}$ are lipschitz continuous on I, The sequenses $\{u^n(t)\}$ and $\{\overline{u}^n(t)\}$ are uniformally bounded in $C\left(I, B_2^1(0,1)\right)$ in n and t:

$$\left\|u^{(n)}(t)\right\|_{B_2^1} \leq C, \quad \left\|\overline{u}^{(n)}(t)\right\|_{B_2^1} \leq C$$

$$\left\|\frac{du^{(n)}(t)}{dt}\right\|_{B_2^1} \leq C$$

$$\left\|\bar{u}^{(n)}(t) - u^{(n)}(t)\right\|_{B_2^1} \leq \frac{C}{n}$$

for all $t \in I$ and $n > N$.

4. Convergence and existence results

The variational equation may be written in the equivalent form as:

$$\left(\frac{du^n}{dt}(t), \phi\right)_{B_2^1(0,1)} + \left(\overline{u}^n(t), \phi\right) + \lambda \left(\frac{du^n}{dt}(t), \phi\right)$$
$$= \left(\overline{F}^n(t) + K^n(t), \phi\right)_{B_2^1(0,1)}, \qquad \forall \phi \in V, t \in I.$$

Theorem 4.1 *Under the assumptions* $(\mathscr{H}_1)$ *and* $(\mathscr{H}_5)$*, there exists a function* $u \in C^{0,1}(I,V)$ *having* $\frac{du}{dt} \in L^\infty(I,V) \cap C^{0,1}\left(I, B_2^1(0,1)\right)$*, sub-sequences* $\{u^{n_k}\}_k \subset \{u^n\}_n$ *and* $\{\overline{u}^{n_k}\}_k \subset \{\overline{u}^n\}_n$ *such that*

$$u^{(n_k)} \rightharpoonup u \quad \text{in } L^2(I,V)$$
$$\overline{u}^{(n_k)} \rightharpoonup u \quad \text{in} \quad L^2(I,V)$$
$$\frac{du^{(n_k)}}{dt} \rightharpoonup \frac{du}{dt} \quad \text{in} \quad L^2(I,V)$$

Theorem 4.2 *Under the hypotheses* $(\mathscr{H}_1) - (\mathscr{H}_5)$*, the limit function* u *from theorem* 4.1 *is the unique weak solution to problem (6) in the sense of definition* 2.1*, moreover,* u *depends continuously upon data and* U_0*.*

References

[1] A. Guezane-Lakoud, D. Belakroum, « Rothe's method for a telegraph equation with integral conditions », *Nonlinear Analysis*, **70** (2009), 3842–3853 0000.

[2] A. Guezane-Lakoud, D. Belakroum, « Weak solvability of an hyperbolic integro-differential equation with integral condition », *E J. Qualitative Theory Diff. Equations*, **37** (2011), 1–16.

[3] D. Bahuguna, J. Dabas, « Existence and uniqueness of a solution to a partial integrodifferential equation by the method of lines », *EJQTDE*, **4** (2008), 1–12.

[4] S.A. Beilin, « Existence of solution for one dimentional wave equations with nonlocal conditions », *EJDE*, **76** (2011), 1–8.

[5] J. Kacur, « Method of Rothe in evolution equations », *Teubner Textezur Mathematik*, **80**, (1985).

[6] N. Mezarga, A. Bouziani, « Rothe time discretization method for the semilinear heat equation subject to non local boundary condition », *J. Appl. Math. Stoc. Ana.*, (2006), 1–20.

Infinite Elements for Exterior Problems

R.H.Bellout

Laboratoire Systémes Dynamiques. Faculté Mathématiques-USTHB.
Algérie
rbellout@usthb.dz

ABSTRACT. When one intends to solve an exterior problem, one faces another kind of difficulty that the domain is infinitely large. Most approaches for the interior problems can not be applied to the exterior problems directly. There are two kinds of approaches to deal with the exterior problems: to truncate the domain, or to solve the problem directly on the infinite domain. The former ones are: the introducing of artificial boundary conditions, and the introducing of perfectly matched layers. The later ones are: the infinite element method, and the spectral method. While in the boundary element method both approaches are applied, depending on the degree of complexity of the domains. The aim of this communication is to presente an infinite element method proposed by Ying [1], based on transfer matrices which does not require hypothesis on the exact solution behavior and to apply it to a Brinkman flow problem.

RÉSUMÉ. Avec les problèmes extérieurs, en plus de la difficulté d'approximation, il y a la difficulté du domaine non borné. Dans les méthodes intégrales, on tronque le domaine et utilise des conditions aux bords artificielles. Ces méthodes nécessitent un grand savoir faire pour recoller les morceaux. Les méthodes d'éléments infinis resolvent le problème directement sur un domaine infini. Généralement on utilise des éléments qui copient le comportement de la solution exacte à l'infini. Encore faut t-il connaitre le comportement de la solution à l'infini et on se retrouve dans ce cas aussi à faire des hypothéses plus ou moins heuristiques. On se propose de présenter une méthode d'éléments infinis due à Ying [1], basée sur des matrices de transferts qui ne nécessite aucune hypothése sur le comportement de la solution exacte du problème et l'appliquer à un problème de flow de Brinkman.

KEYWORDS : Exterior problems, Infinite Element Method, Unbounded domains

MOTS-CLÉS : Problèmes extérieurs, Méthode des éléments infinis, Domaines non bornés.

1. Brinkman flow problem

We consider the following Axisymmetric Brinkman system with axisymmetric data in exterior domain E:

$$-\frac{1}{r}\nabla(r\nabla\tilde{u}_1)+\frac{1}{r^2}\tilde{u}_1+\chi^2\tilde{u}_1+\frac{\partial\widetilde{p}}{\partial r}=\widetilde{f}_1 \text{ in } E \tag{1}$$

$$-\frac{1}{r}\nabla(r\nabla\tilde{u}_2)+\frac{\partial\widetilde{p}}{\partial z}=\widetilde{f}_2 \qquad \text{in } E \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\tilde{u}_1)+\frac{\partial}{\partial z}(r\tilde{u}_2)=0 \qquad \text{in } E \tag{3}$$

$$(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2)_{|\partial E}=\widetilde{g} \tag{4}$$

with

$$\int_{\partial E} r\widetilde{g}.\widetilde{n}ds=0 \tag{5}$$

Weighted Sobolev space :

$L^p_\alpha(E) =$ the set of measurable functions $\omega(r,z)$ such that

$$\|\omega\|_{L^p_\alpha(E)}=(\int_E|\omega|\,r^\alpha drdz)^{1/p}<\infty$$

$H^1_1(E)=\left\{\omega(r,z)\in L^2_1(E);\ \nabla\omega(r,z)\in L^2_1(E)\right\};$

$H^1_{1,0}(E)=\left\{\omega(r,z)\in H^1_1(E)\ ;\ \omega\,|_{\partial E}\ =0\ \right\}.$

$V^1_1(E)=\left\{\omega(r,z)\in H^1_1(E);\ \omega(r,z)\in L^2_{-1}(E)\right\};$

$V^1_{1,0}(E)=\left\{\omega(r,z)\in H^1_{1,0}(E);\ \omega(r,z)\in L^2_{-1}(E)\right\}$ with the norm:

$$\|\omega\|_{V^1_1(E)}=(|\omega|_{H^1_1(E)}+\|\omega\|_{L^2_{-1}(E)})^{1/2}$$

$X(E)=V^1_{1,0}(E)\times H^1_{1,0}(E)$ Hilbert space with the norm:

$$\|\tilde{u}\|_X=(\|\tilde{u}_1\|^2_{V^1_1(E)}+|\tilde{u}_2|^2_{H^1_1(E)})^{1/2}$$

2. Variationnal Formulation

Given a function $\widetilde{\mathbf{f}} \in (X(E))'$, find $\tilde{u} \in X(E)$, $\widetilde{p} \in L^2_1(E)$, such that

$$a(\widetilde{\mathbf{u}}, \widetilde{\mathbf{v}}) + b(\widetilde{\mathbf{v}}, \widetilde{p}) = \langle \widetilde{\mathbf{f}}, \widetilde{\mathbf{v}} \rangle_{(0)} \qquad \forall\, \widetilde{\mathbf{v}} \in X(E) \tag{6}$$

$$b(\widetilde{\mathbf{u}}, \widetilde{q}) = 0 \qquad \forall\, \widetilde{q} \in L^2_1(E) \tag{7}$$

where $\langle \widetilde{\mathbf{f}}, \widetilde{\mathbf{v}} \rangle_{(0)} = \int_E r\widetilde{\mathbf{f}}\widetilde{\mathbf{v}} drdz$, and the bilinear forms are :

$$a(\widetilde{\mathbf{u}}, \widetilde{\mathbf{v}}) = \int_E r(\nabla \tilde{u}_1.\nabla \widetilde{v}_1 + \nabla \tilde{u}_2.\nabla \widetilde{v}_2) + \frac{u_1 v_1}{r} + \chi^2(u_1 v_1 + u_2 v_2) drdz \tag{8}$$

$$b(\widetilde{\mathbf{u}}, \widetilde{p}) = \int_E \widetilde{p}(\frac{\partial}{\partial r}(r\tilde{u}_1) + \frac{\partial}{\partial z}(r\tilde{u}_2)) drdz \tag{9}$$

Wellposedness of the variational problem The ellipticity of the bilinear form $a(.,.)$ is obvious since :

$$a(\widetilde{\mathbf{u}}, \widetilde{\mathbf{u}}) = \|\widetilde{\mathbf{u}}\|^2_{\mathbf{X}} + \chi^2 \|\widetilde{\mathbf{u}}\|^2_{L^2(E)} .$$

The $\inf - \sup$ condition of $b(.,.)$ can be proved with the help of some lemmas that can be found in Ladyzhenskaya(1969)and Belhachmi et al.[4] and hence we have the following theorem:

Theorem 2.1 *The variationnal problem* $(6$*-*$7)$ *admits a unique axisymmetric solution.*

3. Infinite Element Approximation

We will use an infinite element approximation for the variational system of equations $(6$-$7)$.We will use the Taylor-Hood element P_2/P_1, that is the velocity $\widetilde{\mathbf{u}}_h$ is assumed in the space of piecewise quadratical polynomials and the pressure $\widetilde{p}_h$ is assumed in the space of piecewise linear polynomials. It's well known that this element is well adapted for the Stokes system - see-Girault and Raviart [7], Ern and Guermond [6] $p.170 - 173$.

We assume the section boundary ∂E is a polygon and the origin 0 is in $\Gamma_0 = \partial E$. We will draw the similar curves of Γ_0 with center 0 and constants of proportionality $\xi, \xi^2, ...\xi^k, ...$, for a constant $\xi > 1$. These curves will be noted $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_k, ...$,respectively. The domains between the two polygons Γ_{k-1} and Γ_k will be denoted by E_k. We do triangulation T_h of C^0 type [8]of each sub-domain E_k and require that the triangulation of all E_k is geometrically similar to each other. Further, we require that the triangulation is regular. We define the following infinite element spaces:

$$
\begin{aligned}
S_h &= \left\{\widetilde{\mathbf{u}} \in C(E)^2;\ \widetilde{\mathbf{u}}\,|e \in \mathbf{P}_2(e), \quad \forall e \in T_h\right\} \\
X_h &= \{\widetilde{\mathbf{u}} \in \mathbf{X(E)};\, \widetilde{\mathbf{u}} \in \mathbf{S}_h\} \\
Q_h &= \left\{\widetilde{p} \in L^2_1(\Omega);\ \widetilde{p}\,|e \ \in P_1(e)\ \forall e \in T_h\right\} \\
W_h &= \left\{\widetilde{\mathbf{u}} \in C(E)^2;\ \widetilde{\mathbf{u}} \in \mathbf{X(E)}, \widetilde{\mathbf{u}}\,|e \ \in P_1(e)^2, \ \forall e \in T_h\right\}
\end{aligned}
$$

3.1. Discrete variational formulation

The discrete infinite element approximation of $(6-7)$ is: find $(\widetilde{\mathbf{u}}_h, \widetilde{p}_h) \in X_h \times Q_h$ such that

$$a(\widetilde{\mathbf{u}}_h, \widetilde{\mathbf{v}}_h) + b(\widetilde{\mathbf{v}}_h, \widetilde{p}_h) = \langle \widetilde{\mathbf{f}}, \widetilde{\mathbf{v}}_h \rangle_{(0)} \qquad \forall\, \widetilde{\mathbf{v}}_h \in X_h \tag{10}$$

$$b(\widetilde{\mathbf{u}}_h, \widetilde{q}_h) = 0 \qquad \forall\, \widetilde{q}_h \in Q_h \tag{11}$$

The well-posedness of the discrete variational problem $(10-11)$ can be proved by using some Clement interpolations in weighed spaces.

Theorem 3.1 *The infinite element approximation* $(10-11)$ *admits a unique solution.*

3.2. Algorithm

Let E be the exterior part of the meridional section of a cylinder whose underside radius is 1 and generatrix length is 2. Because of symmetry the first component of $\widetilde{\mathbf{u}}$ is identical to zero on the axis and only half of the section will be considered.The numerical tests are carried out in theses meshes. The values of $\widetilde{\mathbf{u}}_h$ at the nodes on Γ_k are arranged as a column vector :

$$y_k = (\widetilde{v}_h^{(1)}, \tilde{u}_h^{(2)}, \widetilde{v}_h^{(2)}, \tilde{u}_h^{(3)}, ..., \tilde{u}_h^{(N-1)}, \widetilde{v}_h^{(N-1)}, \widetilde{v}_h^{(N)})^T$$

where $\widetilde{\mathbf{u}}_h = (\ \tilde{u}_h^{(j)}, \widetilde{v}_h^{(j)})$, and N is the number of nodes on each Γ. The boundary value $\widetilde{\mathbf{g}}_h$ should satisfy $\int_{\Gamma_0} r\widetilde{\mathbf{g}}_h.\widetilde{\mathbf{n}}ds = 0$,that is there is a vector h such that $h^T y_0 = 0$. We take a particular function $\widetilde{q}$ in the equation (7) as: $\widetilde{q} = 0$ on $\xi^k E$, and $\widetilde{q} = 1$ on $E \backslash \xi^k E$, then we get

$$0 = \int_{E\backslash\xi^k E} r\nabla.\widetilde{\mathbf{u}}drdz = \int_{\Gamma_0} r\widetilde{\mathbf{u}}.\widetilde{\mathbf{n}}ds + \int_{\Gamma_k} r\widetilde{\mathbf{u}}.\widetilde{\mathbf{n}}ds$$

$$h^T y_k = 0$$

We normalize h to a unit vector, then we construct an orthogonal matrix $T = [h, H]$, in which h is the first column, and then we set $z_k = H^T y_k$, therefore there is a one to one correspondence between z_k and y_k. We solve the Brinkman equation on E_1 by finite element method with boundary data y_0, y_1 on the given mesh, the degrees of freedom with respect to middle points $y_{1/2}$ have already been eliminated. Let the approximate solution be $\widetilde{\mathbf{u}}_h$, then there are matrices K_0, K_0' and A, such that

$$a(\widetilde{\mathbf{u}}_h, \widetilde{\mathbf{v}}_h) = (z_0^T, z_1^T) \begin{pmatrix} K_0 & -A^T \\ -A & K_0' \end{pmatrix} (z_0, z_1) \tag{12}$$

where $\begin{pmatrix} K_0 & -A^T \\ -A & K_0' \end{pmatrix}$ is the stiffness matrix of the layer between Γ_0 and Γ_1. Since the stiffness matrices in every two neighboring layers are similar with a proportionality ξ, the stiffness matrices of the other layers are:

$$\xi^{k-1} \begin{pmatrix} K_0 & -A^T \\ -A & K_0' \end{pmatrix}, \quad k = 2, 3, ...,$$

hence the infinite element system is reduced to the following infinite system of equations:

$$\begin{aligned} -Az_0 + \xi^{\frac{1}{2}}\mathbf{K}z_1 - \xi A^T z_2 &= 0 \\ -Az_1 + \xi^{\frac{1}{2}}\mathbf{K}z_2 - \xi A^T z_3 &= 0 \\ &.... \\ -Az_{k-1} + \xi^{\frac{1}{2}}\mathbf{K}z_k - \xi A^T z_{k+1} &= 0 \end{aligned} \tag{13}$$

where $K = \xi^{\frac{1}{2}} K_0 + \xi^{-\frac{1}{2}} K_0'$

3.3. Transfer Matrix

For such an infinite algebraic system, it has been proved by Ying in [1] that there exits a real matrix X, called transfer matrix, such that

$$z_{k+1} = X z_k \tag{14}$$

then from z_0 we can get all z_k step by step, and return back to y_k which is then given by

$$y_{k+1} = H X H^T y_k \tag{15}$$

3.4. Numerical Experiments

The following example and results are reported by Fang and Lao in [3] concerning the Stokes system. We are programming similar examples in the case of the Brinkman system $(1-5)$. Fang and Lao tested in [3] with the exact solution :

$$\widetilde{\mathbf{u}} = (\frac{3rz}{16(r^2+z^2)^{5/2}}; \frac{r^2-2z^2}{16(r^2+z^2)^{5/2}}) \quad , \quad \widetilde{p} = 0 \tag{16}$$

The boundary value $\widetilde{\mathbf{g}_0} = (\widetilde{\mathbf{g}}_0^1, \widetilde{\mathbf{g}}_0^2)$ is prepared by the exact solution and taking $\xi = 1.2$ and $\widetilde{\mathbf{f}} = 0$.The numerical experiments are carried out on the original mesh and the refined ones. N is the number of nodes on each Γ_k.Table 1 lists the convergence order of error in the domain $\{(r,z); 1 \leq r, z \leq 20\}$ by increasing the nodes number and decreasing the ξ at the same time. From Table 1, we can see the first order convergence under the norm $\cdot \|\| \|_{H_1^1}$ is obtained for $\widetilde{\mathbf{u}}$, which correspond to the predicted theoretical result.

Table 1. Convergence order of the errors in domain $\{(r,z); 1 \leq r, z \leq 20\}$

N	ξ	$\|\tilde{u}-\tilde{u}_h\|_{L_1^2}$	$order$	$\|\tilde{u}-\tilde{u}_h\|_{H_1^1}$	$order$
17	1.200	0.066403		0.584932	
33	1.100	0.03258	2.32439	0.261473	1.16161
65	1.050	$3.06612E-3$	2.11238	0.112836	1.21243
129	1.025	$7.23562E-4$	2.08323	0.054524	1.04926

Table 2. Errors with different ξ's with $N = 65$

ξ	$\|\tilde{u}-\tilde{u}_h\|_{L_1^2}$	$\|\tilde{u}-\tilde{u}_h\|_{H_1^1}$
2.60	0.804957	3.283468
1.85	0.126640	1.343459
1.54	0.085436	0.742341
1.20	0.013258	0.268476
1.05	0.010972	0.235498
1.01	0.011098	0.241973

From Table 2, we see that the error tends to level when ξ decrease and observe that reducing the parameter ξ and increasing the nodes number on Γ_k properly at the same time one can get good approximations.

References

[1] L.A. Ying "Numerical Methods for Exterior Problems" Peking University Series in Mathematics vol.2 (2006).

[2] Fang, N., Ying, L. Infinite element approximation to the exterior problem of Stokes problem. J. Math.Study, 42(1): 1–19 (2009).

[3] Fang, N., Liao, C. Axisymmetric Stokes Exterior Problem and Its Numerical Computation. Acta Math. Appli. Sinica, Vol.27, N.$1(2011)$.

[4] Belhachmi, Z., Bernardi C.,Deparis, S. Weighted Clement Operator and application to the finite element discretization of the axisymmetric Stokes problem. Numerische Mathematik $105, 217 - 247(2006)$.

[5] M. Khor and W.L. Wendland, Boundary integral equations for a three-dimensional Brinkman flow problem, Math. Nachr. 282, N $/.9, 1305 - 1333(2009)$.

[6] Ern, A., Guermond, J.L. Eléments finis: théorie, applications, mise en oeuvre. Math. & Appli. 36 SMAI(Springer-Verlag) (2002).

[7] Girault, V.,Raviart, P.A. Finite element methods for navier-stokes equations: theory and algorithms. Springer-Verlag, Berlin, 1986.

Recalage non rigide des images

Représentation des transformations

BENAICHA MATTI Leyla — HACHAMA Mohamed

Laboratoire de l'Énergie et des Systèmes Intelligents,
Université de Khemis Miliana,
Route Theniat El Had,
44225, Khemis Miliana, Algérie,
Email : bmleyla@gmail.com - hachamam@gmail.com.

ABSTRACT. In this paper, we are interested in solving the problem of image registration. To do that, an energy compozed of two terms is minimized. The first is a similarity term and the second is a regularity term, constructed upond a differential operator. For the discretization of the registration deformation, two approaches are compared: a spatial approach and spectral one. In the first, the B-spline basis is used. In the second, a spectral basis is determined as the eigenvectors of the differential operator used in the regularity term. Simulations are performed to test and compare the two approaches.

RÉSUMÉ. Dans ce papier, nous nous somme intéressés à la résolution du problème de recalage d'images. Le cadre énergétique est choisi, dans lequel une énergie composée de deux termes est minimisée. Le premier est un terme de similarité et le deuxième un terme de régularité construit en utilisant un opérateur différentiel. Pour la discrétisation de la déformation de recalage, deux approches sont comparées : une approche spatiale et une approche fréquentielle. Dans la première, la base des B-splines est utilisée. Dans la deuxième, une base spectrale est déterminée comme des vecteurs propres de l'opérateur différentiel utilisé dans le terme de régularité. Des simulations sont effectuées pour tester et comparer les deux approches.

KEYWORDS : Image registration, Energy minimization, Splines, Differential operators, Eigen-vectors.

MOTS-CLÉS : Recalage d'images, Minimisation d'énergie, Splines, Opérateurs différentiels, Vecteurs propres.

1. Introduction

Le recalage non rigide des images est la processus qui vise en la recherche d'une transformation permettant la superposition de deux ou plusieurs images, ce qui est la plus part du temps nécessaire pour pouvoir comparer des images. Formellement, les images sont considérées comme des fonctions réelles définies sur un domaine $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$. On prend ici $\mathcal{D} = [0,1] \times [0,1]$ et on note les points de $\mathcal{D}$ par $x = (x_1, x_2)$. Le recalage d'une image source $\mathcal{I}$ sur une image cible $\mathcal{J}$ consiste en la recherche d'une déformation φ : $\mathcal{D} \to \mathcal{D}$, tel que $\mathcal{I} \circ \varphi$ soit similaire à $\mathcal{J}$ au sens d'un critère prédéfini. Le problème peut aussi s'exprimer de manière équivalente en terme de champ vectoriel de déplacements $\varphi = u + Id$.

Pour formuler et résoudre le problème de recalage, on se place dans le cadre énergétique qui consiste en la minimisation d'énergie de la forme [1] :

$$\mathcal{E}[u] = \mathcal{S}[\mathcal{I}, \mathcal{J}, u] + \alpha \mathcal{R}[u] \tag{1}$$

où S est un terme de similarité, $\mathcal{R}$ un terme de régularité et $\alpha > 0$ un paramètre utilisé pour contrôler et pondérer l'influence du terme de régularité par rapport au terme de la distance. En recalage iconique adopté ici [1], ce terme est basé sur les intensités des images et permet de quantifier la notion de ressemblance. Nous avons utilisé ici la somme de différences au carré (SSD), définie par :

$$\mathcal{S}[\mathcal{I}, \mathcal{J}, u] = \int_{\mathcal{D}} (\mathcal{J}(x) - \mathcal{I}(\varphi(x)))^2 dx \tag{2}$$

Par ailleurs, le second terme permet de régulariser le problème dans le sens de le rendre bien posé. De plus, la contrainte de régularité impose au champ des déplacements d'être lisse. Une classe importante de termes de régularité peut être exprimée par [3] :

$$\mathcal{R}[u] = \frac{1}{2} a[u,u] = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} < \mathcal{A}[u](x), u(x) >_{\mathbb{R}^2} dx \tag{3}$$

où $\mathcal{A}$ est un opérateur différentiel comme celui du gradient, l'opérateur de Laplace, et l'opérateur d'élasticité donné par :

$$\mathcal{A}^{élas}[u] = -\mu \Delta u - (\lambda + \mu) \nabla \, div \, u \tag{4}$$

où $\lambda \geq 0$ et $\mu > 0$ sont les constantes de Lamé. Dans ce dernier cas, on obtient :

$$\mathcal{R}[u] = \int_{\mathcal{D}} \frac{\mu}{4} \sum_{l,m=1}^{2} (\partial_{x_l} u_m(x) + \partial_{x_m} u_l(x))^2 + \frac{\lambda}{2} (div \ u(x))^2 \, dx \tag{5}$$

où u_m, u_l sont respectivement: la $m^{ième}$ et la $l^{ième}$ composante du vecteur de déplacement $u = (u_1, u_2)$.

2. Représentation des transformations

Il existe plusieurs modèles de représentation des transformations de recalage. On s'intéresse dans cet article à deux catégories. La première repose sur une approche spatiale, utilisant l'interpolation et de l'approximation des déplacements de certains points, dits points de contrôle. La deuxième classe est basée sur les vecteurs propres de l'opérateur différentiel $\mathcal{A}$, définissant le terme de régularité.

2.1. Représentation spatiale

La représentation spatiale est caractérisée par l'utilisation d'un certain nombre de points de contrôle pour représenter les transformations de recalage, puis l'interpolation de la déformation à l'ensemble du support de l'image. Plusieurs types de fonctions d'interpolation existent, parmi lesquelles on cite les fonctions à bases radiales, éléments finis, B-splines, ondelettes, ... [4].

Dans cet article, on a utilisée les B-splines comme exemple de cette classe. Soit une grille Φ de $n_x \times n_y$ points de contrôle $(\Phi_{ij})_{ij}$ espacés de $\delta_{x_1} \times \delta_{x_2}$. La transformation s'exprime en fonction des déplacements des points de contrôle, notés $\Phi^d = (\Phi^d_{ij})_{ij}$, de la manière suivante [5] :

$$u(x) = \sum_{l=0}^{3} \sum_{m=0}^{3} \beta_l(\bar{x}_1)\beta_m(\bar{x}_2)\Phi^d_{i_{x_1}+l, j_{x_2}+m},$$

où $\bar{x}_1 = x_1/\delta_{x_1} - \lfloor x_1/\delta_{x_1} \rfloor$, $\bar{x}_2 = x_2/\delta_{x_2} - \lfloor x_2/\delta_{x_2} \rfloor$ représentent la distance entre le pixel courant x et les points de contrôle les plus proches, $i_{x_1} = \lfloor x_1/\delta_{x_1} \rfloor - 1$, $j_{x_2} = \lfloor x_2/\delta_{x_2} \rfloor - 1$ sont les indices du premier point de contrôle de la grille qui intervient dans le calcul du déplacement du pixel (x_1, x_2). Les fonctions $(\beta_l)_l$ représentent la $l^{ième}$ fonction de la base B-spline donnée par [5] :

$$\beta_0(\bar{x}) = \frac{(1-\bar{x})^3}{6}, \beta_1(\bar{x}) = \frac{(3\bar{x}^3 - 6\bar{x}^2 + 4)}{6},$$

$$\beta_2(\bar{x}) = \frac{(-3\bar{x}^3 + 3\bar{x}^2 + 3\bar{x} + 1)}{6}, \beta_3(\bar{x}) = \frac{\bar{x}^3}{6}.$$

Pour minimiser l'énergie (1), nous avons utilisé l'algorithme de descente de gradient qui s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial \Phi^d}{\partial t} = -\nabla \mathcal{E}(\Phi^d)$$

La dérivée partielle de $\mathcal{E}$ par rapport la première composante de Φ_{ij}^{d} est donnée par :

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \Phi_{ij}^{d,1}}(\Phi) = -2\int_{\mathcal{D}} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial \Phi_{ij}^{d,1}}.\nabla \mathcal{I}(\varphi)\,(\mathcal{J}(x) - \mathcal{I}(\varphi)\;)\;dx$$

$$+\,\alpha\int_{\mathcal{D}}\Bigg[\frac{\partial}{\partial \Phi_{ij}^{d,1}}(\partial_{x_1}u_1(x)).((2\mu+\lambda)\partial_{x_1}u_1(x) + \lambda\partial_{x_2}u_2(x))$$

$$+\mu\frac{\partial}{\partial \Phi_{ij}^{d,1}}(\partial_{x_2}u_1(x)).(\partial_{x_2}u_1(x) + \partial_{x_1}u_2(x))\Bigg]\,dx$$

On obtient une expression similaire pour $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \Phi_{ij}^{d,2}}$.

2.2. Représentation spectrale

Dans le but de simplifier l'expression du terme de régularité, nous avons utilisé des bases spectrales pour la représentation de la transformation de recalage. Ces bases sont formées de vecteurs propres de l'opérateur différentiel $\mathcal{A}$ et satisfaisant certaines conditions limites [2]. Ici, nous avons choisit les conditions aux limites de Dirichlet homogènes pour fixer les bords des images. Avec ce choix, les vecteurs propres de l'opérateur de l'élasticité calculés sont donnés par :

$$\psi_{ij}^1(x) = v_{ij}\begin{pmatrix} i\cos(i\pi x_1)\sin(j\pi x_2) \\ j\sin(i\pi x_1)\cos(j\pi x_2)\end{pmatrix}\;;\;\psi_{ij}^2(x) = v_{ij}\begin{pmatrix} -j\cos(i\pi x_1)\sin(j\pi x_2) \\ i\sin(i\pi x_1)\cos(j\pi x_2)\end{pmatrix}$$

où $v_{ij} = \frac{2}{\sqrt{i^2+j^2}}$. On note κ_{ij}^k les valeurs propres associées aux vecteurs propres ψ_{ij}^k. La famille $(\psi_{ij}^k)_{i,j,k}$ forme une base de $L^2(\mathcal{D})$. Les transformations de recalage sont développées dans ces bases sous la forme :

$$u(x) = \sum_{i,j=1}^{n}\left(c_{ij}^1\;\psi_{ij}^1(x) + c_{ij}^2\;\psi_{ij}^2(x)\right) \tag{6}$$

où n est l'ordre de troncature. Le terme de régularité (3) devient alors :

$$\mathcal{R}(u) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(c_{ij}^1)^2\kappa_{ij}^2 + (c_{ij}^2)^2\kappa_{ij}^2$$

On exprime l'énergie en fonction du vecteur de paramètres $C = (c_{ij})_{i,j=1}^{n}$ et on adopte un schéma de descente de gradient. La dérivée partielle de l'énergie $\mathcal{E}(C)$ par rapport au coefficients c_{ij}^k est donnée par :

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial c_{ij}^k}(C) = \alpha\,c_{ij}\kappa_{ij} - 2\int_{\mathcal{D}}\psi_{ij}(x)\,.\,\nabla\mathcal{I}(x+\sum_{i,j=1}^{n}c_{ij}\;\psi_{ij}(x))\;(\mathcal{J}(x) - \mathcal{I}(x+\sum_{i,j=1}^{n}c_{ij}\;\psi_{ij}(x)))\,dx$$

3. Simulations

Nous avons implémenté et testé les deux méthodes de recalage décrites ci-dessus. Nous avons adopté l'approche multirésolution, qui consiste à augmenter le nombre de paramètres (nombre de points de contrôle ou ordre de troncature) de la transformation après un certains nombre d'itérations. Ceci permet d'accélérer la convergence de l'algorithme et le rendre plus robuste par rapport aux minima locaux. D'autre part, nous avons choisi d'utiliser un pas adaptatif dans la descente de gradient. Les paramètres de l'énergie ont été fixés expérimentalement : $\mu = 0.1$, $\lambda = 2$ et $\alpha = 0.02$.

L'évaluation des résultats de recalage d'images peut se faire au moyen des valeurs de l'énergie à minimiser $\mathcal{E}$. Les simulations ont donné des résultats comparables des deux méthodes. Cela dit, nous avons constaté que l'approche spectrale est plus rapide que l'approche spatiale. Ceci est dû à l'expression simplifiée du terme de régularité. Un exemple de recalage est montré la figure (1) à titre d'illustration.

(a) (b) (c) (d) (e)

Figure 1: Recalage d'images par une méthode spectrale (première ligne) et une méthode spatiale (deuxième ligne). (a) : Images source, (b) : Images cible, (c) : Images recalées, (d) : Différences avant recalage, (e) : Différences après recalage.

4. Conclusion

Dans ce papier, nous nous sommes intéressés à la comparaison de deux familles d'approches de représentations des transformations de recalage. La première est une approche spatiale qui repose sur l'interpolation des déplacement de certain points de contrôle. La deuxième est une approche spectrale et est basée sur les vecteurs propres d'un opérateur différentiel. Pour les deux cas, l'approche variationnelle est utilisée pour formuler et résoudre le problème de recalage. Les premiers résultats de simulation montrent que l'approche spectrale est plus efficace en temps de calcul, vu que le terme de régularité est simplifié. Toutefois, d'autres expériences sont nécessaires pour une évaluation et comparaison plus complète. Dans le futur, on testera d'autres bases pour la représentation des transformations de recalage comme les ondelettes.

References

[1] M. Hachama. Modèles de classes pour le recalage des images médicales. *Thèse de Doctorat, Université Paris Descrates, Paris*, 2008.

[2] G. Christensen. Deformable shape models for anatomy. *Thèse de Doctorat, Washington University, Missouri*, 1994.

[3] J. Larrey-Ruiz et al. A Fourier Domain Framework for Variational Image Registration. *J. Math. Imaging Vis.*, 1: 57–72, 2008.

[4] M. Holden. A review of geometric transformations for nonrigid body registration. *IEEE Trans Med Imaging.*, 2008 Jan; 27(1):111-28.

[5] D-J. Kroon. Segmentation of the mandibular canal in cone-beam ct data. *Thèse de Doctorat, Université de Twente*, 2011.

On asymptotics of oscillatory integrals and caustics of short-waves

Benaissa Abdallah* — Benlahcene Moussa**

* Faculté de médecine
université Hadj Lakhdar, Batna
Algerie
benaissa.abdallah@yahoo.fr
** Faculté des sciences
Université Hadj Lakhdar, Batna
Algerie
benlahcene_m@yahoo.fr

ABSTRACT. The aim of this paper is to investigate the problem of caustic points of short waves, emitted by smooth surfaces, by the means of the asymptotic expansions of oscillatory integrals. Precisely, we will apply a result concerning the case when the set of stationary points of the phase is a curve. We obtain results for spherical and cylindrical surfaces that agree with those obtained by the geometrical optics, and we obtain new results in other situations.

RÉSUMÉ. Dans ce travail on montre que la méthode des développements asymptotiques des integrales oscillantes s'applique efficacement au problème d'investagation de points caustiques d'ondes à longueur d'ondes courte. Pour ce faire, nous exploitons un résultat publié dans [2], sur le développement asymptotique des intégrales oscillantes dans la situation où la phase à une courbe de points stationaires. On verra que les résultats obtenus, concernant les surfaces sphériques et cylindriques, sont en accord avec ceux trouvés par l'outil de l'optique géométrique. Enfin, on étude le cas de surfaces de révolution.

KEYWORDS : asymptotic expansion, oscillatory integrals, phase stationary method, caustics, short waves.

MOTS-CLÉS : développement asymptotic, intégrales oscillantes, méthode de la phase stationaire, caustiques, ondes courtes.

1. Introduction

In many problems of optics, acoustics and other areas of science one is led to study asymptotic expansions of oscillatory integrals

$$I(\lambda) = \int_D g(x)\, e^{if(x)/\lambda} dx \ \left(\lambda \to 0^+\right), \tag{1.1}$$

where the integration domain D is a Riemannian manifold, and f and g are smooth functions in D.

In this paper, we consider the problem of the evaluation of oscillations of spherical short-waves emitted by a smooth surface S. More precisely, our aim is to illustrate by some examples how to apply the theory of asymptotics of oscillatory integrals to the problem of the exploration of caustics of short-waves, emitted by smooth surfaces. It is well known that the oscillations of such waves at a point y in the space are in the form

$$e^{2\pi i\omega t} \int_S g(x)\, e^{if(x)/\lambda} dx$$

with $g(x) = \frac{\varphi(x)}{\|x-y\|}$, $f(x) = 2\pi \|x-y\|$, where t is the time, ω the angular frequency, λ the wavelength, $\varphi(x)$ the amplitude, and dx the surface element. The caustic points are those for which the oscillatory integral is particularly important for small values of λ, more precisely the points for which the order of the oscillatory integral is greater than the order of λ^{-1} (see $[1]$, $Ch\ II$) . It is now well known that the major contributions to the asymptotic expansion of such integrals come from some specific points (see [10], Ch VIII)). In this work, we will investigate the contribution of the stationary points of the phase $y \to \|x-y\|$, when the set of such points is a simple curve in the emitting surface S. We will first recall a result concerning this situation [2], and then apply this result to the problem of caustic points.

2. Asymptotic expansions

The problem of the asymptotic expansion of oscillatory integrals is widely covered in the literature, see $[1], [3], ..., [10]$. In this section we recall a result concerning this problem in the case of non isolated singularities of the phase, which will be exploited in the next section to determine the caustics of short-waves emitted by some specific surfaces.

Lemma 2.1 *Assume that in* (1.1), D *is a bounded domain of the two-dimensional eu-*

clidean space, and f and g are smooth functions on the closure $\overline{D}$ of D. Moreover assume that the set $\gamma = \left\{x \in \overline{D} : \nabla f = 0\right\}$ of stationary points of the phase f is a simple Jordan curve γ in $\overline{D}$, and that there exist an integer $r \geq 2$ such that the following condition is fulfilled

$$\left\{ \begin{array}{c} \left|\frac{\partial^k f(x_1,x_2)}{\partial x_1^k}\right| + \left|\frac{\partial^k f(x,y)}{\partial x_2^k}\right| = 0, \\ \left|\frac{\partial^r f(x,y)}{\partial x^r}\right| + \left|\frac{\partial^r f(x,y)}{\partial y^r}\right| \neq 0, \end{array} \right\} \tag{2.1}$$

for all $1 \leq k < r$, $x \in \gamma$. Under these assumptions, the integral $I(\lambda)$ in (1.1) has the asymptotic expansion

$$I(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n, \tag{2.2}$$

where the scalar coefficients a_n $(n \geq 0)$ can be expressed in terms of the derivatives of the functions f and g over the curve γ. In particular

$$a_0 = \frac{2e^{\frac{i\pi}{2r}}}{r} \Gamma\left(\frac{1}{r}\right) \left(\frac{1}{r!}\right)^{-\frac{1}{r}} \int_{\gamma} g(x) \left(\sum_{j=1}^{2} \left(\frac{\partial^r f}{\partial x_j}\right)^{\frac{2}{r}} \right)^{-\frac{1}{r}} d\gamma, \tag{2.3}$$

$d\gamma$ being the element length of the curve γ.

Proof. By the use of Theorem 1 in [2] . □

Theorem 2.2 *Assume that in (1.1) D is a surface in the ordinary euclidean space and dx is its surface element. Furthermore, assume that the following conditions are fulfilled i)- The set $\gamma = \{x \in M : \nabla f = 0\}$ of stationary points of f is a simple curve in D. ii)- there is an integer $r \geq 2$ such that, for every point $x \in \gamma$, there exist two open subsets O in $\mathbb{R}^2$ and V in D, so that $x \in V$, the mapping*

$$O \ni (s_1, s_2) \rightarrow \varphi(s_1, s_2)$$

is a local parametrization of the surface D, and

$$\left\{ \begin{array}{c} \left|\frac{\partial^k F}{\partial s_1^k}(s_1,s_2)\right| + \left|\frac{\partial^k F}{\partial s_2^k}(s_1,s_2)\right| = 0, \\ \left|\frac{\partial^r F}{\partial s_1^k}(s_1,s_2)\right| + \left|\frac{\partial^r F}{\partial s_2^r}(s_1,s_2)\right| \neq 0, \end{array} \right\} \tag{2.4}$$

for all $(s_1, s_2) \in O$, $1 \leq k < r$. Under theses assumptions, the integral in (1.1) has the asymptotic expansion given (2.2) and (2.3) .

Proof. The above Lemma provides local expansions of our integral. Then, simply add these local expansions. □

3. Caustics of emitting smooth surface

3.1. quasi-spherical source.

It is well known in the geometrical optics that the caustics of a wave emitted by a spherical surface is the center of the sphere. Since the distance from the center of the sphere and any point in the sphere is constant, then all its derivatives at any point vanish. Consequently, also the asymptotic arguments show that the center is a caustic point. Now consider a two-dimensional neighborhood of the point $(0,1,0)$ obtained by a deformation of a neighborhood of the same point, and parametrized in the spherical coordinates as

$$(\theta,\varphi) \to \left(\theta,\varphi,1+C\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)^r\right).$$

The distance $f(\theta,\varphi)$ from the origin $(0,0,0)$ to the point (θ,φ) is

$$f(\theta,\varphi) = 1+C\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)^r,$$

and we have

$$\left.\begin{array}{c} \frac{\partial^p f}{\partial\theta^p}\left(\varphi,\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\partial^p f}{\partial\varphi^p}\left(\varphi,\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ \frac{\partial^r f}{\partial\theta^r}\left(\varphi,\frac{\pi}{2}\right) = C \neq 0. \end{array}\right\}$$

for all $0 \le \varphi \le 2\pi$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, and $p < r$. By Theorem 2, we have $I(\lambda)$ is of order of $\lambda^{-\frac{1}{r}}$, where the integer r is assumed ≥ 2. Consequently the origin $(0,0,0)$ is still a caustic point, generated by the point $(0,1,0)$. This argument is obviously valid if we replace the point $(0,1,0)$ by another point in the sphere .

3.2. cylindrical source

Let (φ,ρ,z) be the cylindrical coordinates, and consider the right cylinder parametrized by

$$(\varphi,z) \to (\varphi,1,z),\ 0 \le \varphi \le 2\pi, |z| \le 1.$$

For every $|z_0| \le 1$, the distance $f_{z_0}(\varphi,z)$ from the point $(0,0,z_0)$ to the point (φ,z) in the cylinder is equal $\left(1+(z-z_0)^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Consequently

$$\left|\begin{array}{c} \frac{\partial f_{z_0}}{\partial\varphi}(\varphi,z_0) = \frac{\partial f_{z_0}}{\partial z}(\varphi,z_0) = 0 \\ \frac{\partial f_{z_0}^2}{\partial z^2}(\varphi,z_0) \neq 0 \end{array}\right.$$

for all $0 \le \varphi \le 2\pi$. Thus Theorem 3 implies that $I(\lambda)$ is of order of $\frac{1}{2}$, and then the points in the axis $\rho = 0, |z| \le 1$ are caustic points. On the other hand, we may prove that the unique caustic point, generated by a neighborhood of a point M in the cylinder, is the center of the circle formed by the intersection of the cylinder and the normal plane to the cylinder at M.

3.3. Surfaces of revolution

Let γ be a curve in the plane (x_1, x_3) defined by a smooth function $x_3 \to x_1 = h(x_3)\ (-\delta \leq x_3 \leq \delta)$, and denote by Ω the surface of revolution of the curve λ about the vertical axis Ox_3. Let us now explore caustic points on the vertical axis, of an arbitrarily small neighborhood of a point $(\varphi_0, h(z_0), z_0)$. The distance $f(\varphi, z)$ from the origin O to a point $(\varphi, h(z_1), z_1)$ in Ω is given by

$$f^2(\varphi, \rho) = {z_1}^2 + h(z_1)^2 .$$

If the point O is a caustic point, generated by a point $(\varphi, h(0), 0)$, then we have

$$\frac{\partial f^2}{\partial z}(\varphi, 0) = 2\frac{dh}{dz}(0)\, h(0) = 0.$$

It follows

$$\frac{dh}{dz}(0) = 0. \tag{3.1}$$

Condition (3.1) may be used to construct surfaces of revolution with caustic points on its axis.

Example 3.1 *Set*

$$(\varphi, z) \to (\varphi, h(z), z)\,, \text{ with } h(z) = z^r,\ r \geq 2,\ |z| \leq \frac{1}{2}. \tag{3.2}$$

The surface of revolution parametrized by (3.2) *is a crown. and the origin* O *is a caustic point.*

References

[1] Arnold, V., Varchenko, S. & Gousein-Zadé, S. Singularités des applications différentiables, 2^{eme} partie. *Editions Mir Moscou, 1986.*

[2] Benaissa, A. & Roger, C. Développement asymptotique d'intégrales doubles avec une courbe de points stationnaires. *C.R Acad.Sci. Paris, t.* ***333****, Série I, (2001) pp. 17-22.*

[3] Dieudonné, J. Calcul infinitésimal. *Hermann, Paris, 1968.*

[4] Dingle, R. B. Asymptotic expansions: their derivation and interpretation. *Academic Press, New York,1973* .

[5] Erdélyi, A. Asymptotic expansions. *Dover, New York, 1956.*

[6] Guillemin, V. & Sternberg, Sh. Geometric asymptotics. *Providence, 1977.*

[7] Hardy, G. H. Divergent series. *Oxford University Press (Clarendon) London, 1949.*

[8] Olver, F. W. J. Asymptotics and special functions. *Academic press, New york, 1974.*

[9] Widder, D. V. The Laplace transform. *Princeton university press, Princeton, New Jerzey, 1941.*

[10] Wong, R. Asymptotic approximations of integrals. *Academic Press, 1989.*

Galerkin method for solving a telegraph equation with a weighted integral condition

A. Guezane-Lakoud — N. Bendjazia

Laboratory of Advanced Materials
Faculty of Sciences.
Badji Mokhtar University. Algeria
a_guezane@yahoo.fr,

ABSTRACT. The aim of this work is the study of a nonlocal problem for a telegraph equation with weighted integral condition. By the Galerkin method, we construct a discrete numerical solution of the approximate problem, then the convergence of the method and the well posedness of the problem under study are established.

RÉSUMÉ. Le but de ce travail est l'étude d'un problème d'une équation de Telegraphel avec des conditions intégrales avec poinds en utilisant la methode de Galerkin. On construit un problème approché dont la solution pour prouver la convergence de la methode .

KEYWORDS : Galerkin method, A priori estimate, Telegraph equation, conditions intégrales avec poinds.

MOTS-CLÉS : Galerkin, conditions intégrales, estimation a priori, équation de Telegraphe.

1. Introduction

This paper is devoted to the investigation of a non-local problem for a telegraph equation and a weighted integral condition using the Galerkin method, which is, a convenient tool for both the theoretical and numerical analysis of the considered problem.

More precisely we apply Galerkin method to determine a function $u = u(x,t)$, $(x,t) \in Q = (0,1) \times (0,T)$, which satisfies, in some appropriate sense, the telegraph equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c(x,t)u = f(x,t), \tag{1.1}$$

subject to the initial conditions

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad u_t(x,0) = \psi(x) \tag{1.2}$$

$$u(0,t) = 0 \tag{1.3}$$

and the weighted integral condition

$$\int_0^1 u(x,t)dx = \int_0^1 g(x)u(x,t)dx = 0 \tag{1.4}$$

where $f \in L_2(Q)$ and $\varphi, \psi \in L_2(0,1)$ are given functions.

We mention that Galerkin method does not give only a discrete approximation scheme, but it provides also a construction proof of the existence of a unique solution. We should mention also here that the presence of the weighted integral term in the boundary condition leads to more difficulties. Integral conditions occur when the values of function on the boundary are related to values inside the domain or when direct measurements on the boundary are not possible.

Problems with integral conditions have many applications in many problems such as the theory of heat conduction, elasticity, heat, plasma physics, control theory, etc... In particular, the presence of integral conditions greatly improves the qualitative and quantitative characteristics of the problem. Many authors studied nonlocal problem with integral conditions by different methods, the reader can see the references therein.

The first paper investigated nonlocal problem with integral conditions goes back to Cannon [4]. Later, mixed problems with integral conditions were studied by many authors, we can cite the work of Beilin[1,2], Bahuguna et al [3], Dabas et al [6].

The summarize of this paper is as follows: In the next section we define the generalized solution and the functional spaces. In section 3 we prove that the generalized solution if it exists is unique. The existence of the generalized solution by using Galerkin method is established in the third section, for this, we construct an approximation solution of the problem (1.1)-(1.4), we prove that we can extract a subsequence which converges to the desired generalized solution.

2. Notation and definition

Let $L^2(0,1)$ be the usual space of Lebesgue square integrable real functions on $(0,1)$ whose inner product and norm will be denoted by $(.,.)$ and $\|.\|$ respectively.

$H(Q)$ is the Sobolev space consists of all functions $u \in L^2(Q)$ having the weak derivatives belong to $L^2(Q)$, with the norm

$$\|u\|^2_{H(Q)} = \int_0^T \int_0^1 \left[\left(\int_x^1 u(\xi,t)d\xi \right)^2 + (u(x,t))^2 + \left(\int_x^1 u_t(\xi,t)d\xi \right)^2 \right] dxdt$$

Consider the following spaces:

$H_0(Q) = \{u(x,t) \in H(Q), u(0,t) = 0\}$

$H_T(Q) = \{v(x,t) \in H(Q), v(x,T) = 0\}$

We define the generalized solution of the problem (1.1)-(1.4). Suppose that u is a solution of this problem , multiply the both sides of equation (1.1) by $\int_x^1 (h(\xi) - h(x))v(\xi,t)\,d\xi$, where $v \in H_T(Q)$, integrate by parts the resultant equation over the domain Q, use the conditions (1.2), (1.3), (1.4) and the fact that $v(x,T) = 0$, it yields

$$\begin{aligned} & \int_Q \Bigg[g'(x) \int_x^1 u_t d\xi \int_x^1 v_t(\xi,t)\,d\xi - a^2 g'(x) uv - (4aa_x g'(x) \\ & + a^2 g^{(2)}) u \int_x^1 v(\xi,t)\,d\xi - cg'(x) \int_x^1 u(\xi,t)\,d\xi \int_x^1 v(\xi,t)\,d\xi \\ & + (c_x - 2(aa_x)_x) \left(\int_x^1 u(\xi,t)\,d\xi \right) \left(\int_x^1 (g(\xi) - g(x)) v(\xi,t)\,d\xi \right) \Bigg] dxdt \\ = \;& \int_Q f(x,t) \left(\int_x^1 (g(\xi) - g(x)) v(\xi,t)\,d\xi \right) dxdt \\ & - \int_0^1 g'(x) \left(\int_x^1 \psi(\xi)\,d\xi \right) \left(\int_x^1 v(\xi,0)\,d\xi \right) dx. \end{aligned} \qquad [1]$$

Definition 1. *By a generalized solution of problem (1.1)-(1.4), we mean a function* $u \in H_0(Q)$ *satisfying for all* $v \in H_T(Q)$ *identity (2.1) .*

3. Uniqueness of generalized solution

To study the solvability of problem, we make the following hypotheses

H1: The functions $a\,(x,t)$ and $c\,(x,t)$ are nonnegative and satisfy

$$\begin{aligned} 0 &< a_0 \leq a\,(x,t) \leq A_0, \quad |a_t, a_x, a_{xx}, a_{xxx}| \leq A_1, \\ 0 &< c_0 \leq c\,(x,t) \leq C_0, \quad |c_x, c_t| \leq C_1. \end{aligned}$$

H2: The function $g(x)$ is nondecreasing and satisfies

$$g \in C^3\,(0,1)\,, \quad \max_{x\in(0,1)} |g(x)| \leq k_1, \quad \max_{x\in(0,1)} \left(|g'(x)|\,, \left|g^{(2)}(x)\right|, \left|g^{(3)}(x)\right|\right) \leq k_2.$$

Theorem 3.1 *Assume that $f \in L_2\,(Q)\,,\, \varphi,\, \psi \in L_2\,(0,1)$ and hypotheses H1-H2 hold, then the generalized solution of problem (1.1)-(1.4) if it exists is unique.*

---

4. Existence of generalized solution

In order to prove the existence of the generalized solution we apply Galerkin method.

Theorem 4.1 *Assume that the assumptions of Theorem 1 hold, then the non-local problem (1.1)-(1.4) has a unique solution $u \in H_0\,(Q)$.*

Proof. Let $\{w_k\,(x)\}$ be a fundamental system in $H_0(0,1)$, such that $(w_k, w_i) = \delta_{k,i}$, then the approximate solution of the problem (1.1)-(1.4) can be written as

$$u^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\,(t)\,w_k\,(x)\,. \tag{4.1}$$

The approximate of the functions $\varphi(x)$ and $\psi(x)$ are denoted respectively by

$$\begin{aligned} \varphi^{(n)}\,(x) &= \sum_{k=1}^{n} \varphi_k w_k\,(x)\,, \quad \psi^{(n)}\,(x) = \sum_{k=1}^{n} \psi_k w_k\,(x) && [2] \\ \alpha_k\,(0) &= \varphi_k, \;\; \alpha_k^{'}\,(0) = \psi_k. \end{aligned}$$

Substituting the approximate solution in equation (1.1), multiplying both sides by $\int_x^1 (g(\xi) - g(x)) w_i(\xi) d\xi$, then integrating according to x on $(0,1)$, it yields

$$\int_0^1 (u_{tt}^{(n)}(x,t) - a^2(x,t) u_{xx}^{(n)}(x,t) + c(x,t) u^{(n)}(x,t)) \times$$

$$\left(\int_x^1 (g(\xi)-g(x))w_i(\xi)d\xi\right)dx=\int_0^1 f(x,t)\left(\int_x^1 (g(\xi)-g(x))w_i(\xi)d\xi\right)dx. \tag{4.3}$$

In view of (4.1), and integrate by parts in $L_2(0,1)$ the left-hand side of (4.3), we obtain

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^{''}(t)\,\theta_{k,i}+\alpha_k(t)\,\sigma_{k,i} &= f_i(t)\\ \alpha_k(0) &= \varphi_k;\;\; \alpha_k^{'}(0)=\psi_k\end{aligned}$$

where

$$\theta_{k,i}=g'(x)(\int_x^1 w_k(\xi)\,d\xi,\int_x^1 w_i(\xi)d\xi)_{L_2(0,1)}$$

$$\begin{aligned}&\sigma_{k,i}=(c_x+2\,(3aa_{xx}+aa_{xxx}))\times\\ &\left(\int_x^1 w_k(\xi)\,d\xi,\int_x^1 (g(\xi)-g(x))w_i(\xi)d\xi\right)_{L_2(0,1)}\\ &(6aa_xg^{(2)}(x)+a^2g^{(3)}(x)-6\left(\left(a_x^2\right)+aa_{xx}\right)g'(x))\\ &\times\left(\int_x^1 w_k(\xi)\,d\xi,\int_x^1 w_i(\xi)d\xi\right)_{L_2(0,1)}\\ &\left.+\,(4aa_xg'+a^2g^{(2)})\left(w_k,\int_x^1 w_i(\xi)d\xi\right)_{L_2(0,1)}+g'a^2\,(w_k,w_i)_{L_2(0,1)}\right]\end{aligned}$$

$$f_i(t)=\int_0^1 f(x,t)\int_x^1 (g(\xi)-g(x))w_i(\xi)d\xi dx,$$

Consequently we obtain a Cauchy system of second order linear differential equations with smooth coefficients, so it has one and only one solution, that for every n there exists a unique sequence $u^{(n)}$ that satisfies (4.3). □

Now we shall prove that this sequence is convergent, for this, we will prove that is bounded and so we can extract a subsequence that is weakly convergent, then its limit is the desired solution of the problem (1.1)-(1.4).

Lemma 4.2 *The sequence* $\left(u^{(n)}\right)$ *is bounded in* $H_0(Q)$.

Proof. Multiplying (4.3) by $\alpha_i^{'}(t)$ then summing with respect to i from 1 to n it yields

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \Big(u_{tt}^{(n)}(x,t) - a^2(x,t)u_{xx}^{(n)}(x,t) + c(x,t)u^{(n)}(x,t)\Big)\\
&\times \int_x^1 (g(\xi)-g(x))u_t^{(n)}(\xi,t)d\xi dx\\
= &\int_0^1 f(x,t)\int_x^1 (g(\xi)-g(x))u_t^{(n)}(\xi,t)d\xi dx
\end{aligned} \qquad [3]$$

Integrating (4.6) over t from 0 to τ and applying similar technics that have been used to prove the uniqueness, we obtain

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left[\frac{1}{2}g'(x)c\,(x,\tau)\left(\int_x^1 u^{(n)}(\xi,\tau)d\xi\right)^2 + \frac{1}{2}g'(x)a^2\,(x,\tau)\left(u^{(n)}(x,\tau)\right)^2\right.\\
&\left.+\frac{1}{2}g'(x)\left(\int_x^1 u_t^{(n)}(\xi,\tau)d\xi\right)^2\right]dx\\
= &\int_0^1 \left[\frac{1}{2}g'(x)c\,(x,0)\left(\int_x^1 \varphi^{(n)}(\xi)d\xi\right)^2 + \frac{1}{2}g'(x)a^2\,(x,0)\left(\varphi^{(n)}(x)\right)^2\right.\\
&\left.+\frac{1}{2}g'(x)\left(\int_x^1 \psi^{(n)}(\xi)d\xi\right)^2 dx\right] +\\
&\int_{Q^\tau} -2(a_x^2+aa_{xx})u^{(n)}\int_x^1 (g(\xi)-g(x))u_t^{(n)}(\xi,t)d\xi + a^2g^{(2)}u^{(n)}\int_x^1 u_t^{(n)}(\xi,t)d\xi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+g'(x)aa_t(u^{(n)})^2 + c_x\left(\int_x^1 u^{(n)}(\xi,t)d\xi\right)\left(\int_x^1 (g(\xi)-g(x))u_t^{(n)}(\xi,t)d\xi\right)\\
&\left.+\frac{1}{2}g'(x)c_t\left(\int_x^1 u^{(n)}(\xi,t)d\xi\right)^2 + f(x,t)\left(\int_x^1 (g(\xi)-g(x))u_t^{(n)}(\xi,t)d\xi\right)\right]dxdt.
\end{aligned}$$

With the help of Cauchy inequality, we obtain

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 k_2\left[\left(\int_x^1 u^{(n)}(\xi,\tau)d\xi\right)^2+u^{(n)}(x,\tau)^2+\left(\int_x^1 u_t^{(n)}(\xi,\tau)d\xi\right)^2\right]dx \\
\leq\ & \widetilde{L}\left[\left\|\varphi^{(n)}\right\|^2+\left\|\psi^{(n)}\right\|^2+\parallel f\parallel^2_{L_2(Q^\tau)}\right. \\
&+\int_{Q^\tau}\left(\int_x^1 u^{(n)}(\xi,t)d\xi\right)^2+u^{(n)}(x,t)^2 \\
&\left.+\left(\int_x^1 u_t^{(n)}(\xi,t)d\xi\right)^2\right]
\end{aligned}$$

where $\widetilde{L}=\widetilde{M}\,/\widetilde{m},\ \widetilde{m}\ =\min\left\{k_2,k_2a_0^2,k_2c_0\right\}$

$\widetilde{M}=\max\left\{k_2,k_2A_0^2,k_2C_0,C_1(k_1+1/2k_2),k_1(C_1+2A_1^2+2A_0A_1+1)+\right.$

$\left.k_2A_0^2,2k_1(A_0A_1+A_1^2)+k_2(A_0^2+A_0A_1).\right\}$

.Now applying Gronwall Lemma, we get

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\left[\left(\int_x^1 u^{(n)}(\xi,\tau)d\xi\right)^2+u^{(n)}(x,\tau)^2+\left(\int_x^1 u_t^{(n)}(\xi,\tau)d\xi\right)^2\right]dx \\
\leq\ & e^{\tau\widetilde{L}}\left(\left\|\varphi^{(n)}\right\|^2+\left\|\psi^{(n)}\right\|^2+\parallel f\parallel^2_{L_2(Q)}\right) \qquad [4]
\end{aligned}$$

Integrating (4.7) according to τ on $[0,T]$ it yields

$$\left\|u^{(n)}\right\|^2_{H_0(Q)}\leq Te^{T\widetilde{L}}\left(\left\|\varphi^{(n)}\right\|^2+\left\|\psi^{(n)}\right\|^2+\parallel f\parallel^2_{L_2(Q)}\right). \qquad (4.8)$$

The inequality (4.8) implies the boundeness of the sequence $u^{(n)}$. □

REMARK. — W

e have proved that the sequence $\left\{u^{(n)}\right\}$ is bounded, so we can extract a subsequence which we denote by $\left\{u^{(n_k)}\right\}$, that is weakly convergent, then we prove that its limit is the desired solution of the problem (1.1)-(1.4).

Lemma 4.3 *The limit of the subsequence $\left\{u^{(n_k)}\right\}$ is the solution of the problem (1.1)-(1.4).*

References

[1] S. A. Beilin, On a Mixed nonlocal problem for a wave equation, Electron. J. Differential Equations 103, (2006), 1-10.

[2] S. A. Belin, Existence of solutions for one dimensional wave equations with nonlocal conditions, Electronic Journal of Differential equations. 76 (2001), 1-8.

[3] D. Bahuguna, S. Abbas and J. Dabas, Partial functional differential equation with an integral condition and applications to population dynamics, Nonlinear Anal, TMA 69 (2008), 2623–2635.

[4] J.R. Cannon, The solution of heat equation subject to the specification of energy. Quart. Appl. Math. 1963, Vol 21, N 2, 155-160.

[5] J.R. Cannon and Y. Lin, A Galerkin procedure for diffusion equations subject to specification of mass, SIAM J. Numer. Anal. 24 (1987) 499–515.

[6] J. Dabas and D. Bahuguna, An integro-differential equation with an integral boundary condition, Mathematical and Computer Modelling 50 (2009), 123–131.

TAMTAM, Algérie, Alger 27 — 30 Avril 2013

Solution au sens des moindres carrés

Pour l'équation du Transport Et principe du maximum

K. Benmansour* [1]**,** **** — **L. Piffet*** — **J. Pousin** * — **F. Abi Ayed** **

* Université de Lyon , INSA de Lyon ICJ UMR CNRS 5208
20 Av. A. Einstein
France
Email :khadidja.benmansour@insa-lyon.fr
loic.piffet@insa-lyon.fr
jerome.pousin@insa-lyon.fr
** Université Abou Bekr Belkaid de Tlemcen
Département de mathématiques Faculté des sciences Université de Tlemcen BP 119
Algerie
Email :f-abiayad@mail.univ-tlemcen.dz

RÉSUMÉ. Dans ce papier, nous considérons une formulation de l'équation du transport au sens des moindres carrés. Nous rappelons que le principe du maximum faible est vérifié par la formulation continue, et nous proposons des méthodes numériques pour que le principe du maximum discret soit satisfait en introduisant des problèmes de minimisation sous contraintes.

ABSTRACT. In this note, we deal with a least squares formulation for the transport equation. Some numerical schemes are proposed in order that a discret maximum principle hold true. This schemes are obtained by considering optimization problems subject to constraints.

MOTS-CLÉS : équation de transport,les méthodes espaces-temps au sens moidres carrés, variation totale .

KEYWORDS : transport equation, space-time least squares methods, total variation.

1. Financé par Labex Milyon et ANR 3DSTRAIN

1. Introduction

Résoudre l'équation du Transport au sens des moindres carrés est nécessaire dans de nombreuses applications physiques, et en imagerie par exemple, où il est souvent nécessaire de rajouter des contraintes à l'équation du Transport (appelée flot optique) comme une condition finale dans le cas du recalage.

Le principe du maximum est satisfait par la formulation continue au sens des moindres carrés, et sa démonstration demande un argument de type perturbation singulière. Le problème approché par une méthode d'éléments finis de Lagrange y compris à l'ordre un n'est pas vérifié. Afin d'imposer le principe du maximum discret (PMD) nous proposons une modification de la méthode de Galerkin en y adjoignant des contraintes d'inégalité. Mentionnons [4] et [2] où une stratégie similaire a été utilisée et analysée, dans un contexte algébrique pour le premier et pour des méthodes ALE pour le second. Dans ce travail, nous proposons d'introduire une contrainte de non négativité pour la solution afin d'éviter les undershooting, et de rajouter une contrainte de régularité concernant la variation totale de la solution pour éviter les overshooting.

Le papier est organisé de la manière suivante. A la section 2 le problème au sens des moindres carrés est introduit. La section 3 commence par quelques expérimentations numériques, et la contrainte de non négativité des solutions est introduite. Dans la section 4, une contrainte sur la variation totale est introduite pour contrôler les overshooting par exemple et les oscillations. La précision de la méthode est étudiée.

2. Principe du Maximum pour le problème continu

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine de frontière lipschitzienne $\partial\Omega$ satisfaisant la propriété du cone. Si $T > 0$ est donnée, soit $Q = \Omega\times]0,T[$. Considérons une vitesse d'advection $v : Q \to \mathbb{R}^d$ et $f \in L^2(Q)$ un terme source donné. Dans tout ce papier la vitesse v vérifie au moins la régularité suivante : $v \in L^\infty(Q)^d$; et $\operatorname{div} v \in L^\infty(Q)$. Soit $\Gamma_- = \{x \in \partial\Omega : (v(x,t) \mid n(x)) < 0\}$ où $n(x)$ est la normale extérieure de $\partial\Omega$ au point x. On suppose que Γ_- ne dépend pas de t.
Le problème consiste à trouver une fonction $u : Q \to \mathbb{R}$ satisfaisant :

$$\left\{\begin{array}{lll} \partial_t u + (\, v(x,t) \,|\, \nabla u(x,t) \,) = f & \text{dans}\, Q & \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{pour} & x\,\text{dans}\,\Omega \\ u(x,t) = u_1(x,t) & \text{pour} & x\,\text{sur}\,\Gamma_-. \end{array}\right. \tag{1}$$

Quand u_1, u_0, et u sont suffisamment régulières, en changeant le terme source f si nécessaire, on peut supposer que $u_1 = 0$ sur Γ_-, et $u_0 = 0$ sur Ω. Le cadre fonctionnel pour une formulation variationnelle du problème (1) est donné, pour v régulière. On définit $\tilde{v}$ par $\tilde{v} = (1, v_1, v_2, \ldots, v_d)^t$ et pour une fonction suffisamment régulière φ définie sur Q, soit $\widetilde{\nabla}\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_d}\right)^t$, le produit scalaire euclidien est noté $(\,.\,|\,.\,)$. Soit

$$\partial Q_- \quad = \quad \{(x,t) \in \partial Q, (\,\widetilde{v}\,|\,\widetilde{n}\,) < 0\} = \Gamma_- \times (0,T) \,\cup\, \Omega \times \{0\},$$

où $\widetilde{n}$ désigne le vecteur normal extérieure unitaire sur ∂Q, et

$$u_b(x,t) = \begin{cases} u_0(x) & \text{si} \quad (x,t) \in \Omega \times \{0\} \\ u_1(x) & \text{si} \quad (x,t) \in \Gamma_- \times (0,T). \end{cases}$$

Les espaces de Sobolev anisotropiques

$$H(\partial Q_-) = \left\{\varphi \in L^2(Q), \left(\,\widetilde{v}\,|\,\widetilde{\nabla}\varphi\right) \in L^2(Q), \varphi|_{\partial Q_-} \in L^2(\partial Q_-, |\,(\,\widetilde{v}\,|\,\widetilde{n}\,)\,|\,d\widetilde{\sigma})\right\}$$

et $H_0(\partial Q_-) = \{\varphi \in H(\partial Q_-),\, \varphi = 0 \text{ sur } \partial Q_-\}$ sont introduits. Une formulation du problème (1) au sens des moindres carrées est donnée par :

$$\rho = argmin_{w \in H_0(\partial Q_-)} \int_Q ((\,\widetilde{v}\,|\,\widetilde{\nabla}w\,) - f)^2 \, dt \, dx = argmin_{w \in H_0(\partial Q_-)} J(w).$$

La fonctionnelle J est convexe, continue et dérivable. La dérivée de Gâteau de J est $DJ(\rho)\varphi = \int_Q \left(\left(\,\widetilde{v}\,|\,\widetilde{\nabla}\rho\right) - f\right) \left(\,\widetilde{v}\,|\,\widetilde{\nabla}\varphi\right) dx\; dt$. Donc, une condition suffisante pour obtenir la solution au sens des moindres carrés de (1) est la *formulation faible* suivante : Trouver $\rho \in H_0(\partial Q_-)$ tel que

$$\int_Q \left(\,\widetilde{v}\,|\,\widetilde{\nabla}\rho\right) \left(\,\widetilde{v}\,|\,\widetilde{\nabla}\varphi\right) dx\; dt = \int_Q f \left(\,\widetilde{v}\,|\,\widetilde{\nabla}\varphi\right) dx\; dt \tag{2}$$

pour tout $\varphi \in H_0(\partial Q_-)$.

Théorème 2.1 *Pour v régulière, et $f \in L^2(Q)$, le problème (1) admet une unique solution $u = \rho + (1-t)u_b$. En outre, pour $f = 0$, u satisfait le principe du maximum :* $\inf u_b \leq u \leq \sup u_b$.

Preuve. La démonstration du principe du maximum demande d'utiliser une méthode de perturbation singulière, elle est donnée dans [5] □

3. Problème discrétisé

Soit $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N\}$ une base du sous-espace d'éléments finis $V_h \subset H_0(\partial Q_-)$, obtenue, par exemple, pour un maillage du domaine Q, avec des éléments finis du type $Q1$. Une approximation du problème consiste à trouver $\rho_h = \sum_{j=1}^{N} \varphi_j(t,x) \cdot \rho_j$ tel que $\forall \varphi_i, \sum_{j=1}^{N} \rho_j \int_Q \left(\widetilde{v} \,|\, \widetilde{\nabla}\varphi_j \right) \left(\widetilde{v} \,|\, \widetilde{\nabla}\varphi_i \right) \, dx\, dt = \int_Q f \left(\widetilde{v} \,|\, \widetilde{\nabla}\varphi_i \right) \, dx\, dt.$
La méthode que nous proposons est une méthode de marche en temps. En effet cela est possible, car on suppose que $\widetilde{v}_1 > 0$, alors toutes les courbes sont croissantes par rapport au temps. Le principe de cette méthode : À chaque pas de temps on résout un problème " local en temps", où l'état initial est l'état au pas de temps courant et l'inconnu est l'état au pas de temps suivant. Nous calculons la matrice de rigidité A du système pour un domaine $\Omega \times (t^n, t^{n+1})$. La solution est obtenue en résolvant le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} Au^{n+1} & = & F(t^{n+1}) \\ u^{n+1} & = & \left\{ \begin{array}{lll} u^{n+1} & sur & \Omega \\ u^n & sur & \Gamma_- \end{array} \right. \end{array} \right. \tag{3}$$

3.1. Exemple numérique

Considérons le problème de l'équation de transport avec condition initiale non nulle et une vitesse constante pour $\Omega = (0,1)$

$$\partial_t u + \partial_x u = 0 \quad \text{dans } Q \tag{4}$$

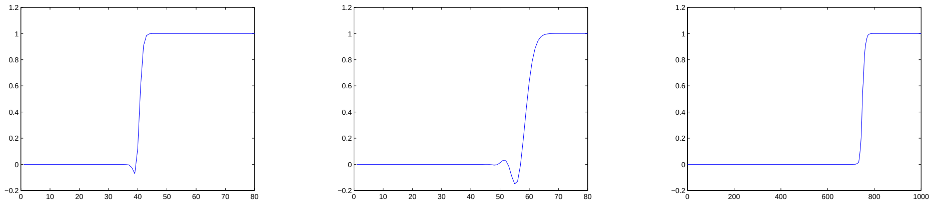
avec $u(x,0) = u_0(x) = \frac{1}{2}(1 - tanh(100x - 50))$, et on résout par la méthode de marche en temps pour un seul pas de temps et pour 20 pas de temps avec 80 points en espace, en respectant le CFL on peut obtenir le pas de temps maximal (ici, le pas de temps est égale au pas d'espace). La figure 1(a) représente la solution pour un seul pas de temps, la figure 1(b) représente la solution pour 20 pas de temps. Malgré les oscillation présentes en (a) et (b), la méthode converge comme il est montré en figure 1(c) où nous avons 1000 points en espaces.

3.2. Principe du maximum

Afin d'avoir une solution positive on transforme le problème en un problème de minimisation sous contrainte.
Trouver $\rho_p \in \mathbb{R}^N$ vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} A\rho_p = F \\ \rho_p \geq 0 \end{array} \right. \tag{5}$$

On utilise les conditions de complémentarité données pour le problème dans $\mathbb{R}^N$ (voir par exemple [6]), puisque le problème peut être considéré comme la minimisation de la



(a) (b) (c)

Figure 2 – (a) Solution pour un pas de temps. (b) Solution pour 20 pas de temps. (c) Convergence de la solution

fonctionnelle : $\frac{1}{2}X^tAX - X^tF$ sur le cône $\mathbb{R}^N_+$. En notant $\Lambda = (A\rho_p - F)$ nous devons satisfaire : $0 \leq \Lambda; \quad 0 \leq (A\rho_p - F); \rho_p \perp (A\rho_p - F)$.

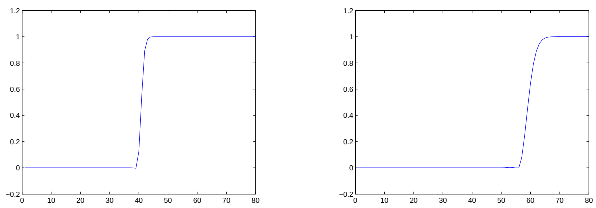
Nous notons que les trois conditions sont équivalentes pour tout réel $0 < r$ à : $\Lambda = (\Lambda - r\rho_p)^+$. Une formulation avec multiplicateur de Lagrange généralisé s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{c} A\rho_p = F + \Lambda \\ \Lambda = (\Lambda - r\rho_p)^+ \end{array} \right.$$

que l'on résout itérativement avec : $\rho_p^0 = 0; \Lambda^0 = 0$

$$\left\{ \begin{array}{c} A\rho_p^{n+1} = F + \Lambda^{n+1} \\ \Lambda^{n+1} = (\Lambda^n - r\rho_p^n)^+ \end{array} \right.$$

Nous prenons le même exemple que précédemment, où la solution est représentée à la figure 2 pour un pas de temps et pour 20 pas de temps.



(a) (b)

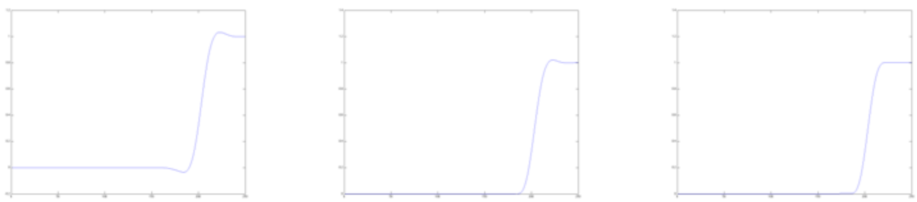
Figure 3 – (a) Solution pour un pas de temps. (b) Solution pour 20 pas de temps.

4. Contrainte de régularité sur la variation totale

Le fait d'imposer une condition finale implique, d'un point de vue numérique, de résoudre le problème de façon globale en temps. Ceci fait apparaître en plus du phénomène d'undershooting, un phénomène d'overshooting au voisinage des sauts (voir figure 3. (a)). Afin de contrôler ces artefacts, on propose d'imposer la positivité de la solution tout en pénalisant sa variation totale. Ceci revient à résoudre le problème discrétisé suivant :

$$\min_{V_h} \frac{1}{2} \int_Q \left(\partial_t u + (\, v(x,t) \,|\, \nabla u(x,t)\,) - f\right)^2 \, dtdx + I_{C_h}(u) + \lambda TV(u) \qquad (6)$$

avec $\lambda > 0$, où $C_h = \left\{ u = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \varphi_i \mid \alpha_i \geq 0, \ \forall i \right\}$ et où $TV(u) = \int_Q |\nabla u(x,t)| \, dxdt$. On propose, pour résoudre ce problème d'utiliser un algorithme de descente de gradient alterné de type ISTA (cf. [7]). La figure suivante illustre les résultats obtenus à $t = 0.3$.



(a) (b) (c)

Figure 4 – (a) Solution du problème global . (b) Solution du problème avec la contrainte I_{C_h}, persistance de l'overshooting. (c) Solution du problème avec contrainte et régularisation TV pour $\lambda = 2.10^{-4}$.

Bibliographie

[1] A. Beck, M. Teboulle, A Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm for Linear Inverse Problems, *SIAM J. Img. Sci.*, (2009), 183-202

[2] P. Bochev., D. Ridz al, G. Scovazzi, M. Shashkov, Formulation, analysis and numerical study of an optimization-based conservative interpolation(remap) od sacalr fields for arbitrary Lagrangien-Eulerian method, *Jour. Comp. Phys.*, **230** (2011), 5199-5225.

[3] Horn., B. Schunck, Determining optical flow, *Artificial Intelligence.*, (1981).

[4] D. Kuzmin, Linearity-preserving flux correction and convergence acceleration for constrainde Galerkin schemees, *Jour. of Comp. and Applied Math.*, **236** (2012), 2317-2337.

[5] J. Pousin., O. Besson ,Solutions for Linear Conservation Laws with Velocity Fields, *Archive of Ration. Mech. and Ana.*, **186** (2007), p. 159- 175 .

[6] M. Rokafellar.,Variational analysis, *Springer*, (2008).

TAMTAM, Algérie, Alger 27 — 30 Avril 2013

Asymptotic modelling of time-dependent frictionless Signorini problem

The case of linear shallow shells

A. Bensayah* — D. A. Chacha**

* Laboratoire de Mathématiques Appliquées,
Université Kasdi Merbah-Ouargla 30000
Algérie
bensayahabd@gmail.com
** Laboratoire de Mathématiques Appliquées,
Université Kasdi Merbah-Ouargla 30000
Algérie
chachajamel@gmail.com

ABSTRACT. In the framework of the linear elastostatic of thin plates, Paumier [4] studied the asymptotic modelling of Coulomb frictional Signorini problem. The main result obtained is that the three dimensional problem offers to a two-dimensional Signorini problem. The same result is obtained formally by Chacha and Bensayah [2] for a nonlinear von Kàrmàn plate. A. Léger, B. Miara [3] generalized this result to frictionless shallow shell using convergence method. Recently, A. Bensayah, Chacha and S. Nicaise [6] studied the dynamical Signorini problem for a linear thin plate. In this paper, we extend, this study to a linear thin shallow shell.

RÉSUMÉ. Dans le cadre de l'élasticité linéaire, Paumier [4] a établi un modèle bi-dimensionnel asymptotique du problème de Signorini avec frottement de Coulomb pour une plaque mince. Ceci est realisé par la méthode de convergence. Le même résultat est obtenu, formellement, par Chacha et Bensayah [2] pour une plaque mince de type Von Karman. A. Lèger, B. Miara [3] ont généralisé ce résultat pour une coque peu profonde mais sans frottement. L'objet de ce papier est de généraliser ce résultat pour le cas dynamique.

KEYWORDS : Signorini problem, asymptotic modeling, dynamical problem, shallow shell.

MOTS-CLÉS : Problème de Signorini, modélisation asymptotique, problème dynamique, coque peu-profonde.

1. Introduction

The aim of this paper is to extend the work of Bensayah, Chacha and Nicaise [6] to an elastic shallow shell problem without friction using the convergence method. Also it generalizes the work of Léger and Miara [3] to a dynamic state problem. First, we give the strong formulation of the three-dimensional contact problem. Next, we rewrite the problem in a weak form. After that, we define the problem on cylindrical domain independent of ε using a composition of a diffeomorphism and a convenient scaling of the unknowns and data, we get the scaled variational problem. Finally, we show that the scaled solution has a subsequence $(u(\varepsilon), G(\varepsilon))$ which has a weak star limit denoted by $(u(0), G(0))$ solves a two dimensional problem.

2. Setting of the problem

Throughout this paper, we use the following conventions and notations: Greek indices, corresponding to the horizontal coordinates, belong to the set $\{1, 2\}$, while Latin indices belong to the set $\{1, 2, 3\}$, the index 3 being that of the vertical coordinate, the symbols of differentiation $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\partial_i^\varepsilon = \frac{\partial}{\partial x_i^\varepsilon}$, $\widehat{\partial}_i^\varepsilon = \frac{\partial}{\partial \widehat{x}_i^\varepsilon}$, δ_{ij} the Kronecker symbols. The summation convention with respect to repeated indices is systematically used.

Let ω be a connected bounded open subset of $\mathbb{R}^2$ with a Lipschitz-continuous boundary γ. For any $\varepsilon > 0$, let $\Omega^\varepsilon = \omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[$, $\Gamma_\pm^\varepsilon = \omega \times \{\pm\varepsilon\}$, $\Gamma_0^\varepsilon = \gamma \times]-\varepsilon, +\varepsilon[$ and $\theta^\varepsilon : \bar{\omega} \to \mathbb{R}$ is a function of class C^3 that satisfies $\theta^\varepsilon = \partial_\nu \theta^\varepsilon = 0$ on γ. We define the mapping $\Theta^\varepsilon : \bar{\Omega}^\varepsilon \to \mathbb{R}^3$ such that $\Theta^\varepsilon(x^\varepsilon) = (x_1, x_2, \theta^\varepsilon(x_1, x_2)) + x_3^\varepsilon a_3^\varepsilon(x_1, x_2)$, for all $x^\varepsilon = (x_1, x_2, x_3^\varepsilon) \in \bar{\Omega}^\varepsilon$, where $a_3^\varepsilon = (-\partial_1^\varepsilon \theta^\varepsilon, -\partial_2^\varepsilon \theta^\varepsilon, 1)/\sqrt{\widehat{\alpha}^\varepsilon}$, $\widehat{\alpha}^\varepsilon = |\partial_1^\varepsilon \theta^\varepsilon|^2 + |\partial_2^\varepsilon \theta^\varepsilon|^2 + 1$ is a continuously varying unit vector normal to the middle surface $\Theta^\varepsilon(\bar{\omega})$ and we suppose also that Θ^ε is orientation preserving i.e $\det\nabla^\varepsilon \Theta^\varepsilon(x^\varepsilon) > 0,\ \forall x^\varepsilon \in \bar{\Omega}^\varepsilon$. For small enough ε, the mapping $\Theta^\varepsilon : \bar{\Omega}^\varepsilon \to \Theta^\varepsilon(\bar{\Omega}^\varepsilon)$ is a C^1-diffeomorphism see [1]. We let $\widehat{\Omega}^\varepsilon = \Theta^\varepsilon(\Omega^\varepsilon)$, $\widehat{\Gamma}_0^\varepsilon = \Theta^\varepsilon(\Gamma_0^\varepsilon)$, $\widehat{\Gamma}_\pm^\varepsilon = \Theta^\varepsilon(\Gamma_\pm^\varepsilon)$ and we denote by $\widehat{x}^\varepsilon = \Theta^\varepsilon(x^\varepsilon)$ a generic point in $\{\widehat{\Omega}^\varepsilon\}^-$, $\widehat{x}_1^\varepsilon = x_1^\varepsilon - x_3^\varepsilon \dfrac{\partial_1^\varepsilon \theta^\varepsilon}{\sqrt{\widehat{\alpha}^\varepsilon}}$, $\widehat{x}_2^\varepsilon = x_2^\varepsilon - x_3^\varepsilon \dfrac{\partial_2^\varepsilon \theta^\varepsilon}{\sqrt{\widehat{\alpha}^\varepsilon}}$, $\widehat{x}_3^\varepsilon = \theta^\varepsilon + x_3^\varepsilon \dfrac{1}{\sqrt{\widehat{\alpha}^\varepsilon}}$. Following the definition proposed by Ciarlet and Paumier [5], we say that a shell is shallow if there exists a function $\theta \in C^3(\bar{\omega})$ independent of ε such that $\theta^\varepsilon(x_1, x_2) = \varepsilon\theta(x_1, x_2)$, for all $(x_1, x_2) \in \bar{\omega}$.

Consider a linearly elastodynamics shallow shell occupying in its reference configuration the set $\{\widehat{\Omega}^\varepsilon\}^-$ the closure of $\widehat{\Omega}^\varepsilon$ with thickness 2ε, whose constituting material is a St Venant-Kirchhoff material with Lamé constants $\lambda^\varepsilon > 0$ and $\mu^\varepsilon > 0$ supposed independent of ε and has ρ^ε the volume density. This shell is subjected to body force $\widehat{f}^\varepsilon$ on $\widehat{\Omega}^\varepsilon \times]0, +\infty[$ and to surface force $\widehat{g}^\varepsilon$ in $\widehat{\Gamma}_-^\varepsilon \times]0, +\infty[$ and is in unilateral contact on $\widehat{\Gamma}_+^\varepsilon$

with a rigid obstacle. Next we denote by $\widehat{d}^\varepsilon$ the gap function defined on $\widehat{\Gamma}^\varepsilon_+$ measured in the normal direction. The contact condition is defined by the inequality $\widehat{v}^\varepsilon_N = \widehat{v}^\varepsilon_i \widehat{n}^\varepsilon_i \leq \widehat{d}^\varepsilon$. We assume that this system is in dynamic state and the contact is Signorini type without friction.

3. The strong and weak formulation of the problem

3.1. The strong formulation of the problem

The unknowns in the three-dimensional formulation are the displacement field $\widehat{u}^\varepsilon = (\widehat{u}^\varepsilon_i)(\widehat{x}^\varepsilon, t)$, where the functions $\widehat{u}^\varepsilon_i$ are its Cartesian components and the force field $\widehat{G}^\varepsilon := (\widehat{G}^\varepsilon_i)(\widehat{x}^\varepsilon, t)$. Also, we can write $\widehat{G}^\varepsilon = (\widehat{G}^\varepsilon_N, \widehat{G}^\varepsilon_T)$ where $\widehat{G}^\varepsilon_N := \widehat{G}^\varepsilon_i \widehat{n}^\varepsilon_i$ represents the density of the pressure force and $\widehat{G}^\varepsilon_T := \widehat{G}^\varepsilon - \widehat{G}^\varepsilon_N \widehat{n}^\varepsilon$ represents the friction force. The unknown $(\widehat{u}^\varepsilon, \widehat{G}^\varepsilon)$ satisfies the following three-dimensional boundary value problem

$$(C\widehat{P}^\varepsilon) \begin{cases} \text{find } (\widehat{u}^\varepsilon, \widehat{G}^\varepsilon) \text{ such that} \\ \widehat{\rho}^\varepsilon \frac{\partial^2 \widehat{u}^\varepsilon_i}{\partial t^2} - \widehat{\partial}^\varepsilon_j \widehat{\sigma}^\varepsilon_{ij} = \widehat{f}^\varepsilon_i \text{ in } \widehat{\Omega}^\varepsilon \times]0, +\infty[\,, \\ \widehat{\sigma}^\varepsilon_{ij} \widehat{n}^\varepsilon_j = \widehat{g}^\varepsilon_i \text{ on } \widehat{\Gamma}^\varepsilon_- \times]0, +\infty[\\ \widehat{u}^\varepsilon = 0 \text{ on } \widehat{\Gamma}^\varepsilon_0 \times]0, +\infty[\\ \widehat{u}^\varepsilon_N \leq \widehat{d}^\varepsilon, \widehat{G}^\varepsilon_N \leq 0, \widehat{G}^\varepsilon_N \left(\widehat{u}^\varepsilon_N - \widehat{d}^\varepsilon \right) = 0, \widehat{G}^\varepsilon_T = 0 \text{ on } \widehat{\Gamma}^\varepsilon_+ \times]0, +\infty[\\ \widehat{u}^\varepsilon(\widehat{x}^\varepsilon, 0) = \widehat{p}^\varepsilon \text{ and } \frac{\partial \widehat{u}^\varepsilon}{\partial t}(\widehat{x}^\varepsilon, 0) = \widehat{q}^\varepsilon \; in \; \widehat{\Omega}^\varepsilon. \end{cases} \tag{1}$$

where $\widehat{\sigma}^\varepsilon_{ij} = \lambda^\varepsilon \widehat{e}^\varepsilon_{pp}(\widehat{u}^\varepsilon)\delta_{ij} + 2\mu^\varepsilon \widehat{e}^\varepsilon_{ij}(\widehat{u}^\varepsilon)$, $\widehat{e}^\varepsilon_{ij}(\widehat{u}^\varepsilon) = \frac{1}{2}(\widehat{\partial}^\varepsilon_i \widehat{u}^\varepsilon_j + \widehat{\partial}^\varepsilon_j \widehat{u}^\varepsilon_i)$,$\widehat{G}^\varepsilon_i = \widehat{\sigma}^\varepsilon_{ij} \widehat{n}^\varepsilon_j$, $\widehat{q}^\varepsilon$ and $\widehat{p}^\varepsilon$ are given initial data.

3.2. The weak formulation of the problem

Multiplying the system of equilibrium equations in $(C\hat{P}^\varepsilon)$ by functions $\hat{v}^\varepsilon_i$ and integrating over the set $\hat{\Omega}^\varepsilon$, after that using the Green formula and the boundary conditions we obtain the following variational formulation of the problem $(C\hat{P}^\varepsilon)$ $(V\widehat{P}^\varepsilon)$:

$$(V\widehat{P}^\varepsilon) \begin{cases} \text{find } (\widehat{u}^\varepsilon, \widehat{G}^\varepsilon) \in K(\widehat{\Omega}^\varepsilon) \times (H^{-1/2}(\widehat{\Gamma}^\varepsilon_+))^3, t \geq 0 \;\; such \;\; that \\ \frac{d^2}{dt^2} \left\{ \widehat{\rho}^\varepsilon \int_{\widehat{\Omega}^\varepsilon} \widehat{u}^\varepsilon_i \widehat{v}^\varepsilon_i d\widehat{x}^\varepsilon \right\} + \widehat{a}^\varepsilon_\theta(\widehat{u}^\varepsilon, \widehat{v}^\varepsilon) = \widehat{L}^\varepsilon(\widehat{v}^\varepsilon) + \langle \widehat{G}^\varepsilon_N, \widehat{v}^\varepsilon_N \rangle \;\; \forall v^\varepsilon \in V(\widehat{\Omega}^\varepsilon) \\ \langle \widehat{G}^\varepsilon_N, \widehat{v}^\varepsilon_N - \widehat{u}^\varepsilon_N \rangle \geq 0, \;\; \forall \widehat{v}^\varepsilon \in K(\widehat{\Omega}^\varepsilon) \\ \widehat{u}^\varepsilon(\widehat{x}^\varepsilon, 0) = \widehat{p}^\varepsilon \; and \; \frac{\partial \widehat{u}^\varepsilon}{\partial t}(\widehat{x}^\varepsilon, 0) = \widehat{q}^\varepsilon \; in \; \widehat{\Omega}^\varepsilon. \end{cases} \tag{2}$$

such that $\widehat{a}^{\varepsilon}_{\theta}(\widehat{u}^{\varepsilon}, \widehat{v}^{\varepsilon}) = \int_{\widehat{\Omega}^{\varepsilon}} \widehat{A}^{\varepsilon}_{ijkl}\widehat{e}^{\varepsilon}_{kl}e^{\varepsilon}_{ij}(\widehat{v})d\widehat{x}^{\varepsilon}, \widehat{L}^{\varepsilon}(\widehat{v}) = \int_{\widehat{\Omega}^{\varepsilon}} \widehat{f}^{\varepsilon}_i\widehat{v}_i d\widehat{x}^{\varepsilon} + \int_{\widehat{\Gamma}^{\varepsilon}_{-}} \widehat{g}^{\varepsilon}_i\widehat{v}_i d\widehat{\Gamma}^{\varepsilon}$
$V(\widehat{\Omega}^{\varepsilon}) = \{\widehat{v}^{\varepsilon} = (\widehat{v}^{\varepsilon}_i) \in \mathbf{H}^1(\widehat{\Omega}^{\varepsilon}), \widehat{v}^{\varepsilon} = 0 \ \ on \ \ \widehat{\Gamma}^{\varepsilon}_0\}, K(\widehat{\Omega}^{\varepsilon}) = \{\widehat{v}^{\varepsilon} \in V(\widehat{\Omega}^{\varepsilon})/\widehat{v}^{\varepsilon}_N \leq \widehat{d}^{\varepsilon} \ \ on \ \ \widehat{\Gamma}^{\varepsilon}_{+}\}$

We follow here the same method as in [1, 5]. Let $\Omega = \omega\times]-1,+1[, \Gamma_{\pm} = \omega \times \{\pm 1\}, \Gamma_0 = \gamma_0 \times [-1,+1]$. Let $x = (x_i) \in \bar{\Omega}$ denote a generic point in the set $\bar{\Omega}$ and the mapping: $\chi^{\varepsilon} : \bar{\Omega} \to \bar{\Omega}^{\varepsilon}$ where $x_{\alpha} = x^{\varepsilon}_{\alpha}, x_3 = x^{\varepsilon}_3/\varepsilon$ hence $\chi^{\varepsilon}(\Omega) = \Omega^{\varepsilon},\ \chi^{\varepsilon}(\Gamma_{\pm}) = \Gamma^{\varepsilon}_{\pm},\ \chi^{\varepsilon}(\Gamma_0) = \Gamma^{\varepsilon}_0,\ \partial^{\varepsilon}_{\alpha} = \partial_{\alpha},\ \partial^{\varepsilon}_3 = \frac{1}{\varepsilon}\partial_3$. In order to transform the problem $(V.\hat{P}^{\varepsilon})$ into problem posed over the domain Ω independent of ε, we use the transformation $(\mathbf{\Theta}^{\varepsilon} \circ \chi^{\varepsilon})^{-1}$ and the appropriate scalings on unknowns and data often used to shallow shells. See [1].
We introduce the scaled displacement $u(\varepsilon)$, the scaled test function $v(\varepsilon)$, the scaled stress tensor $\sigma(\varepsilon)$ for all $x^{\varepsilon} = \chi^{\varepsilon}(x)$: $u^{\varepsilon}_{\alpha}(x^{\varepsilon}) = \varepsilon^2 u_{\alpha}(\varepsilon)(x),\ u^{\varepsilon}_3(x^{\varepsilon}) = \varepsilon u_3(\varepsilon)(x), v^{\varepsilon}_{\alpha}(x^{\varepsilon}) = \varepsilon^2 v_{\alpha}(x),\ v^{\varepsilon}_3(x^{\varepsilon}) = \varepsilon v_3(x)$, $\sigma^{\varepsilon}_{\alpha\beta}(x^{\varepsilon}) = \varepsilon^2\sigma_{\alpha\beta}(\varepsilon)(x)$, $\sigma^{\varepsilon}_{\alpha 3}(x^{\varepsilon}) = \varepsilon^3\sigma_{\alpha 3}(\varepsilon)(x),\ \sigma^{\varepsilon}_{33}(x^{\varepsilon}) = \varepsilon^4\sigma_{33}(\varepsilon)(x)$.
We suppose that G^{ε}_i verify $\langle G^{\varepsilon}_{\alpha}, v\rangle = \varepsilon^3 \langle G_{\alpha}(\varepsilon), v\rangle$, $\langle G^{\varepsilon}_3, v\rangle = \varepsilon^4 \langle G_3(\varepsilon), v\rangle$. The unit normal $\hat{n}^{\varepsilon}$ on $\hat{\Gamma}^{\varepsilon}_{+}$ reads $\hat{n}^{\varepsilon} = (\varepsilon n^{\theta}_1 + O(\varepsilon^3), \varepsilon n^{\theta}_2 + O(\varepsilon^3), n^{\theta}_3 + O(\varepsilon^2))$ where $n^{\theta} = (-\partial_1\theta, -\partial_2\theta, 1)$.

We also introduce the scaling of the forces: $f^{\varepsilon}_{\alpha} = \varepsilon^2 f_{\alpha},\ g^{\varepsilon}_{\alpha} = \varepsilon^3 g_{\alpha},\ f^{\varepsilon}_3 = \varepsilon^3 f_3,\ g^{\varepsilon}_3 = \varepsilon^4 g_3$ and the density $\widehat{\rho}^{\varepsilon} = \varepsilon^2\rho$ where $f_i,\ g_i$ and ρ are supposed independent of ε. Therefore we denote $V(\Omega) = \left\{v \in \mathbf{H}^1(\Omega)/v = 0 \ on\ \Gamma_0\right\}, \mathbf{L}^2_s(\Omega) = \{\tau = (\tau_{ij}) \in (L^2(\Omega))^{3\times 3};\ \tau_{ij} = \tau_{ji}\}$, and the convex closed set

$$K(\varepsilon)(\Omega) = \{v \in V(\Omega)/v_N(\varepsilon) \leq d(\varepsilon) \ on\ \Gamma_{+}\}, d^{\varepsilon} = \varepsilon d(\varepsilon).$$

Suppose the following assumptions on initial data $p^{\varepsilon}_{\alpha}(x^{\varepsilon}) = \varepsilon^2 p_{\alpha}(x), p^{\varepsilon}_3(x^{\varepsilon}) = \varepsilon p_3(x)$, $q^{\varepsilon}_{\alpha}(x^{\varepsilon}) = \varepsilon^2 q_{\alpha}(x), q^{\varepsilon}_3(x^{\varepsilon}) = \varepsilon q_3(x), \forall x^{\varepsilon} = \chi^{\varepsilon} x \in \Omega^{\varepsilon}$ where p, q are independent of ε.

Proposition 3.1 *For ε small enough, the scaled solution of the problem (VP^{ε}) solves the problem ($SVP(\varepsilon)$):*

$$\begin{cases} find\ (u(\varepsilon), G(\varepsilon)) \in K(\varepsilon)(\Omega) \times (H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_{+}))^3 for\ all\ t \in [0,T]\ such\ that, \\ \rho\int_{\Omega} \ddot{u}_3\,(\varepsilon)\, v_3 dx + a_{\theta}(u(\varepsilon), v) = L(v) + \left\langle G(\varepsilon), v_3 n^{\theta}\right\rangle + \varepsilon^2 r_1, \forall v \in V(\Omega), t \in]0,T[\\ \left\langle G(\varepsilon), (v_3 - u_3(\varepsilon))n^{\theta}\right\rangle + \varepsilon^2 r_2 \geq 0\,, \forall v \in K(\varepsilon)(\Omega), t \in]0,T[\\ u\,(\varepsilon)\,(x,0) = p\ and\ u(\varepsilon)\,(x,0) = q\ in\ \Omega, \end{cases}$$

where $a_\theta(u(\varepsilon), v) = \displaystyle\int_\Omega \sigma_{ij}(\varepsilon)\, e^\theta_{ij}(v)dx, L(v) = \int_\Omega f_i v_i dx + \int_{\Gamma_-} g_i v_i d\Gamma, \partial^\theta_\alpha v = \partial_\alpha v - \partial_\alpha\theta\partial_3 v, \partial^\theta_3 v = \partial_3 v, e^\theta_{ij}(v) = \frac{1}{2}\left(\partial^\theta_i v_j + \partial^\theta_j v_i\right), \sigma_{ij}(\varepsilon) = \lambda e_{pp}(\varepsilon)\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}(\varepsilon),$

$$e_{\alpha\beta}(\varepsilon)(v) = e^\theta_{\alpha\beta}(v) + \varepsilon^2 e^\sharp_{\alpha\beta}(\varepsilon,\theta;v), e_{\alpha 3}(\varepsilon)(v) = \varepsilon^{-1}\{e^\theta_{\alpha 3}(v) + \varepsilon^2 e^\sharp_{\alpha 3}(\varepsilon,\theta;v)\},$$
$$e_{33}(\varepsilon)(v) = \varepsilon^{-2}\{e^\theta_{33}(v) + \varepsilon^2(\partial_\alpha\theta\partial_\alpha v_3 + b^\sharp_{33}(\varepsilon,\theta)\partial_3 v_3) + \varepsilon^4 e^\flat_{33}(\varepsilon,\theta;v)\},$$

the functions $e^\sharp_{ij}(\varepsilon,\theta;v)$, $e^\flat_{33}(\varepsilon,\theta;v)$, $b^\sharp_{33}(\varepsilon,\theta)$ *and* r_i *are bounded independent of* ε *.*

4. Convergence study

In this section, we suppose that $(u(\varepsilon), G(\varepsilon))$ is a solution of $(SVP(\varepsilon))$, the forces verify $f, \dot f \in L^\infty(0,T,L^2(\Omega))$ and $g, \dot g \in L^\infty(0,T,L^2(\Gamma_-))$ and we study the limit of the sequence $(u(\varepsilon), G(\varepsilon))$.

Theorem 4.1 *If* $(u(\varepsilon), G(\varepsilon))$ *is a solution of the problem* $(SVP(\varepsilon))$ *then there exists a subsequence noted also by* $(u(\varepsilon), G(\varepsilon))$ *and an element* $(u(0), G_3(0))$ *such that*

$$\begin{aligned} u(\varepsilon) &\rightharpoonup u(0) \text{ in } L^\infty(0,T,\vec V(\Omega))\ weak-* \\ G_3(\varepsilon) &\rightharpoonup G_3(0) \text{ in } L^\infty(0,T,H^{-2}(\omega))\ weak-* \\ G_\alpha(\varepsilon) &\rightharpoonup 0 \text{ in } L^\infty(0,T,H^{-1}(\omega))\ weak-* \end{aligned}$$

where $(u(0), G(0))$ *is a solution of the problem* $(VP_{KL}(0))$ *:*

$$\textit{Find } (u(0), G(0)) \in (V_{KL}(\Omega) \cap \vec K(\Omega) \times H^{-2}(\omega) for\ a.e\ t \in [0,T] \textit{ such that}$$
$$\rho\langle \ddot u_3(0), v_3\rangle + a^0_*(u(0), v) = L(v) + \langle G_3(0), v_3\rangle,\ \forall v \in V_{KL}(\Omega)$$
$$\langle G_3(0), v_3 - u_3(0)\rangle \geq 0,\ \forall v_3 \in K(\omega)$$
$$u_{|_{t=0}}(0) = p, \dot u_{|_{t=0}}(0) = q$$

with $a^0_*(u(0), v) = \displaystyle\int_\Omega \sigma_{\alpha\beta}(0)\partial_\beta v_\alpha dx, \sigma_{\alpha\beta}(0) = \lambda^* e_{\gamma\gamma}(u(0))\delta_{\alpha\beta} + 2\mu e_{\alpha\beta}(u(0)),\ \lambda^* = \dfrac{2\mu\lambda}{\lambda + 2\mu}$.

The proof of this theorem is divided into three lemmas. To this end, we introduce the tensor $\kappa^\theta(\varepsilon, v)$ defined as following $\kappa^\theta_{\alpha\beta}(\varepsilon, v) = e^\theta_{\alpha\beta}(v)$,$\kappa^\theta_{\alpha 3}(\varepsilon, v) = \varepsilon^{-1}e^\theta_{\alpha 3}(v)$,$\kappa^\theta_{33}(\varepsilon, v)$

$= \varepsilon^{-2}e^{\theta}_{33}(v) + \partial_\alpha\theta\partial_\alpha u_3(\varepsilon)$. Then, the bilinear form $a^\theta(u(\varepsilon), v)$ can be rewritten as following $a_\theta(u(\varepsilon), v) = \displaystyle\int_\Omega [\lambda\kappa^\theta_{ii}(\varepsilon)\kappa^\theta_{jj}(\varepsilon, v) + 2\mu\kappa^\theta_{ij}(\varepsilon)\kappa^\theta_{ij}(\varepsilon, v)]dx$ where $\kappa^\theta(\varepsilon)$ denotes $\kappa^\theta(\varepsilon) := \kappa^\theta(\varepsilon, u(\varepsilon))$. The space $\mathbb{L}^2_s(\Omega)$ of symmetric, square integrable tensors equipped with the scalar product $\langle\sigma, \tau\rangle = \int_\Omega \sigma_{ij}\tau_{ij}dx$ is a real Hilbert space. As it is known, the norms $\|\sigma\|_A = \langle A\sigma, \sigma\rangle^{1/2}, \|\sigma\|_{0,\Omega}$ are equivalent where $\langle A\sigma, \tau\rangle = \int_\Omega(\lambda\sigma_{ii}\tau_{jj} + 2\mu\sigma_{ij}\tau_{ij}dx)$.

Lemma 4.2 *If $u(\varepsilon)$ is a solution of the problem $(SVP(\varepsilon))$ then, for ε small enough, the sequences $(u(\varepsilon)), (\kappa^\theta_{ij}(\varepsilon))$ are bounded, respectively, in $L^\infty(0, T, \vec{V}(\Omega))$ and $L^\infty(0, T, \mathbb{L}^2_s(\Omega))$ hence, there exists a subsequences also denoted by $(u(\varepsilon))$ and $(\kappa^\theta_{ij}(\varepsilon))$ which admit a weak star limits respectively in $L^\infty(0, T, \vec{V}(\Omega))$ and $L^\infty(0, T, \mathbb{L}^2_s(\Omega))$ denoted respectively by $(u(0))$ and $(\kappa^\theta_{ij}(0))$.*

Lemma 4.3 *The weak star limits $u(0)$ and $\kappa^\theta(0)$ verify* for $a.e\ t \in]0, T]$, *the following*

$$u(0) \in V_{KL}(\Omega) \cap \vec{K}(\Omega), \kappa^\theta_{\alpha\beta}(0) = e^\theta_{\alpha\beta}(u(0)), \kappa^\theta_{\alpha 3}(0) = 0, \kappa^\theta_{33}(0) = \frac{-\lambda}{\lambda + 2\mu}e^\theta_{\alpha\alpha}(u(0)),$$

Lemma 4.4 *The subsequence $(G_3(\varepsilon))$ verifies*

$$G_3(\varepsilon) \rightharpoonup G_3(0) \text{ in } L^\infty(0, T, H^{-2}(\omega)) \text{ weak star}$$

and verifies with $u(0)$ the problem VP_{KL}.

5. Conclusion

We have shown that the weak limit of the subsequence $(u(\varepsilon), G(\varepsilon))$ of the three-dimensional Signorini problem is a solution of a two-dimensional Signorini problem. As there is no uniqueness result for this problem, how about the whole sequence? Another open problem is to prove similar results for the time-dependent Signorini problem with Coulomb friction.

References

[1] P.G. Ciarlet, B. Miara, Justification of the two-dimensional equations of a linearly elastic shallow shell. Comm. Pure Appl. Math. 327-360. 45(1992).

[2] D.A.Chacha, A.Bensayah, Asymptotic modeling of a Coulomb frictional Signorini problem for the von Kármán plates, C. R. Mécanique, 336(2008),846-850.

[3] A. Léger, B. Miara, Mathematical justification of the obstacle problem in the case of a shallow shell, J. Elasticity 90(2008)241-257.

[4] J.C.Paumier, Contact unilatéral des structures minces: modélisation, calcul et applications. Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser. Volume 30, 2003, Pages 177-187.

[5] P.G.Ciarlet, J.C.Paumier, A justification of the Marguerre-von Kármán equations, *Comput. Mech*, vol.1, 177-202, 1986.

[6] A. Bensayah, D. A. Chacha and S. Nicaise, Asymptotic modelling of time-dependent Signorini problem without friction of linear thin plate, Journal of Mathematical Analysis, Volume 1 Issue 2(2010), Pages 28-43.

Weak and Strong Gradient Stabilization For Distributed Semilinear Systems

Benslimane Yassine * and Zerrik El Hassan*

* MACS Team; Sciences Faculty, University Moulay Ismail .
Meknes. Morocco.
e-mail: bensyassine@yahoo.fr; zerrik3@yahoo.fr

ABSTRACT. This paper discuss the problem of gradient stabilization of distributed semilinear systems. We establish sufficient conditions ensuring weak and strong gradient stabilization, and we characterizes a stabilizing control which minimizes a quadratic criterion. A decay estimate of this stabilization is given.

RÉSUMÉ. Ce papier étudie la stabilisation du gradient des systèmes distribués semi-linéaires. On établit des conditions suffisantes pour assurer la stabilisation faible et forte du gradient, et on caractérise un contrôle stabilisant et minimisant un coût quadratique. Une estimation de l'erreur de cette stabilisation est ainsi donnée.

KEYWORDS : Distributed semi linear systems; gradient stabilization; optimal gradient stabilization.

MOTS-CLÉS : systèmes distribués semi-linéaires ;stabilisation du gradient ; stabilisation optimale du gradient.

1. Introduction

On a regular domain $\Omega \subset IR^n$, we consider the system described by the equation :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t}(t) & = Ay(t) + v(t)F(y(t)) \\ y(x,0) & = y_0(x) \end{cases} \tag{1}$$

where A is the infinitesimal generator of a linear strongly semigroup $(T(t))_{t\geq 0}$ on a Hilbert space H, which is continuously embedded in $H^1(\Omega)$, let's denote the complex inner product of H by $\langle .,. \rangle$ and $\|.\|$ its corresponding norm, and F be a nonlinear continuous operator from H to H such that $F(0) = 0$. The notion of stabilization of distributed systems was the object of many works [1, 2] where authors give sufficient conditions to obtain weak and strong stabilization and in [3] sufficient conditions are given to obtain exponential stabilization.
The notion of gradient stabilization was introduced by Zerrik - Benslimane and numerous results were developed for linear and bilinear distributed systems [4, 5, 6]. This paper we will give an extension of the previous works for distributed semilinear systems.
We define the operator :

$$\begin{array}{cccl} \nabla \; : & H^1(\Omega) & \longrightarrow & (L^2(\Omega))^n \\ & y & \longmapsto & (\dfrac{\partial y(x)}{\partial x_1}, \dfrac{\partial y(x)}{\partial x_2}, ..., \dfrac{\partial y(x)}{\partial x_n}) \end{array} \tag{2}$$

$(L^2(\Omega))^n$ is endowed with its usual complex product $\langle .,. \rangle_n$ and $\|.\|_n$ is the corresponding norm, and let denote by ∇^* the adjoint operator of ∇.
We give the following definitions:

Definition 1.1 *Let $t_1 > t_0$. A function $y(t) \in \mathcal{C}([t_0,t_1];H)$ is a weak solution of system (1) if*

1 $y(0) = y_0$

2 $F(y(.)) \in L^1([t_0,t_1];H)$ and for all $z \in \mathcal{D}(A^*)$ the function $\langle y(t), z\rangle$ is absolutely continuous on $[t_0,t_1]$ and satisfies :

$$\frac{d}{dt}\langle Ay(t), z\rangle = \langle y(t), A^* z\rangle + \langle F(y(t)), z\rangle$$

For all most all $t \in [t_0,t_1]$.

And the solution is given by the variation of constant formula :

$$y(t) = T(t-t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} T(t-s)F(y(s))ds, \qquad \forall t \in [t_0,t_1]. \tag{3}$$

Definition 1.2 *If for any initial condition $y_0 \in H$, the system (1) has a unique mild and global solution, then this system is said :*
1. Weakly gradient stabilizable if $\nabla y(t)$ converges weakly to 0, as $t \longrightarrow \infty$.
2. Strongly gradient stabilizable if $\nabla y(t)$ converges strongly to 0 as $t \longrightarrow \infty$.

Let consider the control

$$v(t) = -\langle y(t), F(y(t))\rangle \tag{4}$$

The following result gives sufficient conditions for weak gradient stabilization

Theorem 1.3 *Assume that A is a dissipative operator and $F : H \to H$ is sequentially continuous and*

$$\langle T(t)z, F(T(t)z\rangle = 0 \quad \forall t \geq 0 \Rightarrow \nabla z = 0 \tag{5}$$

then the control (4) stabilizes weakly the gradient of system (1).

For the strong stabilization we have the following result

Theorem 1.4 *Assume that $T(t)$ generates a strongly continuous semigroup of contraction and B is locally lipschitz. If in addition there exist $T > 0$ and $C > 0$ such that:*

$$\int_0^T |\langle F(T(t)z), T(t)z\rangle| dt \geq C\|\nabla z\|^2 \, \forall z \in H \tag{6}$$

then the control (4) strongly stabilizes the gradient of system (1) with the following estimation

$$\|\nabla y(t)\| = O(t^{-\frac{1}{2}}) \quad \textit{as } t \to +\infty \tag{7}$$

2. Problem of optimal control

In this section we are focused in finding the control that stabilizes the gradient of system (1) and minimizes a given cost of performance. This problem may be formulated as follows

$$\begin{cases} \min J(v) = & \displaystyle\int_0^{+\infty} |\langle PBy(t), y(t)\rangle|^2 dt + \int_0^{+\infty} |v(t)|^2 dt + \int_0^{+\infty} \langle Ry(t), y(t)\rangle dt \\ v \in \mathcal{U}_{ad} = & \{v/y(t) \text{ is a global solution and } J(v) < +\infty\} \end{cases} \tag{8}$$

where $\widetilde{P}$ and R are a positive and self-adjoint operators such that $P = G\widetilde{P}G$ satisfies the following equation :

$$\langle PAy, y\rangle + \langle y, PAy\rangle + \langle Ry, y\rangle = 0, \, \forall y \in \mathcal{D}(A) \tag{9}$$

and

$$\int_0^1 |\langle PBT(t)y_0, T(t)y_0\rangle| dt \geq \alpha \|\nabla y_0\|_n^2,\ y_0 \in H \text{ for some } \alpha > 0 \tag{10}$$

Proposition 2.1
Let's consider the control low

$$v^*(t) = -\langle PBy^*(t), y^*(t)\rangle \tag{11}$$

and $y^*(t)$ is the corresponding solution which is supposed global, then $v^*(t)$ is the unique feedback solution of (8), and the system (1) controlled by $v^*(t)$ is strongly gradient stabilizable.

References

[1]

[2] J. M. Ball and M. Slemrod., « Feedback Stabilization of Distributed Semilinear Control Systems », *Appl. Math. Optim*, **5** (1979), 169–179.

[3] L. Berrahmoune., « Exponential decay for semilinear distributed systems with damping », *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, **3** (2000), 575–600.

[4] M. Ouzahra., « Strong stabilization with decay estimate of semilinear systems », *Syst Control. Letter* , **10** (2008), 813–815.

[5] E. Zerrik., Y. Benslimane and A. El Jai.,« Regional gradient stabilization of distributed linear systems », *IREACO* , **4** (2011), 755–765.

[6] E. Zerrik and Y. Benslimane.,« An output gradient stabilization of distributed linear systems », *IREACO* , **3** (2012), 755–765.

[7] E. Zerrik., Y. Benslimane and A. El Jai.,« An Output Stabilization of Bilinear Distributed Systems », *Int. Journal of Math. Analysis*, **4** (2013), 195–211.

Étude d'une équation différentielle complète du second ordre de type elliptique et à coefficients opérateurs variables

Fatiha Boutaous

Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Université Saâd Dahlab de Blida, B. P. 270, Blida, 09000.
Algérie.
boutaous.fatiha2009@hotmail.com

ABSTRACT. This work is devoted to the study of a complete abstract second order differential equation of elliptic type with unbounded variable operators coefficients. This study generalize the one studied in [1] using the same techniques based on the semigroup's theory, the fractional powers of linear operators and the Dunford's functional calculus. The existence, the uniqueness and the maximal regularity of the solution are proved under hypotheses combining those used in [1] and [3].

RÉSUMÉ. Ce travail est consacré à l'étude d'une équation différentielle abstraite complète du second ordre du type elliptique et à coefficients opérateurs variables non bornés. Cette étude est une généralisation de celle faite dans [1] en utilisant les mêmes techniques basées essentiellement sur la théorie des semi-groupes, les puissances fractionnaires d'opérateurs linéaires et le calcul fonctionnel de Dunford. L'existence, l'unicité et la régularité maximale de la solution stricte sont prouvées sous des hypothèses combinant celles utilisées dans [1] et [3].

KEYWORDS : Fractional powers of linear operators, analytic semigroups, strict solution, Dunford's functional calculus.

MOTS-CLÉS : Puissances fractionnaires d'opérateurs linéaires, semi-groupes analytiques, solution stricte, calcul fonctionnel de Dunford.

1. Introduction

Dans ce travail, on s'intéresse à la résolution de l'équation différentielle abstraite complète du second ordre du type elliptique et à coefficients opérateurs variables non bornés

$$u''(x) + 2B(x)u'(x) + A(x)u(x) - \lambda u(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \tag{1}$$

avec les conditions de Dirichlet non homogènes

$$u(0) = \varphi, \quad u(1) = \psi. \tag{2}$$

Où λ est un nombre réel positif, $f \in C^\theta([0,1]; X)$, $0 < \theta < 1$, φ et ψ sont deux éléments donnés dans un espace de Banach complexe X, $(B(x))_{x\in[0,1]}$ et $(A(x))_{x\in[0,1]}$ sont deux familles d'opérateurs linéaires fermés à domaines $D(B(x))$ et $D(A(x))$ respectivent, et qui ne sont pas nécessairement denses dans X. Dans tout ce travail, on pose

$$A_\lambda(x) = A(x) - \lambda I, \ \lambda > 0.$$

L'hypothèse fondamentale de ce travail est:
Pour tout $x \in [0,1]$, $(B(x))^2 - A_\lambda(x)$ est un opérateur linéaire fermé dans X vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists C > 0, \ \forall z \geq 0, \ \forall x \in [0,1], \ \exists ((B(x))^2 - A_\lambda(x) + zI)^{-1} \in \mathcal{L}(X) \ \ telque \\ \left\| ((B(x))^2 - A_\lambda(x) + zI)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \dfrac{C}{1+z}. \end{array} \right. \tag{3}$$

Elle implique que pour chaque $x \in [0,1]$ et $\lambda > 0$, l'opérateur

$$Q_\lambda(x) := -((B(x))^2 - A_\lambda(x))^{1/2}$$

génère un semigroups analytique $(e^{yQ_\lambda(x)})_{y>0}$ non nécessairement fortement continu en 0. On suppose aussi que les opérateurs définis par:

$$M_\lambda(x) := -B(x) + Q_\lambda(x); \ \ L_\lambda(x) := B(x) + Q_\lambda(x)$$

génèrent les semigroups analytiques $(e^{yM_\lambda(x)})_{y>0}$ et $(e^{yL_\lambda(x)})_{y>0}$ respectivement dans X.
On utilise aussi d'autres hypothèses sur les résolvantes des opérateurs $M_\lambda(x)$ et $L_\lambda(x)$ et aussi sur les dérivées premières et dérivées secondes de ces résolvantes et ceci en combinant celles utilisées dans [1] et [3].

2. Consruction de la solution

En s'inspirant des travaux faits dans [4] où $B(x) = 0$, dans [3] où $B(x) = B$ est constant et dans [1] où $B(x)$ est variable, on donne la représentation de la solution sous la forme:

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{xM_\lambda(x)}\xi_0^*(x) + e^{(1-x)L_\lambda(x)}\xi_1^*(x) \\ &+\frac{1}{2}\int_0^x e^{(x-s)M_\lambda((x)}(Q_\lambda(x))^{-1}f^*(s)ds \\ &+\frac{1}{2}\int_x^1 e^{(s-x)L_\lambda((x)}(Q_\lambda(x))^{-1}f^*(s)ds, \end{aligned} \tag{4}$$

où $f^* \in C^\beta([0,1];X)$ est une fonction inconnue ($0 < \beta < 1$ est à déterminer).
On étudie l'existence, l'unicité et la régularité maximale de la solution stricte u du problème (1)-(2).
On rappelle qu'ici, la solution stricte est définie par une fonction u vérifiant :
$u \in C^2([0,1];X)$,
$u'(x) \in D(B(x))$ pour chaque $x \in [0,1]$ et $x \mapsto B(x)u'(x) \in C([0,1];X)$,
$u(x) \in D(A_\lambda(x))$ pour chaque $x \in [0,1]$ et $x \mapsto A_\lambda(x)\,u(x) \in C([0,1];X)$,
et u satisfait le problème (1)-(2).
Les techniques utilisées dans ce travail sont basées essentiellement sur la théorie des semi-groupes, les puissances fractionnaires d'opérateurs linéaires et le calcul fonctionnel de Dunford.

2.1. Résultat principal

On donne le résultat essentiel d'existence, d'unicité et de régularité optimale de la solution:

Theorem 2.1 *Soit $\varphi \in D(A(0))$, $\psi \in D(A(1))$ et $f \in C^\theta([0,1];X)$, $0 < \theta < 1$. Alors, sous nos Hypothèses, il existe $\lambda^* > 0$ telle que pour tout $\lambda \geq \lambda^*$, la solution stricte et unique u du Problème (1)-(2)satisfait la régularité*

$$u''(.), 2B(.))u'(.), A_\lambda(.)u(.) \in C^\beta([0,1];X),\ \beta = min(\theta, \eta+\nu-1, \mu+\kappa-1)$$

si et seulement si

$$\begin{cases} (A(0))\varphi + f(0) + \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(M_\lambda(x))^{-1}_{|x=0}M_\lambda(0)\varphi \in D_{-((B(0))^2-A_\lambda(0))}(\theta/2;+\infty), \\ (A(1))\psi + f(1) + \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(L_\lambda(x))^{-1}_{|x=1}L_\lambda(1)\psi \in D_{-((B(1))^2-A_\lambda(1))}(\theta/2;+\infty). \end{cases} \tag{5}$$

Proof. Voir [1] et [2]. □

Acknowledgment. Nous remercions tous les auteurs des versions antérieurs de TAM-TAM.

References

[1] « F. Boutaous, R. Labbas et B.-K. Sadallah »Fractional-power approach for solving complete elliptic abstract differential equations with variable-operator coefficients, *Electronic Journal of Differential Equations* , **No. 05** (2012), 1–33.

[2] « A. Favini, R. Labbas, K. Lemrabet et B. -K. Sadallah »Study of a complete abstract differential equation of elliptic type with variable operators coefficients (Part I), *Rev. Mat. Complut.*, **No. 21** (2008), 89–133.

[3] « A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe et A. Yagi »On the Solvability and the Maximal Regularity of Complete Abstract Differential Equations of Elliptic Type, *Funkcialaj Ekvacioj*, **No. 47** (2004), 423–452.

[4] « S.G. Krein, »Linear Differential Equations in Banach Spaces, Moscow, 1967, English transl. AMS, Providence, (1971).

Sur Une Équation Elliptique Non Linéaire

Brik Nabiha[*] — Chamekh Mourad[**] — Bessi Radhia[***]

[*] LAMSIN-ENIT, B. P. 37, 1002 Tunis-Belvedere, Tunis, Tunisia
briknabiha@gmail.com
[**] LAMSIN-ENIT, B. P. 37, 1002 Tunis-Belvedere, Tunis, Tunisia
mourad.chamekh@enit.rnu.tn
[***] ENIT, B. P. 37, 1002 Tunis-Belvedere, Tunis, Tunisia
radhia.bessi@planet.tn

ABSTRACT. In this work we consider a nonlinear elliptic partial differential equation. This equation derived from an application of a nonlinear Schrödinger equation modeling the phenomenon of solitary waves. Variational approach to this problem leads to an optimization problem with a nonlinear constraint. For the numerical solution we used the finite element method. Then, we propose an iterative algorithm. Finally, we present some numerical results obtained by the two methods

RÉSUMÉ. Dans ce travail nous considérons une équation aux dérivées partielles non-linéaire du type elliptique. Cette équation découle d'une application de l'équation de Schrödinger non linéaire modélisant le phénomène des ondes solitaires. L'approche variationnelle de ce problème nous mène à un problème d'optimisation avec une contrainte non convexe. Pour la résolution numérique nous avons utilisé la méthode des éléments finis. Ensuite, nous proposons un algorithme itératif. Enfin, nous présentons quelques résultats numériques obtenus par les deux méthodes.

KEYWORDS : The nonlinear Schrödinger equation, optimization, finite element, eigvalue .

MOTS-CLÉS : Equation de Schrödinger non linéaire, optimisation, éléments finis, valeur propre.

1. Introduction

L'équation de Schrödinger non linéaire $[1, 2, 3]$ permet de décrire de nombreux systèmes physiques dans des divers domaines. Il s'agit d'une équation aux dérivées partielles qui décrit l'évolution au cours du temps d'un objet quantique representé par une fonction d'onde ψ d'un système physique. Sa forme générale en dimension n est:

$$2ik_j \frac{\partial \psi_m^j}{\partial t} + \Delta_x \psi_m^j + \alpha k_j^2 I(x,t) \psi_m^j = 0 \; . \tag{1}$$

où

$$I(x,t) = \sum_{j=1}^{N_f} \sum_{m=1}^{N_j} \lambda_m^j |\psi_m^j(x,t)|^2 \; . \tag{2}$$

avec ψ_m^j [la (m, j) - composante du rayon] est une fonction complexe définie sur $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+$.
N_f est le nombre de fréquences.
N_j est le nombre d'onde à la fréquence w_j.
k_j est un multiple de la fréquence w_j, et λ_m^j sont les "mode-accompancy coefficients" qui décrivent le milieu.
Cette équation permet de chercher la solution d'onde stationnaire qui s'écrit sous la forme :

$$\psi_m^j(t,x) = \exp{(iK_m^j t)} u_m^j(x) \; , \tag{3}$$

où $u_m^j : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ est le profile spatial de la m-éme onde à la fréquence w_j, et K_m^j est sa vitesse de propagation. En remplacant (3) dans (1) on trouve le système d'Euler-Lagrange

$$\Delta u_i + \lambda_i u_i = (\sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} |u_j|^2) u_i \; , \quad i = 1, \ldots, n \tag{4}$$

Dans ce travail nous intéressons au cas unidimensionnel $(n = 1)$:

$$-\Delta u_1 + \mu_1 u_1^3 = \lambda_1 u_1 \; . \tag{5}$$

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de frontière régulière $\partial\Omega = \Gamma$. Nous cherchons $u \in H_0^1(\Omega)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u + \mu u^3 & = & \lambda u & \text{dans } \Omega \; , \;\; \forall \, \mu \in \mathbb{R}_+ \\ u & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \tag{6}$$

Dans la suite, notre objectif est la résolution de ce problème.

2. Formulation variationnelle:

Grâce à la formule de Green nous pouvons transformer le problème (6) en un problème d'optimisation de la forme:

$$(P1)\ \left\{\begin{array}{cc} \text{trouver} & u \in K \\ J(u) = \min\limits_{v\in K} J(v) & , \end{array}\right.$$

où

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 + \frac{\mu}{4}\int_\Omega v^4 \ ,$$

pour $\mu \in \mathbb{R}_+$ donnée et

$$K = \{v \in H_0^1(\Omega) \ \text{ tel que } \int_\Omega v^2 = 1\} \ .$$

Proposition 2.1 *Le problème $(P1)$ admet au moins une solution.*

Idée de la démonstration:

Elle est basée sur les résultats décrits dans $[4, 6]$ où on montre que la fonctionnelle continue J est infinie à l'infini et que K est un ensemble faiblement fermé.

Remarquons ici que l'unicité n'est pas vérifié car si u est solution, clairement $-u$ est une solution.

3. Discrétisation en éléments finis en dimension 1:

On considère l'espace de dimension fini suivant, voir $[5]$:

Pour $N \in \mathbb{N}^*$, et pour un pas de discrétisation $h = \dfrac{b-a}{n+1}$, on pose

$$V_h = \Big\{v : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R};\ v \in C^0([a,b]) \ \text{ vérifiant } \ v_{|_{[x_i,x_{i+1}]}} \in \mathbb{P}_1\ \forall\, i \in \{1,\cdots,n\} \ \text{ et } \ v(a) = v(b) = 0\Big\}$$

où $\mathbb{P}_1$ est l'espace de polynômes de degré inférieur où égal à 1.

Pour tout v de V_h, on a:

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n} v(x_i)\varphi_i(x) \ .$$

Les scalaires $v(x_i);\ i \in \{1, \cdots, n\}$ sont "les degrés de libertés" de la fonction $v \in V_h$ et φ_i sont les fonctions dites chapeaux.
Nous utilisons cette méthode qui permet d'évaluer la fonction objectif approchée avec contrainte d'égalité non linéaire pour chercher une solution approchée.

Le problème discrétisé devient comme suit:

$$(P2) \begin{cases} \text{trouver} \quad u \in K_h \quad \text{tel que} \\ J(u) \quad = \quad \min_{v \in K_h} J(v) \end{cases} , \tag{7}$$

Avec

$$\begin{aligned} J(v) &= \frac{1}{2}(A_h v, v) + \frac{\mu}{4}(M_h v, v) \\ &= \frac{1}{2}(C_h v, v), \ \ \forall \ C_h \in M_n(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

$C_h = A_h + \frac{\mu}{2} M_h$ est une matrice symérique et définies positives.

et

$$K_h = \{v \in \mathbb{R}^n \ \text{ tel que } \ (B_h v, v) = 1\} \ ,$$

où

$$A_h = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & . & . & . & \\ & & . & . & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad B_h = \frac{h}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & . & . & . & \\ & & . & . & 1 \\ & & & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

et où

M_h est une matrice symetrique dépendant de v.

Proposition 3.1 *Le problème discrétisé $(P2)$ admet au moins une solution.*

4. Méthodes de résolutions :

4.1. Méthode directe:

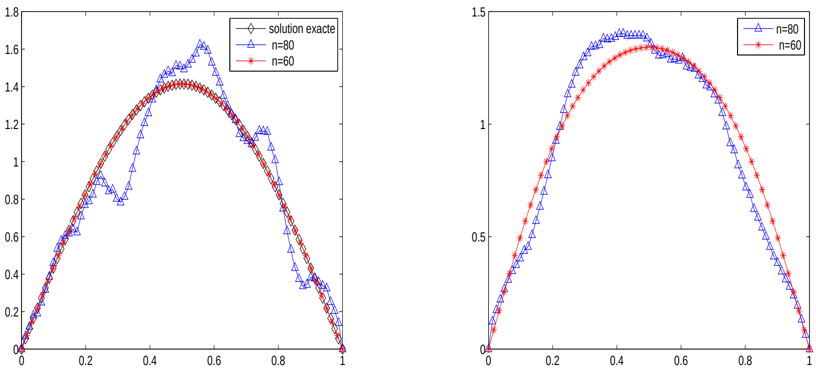
Pour $\Omega = [0, 1]$, nous avons utilisé la commande "fmincon" de Matlab pour minimiser notre fonction objectif approchée sous la contrainte quadratique $(B_h v, v) = 1$. Cependant, nous avons rencontré un problème d'exécution dés que le nombre n dépasse 80:

Comme résultat numérique, nous avons obtenus:

Comme valeur approchée de la valeur λ solution de l'équation (6) obtenue par la méthode directe nous avons trouvé:

Pour $\mu = 0$: $\lambda = 9,87$ pour $n = 60$ et $\lambda = 22,717$ pour $n = 80$, sachant que la valeur propre exacte est Π^2

et pour $\mu = 10$: $\lambda = 24,167$ pour $n = 60$ et $\lambda = 28,717$ pour $n = 80$



$\mu = 0$ $\mu = 10$

Figure 5: Résultats numériques par méthode directe pour $\mu = 0$ et $\mu = 10$.

4.2. Algorithme itératif:

On remarque que si u solution de $-\Delta u + \mu u^3 = \lambda u$, alors u est aussi solution de l'équation

$$\begin{cases} -\Delta u + \mu g u = \lambda u \quad \text{dans } \Omega \,, \quad \text{pour } g = u^2. \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad [8]$$

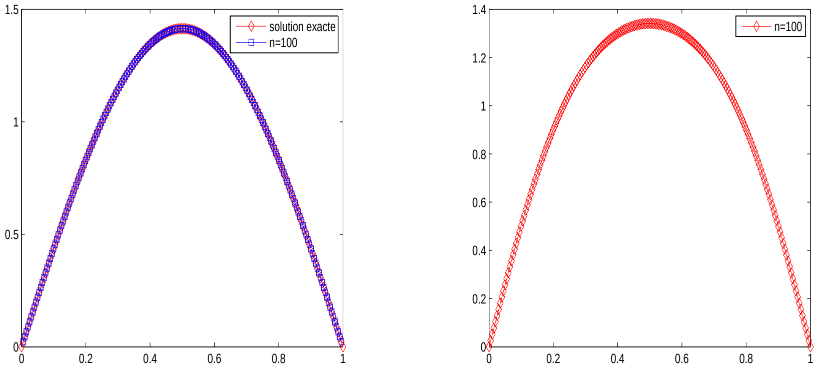
Autrement dit u est une fonction propore de l'opérateur linéaire

$$-\Delta + gI$$

D'où l'idée de considérer l'algorithme suivant:

$$\begin{cases} \bullet \;\; v_0 \neq 0 \quad \text{donné} \quad \text{tel que } \|v_0\|^2 = 1. \\ \bullet Pour \;\; k \geq 0, \text{ on calcule } \tilde{v}_{k+1} \;\; solution \;\; de : \\ \displaystyle\min_{\int_\Omega v_k v = 1} \quad \frac{1}{2}(\int_\Omega |\nabla v|^2 + \mu \int_\Omega v_k^2 v^2) \; . \\ \bullet \;\; Onpose \;\; v_{k+1} = \dfrac{\tilde{v}_{k+1}}{\|\tilde{v}_{k+1}\|}. \end{cases}$$

Ainsi que la valeur propre approchée de la valeur λ obtenue par la deuxième métohode est:
Pour $\mu = 0 \; : \; \lambda \; = 9,898$ pour $n = 100$
et pour $\mu = 10 \; : \; \lambda \; = 24,167$ pour $n = 100$



$\mu = 0$ $\qquad\qquad$ $\mu = 10$

Figure 6: Résultats numériques par l'algorithme itératif pour $\mu = 0$ et $\mu = 10$.

Etude de la convergence

- Pour $\mu = 0$, on montre que la suite (v_k) converge dans $H_0^1(\Omega)$ vers une fonction $\bar{v}$ associée à la plus petite valeur propre de l'opérateur $-\Delta$.

- Si $\mu > 0$, et si la suite (v_k) converge vers $\bar{v}$ dans $H_0^1(\Omega)$, alors $\bar{v}$ est solution de notre équation (6).

References

[1] Boyan Sirakov « Equation aux dérivées parielles elliptiques non linéaires » Habilitation A Diriger Des Recherches, UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE, PARIS, 2007.

[2] Amandine Aftalion, Jean Dalibard, Christophe Josserand « Equation de Schrödinger non linéaire: Des condensats de Bose Einstein aux supersolides » 2011.

[3] Thomas Bartsch, Zhi-Qiangwang, Junchengwei « Bound States for A Coupled Schrödinger System »

[4] Ciarlet Patrick « AO 101-2004-2005, Optimisation Quadratique ».

[5] Alexandre ERN « CALCUL SCIENTIFIQUE » 2008.

[6] H. Brezis « Analyse Fonctionnelle: Théorie et Application. Masson, Paris » 1983.

Decay property for solutions in the three – *phase* – lag heat conduction

Leila Djouamai* — Belkacem Said-Houari **

* Applied Math Lab, University Badji Mokhtar-Annaba,
P.O. Box 12, Annaba 23000, Algeria.
and
University of Khemis Miliana
Route Theniat El Had, 44225,
Khemis Miliana, Algeria
djouamai@gmail.com
** Division of Mathematical and Computer Sciences and Engineering,
King Abdullah University of Science and Technology (KAUST),
Thuwal, KSA.
belkacem.saidhouari@kaust.edu.sa

ABSTRACT. In this talk, we consider the Cauchy problem of two models of the theory of heat conduction with three−phase−lag. Under appropriate assumptions on the material parameters, we show the optimal decay rate of the L^2-norm of solutions. More precisely, we prove that in each model the L^2-norm of the solution is decaying with the rate $(1+t)^{-1/4}$ for initial data in $L^1(\mathbb{R})$. This decay rate is similar to the one of the heat kernel. Some faster decay rates have been also given for some weighted initial data in $L^1(\mathbb{R})$.

RÉSUMÉ. Dans cet article, nous considérons le problème de Cauchy de deux modèles de la théorie de la conduction de la chaleur avec un retard de trois phases. Nous montrons le taux de décroissance optimale de la solution en norme L^2 sous des hypothèses appropriées sur les paramètres du matériaux. Plus précisément, nous montrons que la solution en norme L^2 de chaque modèle décroit avec un taux de $(1+t)^{-1/4}$ pour des données initiales dans $L^1(\mathbb{R})$. Ce taux de décroissance est similaire à celui du noyau de la chaleur. Des taux de décroissance plus rapide ont été donnés pour certaines donnés initiales avec poids en $L^1(\mathbb{R})$.

KEYWORDS : heat conduction, decay rate, three−phase−lag, stability.

MOTS-CLÉS : conduction de la chaleur, taux de décroissance, retard de trois phases, stabilité.

1. Introduction

The model of the three−phase− lag heat conduction model has a form

$$q(x,t+\tau_q) = -[k\nabla\theta(x,t+\tau_\theta) + k^*\nabla\nu(x,t+\tau_\nu)], \tag{1}$$

where $\nu_t = \theta$ is the thermal displacement, k and k^* are two positive constants. Equation (1) states that the temperature gradient and the thermal displacement gradient established across a material volume located at a position x at time $t+\tau_\theta$ and $t+\tau_\nu$ result in heat flux to flow at a different instant of time $t+\tau_q$. The third delay time $t+\tau_\nu$ may be interpreted, as the phase−lag of the thermal displacement gradient. In this talk we consider two models that can be obtained by taking the Taylor series expansion of a three−phase− lag heat conduction model up to the first or second-order terms in τ_θ, τ_q and τ_ν. This talk is devided in two parts: In the first part, we consider the Taylor series expansion of (1) up to the first-order terms in τ_θ, τ_q and τ_ν. That is

$$\begin{cases} \tau_q\rho c_\upsilon\theta_{ttt} + \rho c_\upsilon\theta_{tt} - k^*\theta_{xx} - \tau_\nu^*\theta_{txx} - k\tau_\theta\theta_{ttxx} = 0, \\ \theta\left(x,0\right) = \theta_0\left(x\right), \quad \theta_t\left(x,0\right) = \theta_1\left(x\right), \quad \theta_{tt}\left(x,0\right) = \theta_2\left(x\right), \end{cases} \tag{2}$$

where $x \in \mathbb{R}$ and $t \geq 0$. All the coefficients are positive and satisfy

$$\tau_\nu^* > \frac{k\tau_\theta}{\tau_q} + k^*\tau_q. \tag{3}$$

In the second part, we take a Taylor series up to the second-order in τ_q, but only to the first-order in τ_θ and τ_ν. That is

$$\begin{cases} \tau_q\rho c_\upsilon\theta_{ttt} + \rho c_\upsilon\theta_{tt} + \dfrac{\tau_q^2}{2}\rho c_\upsilon\theta_{tttt} - k^*\theta_{xx} - \tau_\nu^*\theta_{txx} - k\tau_\theta\theta_{ttxx} = 0, \\ \theta\left(x,0\right) = \theta_0\left(x\right), \quad \theta_t\left(x,0\right) = \theta_1\left(x\right), \quad \theta_{tt}\left(x,0\right) = \theta_2\left(x\right), \quad \theta_{ttt}(x,0) = \theta_3(x), \end{cases} \tag{4}$$

where $x \in \mathbb{R}$ and $t \geq 0$. All the coefficients are positive constants and satisfy

$$\tau_\nu^* > k^*\tau_q \qquad \text{and} \qquad k\tau_\theta > \frac{\tau_q\tau_\nu^*}{2}\ . \tag{5}$$

These models have been recently investigated in [1] where an exponential stability has been shown in bounded domains. Here we consider the Cauchy problem of these models and by using the energy method in the Fourier space, we build the appropriate Lyapunov functional for each model and show the optimal (compared to the heat kernel) decay rate of solutions provided that the coefficients satisfy appropriate assumptions.

2. Main results

In this section, we state the decay estimates of the L^2-norm for the solution of each models. Thus, we have

Theorem 2.1 *Let s be a nonnegative integer and assume that* $U_0 = (\theta_x + \tau_q\theta_{tx}, \theta_t + \tau_q\theta_{tt}, \theta_{tx})^T (x, 0) \in H^s(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ *. Assume that (3) holds. Then the solution* $U = (\theta_x + \tau_q\theta_{tx}, \theta_t + \tau_q\theta_{tt}, \theta_{tx})^T$ *of system (2) satisfies the following decay estimates:*

$$\left\|\partial_x^k U(t)\right\|_{L^2} \leq C(1+t)^{-1/4-k/2} \|U_0\|_{L^1} + Ce^{-ct} \left\|\partial_x^k U_0\right\|_{L^2}, \tag{6}$$

for $k \leq s$ be a nonnegative integer and C and c are two positive constants.

Theorem 2.2 *Let s be a nonnegative integer and assume* $V_0 = \left(\theta_x + \tau_q\theta_{xt} + \frac{\tau_q^2}{2}\theta_{xtt}, \theta_{xt} + \frac{\tau_q}{2}\theta_{xtt}, \theta_t + \tau_q\theta_{tt} + \frac{\tau_q^2}{2}\theta_{ttt}, \theta_{xt}, \theta_{xtt}\right)^T (x, 0) \in H^s(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ *. Assume that (5) holds. Then the solution* $V = \left(\theta_x + \tau_q\theta_{xt} + \frac{\tau_q^2}{2}\theta_{xtt}, \theta_{xt} + \frac{\tau_q}{2}\theta_{xtt}, \theta_t + \tau_q\theta_{tt} + \frac{\tau_q^2}{2}\theta_{ttt}, \theta_{xt}, \theta_{xtt}\right)^T$ *of system (4) satisfies the following decay estimates:*

$$\left\|\partial_x^k V(t)\right\|_{L^2} \leq C(1+t)^{-1/4-k/2} \|V_0\|_{L^1} + Ce^{-ct} \left\|\partial_x^k V_0\right\|_{L^2}. \tag{7}$$

where $k \leq s$, is a nonnegative integer. Here C and c are two positive constants.

References

[1] R. Quintanilla and R. Racke. Note on stability in three-phase-lag heat conduction. International Journal of Heat and Mass Transfer, 51(1):24-29, 2008.

[2] S. K. R. Choudhuri. On a thermoelastic three-phase-lag model. Journal of Thermal Stresses, 30(3):231-238, 2007.

[3] S. A. Messaoudi and B. Said-Houari. Exponential stability in one-dimensional non-linear thermoelasticity with second sound. Math. Methods Appl. Sci., 28(2):205-232, 2005.

[4] R. Racke and B. Said-Houari. Decay rates and global existence for semilinear dissipative timoshenko systems. Quart. Appl. Math., In press.

[5] R. Quintanilla and R. Racke. Qualitative aspects in dual-phase-lag thermoelasticity. SIAM J. . Math., 66(3):977-1001 (electronic), 2006.

Some issues of regional controllability with constraints

A. Boutoulout* — H. Bourray — M. Baddi*** — L. Ezzahri******

* Faculty of Science Meknes
B.P. 11201, Zitoune Meknes, Morocco
boutouloutali@yahoo.fr
** Faculty of Science Meknes
B.P. 11201, Zitoune Meknes, Marocco
hbourrayh@yahoo.fr
*** Faculty of Science Meknes
B.P. 11201, Zitoune Meknes, Marocco
mohamedbaddi@hotmail.fr
**** Faculty of Sciences Meknes
B.P. 11201, Zitoune Meknes, Marocco
lailaezzahri@hotmail.fr

ABSTRACT. The aim of this paper is to caracterise the minimum energy control that steers a hyperbolic system to a final state between two prescribed functions only on an internal subregion of the evolution system domain.This problem is solved by the lagrangian multiplier method which leads to an algorithm that'll characterize the optimal control and the results will be illustrated by numerical simulations which lead to some conjectures.

RÉSUMÉ. Le but de ce travail est de caractériser le contrôle à énergie minimale qui ramène l'état d'un système hyperbolique en un temps fini, d'un état initial vers un état final desiré compris entre deux fonctions prescrites sur une région interne du domaine géometrique sur lequel le système évolue. Ce problème sera traité par la méthode des multiplicateurs de lagrange qui aboutit à un algorithme qui caractérisera le contrôle optimal, et les résultats obtenus seront illustrés avec des simulations numériques.

KEYWORDS : Energy minimum, hyperbolic system,Optimal control, Lagrangian multiplier.

MOTS-CLÉS : Energie minimum, Système hyperbolique, Contrôle optimal, Multiplicateur de lagrange.

1. Introduction

For distributed parameter system, the controllability concept consists in steering a system to a prescribed state defined on a spatial domain Ω, on which the governing partial differential equation is considered. This concept has been widely developed(see [1] and references therein). A situation that is very important in practical applications is that of controllability with hard constraints on controls and states (see [2]). Later, the concept of regional controllability was introduced by Zerrik [3], and interesting results have been obtained [4], particulary the possibility to reach a state only on a subregion ω interior to Ω. These results have been applied to the case where ω is a part of the boundary $\partial\Omega$ of Ω [5]. Here we are interested in steering the system from an initial state to a final one between two prescribed functions given only on a subregion ω of the geometric domain where the system is considered.
This concept has been developed for parabolic system by Zerrik and Ghafrani [6]. Here we consider the regional controllability for the wave equation with constraints, but it is clear that the required control will depend on the actuator location, the state space of the system, the time T and the subregion ω.
The aim of this paper is to give approach which leads to an algorithm for the computation of the optimal control that satisfies the output constraints.

2. Problem statement

Let Ω be an open bounded and regular subset in $\mathbb{R}^n$ with a boundary $\partial\Omega$ for $T > 0$, let $Q = \Omega\times]0,T[$ and $\Sigma = \partial\Omega\times]0,T[$.
We consider a hyperbolic system defined in Q and excited by controls which may be applied via various type of actuators(pointwise, zone, internal or boundary).
The considered system is described by the following hyperbolic equation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) + Ay(x,t) = Bu(t) & Q \\ y(x,0) = y^0(x), \dfrac{\partial y}{\partial t}(x,0) = y^1(x) & \Omega \\ y(\xi,t) = 0 & \Sigma \end{cases} \qquad (2.1)$$

Where A is a second-order elliptic linear operator, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, L^2(\Omega))$,$U = L^2(0,T,\mathbb{R}^p)$ and $(y_0, y_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. We design by $(y_u(T), \dfrac{\partial y_u}{\partial t}(T))$ the solution of (2.1) such that $(y_u(T), \dfrac{\partial y_u}{\partial t}(T)) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$

If we denote by $\overline{A} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix}$, $\overline{B}u = \begin{bmatrix} 0 \\ Bu \end{bmatrix}$ and $z = \begin{bmatrix} y \\ \dfrac{\partial y_u}{\partial t} \end{bmatrix}$ then, the system (2.1) can be written as follow:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t} + \overline{A}z = \overline{B}u & Q \\ \\ z(0) = (y_0, y_1) & \Omega \end{cases} \qquad (2.2)$$

The operator $(\overline{A})$ is closed and linear,with dense domain in $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Hence the system (2-2) admits a unique solution which is expressed using a semigroup $\overline{S}(t)_{t\geq 0}$ engendered by $\overline{A}$ and given as follow:

$$z(T) = \overline{S}(T)z_0 + \int_0^T \overline{S}(T-s)\overline{B}u(s)ds$$

Let ω be an open set of Ω assumed to be Lebesgue positive measure and

$$\begin{array}{rcl} \chi_\omega : L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \longrightarrow & L^2(\omega) \times L^2(\omega) \\ (z_1, z_2) \longrightarrow & (z_1, z_2) \mid \omega \end{array}$$

and χ_ω^* is the adjoint operator of χ_ω.
Let H be the operator from $U \to L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ defined by:

$$Hu = \int_0^t \overline{S}(t-s)\overline{B}u(s)ds$$

Definition 2.1 *We say that the system (2.1) is* $[\alpha_1(.), \beta_1(.)] \times [\alpha_2(.), \beta_2(.)]$*- Controllable in* ω *if*

$$(Im\chi_\omega H) \bigcap ([\alpha_1(.), \beta_1(.)] \times [\alpha_2(.), \beta_2(.)]) \neq \emptyset$$

Proposition 2.1 *The system (2.1) is* $[\alpha_1(.), \beta_1(.)] \times [\alpha_2(.), \beta_2(.)]$*- Controllable in* ω *if and only if*

$$(Ker\chi_\omega + ImH) \cap ([\alpha_1(.), \beta_1(.)] \times [\alpha_2(.), \beta_2(.)]) \neq \emptyset$$

3. Minimum energy control

The purpose of this section is to explore lagrangian approach devoted to the computation of the optimal control problem for the wave equation excited by an internal zone actuator which steers the system (2.1) from $(y^0, y^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\omega)$ to a final state (p^d, v^d) between $(\alpha_1(.)\, and\, \beta_1(.)\,,\ \alpha_2(.)\, and\, \beta_2(.))$ respectively on a subregion ω . More precisely we are interested in the following minimization problem

$$\begin{cases} inf \dfrac{1}{2} \parallel u \parallel^2 \\ u \in U_{ad} \end{cases} \qquad (3.1)$$

Where

$$U_{ad}=\{u \in U \mid \alpha_1(.) \leq y_u(T) \leq \beta_1(.) \text{ and } \alpha_2(.) \leq \frac{\partial y_u(T)}{\partial t} \leq \beta_2(.) \text{ a.e in } \omega\}.$$

is the admissible controls.
The following result ensure the existence and the uniqueness of the solution of the problem.

Proposition 3.1 *If the system (2.1) is exactly* $[\alpha_1(.), \beta_1(.)] \times [\alpha_2(.), \beta_2(.)]$- *Controllable in* ω *then the problem (3.1) has a unique solution* u^*.

Proposition 3.2 *If the system (2.1) is* $[\alpha_1(.), \beta_1(.)] \times [\alpha_2(.), \beta_2(.)]$- *coltrollable in* ω *then the solution of (3.1) is given by :*

$$u^* = -(\chi_\omega H)^* \lambda^* \qquad (3.3)$$

Where λ^* *is the solution of:*

$$\begin{cases} z^* = P_{[\alpha_1(.),\beta_1(.)]\times[\alpha_2(.),\beta_2(.)]}(\rho\lambda^* + z^*) \\ z^* + R_\omega \lambda^* = \chi_\omega \overline{S}(T)(y^0, y^1) \end{cases} \qquad (3.4)$$

While $P_{[\alpha_1(.),\beta_1(.)]\times[\alpha_2(.),\beta_2(.)]} : L^2(\omega) \times L^2(\omega) \longrightarrow [\alpha_1(.), \beta_1(.)] \times [\alpha_2(.), \beta_2(.)]$ *denotes the projection operator,* $\rho > 0$ *and* $R_\omega = (\chi_\omega H)(\chi_\omega H)^*$.

Conclusion

We have developed an extension of the notion of controllability for hyperbolic systems with constraints, we characterized the optimal control using the Lagrangian approach and the results obtained are given and will be illustrated with simulations. Future works aim to extend this notion of regional controllability with constrained to case where ω is a part of the boundary of Ω.

References

[1] R.F. Curtain, and H. Zwart: « An intoduction to infinite dimentional linear systems theory », », Springer Verlag, 1995.

[2] D.Q. Mayne, J.B. Rawlings, C.V. Rao and P.O.M. Scokaert « Constraint model predective control:Stability and optimaliy », *Automatica*, **36,(6)** (2000), 789–814.

[3] E. Zerrik, « Analyse régional des systèmes distribués », PhD thèse, Med V University , Morocco, 1993.

[4] A. El Jai, A.J. Pritchard, M.C. Simon and E. Zerrik « Regional Controlability of distributed system », *Int. J. Control*, **62,(6)** (1995), 1351–1365.

[5] E. Zerrik, A. El Jai and A. Boutoulout « Acuators and regional boundary controllability of parabolic system », *Int. J. Sys. Sci*, **31,(1)** (2000), 73–82.

[6] E. Zerrik and F. Ghafrani« Minimum energy control subject to output constraints: numerical approach », *Control Theory Appl*, **149,(1)** (2002), 105–110.

Inverse problem in non smooth domain

The heat equation

T. Ali Ziane[*] — Z. Ferhoune[*,] — O. Zair[*]**

[*] [**] Laboratoire MNEDP
faculté de Mathématiques de l'USTHB. Alger.
Algérie.
taliziane@gmail.com, whahzair@gmail.com
[**] ENS de Kouba. Alger.
Algérie.
ferzahia@yahoo.fr

ABSTRACT. This work is devoted to study an inverse problem (determination of the potential) for the cauchy-Dirichlet problem associated to the heat equation in two-dimensional space, with the aim particularity that the space domain **is not regular**. We distinguish two cases. In the first one the domain has a **polygonal** reentrant **corner**. In the second it has an emerging straight **crack**. In both cases the solution decomposes into two functions, one of them has the known regularity while the other is substantially less regular. We begin by showing a global Carleman inequality and then establish a Lipschitz stability estimate for the considered inverse problem.

RÉSUMÉ. Le but de ce travail est d'étudier un problème inverse (detemination du potentiel) pour le problème de Cauchy-Dirichlet associé à l'équation de la chaleur en dimension deux d'espace, avec un domaine qui a la particularité d'être **non régulier**. On distingue deux cas. Le premier concerne un domaine possédant un **coin** rentrant. Le second contient une **fissure** rectiligne émergente. Dans ces deux cas la solution du problème se décompose en somme de deux fonctions, l'une a la régularité connue tandis que l'autre est sensiblement moins régulière. On commence par montrer une inégalité de Carleman globale ensuite on établit une estimation Lipschitzienne de stabilité pour le problème inverse considéré.

KEYWORDS : Inverse problem, Carleman estimates, heat equation.

MOTS-CLÉS : Problème inverse, inégalités de Carleman, équation de la chaleur.

1. Introduction

Let Ω be an open bounded subset of $\mathbb{R}^2$ with boundary $\Gamma = \partial\Omega$.
For $T > 0$ we denote by Q_T and Σ the sets $(0,T) \times \Omega$ and $(0,T) \times \Gamma$ respectively and consider the problem:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \partial_t q - \Delta q - aq = & 0 & \text{in} & Q_T, \\ q = & 0 & \text{on} & \Sigma, \\ q(0,.) = & q^0 & \text{in} & \Omega, \end{array} \right. \tag{1}$$

where a is the potential.

Many works have been done in this area. We can refer to [1] where the authors have shown lipschitz stability in inverse parabolic problems. Others became interested in inverse problem for the Schrödinger equation [2]. There are also results concerning with wave equation. See ([3],[4]).

In the most articles cited above, results were proved by using local or global Carleman estimates, but all of them assume that the space domain Ω is **regular**, at least of class $\mathcal{C}^2$.

In this work we aim at prove a similar result in case of **non regular** domains. We distinguish two cases:

Case 1: We suppose that Ω has a polygonal reentrant corner at point S ($S \in \Gamma$) with measure $\phi, \pi < \phi < 2\pi$, and that $\Gamma \setminus \{S\}$ is regular.

Case 2: We suppose that Ω has one straight emerging crack σ, we note by S its tip and by $\widetilde{\Gamma}$ the part $\Gamma \setminus \sigma$ which is assumed to be smooth .

If we change the potential a into $\widetilde{a}$, let $\widetilde{q}$ be the solution of (1) associated to $\widetilde{a}$ with $\widetilde{q}_0$ as initial data and let $\omega \subset \Omega$. Assumed that we can measure

$$q|_{(0,T)\times\omega} \text{ and } q_0 = q|_{\{\theta\}\times\Omega},\ 0 < \theta < T.$$

Our main result in both cases is stated in the following theorem.

Theorem 1.1 *Let $\mathcal{V}$ be a bounded subset of $L^\infty(\Omega)$, $a \in L^\infty(\Omega)$ and q be a solution of problem (1). We assume that $q \in W^{1,2}(0,T,L^\infty(\Omega))$ and there exists $r_0 > 0$ such that $|q_0(x)| \geq r_0$, a.e in $\overline{\Omega}$. Then there exists a positive constant $C = C(\Omega, T, \omega, r_0, \mathcal{V})$ such that*

$$\|a - \widetilde{a}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\|\partial_t (q - \widetilde{q})\|^2_{L^2((o,T)\times\omega)} + \|q_0 - \widetilde{q}_0\|^2{}_{H(\Omega)} \right), \tag{2}$$

for all $\widetilde{a} \in \mathcal{V}$.

Where $H(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \setminus \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ is the Hilbert space along with the norm $\|u\|^2_{H(\Omega)} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)}$.

2. Global Carleman estimate

We recall that $D(-\Delta) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ when Ω is regular.
In our cases we have the following result (see [7], [8]).

Theorem 2.1 *$D(-\Delta) = (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \oplus \{u_S\}$, where $u_S(r,\vartheta) = r^{\frac{\pi}{\phi}}\eta(r)\sin\left(\frac{\pi}{\phi}\vartheta\right)$, $\pi < \phi \leq 2\pi$ and η is a $C^\infty(\Omega)$ cut-off function such that $\eta(r) = 1$ in a neighborhood of the point S (r and ϑ are local polar coordinates). Moreover $D(-\Delta) \subset H^l(\Omega)$, for all l such that $\frac{3}{2} < l < 2$ in case 1 and $1 < l < \frac{3}{2}$ in case 2.*

Proposition 2.1 *For all $u^0, g \in L^2(\Omega)$ the following problem*

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = & g \quad \textit{in} \quad Q_T, \\ u = & 0 \quad \textit{on} \quad \Sigma, \\ u(0,.) = & u^0 \quad \textit{in} \quad \Omega, \end{cases} \tag{3}$$

admits a unique solution u in $C^0\left([0,T]; L^2(\Omega)\right) \cap C^0(]0\ ,T\ ]; D(-\Delta)) \cap C^1\left(]0\ ,T\ ]; L^2(\Omega)\right)$.

For the proof see for example [6] and references in.

Proposition 2.2 (Weight function) *There exists a function $\beta \in C^1(\overline{\Omega}) \cap W^{2,\infty}(\Omega)$ such that*

$$\beta > 0 \textit{ in } \Omega,\ |\nabla\beta| > 0 \textit{ in } \overline{\Omega \setminus \omega} \frac{\partial\beta}{\partial\nu} < 0 \textit{ on } \Gamma \setminus \{S\}, \quad \textit{in case 1,}$$

and $\quad \beta > 0$ *in* Ω, $|\nabla\beta| > 0$ *in* $\overline{\Omega \backslash \omega}$, $\dfrac{\partial\beta}{\partial\nu} < 0$ *on* $\widetilde{\Gamma}$ *and* $\dfrac{\partial\beta}{\partial\nu_\pm} = 0$ *on* $\sigma \backslash \{S\}$ $\quad$ *in case 2.*

where ν_+ and ν_- denote the (opposite) outward unit normal of the crack σ.

For more details see [3].

We define for $(t,x) \in (0,T) \times \Omega$ and $m > 1$, the functions α, φ as follows

$$\begin{cases} \alpha(t,x) = & \frac{e^{2\lambda m\|\beta\|_\infty} - e^{\lambda(m\|\beta\|_\infty + \beta(x))}}{t(T-t)} \\ \varphi(t,x) = & \frac{e^{\lambda(m\|\beta\|_\infty + \beta(x))}}{t(T-t)} \end{cases} \tag{4}$$

where β is the function given by the Proposition 2.2. We also put

$$\begin{cases} M_1\psi = & 2s\lambda^2|\nabla\beta|^2\varphi\psi - 2s\lambda\nabla\varphi.\nabla\psi + \partial_t\psi, \\ M_2\psi = & -s^2\lambda^2|\nabla\beta|^2\varphi^2\psi - \Delta\psi + s\alpha_t\psi, \\ g_{s,\lambda} = & e^{-s\alpha}g - s\lambda\Delta\beta\varphi\psi - s\lambda^2|\nabla\beta|^2\varphi\psi. \end{cases} \tag{5}$$

Our Carleman estimate is stated as follows:

Proposition 2.3 *There exist positive constants $\lambda_0 = \lambda_0(\Omega, \omega)$, $s_0 = s_0(\Omega, \omega)(T + T^2)$ and $C = C(\Omega, \omega)$, such that for any $\lambda \geq \lambda_0$, $s \geq s_0$*

$$\|M_1\psi\|^2 + \|M_2\psi\|^2 + \int_{Q_T} s^{-1}\varphi^{-1}(|\psi_t|^2 + |\Delta\psi|^2) + \int_{Q_T} s\lambda^2\varphi|\nabla\psi|^2 \tag{6}$$

$$+ \int_{Q_T} s^3\lambda^4\varphi^3|\psi|^2 \leq C\left(\int_{Q_T} |e^{-s\alpha}(\partial_t u - \Delta u)|^2 + \int_{\omega_T} s^3\lambda^4|\psi|^2 dtdx\right)$$

for all $\psi = e^{-s\alpha}u$, u solution of (3), φ and α as above.

Sketch of the proof of Proposition 6. In case 1 we improve the regularity of u with respect to time. we approach u^0, g by sequences $(u_n^0)_n \subset D((-\Delta)^2)$,
$(g_n)_n \subset C^1(0, T; D(-\Delta))$ such that the solution u_n for the problem (3) with data (u_n^0, g_n) belongs to $C^2\left([0, T]; L^2(\Omega)\right) \cap C^1\left([0\ , T\ ]\,; D(A)\right)$ for each $n \in \mathbb{N}$ then we can show

Lemma 2.2 *if we set $\psi_n = e^{-s\alpha}u_n$ and $\psi = e^{-s\alpha}u$, we have*

1) $(u_n)n$ converges to u in $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$,

2) $(\Delta\psi_n)n$ converges to $(\Delta\psi)$ in $L^2(Q_T)$.

We use too the density of $H^2(\Omega)$ in $H^s(\Omega)$ to improve the regularity in space.
In case 2 the boundary of Ω is not Lipschitz, so we integrate by parts in subset $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus B(S, \epsilon)$, ($B(S, \epsilon)$ is the open ball with radius ϵ centered at S) we regularize u as above and use the following result in a neighborhood of S.

Lemma 2.3 *The space $D(-\Delta) \cap (C^1(\overline{\Omega}) \oplus \{u_s\})$ is dense in $D(-\Delta)$.*

In both cases we use Lebesgue's theorem to pass to the limit in integrals. To achieve the proof of Proposition 6 we use, as in [3] the usual technics for Carleman estimates.

3. Proof of theorem 3.2

Proof. Since we can replace T by 2θ, we can always assume that $\theta = \frac{T}{2}$. We set $u = \widetilde{q} - q$, $f = \widetilde{a} - a$, $v = \partial_t u$ and $v_0(x) = v(\frac{T}{2}, x)$.
The function v satisfies the system of equations:

$$\left\{\begin{array}{rll} \partial_t v - (\Delta + \widetilde{a})v = & fq' & \text{in } Q_T \\ v(t, x) = & 0 & \text{in } \Sigma \\ v_0 = & (\Delta + \widetilde{a})u_0 + fq_0 & \text{in } \Omega, \end{array}\right. \tag{7}$$

On the one hand, if we multiply the first equality of (5) by ψ, integrate the result on $Q_{\frac{T}{2}}$ and use $\psi(0,x) = \ 0, x \in \Omega$ it comes

$$\int_\Omega |\psi\left(\frac{T}{2},x\right)|^2 dx = 2\int_{Q_{\frac{T}{2}}} M_1\psi\psi dtdx$$

$$-4s\lambda\int_{Q_{\frac{T}{2}}} \varphi\nabla\beta\nabla\psi\psi dtd - 4s\lambda^2\int_{Q_{\frac{T}{2}}} \varphi|\nabla\beta|^2|\psi|^2 dtdx \tag{8}$$

We apply Young inequality to the first two terms on the right hand side of (8) and thanks to Carleman inequality stated in Proposition 6, all terms obtained are bounded, for $\lambda \geq \lambda_0$ fixed, s large enough by

$$C(s^{-\frac{3}{2}}\int_{Q_T} |e^{-s\alpha(t)} fq'|^2 + s^{\frac{5}{2}}\int_{\omega_T} |e^{-s\alpha(t)} v|^2 dtdx)$$

thus if we put $\alpha(\frac{T}{2},x) = \alpha_0(x)$ it comes for all $t \in (0,T)$

$$\int_\Omega |e^{-s\alpha_0} v_0|^2 dx \leq C(s^{-\frac{3}{2}}\int_{Q_T} |e^{-s\alpha(t)} fq'|^2 dtdx + s^{\frac{5}{2}}\int_{\omega_T} |e^{-s\alpha(t)} v|^2 dtdx) \tag{9}$$

Since α reaches its minimum, with respect to t at $\frac{T}{2}$ we get the estimate

$$\int_\Omega |e^{-s\alpha_0} v_0|^2 dx \leq C(s^{-\frac{3}{2}}\int_{Q_T} |e^{-s\alpha_0} fq'|^2 dtdx + s^{\frac{5}{2}}\int_{Q_T} |e^{-s\alpha_0} v|^2 dtdx). \tag{10}$$

On another hand From [7] and that $\widetilde{a} \in L^\infty(\Omega)$ we have

$$\int_\Omega |e^{-s\alpha_0} fq_0)|^2 dx \leq C\left(\|e^{-s\alpha_0} u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega |e^{-s\alpha_0}\Delta u_0|^2 dx + \int_\Omega |e^{-s\alpha_0} v_0|^2 dx\right). \tag{11}$$

Use that α_0 is bounded in $\overline{\Omega}$, combine (10) and (11) together we get

$$\int_\Omega |fq_0)|^2 dx \leq C(\|u_0\|^2_{H(\Omega)} + s^{-\frac{3}{2}}\int_{Q_T} |fq'|^2 dtdx + s^{\frac{5}{2}}\int_{\omega_T} |\partial_t u|^2 dtdx) \tag{12}$$

From hypothesis $q \in W^{1,2}(0,T,L^\infty(\Omega))$ and $|q_0(x)| \geq r_0$ a.e in $\overline{\Omega}$, we deduce that:

$\exists\ h \in L^2(0,T)$, $|q'(t,x)| \leq h(t)|q_0(x)|$, $\forall x \in \Omega,\ t \in (0,T)$.

$$\int_0^{\frac{T}{2}}\int_Q |fq'|^2 dtdx \leq \int_0^{\frac{T}{2}} |h(t)|^2 dt \int_\Omega |fq_0)|^2 dx$$

$h \in L^2(0,T)$ means $\exists\, M > 0$ such that $\displaystyle\int_0^{\frac{T}{2}} |h(t)|^2 dt \leq M < \infty$ consequently

$$\int_0^{\frac{T}{2}} \int_Q |fq'|^2 dt dx \leq M \int_\Omega |fq_0)|^2 dx \tag{13}$$

Combine (1) and (13), use that $|q_0(x)| \geq r_0$ a.e in $\overline{\Omega}$

$$r_0^2(1 - s^{-\frac{3}{2}} MC) \int_\Omega |f|^2 dx \leq C(\|u_0\|^2_{H(\Omega)} + s^{\frac{5}{2}} \int_{\omega_T} |\partial_t u|^2 dt dx) \tag{14}$$

Now if we choose s large enough $(s > (MC)^{\frac{2}{3}})$ we obtain the inequality (2) namely

$$\|a - \widetilde{a}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\|q_0 - \widetilde{q}_0\|^2_{H(\Omega)} + \|\partial_t (q - \widetilde{q})\|^2_{L^2(\omega_T)} \right) \tag{15}$$

$\square$

Acknowledgment. The authors would like to thank A. Benabdallah for her encouragement. This work is supported by the PNR Sciences fundamentales agreement No. 25/57.

References

[1] O.Yu.Imanuvilov., M.Yamamoto « Lipschitz stability in inverse parabolic problems by the Carleman estimate », *Inverse Problems*, **Number 14** (1998).

[2] L. Baudouin., J-P. Puel « Uniqueness and stability in an inverse problem for the Schrödinger equation »,

[3] J-P. Puel., M.Yamamoto « Smoothing property in multidimentional inverse hyperbolic problems: application to uniqueness and stability » *J. of Inverse and Ill-posed problems*, **4** (1996), 283-296.

[4] M.Yamamoto., « Uniqueness and stability in multidimensional hyperbolic problems », *J. Math. Pures Appl.*, **78** (1999), 65-98.

[5] A. Belghazi., F. Smadhi, N. Zaidi, and O.Zahir « Carleman Inequality for the two dimensional Heat equation in singular domain », *MAthematical control and related fields*, **Number 3** (2011).

[6] H. Brézis « Analyse fonctionnelle théorie et applications », Editeur:Dunod, France.

[7] P. Grisvard, « Singularities in boundary value problems », Editeur:Springer-Verlag, (1992).

[8] P. Grisvard, « Elliptic problems in nonsmooth domains. », Editeur:Pitman, Boston, London, Melbourne, (1985).

Bi-Phasic Flows in a Porous Medium

S. Gasmi[1] — F.Z. Nouri[2]

Mathematical Modeling and Numerical Simulation Laboratory LAM^{2}SIN,
Faculty of Sciences, Badji Mokhtar University, P.O. Box 12, 23000 Annaba, Algeria
[1] gasmi.souad@yahoo.fr

ABSTRACT. In this paper, we develop a simplified formulation of the hydrocarbon system used for the petroleum reservoirs simulation. This system is a simplified model which describes a two-phase flow (oil and gas) with a mass transfer in a porous medium, that leads to the fluid compressibility. This kind of flow is modelled by a system of parabolic degenerated non linear convection-diffusion equations. Under certrain hypothesis, such as validity of Darcy's law, incompressibility of the porous medium, compressibility of the fluids, mass transfer between the oil and the gas and negligible gravity, the global pressure of G. Chavent [2] is formulated. This formulation allows the establishment of theoretical results on the existence and uniquiness of the solution.

RÉSUMÉ. L'étude mathématique des écoulements multiphasiques en milieu poreux est d'une grande importance dans l'industrie pétrolière lors de l'exploitation d'un gisement de pétrole ou de gaz.
On propose un modèle simplifié du système hydrocarbon utilisé pour la simulation des réservoirs de pétrole. Le système hydrocarbon est un modèle qui décrit un écoulement biphasique (huile et gaz) avec un transfert de masse entre les deux fluides dans un milieu poreux. Sous certaines hypothèses, la pression globale de G. Chavent [2] est introduite. Ce type d'écoulement (hydrocarbon system) est modélisé par un système d'équations paraboliques dégénérées non linéaires de type convection-diffusion. Cette formulation nous a permis d'établir des résultats théoriques d'existence et d'unicité de la solution.

KEYWORDS : Compressible Fluids, Porous Medium, Multiphasic Flows.

MOTS-CLÉS : fluides compressibles, Milieu Poreux, Ecoulement Multiphasique

1. Introduction

The mathematical study of the multiphasic flows in porous medium has attracted attention to many researchers in oil industry.
The hydrocarbon system is a simplified model which describes a two-phase flow (oil and gas) in a porous medium. In our case, there is a mass transfer between the two fluids, which leads to the fluid compressibility, so that the global pressure formulation of G. Chavent [2] will be introduced. This kind of flow (hydrocarbon system) is modeled by a system of parabolic degenerated non linear convection-diffusion equations. This formulation allows the establishment of theoretical results of the existence and the uniquness of the solution based on different studies, for example, in [1] the authors studied the case of two-phase incompressible fluids without mass transfer,[2] was devoted to analyze the one phase flow and [7] the black-oil model. Furthermore a study of different numerical schemes have been considered by many authors; among them, we can refer the reader to [3] who purposed a finite element scheme, [4] who used a finite difference method while [5] a higher order Godunov scheme and the authors in [8] have proposed a finite volume method. All these schemes seem to suffer from a lack of numerical stability. It will be fruitfull if we investigate the numerical algorithms described in [9] and |10].
Here, we are concerned by compressible fluids and our aim is to seek conditions to prove the existence and uniqueness of the developed model's solution.

2. Mathematical model

Let us consider a bounded connected open domain Ω of $\mathbb{R}^d$ with $d = 2$ or 3, describing the porous medium (the reservoir), with a Lipchitz boundary Γ, and let t be the time variable $t \in [0, T[, T \prec \infty$. We consider two compressible fluids (oil and gas), where the gravity effect is neglected, the Darcy's law combined with mass's conservation equations for each of the component leads to the following system:

$$\phi(x)\frac{\partial}{\partial t}(\rho_o \omega_o^h S_o) - div(K(x)\rho_o\omega_o^h \frac{k_{ro}}{\mu_o}\nabla P_o) = 0 \tag{1}$$

$$\phi(x)\frac{\partial}{\partial t}(\rho_g S_g + \rho_o\omega_o^l S_o) - div(K(x)(\rho_g \frac{k_{rg}}{\mu_g}\nabla P_g + \rho_o\omega_o^l\frac{k_{ro}}{\mu_o}\nabla P_o)) = 0 \tag{2}$$

where (for $i = o, g$), S_i, P_i, ρ_i, μ_i and k_{ri} represent, the saturation, the pressure, the density, the viscosity and the relative permeability of the phase i, respectively. ϕ and K are the porosity and the absolute permeability of the medium and ω_o^c, $c = h, l$ is the massic fraction of component c in the oil phase.

We suppose that it is a saturated regime and is expressed by $S_o + S_g = 1$, the capillary pressure is given by $P_g - P_o = P_c(S_o)$

We define the mobility of each phase by $\lambda_i = \frac{k_{ri}}{\mu_i}, \quad i = o, g$, the total mobility by $\lambda = \lambda_o + \lambda_g$ and for simplicity convenience, we set $\rho_o^h = \rho_o \omega_o^h, \quad \rho = \rho_g + \rho_o, \quad b = \rho_g \lambda_g + \rho_o \lambda_o$ and $d = \rho_g - \rho_o$

2.1. Reduced Saturation

Let us define by $S_{i,m}$, the residual saturation and by $S_{i,M}$,the maximum saturation of the fluid $i = o, g$, such that

$$S_{g,M} = 1 - S_{o,m} \quad \text{and} \quad S_{o,M} = 1 - S_{g,m}$$

This leads to define the reduced saturation S

$$S = \frac{S_o - S_{o,m}}{1 - S_{g,m} - S_{o,m}} \quad \text{where} \quad 0 \leq S \leq 1 \tag{3}$$

2.2. Global pressure

If $S = 0$, equation (1) disappears. This is one of the main reasons for which the terminology of the "global pressure" was introduced and written as

$$P = \frac{1}{2}\left(P_g + P_o\right) + \gamma\left(S\right) \tag{4}$$

with $\gamma(S) = \int\limits_0^S \alpha\left(\xi\right) d\xi$ where $\alpha\left(S\right) = \frac{\lambda_g(S)\lambda_o(S)}{\lambda(S)} P_c'\left(S\right)$ is the capillary diffusion.

2.3. Boundary and initial conditions

The system must be completed with boundary and initial conditions. We suppose that the reservoir's boundary is not permeable: $\nabla P.\eta = 0, \quad \alpha(S)\nabla S = 0, \quad$ on $\Gamma \times (0, T)$
At $t = 0$, we have: $S\left(x, 0\right) = S^0\left(x\right)$ and $P\left(x, 0\right) = P^0\left(x\right)$ in Ω

Therefore, we write system $(1 - 2)$ as

$$\Phi(x)\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_o^h S\right) - div\left(K(x)\rho_o^h \lambda_o(S)\nabla P\right) + div\left(K(x)\rho_o^h \alpha(S)\nabla S\right) = f_1 \tag{5}$$

$$\Phi(x)\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho S\right) - div(K(x)b(S, P)\nabla P) + div\left(K(x)d\left(P\right)\alpha(S)\nabla S\right) = f_2 \tag{6}$$

$$\nabla P.\eta = 0, \quad \alpha(S)\nabla S = 0, \qquad \text{on } \Gamma \times (0, T) \tag{7}$$

$$S\left(x, 0\right) = S^0\left(x\right), \quad P\left(x, 0\right) = P^0\left(x\right) \qquad \text{in } \Omega \tag{8}$$

Where $f_1 = -\phi(x)S_{o,m}\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_o^h\right)$ and $f_2 = -\phi(x)\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho S_{o,m} + \rho_g\right)$

3. Existence and uniqueness of the solution

Let Ω be a connected open set in $\mathbb{R}^d$ ($d = 2$ or 3), with a Lipschiz boundary Γ, to ensure the existence and the uniqueness of the weak solution, for our case, we start by setting the following hypotheses:

1) $K(x) \in L^\infty(\Omega, (0,T))$, such that

$$K_- \leq K(x) \leq K_+ \ \ a.e.\text{in}\ \Omega$$

2) $\phi(x) \in L^\infty(\Omega, (0,T))$, such that

$$0 \prec \phi_- \leq \phi(x) \leq \phi_+ \ \text{ a. e. in } \Omega$$

3) $\rho_o^h(P) \in L^\infty(\Omega, (0,T)) \cap H^1(\Omega, (0,T))$, such that

$$\rho_{o-}^h \leq \rho_o^h(P) \leq \rho_{o+}^h \ \text{ a. e. in } \Omega \times (0,T)$$

4) $\alpha(S) \in L^\infty(\Omega, (0,T))$, such that

$$\alpha_- \leq \alpha(S) \leq \alpha_+ \ \text{ a. e. in } \Omega \times (0,T)$$

5) $\lambda_o(S) \in L^\infty(\Omega, (0,T))$, such that

$$\lambda_{o-} \leq \lambda_o(S) \leq \lambda_{o+} \ \text{ a. e. in } \Omega \times (0,T)$$

6) $d(P) \in L^\infty(\Omega, (0,T))$, such that

$$d_- \leq d(P) \leq d_+ \ \text{ a. e. in } \Omega \times (0,T)$$

7) $b(S,P) \in L^\infty(\Omega, (0,T))$, such that

$$b_- \leq b(S,P) \leq b_+ \ \text{ a. e. in } \Omega \times (0,T)$$

8) $S^o, P^o \in L^\infty(\Omega)$, such that

$$0 \leq S(x,t) \leq 1 \quad \text{ a. e. in } \Omega \times (0,T)$$

9) $\rho_g(P) \in H^1(\Omega, (0,T))$.

Note that a.e stands for almost everywhere.Then we introduce the following spaces

$$H(div, \Omega) = \left\{ v \in \left(L^2(\Omega, (0,T))\right)^d, div(v) \in L^2(\Omega, (0,T)), d = 2, 3 \right\} \tag{9}$$

$$V(\Omega) = \{ v \in H(div, \Omega), v.\eta = 0 \quad \text{on } \Gamma \} \tag{10}$$

$$W(\Omega) = \{v \in V(\Omega), v(x,T) = 0 \ \ \text{in}\,\Omega\}$$

The weak formulation of problem $(5-8)$ is written as

$$\left(\Phi(x)\rho_o^h S, \frac{\partial v}{\partial t}\right)_\Omega - \left(K(x)\rho_o^h \lambda_o(S)\nabla P, \nabla v\right)_\Omega + \left(K(x)\rho_o^h \alpha(S)\nabla S, \nabla v\right)_\Omega = (f_1, v) \tag{11}$$

$$\left(\Phi(x)\rho S, \frac{\partial v}{\partial t}\right)_\Omega - \left(K(x)b(S,P)\nabla P, \nabla v\right)_\Omega + \left(K(x)d(P)\alpha(S)\nabla S, \nabla v\right)_\Omega = (f_2, v) \tag{12}$$

where $(.,.)_\Omega$ is the inner product defined on $W(\Omega)$.

Proposition 3.1 *Under assumption* $(1-9)$, *problem* $(5-8)$ *has a unique solution* $(S,P) \in (V(\Omega))^2$.

Proof. To prove this result, first we adapt results in [1] and [2] to our model so that system $(5-6)$ can be written in a simplified form as:
$\Phi(x)b(S,P)\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_o^h S\right) - b(S,P)\nabla.\left(K(x)\rho_o^h\lambda_o(S)\nabla P\right) + b(S,P)\nabla.\left(K(x)\rho_o^h\alpha(S)\nabla S\right) = b(S,P).f_1$ and $\Phi(x)\rho_o^h\lambda_o(S)\frac{\partial}{\partial t}(\rho S) - \rho_o^h\lambda_o(S)\nabla.(K(x)b(S,P)\nabla P) + \rho_o^h\lambda_o(S)\nabla.\left(K(x)d(P)\alpha(S)\nabla S\right) = \rho_o^h\lambda_o(S).f_2$. Then we introduce a new unknown $V = K(x)\rho_o^h\alpha(S)\left(b(S,P) - d(P)\lambda_o(S)\right)\nabla S$ to get the following two equations:

$$\Phi(x)\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_o^h S\right).v_1 - \frac{\partial}{\partial t}(\rho S).v_2\right) + V = f_1 v_1 - f_2 v_2 \tag{$*$}$$

and

$$V = K(x)\rho_o^h\alpha(S)\left(b(S,P) - d(P)\lambda_o(S)\right)\nabla S \tag{$**$}$$

We first assume that the unknown $V \in L^2(\Omega, (0,T))$ is known and we try to find $S \in V(\Omega,(0,T))$ from equation $(**)$. A is an isomorphism from V into V' (according to the above conditions $(1, 3-7)$), thus equation $(**)$ has a unique solution $S(x,t)$ for $t \in (0,T)$ (from Lax-Milgram theorem [6]). $\square$

4. Conclusion

In this paper, we have introduced a simplified formulation of the Hydrocarbon system where the unknowns are the reduced saturation of one of the fluids and the global pressure. This formulation transform a coupled degenerate non linear parabolic system to a familly of elliptic equations. Hence we prove a theorecal result for the existence and the uniquness of the solution of the resulting system. This is proved by decoupling the equations and using twice Lax-Milgram's theorem [6], first to determine the saturation S assuming that V is known from equation $(*)$, and then obtain V from equation $(**)$.

References

[1] M. Afif and B. Amaziane, On convergence of finite volume schemes for one-dimensional two-phase flow in porous media, Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 145 (2002), pp. 31–48.

[2] G. Chavent and J. Jaffre, Mathematical Models And Finite Elements For Reservoir Simulation, Single Phase, Multiphase and Multicomponent Flows through Porous Media, Elsevier Science Publishers B.V., 1986.

[3] Z. Chen, Finite element methods for the black oil model in petroleum reservoirs, I.M.A. Preprint Series, Juillet 1994

[4] Z. Chen, Reservoir Simulation, Mathematical Techniques in oil Recovery, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2007.

[5] E. M. Dicks, higher order Godunov black-oil simulations for compressible flow in porous media, Thèse, Université de reading, Mars 1993.

[6] R.Dautray, J.L.Lions, Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, masson, Paris 1987.

[7] G. Gagneux, A-M. Lefevere, M. Madaune-Tort, Analyse mathématique de modèles variationnels en simulation pétrolière, Le cas du modèle black-oil pseudo-compositionnel standart isotherme", Revista Matematica de la Universidad Complutense de Madrid,1989.

[8] A. Mahamane, O. Diallo, F. Benkhaldoun, Simulation numérique par volumes finis d'un écoulement diphasique eau-pétrole en milieu poreux, M.S.A.S., 2006, pp. 47-54.

[9] M. Maouni and F.Z. Nouri, Numerical Results for flows in a Complex geometry,Int. J. Applied Math. and Mech. 5(4), 2009, pp. 19-31.

[10] F. Saci, F.Z. Nouri and E. Canot, A spectral element method for the solution of flows with obstacles, Int. J. Applied Math. and Mech. 8(18), 2012, pp 79-99.

Cavities identification by level set method

Emna Jaïem [*] — Dzair Bouazdia Lakhdari [**]

[*] LAMSIN, ENIT, Tunis EL Manar University, Tunis
Tunisia
emna23jaiem@gmail.com
[**] Department of Mathematics, Badji Mokhtar Annaba University, Annaba
Algeria
lakhdz@yahoo.fr

ABSTRACT. The main of this paper is an analysis of geometric inverse problems related to the identification of cavities in two spatial dimensions.
The overdetermined boundary data used for the reconstruction is the normal derivative of the displacement.
By introducing a Dirichlet-Neumann approach, a cost function rephrasing the inverse problem to a shape optimization one is proposed. Moreover, this cost function which may be viewed as an energetic least-squares one and whose shape derivative is explicitly determined, encourages us to combine the gradient information with the level set method in a steepest descent algorithm to solve numerically the shape optimization problem.

RÉSUMÉ. Nous nous intéressons dans ce travail à l'analyse d'un problème inverse géométrique d'identification de cavités en deux dimensions.
La donnée surdéterminée pour la reconstruction de la frontière inconnue est la dérivée normale du déplacement.
En introduisant une approche Dirichlet-Neumann, nous transformons notre problématique sous la forme d'un problème d'optimisation de forme. La combinaison de la notion de dérivée par rapport au domaine et de la méthode des ensembles de niveau, nous a permis la mise en oeuvre d'un algorithme de descente de type gradient pour la résolution numérique du problème inverse.

KEYWORDS : geometric inverse problems, cavities identification, shape optimization, shape derivative, gradient descent apprroach, level set method.

MOTS-CLÉS : problèmes inverses géométriques, identification de cavités, optimisation de forme, dérivée par rapport au domaine, méthode des ensembles de niveaux.

1. Introduction

The problem of cavities identification arises in various physical situations such as non destructive control [1].
Given a bounded domain $A \subset \mathbb{R}^2$, with boundary Γ_0, the problem consists in finding a bounded domain $B \supset \overline{A}$ with boundary Γ and a function u defined on $\Omega = B \setminus \overline{A}$ such that

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \Gamma, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu_0} = \phi & \text{on } \Gamma_0, \\ u = f & \text{on } \Gamma_0. \end{cases} \tag{1}$$

Above, ν respectively ν_0 is the outer normal unit vector to the boundary Γ respectively Γ_0. Homogeneous Neumann boundary condition is imposed on the free boundary Γ (the boundary delimiting the cavity searched); and a Dirichlet and a Neumann boundary condition on the fixed boundary Γ_0.
For a given Ω, let u_D and u_N be the solutions of the following Dirichlet, respectively Neumann problem

$$\begin{cases} -\Delta u_D = 0 & \text{in } \Omega, \\ \dfrac{\partial u_D}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \Gamma, \\ u_D = f & \text{on } \Gamma_0, \end{cases} \tag{2}$$

and

$$\begin{cases} -\Delta u_N = 0 & \text{in } \Omega, \\ \dfrac{\partial u_N}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \Gamma, \\ \dfrac{\partial u_N}{\partial \nu_0} = \phi & \text{on } \Gamma_0. \end{cases} \tag{3}$$

We are interested in formulating the problem as a shape optimization one. The originality of this approach introduced in [2] , relies on the use of an error functional that can be interpreted as a constitutive law error functional.
Let us so define the error function J depending on the domain Ω by

$$J(\Omega) := \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u_D - \nabla u_N|^2. \tag{4}$$

Thus, problem (1) is equivalent to the shape optimization problem

$$\begin{cases} \text{Find } (u,\Omega) \text{ such that} \\ J(\Omega) = \min\limits_{\tilde{\Omega}} J(\tilde{\Omega}). \end{cases} \tag{5}$$

2. Shape derivative of the functional J

In order to apply a gradient method to the minimization of (5) , we recall the notion of shape derivative. In fact, we prove its existence for the functional J and give its analytical expression.
Let us consider a hold-all domain $U \supset \overline{\Omega}$ and introduce the mapping F_t which defines a perturbation of the domain Ω of the form

$$F_t = \text{id} + th,$$

where id is the identity operator, h is a deformation field belonging to the space

$$Q = \{h \in \mathcal{C}^{1,1}(\overline{U})^2;\ h = 0 \text{ on } \Gamma_0\},$$

and t is sufficiently small such that F_t is a diffeomorphism from Ω onto its image. The perturbations of Ω and Γ are respectively defined by

$$\Omega_t := F_t(\Omega), \quad \Gamma_t := F_t(\Gamma).$$

Since h vanishes on Γ_0 for $h \in Q$, then $F_t(\Gamma_0) = \Gamma_0$. Thus, for all t, Γ_0 is a part of the boundary of Ω_t.
In the following, we consider the solutions $u_{Dt} := u_D(\Omega_t)$ and $u_{Nt} := u_N(\Omega_t)$ of (2) and (3) respectively formulated on the perturbed domain Ω_t instead of Ω.

Definition 2.1 *The Eulerian derivative of the functional J at Ω in the direction of an element $h \in Q$ is defined by the quantity, when it exists:*

$$J'(\Omega,h) = \lim_{t\to 0} \frac{J(\Omega_t) - J(\Omega)}{t}.$$

The Eulerian derivative is called shape derivative if $J'(\Omega,h)$ exists for all $h \in Q$ and the mapping $h \mapsto J'(\Omega,h)$ is linear and continuous with respect to the topology of $\mathcal{C}^{1,1}(\overline{\Omega})^2$.

Proposition 2.1 *There exist u_D^1 and $\epsilon(h)$ in $H^1(\Omega)$ such that*

$$u_D^h = u_D^0 + h\, u_D^1 + h\, \epsilon(h), \tag{6}$$

where $\lim_{h\to 0}|\epsilon(h)| = 0$, u_D^0 *is the solution of* (2),*and* u_D^1 *is solution of the following problem*

$$\begin{cases} \textit{Find } u_D^1 \in V \textit{ such that} \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u_D^1.\nabla v = \int_\Omega \left[(\nabla u_D^0 \nabla h).\nabla v + \nabla u_D^0.(\nabla v \nabla h) - (\nabla u_D^0.\nabla v)\textit{div } h\right] \quad \forall v \in H^1(\Omega). \end{cases} \tag{7}$$

Proposition 2.2 *There exist* u_N^1 *and* $\epsilon(h)$ *in* $H^1(\Omega)$ *such that*

$$u_N^h = u_N^0 + h\,u_N^1 + h\,\epsilon(h), \tag{8}$$

where $\lim_{h\to 0}|\epsilon(h)| = 0$, u_N^0 *is the solution of* (3),*and* u_N^1 *is solution of the following problem*

$$\begin{cases} \textit{Find } u_N^1 \in H^1(\Omega) \textit{ such that} \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u_N^1.\nabla v = \int_\Omega \left[(\nabla u_N^0 \nabla h).\nabla v + \nabla u_N^0.(\nabla v \nabla h) - (\nabla u_N^0.\nabla v)\textit{div } h\right] \quad \forall v \in H^1(\Omega). \end{cases} \tag{9}$$

Theorem 2.2 *There exists a function* G *defined on* Γ *such that*

$$J'(\Omega, h) = \int_\Gamma G(h\cdot\nu), \tag{10}$$

$$\textit{where} \qquad G = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_D^0}{\partial\tau}\right)^2 - \left(\frac{\partial u_N^0}{\partial\tau}\right)^2\right]. \tag{11}$$

REMARK. —

This theorem opens the road to the implementation of numerical minimization algorithm using the gradient method. More precisely, we can choose like a descent direction of the functional J

$$h \in Q \quad \text{such that} \quad h_{|\Gamma} = -G\nu. \tag{12}$$

Proof.

$$J(\Omega_0) = \int_{\Omega_0} |\nabla u_D^0 - \nabla u_N^0|^2,$$

$$\Longrightarrow J(\Omega_0) = J_D(\Omega_0) + J_N(\Omega_0) + J_{DN}(\Omega_0),$$

where

$$J_D(\Omega_0) = \int_\Omega |\nabla u_D^0|^2,$$

$$J_N(\Omega_0) = \int_\Omega |\nabla u_N^0|^2,$$

$$J_{DN}(\Omega_0) = -2\int_\Omega < \nabla u_N^0, \nabla u_D^0 > .$$

Let us denote by $J_D^{'}(\Omega,h)$, $J_N^{'}(\Omega,h)$ and $J_{DN}^{'}(\Omega,h)$, respectively the Gateaux derivatives of $J_D(\Omega)$, $J_N(\Omega)$ and $J_{DN}(\Omega)$ at point Ω in the h direction.
Integrating by parts, we easily derive that

$$J_{DN}(\Omega) = -2\int_{\Gamma_0} \Phi f, \tag{13}$$

and therefore that $J_{ND}^{'}(\Omega,h) = 0$, so that $J^{'}(\Omega,h) = J_D^{'}(\Omega,h) + J_N^{'}(\Omega,h)$.
Using the asymptotic expansion of u_D^h, more precisely the proposition (2.1) we obtain

$$J_D^{'}(\Omega,h) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u_D^0|^2 \,\mathrm{div}\, h - \nabla u_D^0 \nabla h.\, \nabla u_D^0\right], \tag{14}$$

and in the same way, using the proposition (2.2)

$$J_N^{'}(\Omega,h) = \int_\Omega \left[\nabla u_N^0 \nabla h.\, \nabla u_N^0 - \frac{1}{2}|\nabla u_N^0|^2 \,\mathrm{div}\, h\right]. \tag{15}$$

A straightforward calculation and integrating by parts, we obtain

$$\begin{aligned} J'(\Omega,h) &= \frac{1}{2}\int_\Gamma \left(|\nabla u_D^0|^2 - |\nabla u_N^0|^2\right)\, h\cdot\nu, \\ &= \frac{1}{2}\int_\Gamma \left[\left(\frac{\partial u_D^0}{\partial \tau}\right)^2 - \left(\frac{\partial u_N^0}{\partial \tau}\right)^2\right]\, h\cdot\nu. \end{aligned}$$

□

3. Level set method

We describe briefly how the level set method [3] is used combined with the shape derivative to obtain numerical solutions for our shape optimization problem.
We parameterize the boundary of Ω by means of a level set function Ψ defined in U, like

described in [3]. The evolutuion of this function is governed by the following Hamilton-Jacobi transport equation

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + V\,|\nabla \Psi| = 0 \quad \text{in } U, \tag{16}$$

where $V(t,x)$ is the normal velocity of the shape's boundary. The choice of this velocity is based on the shape derivative computed in Theorem 2.2, more precisely we choose $V = G$.

4. Numerical tests

In process.

References

[1] A. Ben Abda, « Sur quelques problèmes inverses géométriques via des équations de conduction elliptiques : Etude théorique et numérique. », PhD Thèse, Tunisie, 1993.

[2] Pj. Ladeveze and D. Leguillon, « Error estimate procedure in the finite element method and applications », *SIAM J. Num. Anal.*, **20(3)** (1983), 485–509.

[3] S. Osher, J. Sethian, « Fronts propagating with curvature dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations », *J. Comp. Phys.*, **56** (1988), 12–49.

Problèmes inverses

Problème inverse pour une équation parabolique non linéaire à coefficients périodiques

I.Kaddouri* — D.E Teniou**

* AMNEDP, LATP
Algérie, Marseille
isma.kaddouri@gmail.com
** AMNEDP
Algérie
deteniou@usthb.dz

RÉSUMÉ. On prouve un résultat de stabilité pour un problème inverse associé à une équation parabolique non linéaire périodique, en utilisant une inégalité de Carleman. Cette inégalité de stabilité concerne la reconstruction d'un coefficient $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ en prenant un ouvert d'observation quelconque.

ABSTRACT. We prove a stability result for an inverse problem associated to a periodic nonlinear parabolic equation, by using a Carleman inequality. This stability inequality concerns the reconstruction of an L^∞ coefficient, basing ourselves by taking any open set of observation.

MOTS-CLÉS : Problème inverse, opérateur parabolique, problème non linéaire, inégalité de Carleman, coefficents irréguliers, principe du maximum.

KEYWORDS : Inverse problem, parabolic operator, nonlinear problem, Carleman inequality, irrigular coefficents, maximum principle.

1. Introduction

Ce travail porte sur l'étude d'un problème inverse pour l'équation parabolique du système (P_μ) lorsque les coefficents μ et ν sont variables. Ce modèle décrit l'évolution des concentrations d'une ou plusieurs populations spatialement distribuées et soumises à deux processus : un processus de réaction locale, et un processus de diffusion qui implique une répartition de ces populations dans l'espace. Le modèle est représenté par une équation aux dérivées partielles parabolique à coefficients périodiques.
On considère l'ouvert $\Omega = \Pi_{j=1}^{n}(0, L_j) \subset \mathbb{R}^n$ avec $L_j > 0, 1 \leq j \leq n$ comme cellule de référence, L_j est la période par rapport à la variable x_j, $L = (L_1, L_2, ..., L_n)$, $Q = (0,T)\times\Omega, T > 0, \Sigma = (0,T)\times\partial\Omega, \Gamma_j^0 = \partial\Omega\cap\{x_j = 0\}$ et $\Gamma_j^1 = \partial\Omega\cap\{x_j = L_j\}$.

On considère le problème parabolique non linéaire périodique suivant :

$$(P_\mu) : \begin{cases} \partial_t u(t,x) &= D\Delta u(t,x) + \mu(x)u(t,x) - \nu(x)u^2(t,x) \qquad 0 < t < T, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) &= u_0(x) \qquad\qquad sur \quad \mathbb{R}^n, \\ & u \text{ L-périodique} \end{cases}$$

avec $u_0(x), \mu(x), \nu(x)$ L-périodiques.

Nos résultats principaux peuvent se résumer ainsi :

- on étudie, via une inégalité de stabilité, la reconstruction du potentiel $\mu(x)$ dans le cas d'un opérateur parabolique non linéaire.
- on prouve que l'on peut se dispenser de la condition exigée dans [1] (prop. 3.1), sur l'ouvert d'observation qui dans son cas, doit contenir les arêtes de la cellule.
- on exige peu de régularité sur le potentiel $\mu(x)$: $\mu(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Les résultats principaux de ce papier sont les trois théorèmes suivants :

Théorème 1.1 (Existence et unicité) *On suppose que $\mu, \nu \in L^\infty_\sharp(\mathbb{R}^n)$, $u_0(x)$ continue, $u_0(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}^n$ et périodique de période L, $\nu(x) \geq 0$. Alors le problème (P_μ) admet une unique solution périodique dans $\mathcal{C}([0,T]; L^2_\sharp(\mathbb{R}^n)) \cap L^2((0,T); H^1_\sharp(\mathbb{R}^n))$. De plus $u \geq 0$ sur $(0,T) \times \mathbb{R}^n$.*

Indication de démonstration :
La démonstration de ce théorème utilise des suites de fonctions monotone, régulières qui admettent des solutions régulières, grâce à Pinsky-Englander [4], et cette monotonie donne une convergence vers une solution (unique) du problème.

Théorème 1.2 (Inégalité de Carleman) *Soit $\omega \subset \Omega, \omega \neq \emptyset$; il existe $s_0 > 0$, il existe une constante $C > 0$, telles que : $\forall s \geq s_0$ la solution du problème (P_μ) avec données périodiques vérifie l'inégalité suivante :*

$$\int_Q \left(\frac{1}{s\varphi}\left(\left|\frac{\partial z}{\partial t}\right|^2 + |\Delta z|^2\right) + s\lambda\varphi|\nabla z|^2 + s^3\lambda^4\varphi^3 z^2\right) e^{2s\alpha} dx\, dt$$
$$\leq C\big(\int_Q |f|^2 e^{2s\alpha} dxdt + \int_{]0,T[\times\omega} s^3\lambda^4\varphi^3 z^2 e^{2s\alpha} dxdt\big) \qquad (1)$$

où $f = \mu(x)z - \nu(x)z^2$, φ, et α sont des fonctions poids adéquates.

Indication de démonstration :
Pour la démonstration de ce théorème on utilise essentiellement une fonction poids périodique qui permet de faire des intégrations par parties sans intégrales de surfaces qui posent souvent des problèmes de signe.

Soit $r_0 > 0$ fixé, $M > 0$ fixé, on pose :

$$\mathcal{I} = \{\gamma \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^n), r_0 \leq \gamma \leq M, \gamma \ \text{ périodique}\},$$

$$\mathcal{M} = \{\alpha \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n), ||\alpha||_\infty \leq M, \alpha \ \text{ périodique}\},$$

Théorème 1.3 (Inégalité de stabilité) *Soit ω un sous ensemble ouvert quelconque de Ω tel que : $\omega \neq \Omega, \omega \neq \emptyset$, $u_0 \in \mathcal{I}$, $\mu, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}$, $\theta \in (0,T)$. Alors il existe une constante $C = C(\Omega, \omega, t, r_0, M)$, $C > 0$ telle que :*

$$||\mu - \tilde{\mu}||_{L^2(\Omega)} \leq C(||u - \tilde{u}||_{H^1(0,T;L^2(\omega))} + ||(u - \tilde{u})(\theta, .)||_{H^2(\Omega)})$$

où u (resp $\tilde{u}$) est la solution du problème (P_μ), avec comme potentiel μ (resp $\tilde{\mu}$).

Indication de démonstration :
Pour la démonstration de ce théorème on utilise une idée, de Klibanov [3], avec également un principe du maximum, valable pour des solutions non nécessairement classiques.

Bibliographie

[1] A. I. Prilepko, D. G. Orlovsky and I. A. Vasin, Methods for solving inverse problems in *mathematical physics* (2000).

[2] J. Choi, Inverse problem for a parabolic equation with space-periodic boundary conditions by a Carleman estimate. *Inverse. Ill-posed Problems*, Vol. 11, No. 2, pp. 111-135 (2003).

[3] A. L. Bukhgeim and M. V. Klibanov. Uniqueness in the large of a class of multidimensional inverse problems. *Soviet Mathematics-Doklady*, 24 :244-247, 1981.

[4] J. Engländer and R.G. Pinsky, Uniqueness/nonuniqueness for nonegative solutions of second-order parabolic equations of the form $u_t = Lu + Vu - \gamma u^p$ in $\mathbb{R}^n$. *J. Differential Equations*, 192, 396-428 (2003).

[5] A V. Fursikov and O Y. Imanuvilov, Controllability of Evolution Equations. *Lecture Notes Series vol 34*, Korea : Seoul National University, 1996.

[6] O. A. Ladyzenskaja, V. A. Solonnikov and N. N. Ural'ceva, Linear and Quasi-linear Equations on Parabolic *American mathematical society, providence, Rhode Island 1968,*

[7] G.M. Lieberman, Second Order Parabolic Differential Operators. *World Scientific Publishing*, Singapore, 1996.

Identification de fissures interfaciales en élasticité tridimentionnelle par une méthode d'optimisation.

Mohamed Larbi KADRI* — Jalel BEN ABDALLAH**

* ENIT, LAMSIN. Campus universitaire,B.P. 37, 1002 Tunis
TUNISIE
medlarbi.kadri@lamsin.rnu.tn
** ENIT, LAMSIN. Campus universitaire,B.P. 37, 1002 Tunis
TUNISIE
jalel.benabdallah@enit.rnu.tn

RÉSUMÉ. On s'interesse au problème d'identification de fissures interfaciales dans un solide élastique tridimentionnel. On utilise des données surabondantes et disponibles sur une partie de la frontière. Le problème ainsi posé est un problème de Cauchy connu pour être mal-posé au sens de la stabilité. Nous ramenons la résolution du problème de Cauchy à un problème de minimisation sous contraintes d'une fonction coût. Le gradient de la fonction coût est effectué par la méthode de l'état adjoint.

ABSTRACT. This Note deals with the interfacial crack identification in a three dimentional elastic body using partial overspecified data. This is a Cauchy problem known to be ill-posed in the sense of stability. A numerical data completion method based on domain decomposition and optimal control is proposed.

MOTS-CLÉS : Problème inverse, identification de fissures interfaciales, élasticité, optimisation.

KEYWORDS : Inverse problem, interfacial crack identification, elasticity, optimisation.

1. Introduction

Ce travail traite de l'identification de fissures interfaciales dans un solide élastique tridimensionnel. Les données du problème sont les déplacements et les efforts mesurés sur une partie accessible du bord du solide. Ce problème appartient à la famille des problèmes de Cauchy, connus pour être mal posé au sens de la continuité de la solution vis à vis des données [3]. L'idée qu'on propose est de combiner les techniques d'optimisation et de la décomposition de domaine pour résoudre ce problème de Cauchy. Nous ramenons la résolution du problème de Cauchy à un problème de minimisation sous contraintes d'une fonction coût. Le gradient de la fonction coût est effectué par la méthode de l'état adjoint. La technique de l'état adjoint permet de transformer le problème de minimisation sous contraintes en la recherche du point de stationnarité d'un Lagrangien associé. L'idée de cet algorithme est inspirée des méthodes de décomposition de domaine appliquées aux problèmes de contrôle optimal, qui ont été introduites initialement par Bensoussan et al. [2] et reprise plus tard par Benamou [3] et Lions [4].

2. Position du problème

Nous cherchons à identifier des fissures localisées sur une surface à priori connue dans un solide élastique tridimentionnel (décollement de surface) à partir de données surabondantes sur seulement une partie de la frontière externe. La littérature sur la détection de fissures est très abondantes, nous citons [5] et [6] ou l'identification est faite moyennant des conditions aux limites surabondantes. Le premier est dans le cadre de l'élastostatique alors que le deuxième utilise des mesures qui dépendent du temps. L'exemple suivant est inspiré du cas étudié dans [5]. Le domaine fissuré est un parallélépipède de dimensions $70 \times 25 \times 15$ constitué d'un matériau homogène, élastique et isotrope $(E = 200GPa, \nu = 0.3)$. Deux fissures elliptiques : S_1 d'axes principaux $a_1 = 13$ et $b_1 = 5$ parallèles aux axes $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$, et S_2 d'axes pricipaux $a_2 = 7$ et $b_2 = 2.5$ faisant un angle de $^\circ 45$ avec l'axe des $\boldsymbol{x}$. Le centre de la fissure S_1 se situe au point de coordonnées ($x = 45,\ y = 15$), celui de S_2 au point de coordonnées ($x = 15,\ y = 15$) sur la surface plane $\Gamma_i = \{(x, y, z)^t \in \Omega / z = 10\}$ (voir figure 7).

La facette gauche du cube est encastrée, la facette droite est bloquée seulement selon les directions y et z. Le chargement exercé sur le solide est un effort de traction $t_0 = 2kPa$ appliqué sur la totalité des surfaces supérieures et inférieures agissant sur le plan $\boldsymbol{xz}$ avec un angle de $^\circ 45$. Les autres facettes sont libres. Le domaine est discrétisé par des eléments finis quadratiques tridimensionnels avec trois degrés de liberté (8012 éléments finis). $\Gamma_c = \Gamma_c^+ \cup \Gamma_c^-$ est discrétisé 538 noeuds alors que Γ_i est discrétisé 999 noeuds.

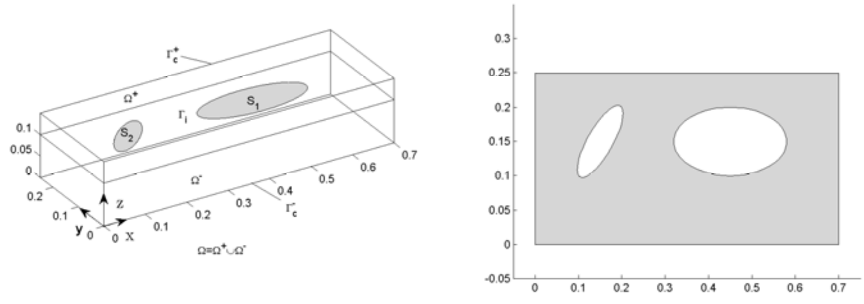


Figure 7 – Géométrie du domaine fissuré

Les fissures S_1 et S_2 sont des frontières avec une condition de Neumann homogène $i.e$ les contraintes sont nulles, alors que sur le reste du plan interne $\Gamma_i \setminus S_1 \cup S_2$ les conditions de continuités des déplacements et contraintes usuelles sont admises.

3. Le problème de Cauchy en élasticité

Le problème d'identification de fissures à partir de mesures partielles et surabondantes est un problème de Cauchy en élasticité qui consiste à chercher un champ de déplacement vérifiant le problème aux limites suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\text{div}\, \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}(x)) & = & \boldsymbol{f}(x) & \text{in} \quad \Omega \\ \boldsymbol{u}(x) & = & \tilde{\boldsymbol{u}}(x) & \text{on} \quad \Gamma_c \\ \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}(x))\mathbf{n}(x) & = & \tilde{\boldsymbol{t}}(x) & \text{on} \quad \Gamma_c \end{array} \right. \tag{1}$$

Où $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u})$ est le champ de contraintes relié au champ de déformations par la relation de comportement $\boldsymbol{\sigma}(u) = C\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})$ (C est le tenseur de rigidité).

Pour localiser les défauts, deux problèmes de Cauchy sont résolus. Le premier P_+ est défini sur le sous-domaine supérieur Ω_+ où les données surabondantes sont considérées uniquement sur la facette supérieure Γ_c^+ et les inconnus à identifier sont considérées sur l'interface Γ_i. Le second problème de Cauchy P_- est défini sur le sous-domaine inférieur Ω_- où les données surabondantes sont localisées sur la facette inférieure et les inconnus seront identifiés sur Γ_i. Nous nous n'itéressons qu'aux inconnus de déplacements. En fait, désignant par $\boldsymbol{u}^+$ (resp. $\boldsymbol{u}^-$) les déplacements sur Γ_i issues de la résolution de P_+ (resp. P_-), les fissures apparaîtront comme les parties de Γ_i où le vecteur de saut des déplacements $[\boldsymbol{u}^+ - \boldsymbol{u}^-]$ n'est pas nul.

4. Le Problème d'optimisation

On se propose ici de résoudre le problème [1] par décomposition de domaine fictive. L'idée est de scinder le problème mal posé [1] en deux problèmes bien posés en utilisant les données surabondantes sur Γ_c. Ces problèmes sont définis sur deux domaines identiques dont l'interface de transmissions de données est la frontière où les conditions aux limites sont inconnues. Soit μ le vecteur des efforts inconnus sur Γ_i. On considère les deux problèmes suivants (issus de la duplication fictive du problème de Cauchy (1)) , dont les solutions sont notées $\boldsymbol{u}_D$ et $\boldsymbol{u}_N$:

$$\left\{\begin{array}{rl} -div\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_D) & = \boldsymbol{f} \text{ dans } \Omega \\ \boldsymbol{u}_D & = \tilde{\boldsymbol{u}} \text{ sur } \Gamma_c \\ \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_D).\mathbf{n} & = \boldsymbol{\mu} \text{ sur } \Gamma_i \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rl} -div\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_N) & = \boldsymbol{f} \text{ dans } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_N)).\mathbf{n} & = \tilde{\boldsymbol{t}} \text{ sur } \Gamma_c \\ \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_N).\mathbf{n} & = \boldsymbol{\mu} \text{ sur } \Gamma_i \end{array}\right. \tag{2}$$

Pour formuler le problème de contrôle optimal relatif au problème (2) nous introduisons une fonction coût $s_u = \boldsymbol{u}_D - \boldsymbol{u}_N$ qui minimise l'écart entre les solutions $\boldsymbol{u}_D$ et $\boldsymbol{u}_N$ au sens de la norme L^2, on considère le problème d'optimisation suivant :

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{Minimiser} & J(\boldsymbol{u}_D(\boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{u}_N(\boldsymbol{\mu})) \ \ \forall \boldsymbol{\mu} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_i) \\ \text{où} & J = \frac{1}{2} \displaystyle\int_\Omega (\boldsymbol{u}_D - \boldsymbol{u}_N).(\boldsymbol{u}_D - \boldsymbol{u}_N) d\Omega \\ \text{avec} & \boldsymbol{u}_D(\boldsymbol{\mu}) \text{ et } \boldsymbol{u}_N(\boldsymbol{\mu}) \text{ solutions de (2)} \end{array}\right. \tag{3}$$

C'est un problème d'optimisation d'une fonctionnelle convexe. On introduit le champs de multiplicateurs de Lagrange afin de relaxer la contrainte sur les déplacements :

On considère les espaces de déplacements admissibles $V = \{\boldsymbol{u} \in H^1(\Omega), \boldsymbol{u}_{|\Gamma_c} = \tilde{\boldsymbol{u}}\}$ et $V_0 = \{u \in V, \boldsymbol{u}_{|\Gamma_c} = 0\}$. Les formulations faibles de (2) s'ecrivent :
Trouver $\boldsymbol{u}_D \in V$ telle que : $\forall \boldsymbol{v} \in V_0(\Omega)$

$$a_D(\boldsymbol{u}_D, \boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_D) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{f}\boldsymbol{v}dx + \int_{\Gamma_i} \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{v}d\Gamma \tag{4}$$

Trouver $\boldsymbol{u}_N \in V$ telle que $\forall \boldsymbol{v} \in V(\Omega)$

$$a_N(\boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_N) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{f}\boldsymbol{v}dx + \int_{\Gamma_c} \tilde{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{v}d\Gamma + \int_{\Gamma_i} \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{v}d\Gamma \tag{5}$$

On défini l'espace des solutions admissibles $\mathcal{U}_{ad}$ par :

$$\mathcal{U}_{ad} = \{(\boldsymbol{u}_D(\boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{u}_N(\boldsymbol{\mu})) \text{ solutions de (4) et (5) } \forall \boldsymbol{\mu} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_i)\}$$

Le problème d'optimisation (3) peut être reformulé comme suit :

$$\text{Minimiser} \quad J(\boldsymbol{u}_D(\boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{u}_N(\boldsymbol{\mu})) \ \forall \ (\boldsymbol{u}_D(\boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{u}_N(\boldsymbol{\mu})) \in \mathcal{U}_{ad} \tag{6}$$

Soit $\boldsymbol{u}_D$, $\boldsymbol{\lambda}_D$, $\boldsymbol{u}_N$, $\boldsymbol{\lambda}_N \in H^1(\Omega)$, $\boldsymbol{\mu} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, on introduit le champs de multiplicateurs de Lagrange afin de relaxer la contraintes sur les déplacements :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\boldsymbol{u}_D, \boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}_D, \boldsymbol{\lambda}_N) \quad &= J(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{u}_D, \boldsymbol{u}_N) - \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_D) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda}_D) + \int_\Omega \boldsymbol{f} \boldsymbol{\lambda}_D dx \\
&+ \int_{\Gamma_i} \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\lambda}_D d\Gamma - \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_N) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda}_N) dx \\
&+ \int_\Omega \boldsymbol{f} \boldsymbol{\lambda}_N dx + \int_{\Gamma_c} \tilde{\boldsymbol{t}} \boldsymbol{\lambda}_N d\Gamma + \int_{\Gamma_i} \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\lambda}_N d\Gamma
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{\lambda}_D, \quad \boldsymbol{\lambda}_N \in H^1(\Omega)$ sont les multiplicateurs de Lagrange associés à la contrainte $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_N).\mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_D).\mathbf{n}$ sur Γ_i. L'etude du point de stationnarité de ce Lagrangien conduit à un problème adjoint défini par la différentiation du Lagrangien par rapport aux champs décrivant le problème direct.

Nous allons calculer l'expression du gradient de la fonctionnelle J à partir de l'état adjoint. En annulant les dérivées de $\mathcal{L}$ par rapport à $\boldsymbol{\lambda}_D$ et $\boldsymbol{\lambda}_N$, on obtient les équations (4) et (5). En annulant les dérivées de $\mathcal{L}$ par rapport à $\boldsymbol{u}_D$ et $\boldsymbol{u}_N$ on obtient les equations adjointes suivantes :

$$a_D(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\lambda}_D) = (\boldsymbol{u}_D - \boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{v})_{\Gamma_i}, \ \ \forall \boldsymbol{v} \in V_0 \tag{7}$$

et

$$a_N(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\lambda}_N) = -(\boldsymbol{u}_D - \boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{v})_{\Gamma_i}, \ \ \forall \boldsymbol{v} \in V \tag{8}$$

respectivement.

D'où les equations adjointes sont données par :

$$\left\{\begin{aligned} -div\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_D) \ &= 0 \ \text{ dans } \Omega \\ \boldsymbol{u}_D \ &= 0 \ \text{ sur } \Gamma_c \\ \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_D).\mathbf{n} \ &= (\boldsymbol{u}_D - \boldsymbol{u}_N) \ \text{ sur } \Gamma_i \end{aligned}\right. \qquad \text{et} \qquad \left\{\begin{aligned} -div\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_N) \ &= 0 \ \text{ dans } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_N)).\mathbf{n} \ &= 0 \ \text{ sur } \Gamma_c \\ \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_N).\mathbf{n} \ &= -(\boldsymbol{u}_D - \boldsymbol{u}_N) \ \text{ sur } \Gamma_i \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Les multiplicateurs de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}_D$ et $\boldsymbol{\lambda}_N$ assurent donc la continuité des déplacements à travers Γ_i.

Le problème de minimisation est equivalent au problème de détermination de $\boldsymbol{\mu} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_i)$ telle que J soit minimisée. Maintenant, la derivée première de J est définis à travers son action sur les variations $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$:

$$< \frac{dJ}{d\boldsymbol{\mu}}, \tilde{\boldsymbol{\mu}} >= (\boldsymbol{u}_D - \boldsymbol{u}_N, \tilde{\boldsymbol{u}}_D - \tilde{\boldsymbol{u}}_N)_{\Gamma_i} \ \ \forall \tilde{\boldsymbol{\mu}} \in (L^2(\Gamma_i))^2 \tag{10}$$

Où $\tilde{\boldsymbol{u}}_D$ et $\tilde{\boldsymbol{u}}_N$ sont solutions de :

$$a_D(\tilde{\boldsymbol{u}}_D, \boldsymbol{v}) = (\tilde{\boldsymbol{\mu}}, \boldsymbol{v})_{\Gamma_i} \ \ \forall \boldsymbol{v} \in V(\Omega) \tag{11}$$

et

$$a_N(\tilde{\boldsymbol{u}}_N, \boldsymbol{v}) = -(\tilde{\boldsymbol{\mu}}, \boldsymbol{v})_{\Gamma_i} \quad \forall \boldsymbol{v} \in V(\Omega) \tag{12}$$

Soit $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\lambda}_D$ dans (11), $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\lambda}_N$ dans (12) et $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_N$ dans (8). En combinant les résultats on obtient :

$$\frac{dJ}{d\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\lambda}_D - \boldsymbol{\lambda}_N \quad \text{sur } \Gamma_i. \tag{13}$$

Schéma de la minimisation

La résolution du problème de minimisation est présentée sur la figure 8.

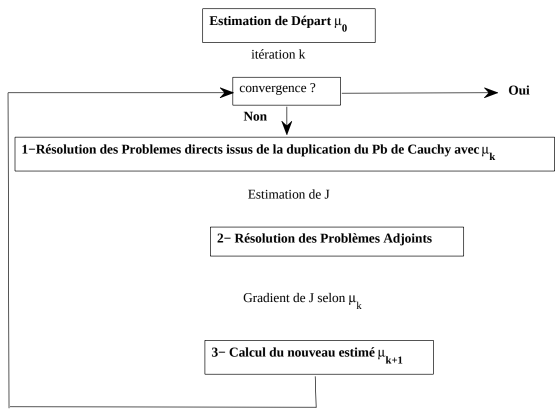


Figure 8 – Etapes de la minimisation de la fonctionnelle coût J.

5. Résultats numériques

L'identification des fissures par la méthode d'optimisation 9 permet l'identification de la position et l'allure des fissures. l'algorithme converge en 27 itérations pour des données bruitées à 10%. Il peut être intéressant de régulariser le problème d'optimisation en ajoutant un terme régularisant à la fonctionnelle coût.

Bibliographie

[1] J. Hadamard, « Lectures on Cauchys problem in linear partial differential equation ». Dover, New York, 1953.

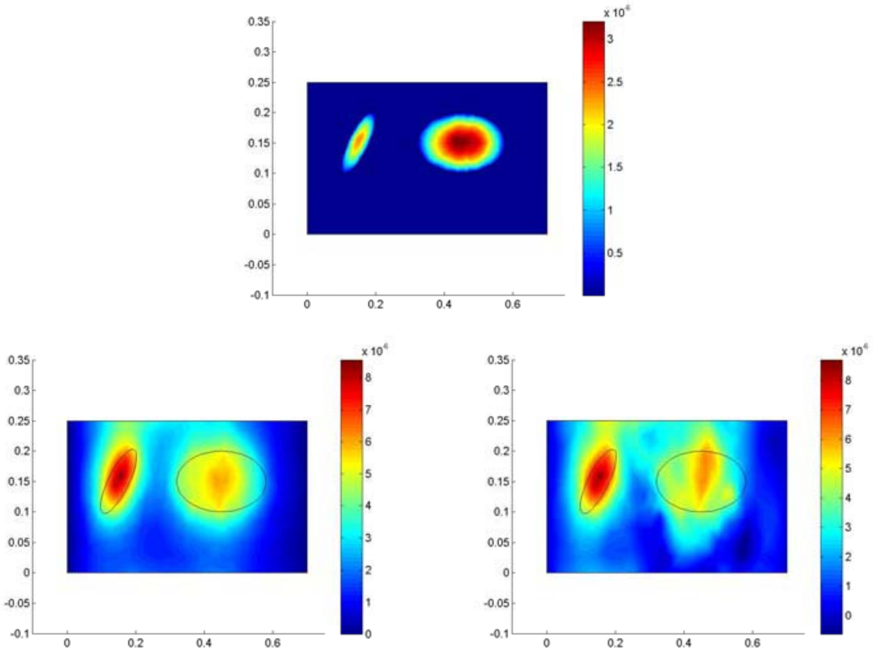


Figure 9 – Identification par la méthode d'optimisation. $[\boldsymbol{u}^+ - \boldsymbol{u}^-]$ haut : exact à travers Γ_i, en bas à gauche : (N.B.=0%), en bas à droite : (N.B.=10%)

[2] A. Bensoussan, R. Glowinski, J. Lions, « Méthode de décomposition appliquée au contrôle optimal de systèmes distribués, Lecture Notes in Computer Science, 5. In the fifth IFIP Conference on Optimization Techniques », 1973.

[3] J. Benamou, « A domain decomposition method with coupled transmission conditions for the control of systems governed by elliptic partial differential equations », SIAM J. Numer. Anal. **33** (1996) 2401-2416.

[4] P. Lions, « On the Schwarz alternating method III A variant for nonoverlapping subdomains ». Proc. 3rd Conference on Domain Decomposition Methods, Philadelphia. SIAM. (1990) 202-223.

[5] W. Weikl, H. Andrãa, E. Schnack, « An alterning iterative algorithm for the reconstruction of internal cracks in a three-dimensional solid body », Inverse Problems **17** (2001) 1957-1975.

[6] C. Bellis, M. Bonnet, « Crack identification by 3D time-domain elastic or acoustic topological sensitivity », C. R. Mécanique **337** (2009) 124 -130.

An energy estimate for a 2D non-Newtonian fluid-structure interaction model of blood flow in the atherosclerotic carotid artery

S. Boujena* — O. Kafi* — N. El Khatib**

* Université Hassan II-Casablanca, Faculté des Sciences -Ain Chock-
Faculté des Sciences -Ain Chock-, B.P 5366. Maarif. Casablanca
Maroc
boujena@yahoo.fr, oualid_kafi@yahoo.fr
** Lebanese American University, Department of Computer Science and Mathematics
Byblos campus, P.O. Box : 36, Byblos
Lebanon
nader.elkhatib@lau.edu.lb

RÉSUMÉ. Une sténose carotidienne est le rétrécissement de l'artère carotide interne, l'artère du cou qui alimente le cerveau en sang. Ce rétrécissement est généralement le résultat de la formation d'une plaque d'athérome qui s'infiltre progressivement dans paroi de l'artère, formant une bosse sur le canal artériel. Dans cet article, nous étudions les interactions sang-plaque et sang-paroi à l'aide d'un modèle d'interaction fluide-structure dans le cas où le sang présente des propriétés non-newtoniennes. Nous fournissons une estimation d'énergie pour le couplage et comparons les résultats numériques avec ceux obtenus avec un modèle d'interaction fluide-structure équivalent en utilisant un fluide newtonien.

ABSTRACT. A carotid stenosis is the narrowing of the internal carotid artery, the neck artery that supplies brain with blood. This narrowing is usually the result of the formation of an atheromatous plaque infiltrating gradually the artery wall, forming a bump in the ductus arteriosus. In this paper we study the blood-plaque and blood-wall interactions using a fluid-structure interaction model in the case where blood exhibits non-Newtonian properties. We provide an energy estimate for the coupling and compare the numerical results with those obtained with an equivalent fluid-structure interaction model using a Newtonian fluid.

MOTS-CLÉS : Fluides non-Newtonien, interaction fluide-structure, estimation d'énergie.

KEYWORDS : Non-Newtonian fluids, fluid-structure interaction, energy estimate.

1. Introduction

Meaningful haemodynamic simulations require constitutive models that can accurately capture the rheological response of blood over a range of physiological conditions. In most part of the arterial system of healthy individuals blood can be modelled as a Newtonian fluid. However, in some disease states, namely if the arterial geometry has been altered to include regions of recirculation, detected for instance in intracranial aneurysms or downstream of a stenosis, more complex blood constitutive models should be used, although many authors have modelled blood flow using the Navier-Stokes equations. Therefore, we must develop rheological models as close as possible to reality to define the viscosity as a function of the tensor $\mathbf{Du} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla^T\mathbf{u})$, or more precisely as a function of $\mathbf{s}(\mathbf{u})$, the second invariant of the strain rate tensor, defined by :

$$(\mathbf{s}(\mathbf{u}))^2 = 2\mathbf{Du} : \mathbf{Du} = 2\sum_{i,j}(\mathbf{Du})_{ij}(\mathbf{Du})_{ji}.$$

On the other hand the vascular tissue ensures the transport of blood and its elasticity allows preserving a sufficient pressure so that the blood flow remains constant. The vascular wall has a very complex nature and devising an accurate model for its mechanical behaviour is rather difficult. Its structure is indeed formed by many layers with different mechanical characteristics [2, 3].

From the theoretical point of view, FSI problems between blood and vessel wall models are extremely difficult because of the high non-linearity of the governing equations and the low regularity of the displacement of the fluid-structure interface. So far, existence results have been obtained only in simplified cases. In this work we study the coupling between the adopted formulation of the fluid equations and the St. Venant-Kirchhoff model for the movement of the wall, and we derive an energy estimate.

2. Mathematical Model

2.1. The non-Newtonian fluid equations

We consider a domain Ω_f where there is blood flow in a longitudinal section of a stenosed artery. Let Ω_f be an open bounded domain of $\mathbb{R}^2$ representing a portion of a cylindrical deseased artery. We denote by $(\Gamma_{w_i})_{i=1,2}$ the portion of the boundary corresponding to the physical arterial wall, while Γ_{in} and Γ_{out} represent the so called artificial boundaries, since they do not correspond to any physical interface and $\partial\Omega_f = \bar{\Gamma}_{in} \cup \bar{\Gamma}_{w_1} \cup \bar{\Gamma}_{w_2} \cup \bar{\Gamma}_{out}$ with $\Gamma_{in} \cap \Gamma_{w_1} \cap \Gamma_{w_2} \cap \Gamma_{out} = \emptyset$: Figure 10. We will ignore body forces, both for the fluid and the structures in the next sections. For Haemodynamic applications this correspond in practise to ignore the effects of gravity.

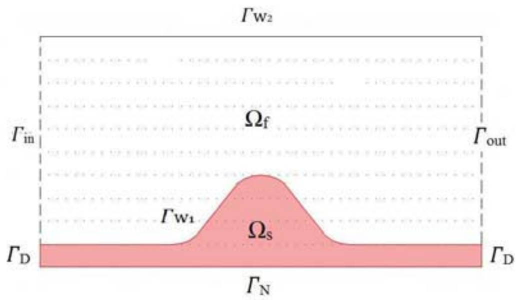


Figure 10 – Geometric configuration

The evolution problem involves a velocity $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ and a pressure p defined over $\Omega_f \times (0, T)$ such that

$$
\begin{aligned}
\rho_f \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho_f (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \nabla \cdot (2\mu(\mathbf{s}(\mathbf{u}))\mathbf{D}\mathbf{u}) + \nabla p &= 0, \text{ in } \Omega_f \times (0, T), && (1)\\
\nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \text{ in } \Omega_f \times (0, T). && (2)
\end{aligned}
$$

These equations are complemented with the boundary conditions over the boundary of Ω_f and the initial condition

$$
\begin{aligned}
2\mu(\mathbf{s}(\mathbf{u}))\mathbf{D}\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p\mathbf{n} &= \mathbf{h}, \text{ on } \Gamma_{in} \times (0, T), && (3)\\
2\mu(\mathbf{s}(\mathbf{u}))\mathbf{D}\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p\mathbf{n} &= 0, \text{ on } \Gamma_{out} \times (0, T), && (4)\\
\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= 0, \text{ on } \Gamma_{w_1} \times (0, T), && (5)\\
2\mu(\mathbf{s}(\mathbf{u}))\mathbf{D}\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p\mathbf{n} &= \mathbf{g}, \text{ on } \Gamma_{w_1} \times (0, T), && (6)\\
\mathbf{u} &= 0, \text{ on } \Gamma_{w_2} \times (0, T), && (7)\\
\mathbf{u} &= \mathbf{u}_0, \text{ for } t = 0 \text{ in } \Omega_f, && (8)
\end{aligned}
$$

where $\mathbf{n}$ is the outward normal vector.
An existence result for the problem (1)-(2)-(8) taking into account the boundary conditions (3)-(4)-(5)-(6)-(7) is given in [1].

2.2. The structure model

To describe the wall dynamics we use, as it is customary in solid mechanics, the Lagrangian description where Ω_s is a given material reference configuration. We describe the motion of the structure in terms of its displacement field $\eta : \Omega_s \times (0, T) \longrightarrow \mathbb{R}^2$, with boundary $\partial\Omega_s = \Gamma_D \cup \Gamma_{w_1} \cup \Gamma_N$ where Γ_{w_1} is the part of the boundary interfacing with the fluid domain, Γ_N is the part in contact with the exterior and for the sake of simplicity, we assume here, the structure to be clamped on the boundaries Γ_D : Figure 10. The differential problem for the structure part then reads

$$\begin{cases} \text{find } \eta = (\eta_1, \eta_2)^T : \Omega_s \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ such that} & \\ \rho_s \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \nabla \cdot ((\mathbf{I}_2 + \nabla\eta)\Sigma_s(\eta)) = 0, & \text{in } \Omega_s \times (0,T), \\ \eta = 0, & \text{on } \Gamma_D \times (0,T), \\ ((\mathbf{I}_2 + \nabla\eta)\Sigma_s)\mathbf{n} = 0, & \text{on } \Gamma_N \times (0,T), \\ \eta(x,0) = \eta_0(x), & \text{in } \Omega_s, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} = \dot{\eta}_0(x), & \text{in } \Omega_s. \end{cases} \tag{1}$$

where

$(\mathbf{I}_2 + \nabla\eta)\Sigma_s$ is the first Piola-Kirchhoff tensor, Σ_s the second Piola-Kirchhoff tensor, $\mathbf{I}_2 + \nabla\eta$ is the deformation gradient tensor and $\mathbf{I}_2$ is the unit matrix. Moreover, we denote by $\mathbb{E}$ the Green-St. Venant strain tensor : $\mathbb{E}(\eta) = \frac{1}{2}(\nabla\eta + (\nabla\eta)^T + (\nabla\eta)^T\nabla\eta)$. We consider a St. Venant-Kirchhoff materiel, for which the response function for the second Piola-Kirchhoff tensor is linear in $\mathbb{E}$ i.e $\Sigma_s = \lambda_s \text{tr}(\mathbb{E}(\eta))\mathbf{I}_2 + 2\mu_s\mathbb{E}(\eta)$, where $\lambda_s = \dfrac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}$ and $\mu_s = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ are the Lamé constants, E is the Young modulus and ν is the Poisson ratio.

2.3. Coupling the fluid and the structure

The coupling between the fluid and the structure occurs at the interface between both areas. Coupling conditions are imposed on the boundary Γ_{w_1} : Figure 10. It consists of a transfer operation of fields between the fluid and the structure, and concerns the transfer of compressive stress to the solid, which by deforming, transfers displacement fields to the fluid. This interaction can be described by coupling equations (1),(8) with the model for structures. Two conditions are imposed on the interface :

– Continuity of velocity over time :

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad \text{on } \Gamma_{w_1} \times (0,T).$$

– The interface is considered in mechanical equilibrium :

$$-(2\mu(\mathbf{s}(\mathbf{u}))\mathbf{D}\mathbf{u} - p\mathbf{I}_2)\mathbf{n}_f = (\Sigma_s(\eta))\mathbf{n}_s, \quad \text{on } \Gamma_{w_1} \times (0,T).$$

The choice of the Arbitrary Lagrangian Eulerian formulation (ALE) is to use a Lagrangian framework for the solid and a mixed formulation for the fluid. The time derivatives are expressed as functions of the Lagrangian reference coordinates, whereas the space derivatives are left expressed as functions of the fixed Eulerian coordinates, since their expression is much simpler. The Lagrangian formulation of the time derivatives involves the domain velocity, which is the time derivative of the deformation function, and is often called *mesh velocity* since it gives the velocity of each mesh nodes in the fixed referential. The ALE formulation of the non-Newtonian equation for fluid is then

$$\rho_f(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}|_X + ((\mathbf{u}-w).\nabla)\mathbf{u} - \nabla_x.(2\mu(\mathbf{s}(\mathbf{u}))\mathbf{Du}) + \nabla_x p = 0,$$

where X is the Lagrangian coordinate, x the Eulerian coordinate and w the mesh velocity.

2.4. An energy estimate

In [4, 5] an energy estimate for the fluid-structure interaction coupling between the Newtonian and non-Newtonian fluid equations and the structure equations is proved for cylindrical tube. Here we investigate that result to the stenosed 2D cylindrical section.

Théorème 2.1 (Neumann problem) *If we impose a Neumann boundary condition*

$$\sigma(\mathbf{u}, p)\cdot\mathbf{n} = h$$

on the artificial section Γ_{in} where h is a given function, the coupled fluid-structure problem satisfies the following energy inequality :

$$\mathcal{E}(t) + \mu_\infty \int_0^t ||\mathbf{Du}||^2_{L^2(\Omega_f)} \le (\mathcal{E}(0) + C\int_0^t ||h||^2_{L^2(\Gamma_{in})})e^{\frac{2\mu_\infty}{\rho_f}t}.$$

where C is a positive constant and μ_∞ the high shear viscosity such that :
$\mu_\infty \le \mu(\mathbf{s}(\mathbf{u})) \le \mu_0$

3. Numerical Result

The computational domain is a 2D academic geometry of stenosed Internal Carotid Artery (ICA). The parameters describing the blood, the vessel wall and the plaque rheology are taken from the literature and come from experimental data. In the present work, the simulations are carried out using the software Comsol Multiphysics©. The blood flow enters the vessel by the left side where the total stress on the inlet boundary is set equal to a stress vector of magnitude $\mathbf{h}$, oriented in the negative normal direction to mimic a cardiac beat such that

$$\mathbf{h} = \begin{cases} (9^3(1-cos(2\pi/0.005)), 0)^T, & x\in\Gamma_{in},\ 0\le t\le 0.005, \\ (0,0)^T, & x\in\Gamma_{in},\ 0.005\le t < T. \end{cases}$$

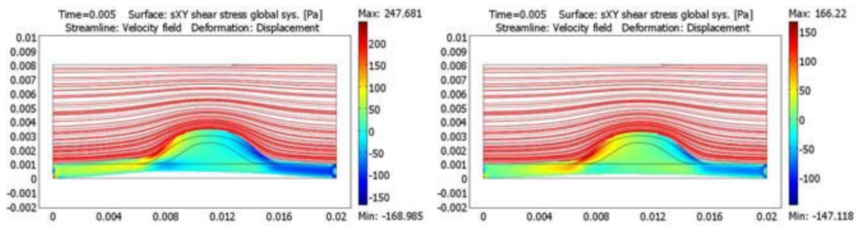


Figure 11 – WSS distribution and deformation of structures in the case of moving wall. Left : Newtonian model. Right : non-Newtonian Carreau model

Remerciements. This work has been supported with a grant PHC Volubilis from the French foreign office and the moroccan ministry of education and research MA/11/246.

Bibliographie

[1] S. Boujena., O. Kafi., N. EL Khatib. « A 2D Mathematical Model of Blood Flow and its Interactions in the Atherosclerotic Carotid Artery », 2013 submited.

[2] Y.C. Fung., « Biomechanics : Mechanical properties of living tissues », Springer-Verlag : New-York, 1993.

[3] G. Holzapfe, T. Gasser and R. Ogden, « A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models », *Journal of Elasticity*, **61** (2000), 1–48.

[4] L. Formaggia, A. Moura and F. Nobile, « On the stability of the coupling of 3D and 1D fluid-structure interaction models for blood flow simulations », *ESAIM : Mathematical Modeling and Numerical Analysis*, **41** (2007), 743–769.

[5] J. Janela, A. Mouraa, A. Sequeira, « A 3D non-Newtonian fluid-structure interaction model for blood flow in arteries », *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **234** (2010), 2783–2791.

Semi-classical based image reconstruction

Zineb Kaisserli* — Taous-Meriem Laleg-Kirati — Da-Yan Liu****

* Mathematical and Computer Science Division,
Abdelhamid Ibn Badis University (UMAB),
P.B 002 University of Mostaganem, Algeria,
kaisserli.z@gmail.com.
** Computer, Electrical and Mathematical Sciences and Engineering Division,
King Abdullah University of Science and Technology (KAUST),
23955-6900, Thuwal, Kingdom of Saudi Arabia,
taousmeriem.laleg@kaust.edu.sa ; Dayan.Liu@kaust.edu.sa.

RÉSUMÉ. Dans cet article, nous nous intéressons à une méthode d'analyse de signaux basée sur une approche semi-classique, développée récemment [2], [4]. L'idée principale de cette méthode consiste à interpréter le signal comme un potentiel de l'opérateur de Schrödinger et à l'analyser en utilisant le spectre discret de cet opérateur. Notre intérêt porte particulièrement sur l'extention de cette méthode au cas bidimensionnel pour des applications en traitement d'images. Nous montrons l'efficacité de la méthode proposée à travers quelques exemples numériques . Par ailleurs, l'influence de certains paramètres, dont dépend cette méthode, est numériquement étudiée.

ABSTRACT. Recently, a new signal analysis method based on a semi-classical approach has been proposed [2], [4]. The main idea in this method is to interpret a signal as a potential of a Schrödinger operator and then to use the discrete spectrum of this operator to analyze the signal. In this paper, we are interested in extending this method from one dimension to two dimensions for image processing applications. The efficiency of this approach is shown through some numerical examples. Moreover, the influence of the design parameters in this method is numerically studied.

MOTS-CLÉS : Analyse des signaux, Traitement d'images, Analyse semi-classique, Opérateur de Schrödinger.

KEYWORDS : Signal analysis, Image processing, Semi-classical analysis, Schrödinger Operator.

1. Introduction

Recently, a new signal analysis method based on a semi-classical approach has been proposed (see [2], [4]). We refer to this method as SCSA for **S**emi-**C**lassical **S**ignal **A**nalysis. The main idea of this method is to interpret a signal as a potential of a Schrödinger operator depending on a semi-classical parameter [1]. Then, the signal can be characterized using the discrete spectrum of the Schödinger operator. Promising results have been obtained when applying the SCSA method to the analysis of arterial blood pressure signals [2], [5] and to the analysis of the proformance of turbomachinery. Moreover, it has been shown that the SCSA method can cope with noisy signals, making this method a potential tool for denoising. The aim of this paper is to extend the SCSA method from one dimensional case to two dimensional case.

2. Preliminary

In this section, we propose to recall the idea behind of the SCSA method [2], [4]. Let us consider the following Schrödinger operator :

$$H_{1,h}(V_1) := -h^2 \frac{d^2}{dx^2} - V_1, \tag{1}$$

where $h \in \mathbb{R}_+^*$ is the semi-classical parameter [1], and V_1 is a positive real valued function belonging to $\mathcal{C}^\infty(\Omega_1)$ where $\Omega_1 \subset \mathbb{R}$ is a compact. Then, the potential V_1 can be estimated using the following proposition.

Proposition 2.1 *[2] Let $V_1 \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_1)$ be positive real valued function, where $\Omega_1 \subset \mathbb{R}$ is a compact. Then, V_1 can be estimated using the following formula : $\forall\, x \in \Omega_1$,*

$$V_{1,h,\gamma,\lambda}(x) := -\lambda + \left(\frac{h}{L_{1,\gamma}^{cl}} \sum_{n=1}^{N_h^\lambda} (\lambda - \lambda_{n,h})^\gamma \psi_{n,h}^2(x) \right)^{\frac{2}{2\gamma+1}}, \tag{2}$$

where $h \in \mathbb{R}_+^*$, $\gamma \in \mathbb{R}_+$, $\lambda \in \mathbb{R}_-^*$, and $L_{1,\gamma}^{cl}$ is the universal semi-classical constant given by : $L_{1,\gamma}^{cl} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\frac{3}{2})}$, where Γ is the gamma function. Moreover, $\lambda_{n,h}$ are the negative eigenvalues of $H_{1,h}(V_1)$ with $\lambda_{1,h} < \cdots < \lambda_{N_h^\lambda,h} < \lambda$, N_h^λ is the number of negative eigenvalues smaller than λ, and $\psi_{n,h}$ are the associated L^2-normalized eigenfunctions such that : $H_{1,h}(V_1)\,\psi_{n,h} = \lambda_{n,h}\psi_{n,h}$.

The efficiency of the proposed signal estimation method and the influence of the design parameters λ, γ and h have been studied in [2]. In particular, as it is described in [2] and [4], the semi-classical parameter h plays a key role in this approach. In fact, when h decreases, the estimation $V_{h,\gamma,\lambda}$ improves. Since the study of the Schrödinger operator in the case where h tends to 0 is referred to the semi-classical analysis [1], this justifies the name **S**emi-**C**lassical **S**ignal **A**nalysis that we give to this approach [2], [4].

Let us point out that the formula given in (2) is still applicable in the case where $\lambda = 0$, and it gives good results even if λ is out of the range of definition. It has been used for example in the analysis of the arterial blood pressure signal in [5].

3. Generalization of the SCSA method to two dimensions

In this section, we propose to generalize formula (2) from one dimension to two dimensions. From now on, we consider the following $2D-$Schrödinger operator associated to a potential V_2 :

$$H_{2,h}(V_2) := -h^2\Delta - V_2, \tag{3}$$

where $\Delta := \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}$ is the $2D$-Laplacien operator, $h \in \mathbb{R}_+^*$ is the semi-classical parameter [1], and V_2 is a positive real valued function belonging to $\mathcal{C}^\infty(\Omega_2)$ where $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^2$ is a compact.

Let us recall that, as described in the previous section, the main idea behind the SCSA method in one dimension is to use the negative eigenvalues and the associated eigenfunctions of the operator $H_{1,h}(V_1)$ (equation (1)) to estimate the potential V_1. In order to estimate the potential V_2 by using a similar approach, we focus on the following spectral problem :

$$H_{2,h}(V_2)\psi_{k,h} = \lambda_{k,h}^{x,y}\psi_{k,h}, \tag{4}$$

where $\lambda_{k,h}^{x,y}$ and $\psi_{k,h}$, for $k = 1, \cdots, K_h^\lambda$, refer to the negative eigenvalues and the associated L^2-normalized eigenfunctions respectively.

We propose to use the separation of variables to calculate the eigenfunctions $\psi_{k,h}$. Hence, by taking $\psi_{k,h}(x,y) = \varphi_{n,h}(x)\phi_{m,h}(y)$ in (4), for $n = 1, \cdots, N_h^\lambda$ and $m = 1, \cdots, M_h^\lambda$ with $K_h^\lambda = N_h^\lambda M_h^\lambda$, we obtain : $\forall\,(x,y) \in \Omega_2$,

$$-h^2\Delta\left\{\varphi_{n,h}(x)\phi_{m,h}(y)\right\} - V_2(x,y)\varphi_{n,h}(x)\phi_{m,h}(y) = \lambda_{k,h}^{x,y}\,\varphi_{n,h}(x)\phi_{m,h}(y). \tag{5}$$

Then, it implies that : $\forall\,(x,y) \in \Omega_2$,

$$\begin{aligned}\lambda_{k,h}^{x,y}\varphi_{n,h}(x)\phi_{m,h}(y) = &\left(-h^2\frac{d^2}{dx^2}\varphi_{n,h}(x) - \frac{1}{2}V_2(x,y)\varphi_{n,h}(x)\right)\phi_{m,h}(y)\\ &+\left(-h^2\frac{d^2}{dy^2}\phi_{m,h}(y) - \frac{1}{2}V_2(x,y)\phi_{m,h}(y)\right)\varphi_{n,h}(x).\end{aligned} \tag{6}$$

Let us consider the following eigenvalues problem : $\forall\,(x,y)\in\Omega_2$,

$$H^x_{1,h}\left(\frac{1}{2}V_2(\cdot,y)\right)\varphi_{n,h}(x)=\lambda^x_{n,h}\varphi_{n,h}(x), \tag{7}$$

$$H^y_{1,h}\left(\frac{1}{2}V_2(x,\cdot)\right)\phi_{m,h}(y)=\lambda^y_{m,h}\phi_{m,h}(y), \tag{8}$$

where $\lambda^x_{n,h}$ (resp. $\lambda^y_{m,h}$) are the negative eigenvalues of the operator $H^x_{1,h}(\frac{1}{2}V_2(\cdot,y))$ (resp. $H^y_{1,h}(\frac{1}{2}V_2(x,\cdot))$), $n=1,\cdots,N^\lambda_h$, (resp. $m=1,\cdots,M^\lambda_h$), and $\varphi_{n,h}$ (resp. $\phi_{m,h}$) are the associated L^2-normalized eigenfunctions. Then, by using (7) and (8) in (6), we get : $(\lambda^x_{n,h}+\lambda^y_{m,h})\,\varphi_{n,h}(x)\phi_{m,h}(y)=\lambda^{x,y}_{k,h}\varphi_{n,h}(x)\phi_{m,h}(y)$, $\forall\,(x,y)\in\Omega_2$.

Consequently, we obtain the following relation

$$\lambda^{x,y}_{k,h}=\lambda^x_{n,h}+\lambda^y_{m,h}, \tag{9}$$

for $n=1,\cdots,N^\lambda_h$, $m=1,\cdots,M^\lambda_h$ and $k=1,\cdots,N^\lambda_h M^\lambda_h$.

Finally, let us recall that the coefficient $\frac{h}{L^{cl}_{1,\gamma}}$ given in Proposition 2.1 is related to some Riesz means connected to a Lieb-Thirring's conjecture (see [3]). Then we refer to the n dimensional formulation of the Riesz means to find the coefficient of the sum in two dimensions. In particular, we show that this coefficient is given by $\frac{h^2}{L^{cl}_{2,\gamma}}$, where the suitable universal semi-classical constant $L^{cl}_{2,\gamma}$ is given by $L^{cl}_{2,\gamma}=\frac{1}{2^2\pi}\frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+2)}$.

Consequently, inspired from the idea of tensor product and by using a similar way for obtaining Proposition 2.1, we can obtain the following proposition.

Proposition 3.1 *Let V_2 be a positive real valued function belonging to $\mathcal{C}^\infty(\Omega_2)$ where $\Omega_2\subset\mathbb{R}^2$ is a compact. Then, V_2 can be estimated by the following formula : $\forall\,(x,y)\in\Omega_2$,*

$$V_{2,h,\gamma,\lambda}(x,y):=-\lambda+\left(\frac{h^2}{L^{cl}_{2,\gamma}}\sum_{m=1}^{M^\lambda_h}\sum_{n=1}^{N^\lambda_h}\left(\lambda-(\lambda^x_{n,h}+\lambda^y_{m,h})\right)^\gamma\varphi^2_{n,h}(x)\phi^2_{m,h}(y)\right)^{\frac{2}{2\gamma+1}}, \tag{10}$$

where $h\in\mathbb{R}^*_+$, $\gamma\in\mathbb{R}_+$, $\lambda\in\mathbb{R}_-$, and $L^{cl}_{2,\gamma}$ is the suitable universal semi-classical constant. Moreover, $\lambda^x_{n,h}$ (resp. $\lambda^y_{m,h}$) are the negative eigenvalues of the operator $H^x_{1,h}(\frac{1}{2}V_2(\cdot,y))$ (resp. $H^y_{1,h}(\frac{1}{2}V_2(x,\cdot))$ with $\lambda^x_{1,h}<\cdots<\lambda^x_{N^\lambda_h,h}<\lambda$ (resp. $\lambda^y_{1,h}<\cdots<\lambda^y_{M^\lambda_h,1}<\lambda$), N^λ_h (resp. M^λ_h) is the number of the negative eigenvalues smaller than λ, and $\psi_{n,h}$ (resp. $\phi_{m,h}$) are the associated L^2-normalized eigenfunctions.

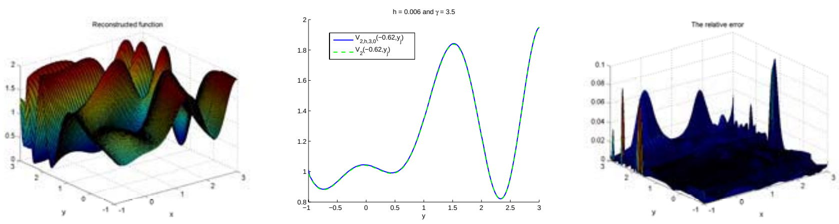
4. Some numerical examples

In order to validate formula (10), we have performed numerical tests on two examples. Note that, in this section, we will take $\lambda = 0$ in formula (10).

Example 1. In this example, we consider the following function :

$$V_2(x, y) = \sin(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + 3)\ \cos(2x + 1 - e^y) + 1. \tag{11}$$

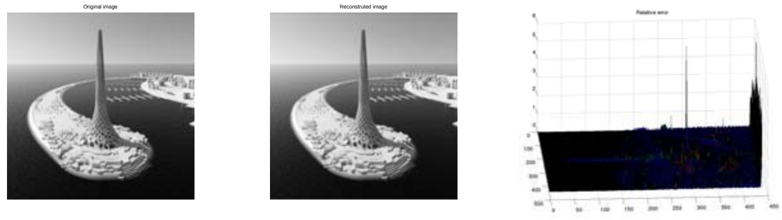
Then, we assume that V_2 is given in a discrete case where $x_i = iT_s$ and $y_j = jT_s$ for $i, j = -50, \cdots, 150$ with $T_s = 0.02$. We can remark that since the number of negative eigenvalues increases while h decreases, in practice we can not take h very small as described in [2] and [4]. So, before estimating V_2, we study the influence of the design parameters h and γ. By taking different values of h and γ, and by estimating the variation of the mean square errors between V_2 and the estimation $V_{2,h,\gamma,0}$, we found that there is a minimum at $h = \frac{6}{10^3}$, and $\gamma = 3.5$. Then, we can estimate V_2 by using $V_{2,h,\gamma,0}$ with these optimal parameter values (see Figure 12(a)). In particular, we show in Figure 12(b) the original signal $V_2(-0.62, y_j)$ and the estimation $V_{2,h,\gamma,0}(-0.62, y_j)$ with $y_j = -1, -0.98, \cdots, 3$ and in Figure12(c) we show the relative error between the function and its estimation.



(a) (b) (c)

Figure 12 – Example 1 : $V_2(x, y) = \sin(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + 3)\ \cos(2x + 1 - e^y) + 1$. (a) $V_{2,h,\gamma,0}(x_i, y_j)$. (b) $V_2(-0.62, y_j)$, $V_{2,h,\gamma,0}(-0.62, y_j)$ with $y_j = -1, -0.98, \cdots, 3$. (c) The relative error between the real function and its estimation.

Example 2. In this example, we consider a 440×440 pixels image, see Figure 13(a). One can note the good reconstruction of this image in Figure 13(b), for $h = 0.3$ and $\gamma = 3.5$, and the associated relative error in Figure 13(c).



(a) (b) (c)

Figure 13 – Example 2 : The beacon in KAUST. (a) Original image. (b) Reconstructed image. (c) The relative error between the original and reconstructed images.

5. Conclusion

In this paper, we have generalized a recent semi-classical signal analysis method from one dimensional case to two dimensional case for image analysis. The efficiency of the proposed method has been shown through some numerical examples. Moreover, the influence of design parameters in the method has been numerically studied. Accurate error analysis will be given in a future work.

Remerciements. This work was conducted when the first author was visiting the Estimation, Modeling and ANalysis Group at the Computer, Electrical and Mathematical Sciences and Engineering (CEMSE) devision at King Abdullah University of Science and Technology (KAUST). She would like to thank KAUST for its support and generous hospitality.

Bibliographie

[1] M. Dimassi and J. Sjöstrand, « Spectral asymptotics in the semi-classical limit », *Cambridge U Press*, (1999).

[2] B. Helffer and T.M. Laleg-Kirati, « On semi-classical questions related to signal analysis », *Asymptotic Analysis Journal*, **Volume 75**, **Number 3-4**, (2011), pp. 125–144.

[3] B. Helffer and D. Robert, « Riesz means of bound states and semiclassical limit connected with a Lieb-Thirring's conjecture I », *Asymptotic Analysis Journal*, **Volume 3**, (1990), pp. 91–103.

[4] T.M. Laleg-Kirati, E. Crépeau and M. Sorine, « Semi-classical signal analysis », *Mathematics of Control, Signals, and Systems (MCSS) Journal*, **Volume 25**, **Issue 1**, (2013), pp. 37–61.

[5] T.M. Laleg-Kirati, C.Médigue, Y. Papelier, F. Cottin and A. Van de Louw, « Validation of a semi-classical Signal analysis method for Stroke volume variation assessment : a

comparison with the PiCCO technique », *Annals of Biomedical Engineering*, **Volume 38**, **Number 12**, (2010), pp. 3618–3629.

One-iteration algorithm for geometric inverse problem

Geometric inverse problem

Maatoug Hassine and Imen Kallel

Department of Mathematics
University of Monastir
Faculty of Sciences
Tunisia
maatoug.hassine@enit.rnu.tn, imenkallel16@live.fr

RÉSUMÉ. Dans ce travail, on s'intéresse à la détection des objets immergés dans un milieu anisotrope à partir des mesures frontière. On propose un algorithme numérique d'une seule itération. Notre algorithme est basé sur la méthode du gradient topologique et la formulation de Kohn-Vogelius. Le problème inverse est transformé en un problème d'optimisation topologique. Dans la partie théorique on donne une analyse de sensibilité topologique pour une fonction d'énergie. L'objet inconnu est obtenu à l'aide d'une courbe de niveau du gradient topologique. Dans la partie numérique on présente quelques exemples montrant l'efficacité et la performance de l'algorithme proposé.

ABSTRACT. In this work we focus on the detection of objects immersed in anisotropic media from boundary measurements. We propose a one-iteration algorithm based on the Kohn-Vogelius formulation and the topological gradient method. The inverse problem is formulated as a topology optimization one. A topological sensitivity analysis is derived for an energy function. The unknown object is reconstructed using a level-set curve of the topologial gradient. The efficiency and accuracy of the proposed algorithm are illustrated by some numerical results.

MOTS-CLÉS : problème inverse géométrique, Laplace anisotropique, formulation de Kohn-Vogelius formulation, analyse de sensibilité, optimisation topologique

KEYWORDS : geometric inverse problem, anisotropic Laplace, Kohn-Vogelius formulation, sensitivity analysis, topological optimization

1. Introduction

There exist many practical problems for which it is necessary to detect the electrical properties of a media from boundary measurements. This kind of studies was realyzed for the clinical applications such as electrical impedance tomography [9], the geophysical applications such as detection of the mineral deposits location in the earth [14], and industrial applications such as non-destructive testing [8]. It is well known that all these applications lead to geometric inverse problems that are usually severelly ill-posed. Therefore, it leads to make use of available a priori information in order to regularize and stabilize the reconstruction procedure of the media properties.

In this work we focus on the detection of objects immersed in anisotropic media from measured data at its boundary. We propose a new reconstruction method based on the Kohn-Vogelius formulation [5] and the topological gradient method [1, 3, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13].

The considered model can be viewed as a prototype of a geometric inverse problem arising in many applications. The presented approach is general and can be adapted for various partial differential equations.

The rest of the paper is organized as follows. In Section 2, we formulate the considered inverse problem into a topological optimization one. This step is based on the Kohn-Vogelius formulation. In Section 3, we derive a topological asymptotic expansion for the cost function to be minimized. In Section 4, we propose a one-iteration shape reconstruction algorithm. The efficiency and accuracy of the proposed algorithm are illustrated by some numerical results.

2. The inverse problem

We consider here the inverse problem of recovring an object $\mathcal{O}$ immersed in anisotropic media from over-specified boundary data on $\Gamma = \partial\Omega$. More precisely, for given data F, Φ and ψ_m, the considered geometric inverse problem consists in determining the boundary $\Sigma = \partial\mathcal{O}$ location such that the solution ψ of the anisotropic Laplace equation satisfies the following overdetermined boundary value problem

$$\left\{\begin{array}{rll} -\,\mathrm{div}\,(\gamma(x)\nabla\psi) & = F & \text{in } \Omega\backslash\overline{\mathcal{O}}, \\ \gamma(x)\nabla\psi.\mathbf{n} & = \Phi & \text{on } \Gamma, \\ \psi & = \psi_m & \text{on } \Gamma, \\ \gamma(x)\nabla\psi.\mathbf{n} & = 0 & \text{on } \Sigma. \end{array}\right. \tag{1}$$

In order to determine the unknown object boundary Σ location, we suggest here a new reconstruction method. The first step of our approach is based on the Kohn-Vogelius formulation which rephrase the considered inverse problem into a topological optimization one. In fact, the Kohn-Vogelius formulation leads to define for any given domain $\mathcal{O} \subset \Omega$ two forward problems. The first one is associated to the Neumann datum Φ, which will be named as the “Neumann problem” :

$$(\mathcal{P}_N) \begin{cases} \text{Find } \psi_N \in H^1(\Omega\backslash\overline{\mathcal{O}}) \text{ solving} & & \\ -\operatorname{div}\,(\gamma(x)\nabla\psi_N) = & F & \text{in } \Omega\backslash\overline{\mathcal{O}} \\ \gamma(x)\nabla\psi_N.\mathbf{n} = & \Phi & \text{on } \Gamma \\ \gamma(x)\nabla\psi_N.\mathbf{n} = & 0 & \text{on } \Sigma. \end{cases} \tag{2}$$

The second one is associated to the Dirichlet datum (measured) ψ_m

$$(\mathcal{P}_D) \begin{cases} \text{Find } \psi_D \in H^1(\Omega\backslash\overline{\mathcal{O}}) \text{ solving} & & \\ -\operatorname{div}\,(\gamma(x)\nabla\psi_D) = & F & \text{in } \Omega\backslash\overline{\mathcal{O}} \\ \psi_D = & \psi_m & \text{on } \Gamma \\ \gamma(x)\nabla\psi_D.\mathbf{n} = & 0 & \text{on } \Sigma. \end{cases} \tag{3}$$

One can see that if $\Sigma = \partial\mathcal{O}$ coincides with the actual boundary Σ^* then the misfit between the solutions vanishes, $\psi_D = \psi_N$. According to this observation, we propose an identification process based on the minimization of the following energy functional [5]

$$\mathcal{K}(\Omega\backslash\overline{\mathcal{O}}) = \int_{\Omega\backslash\overline{\mathcal{O}}} \gamma(x)|\nabla\psi_D - \nabla\psi_N|^2 \,\mathrm{dx}.$$

REMARQUE. — T
he Neumann datum Φ and the source term F should satisfy the compatibility condition :

$$\int_{\Omega\backslash\overline{\mathcal{O}}} F\mathrm{dx} + \int_{\Gamma} \Phi\mathrm{ds} = 0.$$

In practice, to avoid such a compatibility condition, one can prescribe the solution ψ_N on a sall part of the boundary Γ. The second step of our approach concerns the derived topological optimization problem

$$\min_{\mathcal{O}\subset\Omega} \mathcal{K}(\Omega\backslash\overline{\mathcal{O}}).$$

To solve this problem we will use the topological gradient method. It consists in stuying the variation of the function $\mathcal{K}$ with respect to the presence of a small topological perturbation in the initial domain Ω.

3. The topological gradient method

Let $\mathcal{O}_{z,\varepsilon}$ be a small object living the anisotropic media Ω and having the form $\mathcal{O}_{z,\varepsilon} = z + \varepsilon\omega \subset \Omega$, where $z \in \Omega$, $\varepsilon > 0$ and $\omega \subset \mathbb{R}^d$ is a given, fixed and bounded domain containing the origin, whose boundary $\partial\omega$ is of $\mathcal{C}^1$. Since we have a Neumann condition on the perturbation boundary, the topological gradient method would provide an asymptotic expansion of the function $\mathcal{K}$ on the form

$$\mathcal{K}(\Omega_{z,\varepsilon}) = \mathcal{K}(\Omega) + \varepsilon^d \delta\mathcal{K}(z) + o(\varepsilon^d),$$

where $\Omega_{z,\varepsilon} = \Omega \backslash \overline{\omega_{z,\varepsilon}}$ and $\mathcal{K}(\Omega_{z,\varepsilon})$ is defined by

$$\mathcal{K}(\Omega_{z,\varepsilon}) = \int_{\Omega_{z,\varepsilon}} \gamma(x) |\nabla\psi_D^\varepsilon - \nabla\psi_N^\varepsilon|^2 \,\mathrm{dx},$$

with ψ_N^ε is the solution to the perturbed Neumann problem

$$(\mathcal{P}_N^\varepsilon) \begin{cases} -\operatorname{div}(\gamma(x)\nabla\psi_N^\varepsilon) = & F \quad \text{in } \Omega_{z,\varepsilon} \\ \gamma(x)\nabla\psi_N^\varepsilon \mathbf{n} = & \Phi \quad \text{on } \Gamma \\ \gamma(x)\nabla\psi_N^\varepsilon \mathbf{n} = & 0 \quad \text{on } \partial\mathcal{O}_{z,\varepsilon}, \end{cases} \tag{4}$$

and ψ_D^ε is the solution to the perturbed Dirichlet problem

$$(\mathcal{P}_D^\varepsilon) \begin{cases} -\operatorname{div}(\gamma(x)\nabla\psi_D^\varepsilon) = & F \quad \text{in } \Omega_{z,\varepsilon} \\ \psi_D^\varepsilon = & \psi_m \quad \text{on } \Gamma \\ \gamma(x)\nabla\psi_D^\varepsilon \mathbf{n} = & 0 \quad \text{on } \partial\mathcal{O}_{z,\varepsilon}. \end{cases} \tag{5}$$

Théorème 3.1 *(arbitrary shaped object). The function $\mathcal{K}$ admits the following topological asymptotic expansion*

$$\mathcal{K}(\Omega_{z,\varepsilon}) = \mathcal{K}(\Omega) + \varepsilon^d \delta\mathcal{K}(z) + o(\varepsilon^d),$$

with $\delta\mathcal{K}$ is the topological gradient

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{K}(x) \quad = \quad & \gamma(x) \left\{ \nabla\psi_0^N(x) \int_{\partial\omega} \eta_N(y) y ds(y) - \nabla\psi_0^D(x) \int_{\partial\omega} \eta_D(y) y ds(y) \right\} \\ & + |\omega|\, F(x)(\psi_0^D(x) - \psi_0^N(x)),\ \forall x \in \Omega. \end{aligned}$$

Here η_N and η_D are the solutions to the following integral equations

$$\begin{aligned} \frac{-\eta_N(y)}{2} + \int_{\partial\omega} \frac{\partial E}{\partial n}(y-x)\eta_N(x) ds(x) = -\nabla u_0^N(x_0)\cdot n, \quad y \in \partial\omega \\ \frac{-\eta_D(y)}{2} + \int_{\partial\omega} \frac{\partial E}{\partial n}(y-x)\eta_D(x) ds(x) = -\nabla u_0^D(x_0)\cdot n, \quad y \in \partial\omega, \end{aligned}$$

where E is the fundamental solution of the Laplace operator.

REMARQUE. — I
n the particular case where ω is a sphere or an ellipsoid, the densities η_N and η_D are given explicitly (see corollary 1 for the circle shaped case).

4. Algorithm and numerical results

In this section we restrict ourselves to the bidimentional case and we presente a fast and simple one-iteration identification algorithm. Our numerical procedure is based on the formula described by the following corollary.

Corollaire 4.1 *(circle shaped object). If $\omega = B(0,1)$, the function $\mathcal{K}$ admits the following asymptotic expansion*

$$\mathcal{K}(\Omega_{z,\varepsilon}) - \mathcal{K}(\Omega) = \varepsilon^2 \delta\mathcal{K}(z) + o(\varepsilon^2),$$

with $\delta\mathcal{K}$ is the topological gradient

$$\delta\mathcal{K}(x) = 2\pi \left\{ \gamma(x) \left[\left| \nabla\psi_0(x)^N \right|^2 - \left| \nabla\psi_0(x)^D \right|^2 \right] + \frac{1}{2} F(x) \left(\psi_0^D(x) - \psi_0^N(x) \right) \right\}, \; \forall x \in \Omega.$$

The unknow object $\mathcal{O}$ is identified using a level set curve of the topological gradient $\delta\mathcal{K}$. More precisely, the unknow object $\mathcal{O}$ is likely to be located at zone where the topological gradient $\delta\mathcal{K}$ is negative.

One-iteration algorithm :

– Solve the two problems ($\mathcal{P}_N^0$) and ($\mathcal{P}_D^0$),
– Compute the topological gradient $\delta\mathcal{K}(x), \; x \in \Omega$,
– Determine the unknow object

$$\mathcal{O} = \{ x \in \Omega; \text{ such that } \delta\mathcal{K}(x) < c < 0 \},$$

where c is a constante chosen in such a way that the cost function $\mathcal{K}$ decreases as most as possible.

This one-iteration procedure has already been illustrated in [1] for the identification of cracks from overdetermined boundary data and in [7] for the detection of small gas bubbles in Stokes flow.

Next, we presente some numerical results showing the efficiency and accuracy of our proposed One-iteration algorithm. In Figure 1, we test our algorithm on circular shape. In Figure 3, we consider the case of an ellpitical shape. As one can observe, the domain to be detected is located at zone where the topological gradient is negative and it is approximated by a level set curve of the topological gradient $\delta\mathcal{K}$. The result is quite efficient. In Figure 4, we obtain an intersting reconstruction result for a non trivial shape.

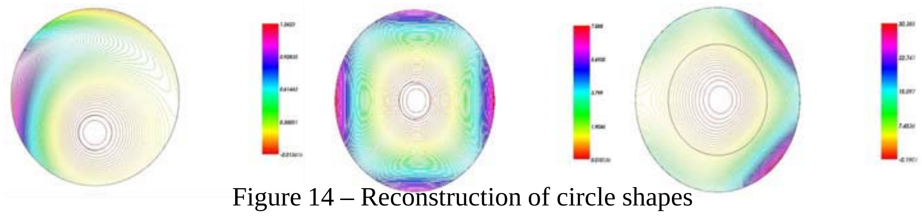


Figure 14 – Reconstruction of circle shapes

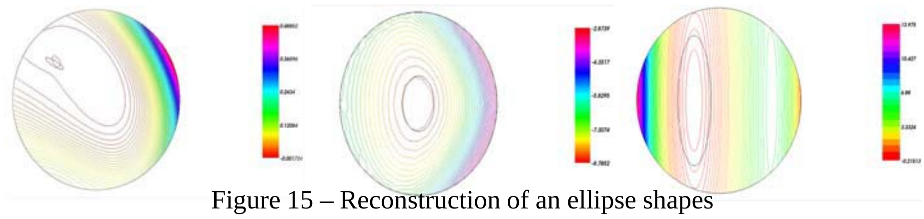


Figure 15 – Reconstruction of an ellipse shapes

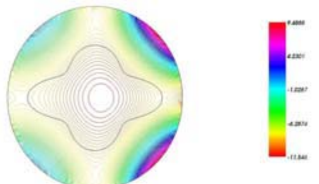


Figure 16 – Reconstruction of a non trivial shape

In Figure 4 we illustrate the case of a complex geometry. As one can see, we detect efficiency the location of the unknown domain but not its shape. The obtained result can serve as a good initial guess for an iterative optimization process based on the shape derivative.

Figure 17 – Reconstruction of a complex shape

Bibliographie

[1] M. ABDELWAHED, M.HASSINE, M. MASMOUDI« Optimal shape design for fluid flow using topological perturbation technique », *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, n° 356, 2009, 548-563.

[2] L. AFRAITES, M. DAMBRINE, K. EPPLER AND K. KATEB, « Detecting perfectly insulated obstacles by shape optimization techniques of order two »,*Discrete Contin. Dyn. Syst.* , n° 8(2), 389-416, 2007.

[3] AMMARI H., KANG H., « Reconstruction of small inhomogeneities from boundary measurements », *Lecture Notes in Mathematics*, n° 1846, Springer, 2004

[4] AMSTUTZ S., HORCHANI I., MASMOUDI M. « Crack detection by the topological gradient method », *Control and Cybernetics*, n° 34 (1), 2005, 81-101.

[5] Andrieux S., Baranger T. N., Ben Abda A. (2006), Solving Cauchy problems by minimizing an energy-like functional, *Inverse Problems*, **22**, 115-134.

[6] M. BADRA F.CAUBET AND M. DAMBRINE, « Detecting an obstacle immersed in a fluid by shape optimization methods. », *M3AS*, n° 21 (10), 2069-2101, 2011.

[7] BEN ABDA A., HASSINE M., JAOUA M., MASMOUDI M., « Topological sensitivity analysis for the location of small cavities in Stokes flow », *SIAM J. Contr. Optim.*, n° 48 (5), 2871–2900, 2009.

[8] BOWLER J., « Thin-skin eddy-current inversion for the determination of cracks shapes », *Inverse Problems*, n° 18, 1891-1905, 2002.

[9] M. CHENEY, D. ISAACSON J.C.NEWELL, « Electrical impedance tomography », *SIAM Review.*, n° 40, 85-101, 1999.

[10] PH.GUILLAUME, M.HASSINE « Removing holes in topological shape optimization », *ESAIM, Control, Optimisation and Calculus of Variations*, n° 14 (1), 2008, 160-191.

[11] GUZINA B.B., BONNET M. « Small-inclusion asymptotic of misfit functionals for inverse problems in acoustics », *Inverse Problems*, n° 22, 2006, 1761-1785.

[12] M. HASSINE, S. JAN, M. MASMOUDI, « From differential calculus to $0-1$ topological optimization », *SIAM J. Cont. Optim.*, n° 45 (6), 1965-1987, 2007.

[13] MASMOUDI M., « The topological asymptotic », Computational Methods for Control Applications*(R.Glowinski H.Kawarada and J.Periaux, Eds), GAKUTO Inte. Ser. Math. Sci. Appl.*, n° 16, 52-73, 2002.

[14] PARKER R.L., « The inverse problem of resistivity sounding », *Geophysics*, n° 42, 2143-2158, 1984.

[15] J. SOKOLOWSKI, A. ZOCHOWSKI, « On the topological derivative in shape optimization », *SIAM J. Control Optim.*, n° 37 (4), 1251-1272, 1999.

[16] A. SCHUMACHER « Topologieoptimierung von bauteilstrukturen unter verwendung von lopchpositionierungkrieterien », *thesis, Universitat-Gesamthochschule-Siegen*, 1995.

Shear stress reconstruction from the knowledge of partially overdetermined boundary elastic data

Amel Ben Abda * — Sinda Khalfallah **

*,** LAMSIN-ENIT-University of Tunis El Manar-Tunisia

RÉSUMÉ. La contrainte de cisaillement correspond aux forces frictionnelles exercées par le flux sanguin contre la paroi vasculaire. . Cette force joue le rôle du protecteur dans le sang et son identification est très important. Dans ce papier, nous proposons une procédure numérique d'identification de cette contrainte à partir d'un problème de complétion de données en élasticité linéaire isotrope en considérant le déplacement et seulement la partie normale de la contrainte normale sur une partie du bord. L'objectif est alors la complétion des données frontières sur l'autre partie du bord et surtout le plus important est de retrouver la contrainte de cisaillement sur le bord de mesures. Nous validons notre procédure par des résultats numériques.

ABSTRACT. Shear stress is the frictional forces exerted by blood flow against the vessel wall. This force plays the role of protector in the blood and it's identification is very important. In this paper, we propose a numerical procedure for identifying this constraint problem from a data completion isotropic linear elasticity considering a displacement and only the normal part of the normal stress on part of the edge. The objective is then data completion boundary on the other side and especially find the shear stress on the edge of data. We validate our procedure by numerical results.

MOTS-CLÉS : Contrainte de cisaillement, problème de Cauchy, élasticité, complétion de données.

KEYWORDS : Shear stress, Cauchy problem, elasticity, data completion.

1. Introduction

This work is motivated by medical field since shear stress plays a very important role in blood flow and in atherogenesis. It's critically important in regulating the atheroprotective.

Because of the important role of shear stress we will try to study the reconstruction of the force via a Cauchy-elasticity problem from the knowledge of partially overdetermined boundary.

A linear elastic material occupies an open bounded domain Ω with smooth boundary Γ where n is the outward normal vector. We denote the boundary where the overspecified data can be measured and the one where the data have to be recovered by Γ_c and Γ_i respectively. The Cauchy problem can be stated as follows :

$$\begin{cases} \text{div}\sigma(u) = 0 & \text{in} \quad \Omega, \\ (\sigma(u).n).n = \Phi.n & \text{on} \quad \Gamma_c, \\ u = U & \text{on} \quad \Gamma_c. \end{cases} \tag{1}$$

where u is the displacement vector,σ is the stress tensor. U and Φ are the given displacement and traction vectors respectively.

Fields σ and u are related by the linear elastic constitutive law $\sigma(u) = A : \varepsilon u$, where A is Hooke's tensor and the strain tensor is given by : $\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$. We consider an inverse problem known as missing boundary data recovering. We assume that a model is given in a computational domain with over-specified data on a part of the boundary and missing data on the other part. Classical approaches use a least-squares formulation which requires some regularization tool to solve this ill-posed problem. We consider the "weak" cauchy elasticity problem in so far as the overspecified boundary data concernes the two components of the displacement field but only one component of the normal stress. This problem has been solved by [4, 5] considering only the tangential displacement field on Γ_c or in this paper we consider the normal surface traction field and we wish to solve this "weak" problem using the Steklov Poincaré operator.

2. Shear stress from the knowledge of partially overdetermined boundary elastic data

For an isotropic material, only two unique constants are needed :

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$$

where λ and μ are the Lamé constants. μ is also known as the shear modulus.

The Cauchy problem and what will be called the "weak" Cauchy problem for the Lamé

operator is stated here-after :
Similarly to the domain decomposition methodology, we consider the common trace $u_D = u_N = \eta$ on Γ_i as the unknown of the "weak" Cauchy problem. Therefore, we consider the problems defined over the “subdomains”$\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$:

$$(P_D)\begin{cases} \text{div}\sigma(u_D) = 0 & \text{in} \quad \Omega, \\ u_D = U & \text{on} \quad \Gamma_c, \\ u_D = \eta & \text{on} \quad \Gamma_i. \end{cases} \quad (P_N)\begin{cases} \text{div}\sigma(u_N) = 0 & \text{in} \quad \Omega, \\ (\sigma(u_N).n).n = \Phi.n & \text{on} \quad \Gamma_c, \\ u_N.\tau = U.\tau & \text{on} \quad \Gamma_c, \\ u_N = \eta & \text{on} \quad \Gamma_i. \end{cases} \tag{2}$$

The solution of the Cauchy problem is recovered, i.e. $u = u_D = u_N$ in Ω, if :

$$\sigma(u_D).n = \sigma(u_N).n \tag{3}$$

We decompose $u_D = u_D^0 + u_D^*$ where u_D^0 and u_D^* solutions of :

$$(P_D^0)\begin{cases} \text{div}\sigma(u_D^0) = 0 & \text{in} \quad \Omega, \\ u_D^0 = 0 & \text{on} \quad \Gamma_c, \\ u_D^0 = \eta & \text{on} \quad \Gamma_i. \end{cases} \quad (P_D^*)\begin{cases} \text{div}\sigma(u_D^*) = 0 & \text{in} \quad \Omega, \\ u_D^* = U & \text{on} \quad \Gamma_c, \\ u_D^* = 0 & \text{on} \quad \Gamma_i. \end{cases} \tag{4}$$

Similary, we decompose for the $u_N = u_N^0 + u_N^*$

$$(P_N^0)\begin{cases} \text{div}\sigma(u_N^0) = 0 & \text{in} \quad \Omega, \\ \sigma(u_N^0).n = 0 & \text{on} \quad \Gamma_c, \\ u_N^0 = \eta & \text{on} \quad \Gamma_i. \end{cases} \quad (P_N^*)\begin{cases} \text{div}\sigma(u_N^*) = 0 & \text{in} \quad \Omega, \\ \sigma(u_N^*).n = \Phi & \text{on} \quad \Gamma_c, \\ u_N^* = 0 & \text{on} \quad \Gamma_i. \end{cases} \tag{5}$$

By superposition, we have $u_D = u_D^0 + u_D^*$ and $u_N = u_N^0 + u_N^*$. With this partition, condition 3 leads to the boundary equation

$$\sigma(u_D^0).n - \sigma(u_N^0).n = \sigma(u_N^*).n - \sigma(u_D^*).n \qquad \text{on} \quad \Gamma_i$$

We introduce the Steklov Poincaré operator

$$S\eta = \sigma(u_D^0).n - \sigma(u_N^0).n \quad \text{on} \quad \Gamma_i$$

We can write the equation (3) according to the Steklov Poincaré operator :

$$S\eta = \xi \quad \text{on} \quad \Gamma_i$$

where $\xi = -(\sigma(u_D^*).n - \sigma(u_N^*).n)$.
This operator, borrowed to the domain decomposition community, is widely used (see [7]) We use an iterative preconditioned gradient algorithm, which appears to be very efficient. Each iteration of the algorithm is written

$$\lambda = \lambda + \rho(S_D)^{-1}(S\lambda_k - \xi),$$

where ρ is a coefficient of relaxation and S_D is the preconditioning operator. Thus each iteration requires to compute $S\lambda_k$ by solving the two problems u_D and u_N and to solve the system $S_D\mu = S\lambda$. This is achieved by solving the following problem :

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{div}\sigma(w) = 0 & \text{in} & \Omega, \\ \sigma(w).n = S\eta & \text{on} & \Gamma_i, \\ w = 0 & \text{on} & \Gamma_c. \end{array}\right. \tag{6}$$

We know that it is very important to reconstruct the missing data on the part Γ_i, but from this procedure we can recover the missing part of shear stress on Γ_c. So the originality of our work is to complete all boundary data on the part Γ_i and Γ_c and to our knowledge there is almost no results on this problem, however, it's very important in applications - identification of shear stress in studies preventive breaks aneurysm).

3. Numerical Results :

In this section we present some numerical results obtained using the procedure described in section (2). We implemented the method under *Freefem++* Software environment [8]. We consider a computational domain Ω which is a 2D annular section with radius $r_1 = 1$ and $r_2 = 1.2$. We note Γ_c the outer circle and Γ_i the inner one.
The stopping criteria is $||u_D - u_N||^2_{|\Omega} \leq \varepsilon$, where ε is a given tolerance level.
The domain Ω is discretized using a uniform mesh of 30 nodes on Γ_i and 60 nodes on Γ_c.
Reconstructed data are computed with $\rho = -1.2$, $\varepsilon = 10^{-4}$.
Synthetic data are generated by solving the following forward problem :

$$\left\{\begin{array}{llll} \text{div}\sigma(u_0) & = 0 & \text{in} & \Omega, \\ \sigma(u_0).n & = \sigma(T) & \text{on} & \Gamma_c, \\ u_0 & = T & \text{on} & \Gamma_i. \end{array}\right. . \tag{7}$$

where $T = (\text{Re}(\frac{1}{z-a}), \text{Im}(\frac{1}{z-a}))$, $z = x + iy$.
We choose a source point a in the vinicity of the inner boundary ($a = 0.8$).
We consider a Steel XC10 to 20° temperature as isotropic elastic material (Poisson coefficient $\nu = 0.29$, Young's modulus $E = 216$GPa).
Our goal is to reconstruct the shear stress on Γ_c and show that decreasing the size of the area we have the best reconstruction results. (View figures 18, 19, 20).

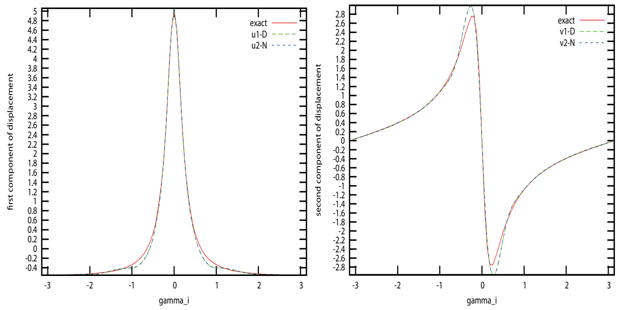


Figure 18 – Exact and reconstructed displacement on Γ_i.

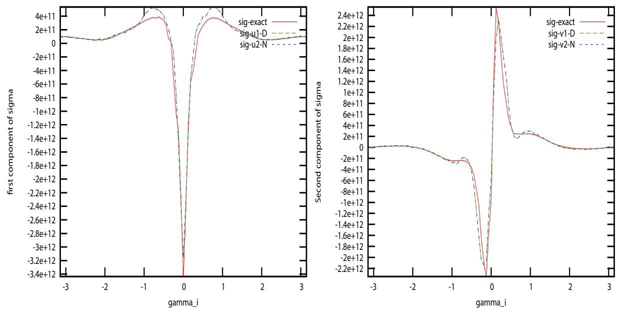


Figure 19 – Exact and reconstructed surface traction on Γ_i.

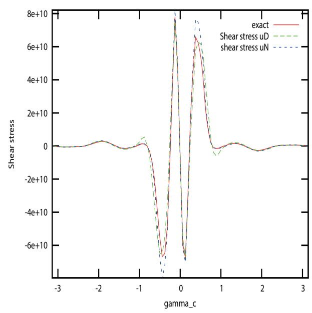


Figure 20 – Reconstruction of shear stress on Γ_c.

Bibliographie

[1] Franck Delvare, Alain Cimetière, Jean-luc Hanus, Patrice Bailly, An iterative method for the Cauchy problem in linear elasticity with fading regularization effect,Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 199, 49-52 (2010) 3336-3344

[2] Thouraya N. Baranger and Stéphane Andrieux, An optimization approach for the Cauchy problem in linear elasticity, Structural and Multidisciplinary Optimization Volume 35, Number 2 (2008), 141-152, DOI : 10.1007/s00158-007-0123-5.

[3] J. Hadamard, Lectures on Cauchy’s Problem in Linear Partial Differential Equation, Dover, New York, USA (1953).

[4] Stéphane Andrieux, Thouraya N. Baranger, An energy error-based method for the resolution of the Cauchy problem in 3D linear elasticity, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 197 (2008) 902-920.

[5] Stéphane Andrieux, Thouraya N. Baranger, Three-dimensional recovery of stress intensity factors and energy release rates from surface full-field displacements, International Journal of Solids and Structures (2013).

[6] F. Ben Belgacem and H. El Fekih ; On Cauchy problem : I. A variational Steklov-Poincaré theory. *Inverse Problems 21 (2005) 1915-1936*.

[7] Quarteroni, Alfio,Valli, Alberto, Domain decomposition methods for partial differential equations..Oxford ; New York : Clarendon press, 1999,XV-360 p. 24 cm,Numerical mathematics and scientific computation.

[8] F. Hecht, O. Pironneau, A. Le Hyaric and K. Ohtsuka, "FreeFem++", Univ. Pierre et Marie Curie, Paris.

Topology optimization method using the Kohn-Vogelius formulation and the Topological sensitivity analysis

Topology optimization method

Maatoug Hassine and Khalifa Khelifi

Department of Mathematics
Monastir University
Tunisia
maatoug.hassine@enit.rnu.tn, khalifakhelifi@hotmail.fr

RÉSUMÉ. Dans ce travail nous considérons un problème inverse géométrique lié à l'opérateur de Laplace anisotrope. L'approche proposée est basée sur la formulation de Kohn-Vogelius et la méthode du gradient topologique. La formulation de Kohn-Vogelius permet de reformuler le probléme inverse en un problème d'optimisation topologique. La technique de sensibilité topologique est utilisée pour étudier la variation d'une fonction de forme par rapport à des petites perturbations géométrique du domaine. Dans la partie numérique, on propose un algorithme de reconstruction d'une seule itération. L'efficacité et la rapidité de l'algorithme numérique sont justifiées par quelques résultats numériques.

ABSTRACT. In this paper we consider a topological optimization problem related to the anisotropic Laplace equation. We propose an alternative approach based on the Kohn-Vogelius formulation and the topological gradient method. The Kohn-Vogelius formulation rephrase the geometrical inverse problem into a shape optimization one. The obtained shape optimization problem is treated using the topological sensitivity analysis method. As application, we propose a one-shot reconstruction algorithm. The efficiency and accuracy of the proposed algorithm are illustrated by some numerical results.

MOTS-CLÉS : Laplace anisotropique, analyse de sensibilité, formules asymptotique, optimisation topologique

KEYWORDS : anisotropic Laplace, sensitivity analysis, asymptotic formulas, topological optimization

1. Introduction

In this paper we consider a geometric inverse problem related to the anisotropic Laplace equation. Let $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ denote a bounded domain with boundary Γ. Inside the domain Ω we assume the existence of a subdomain $S \subset \Omega$ with boundary $\Sigma = \partial S$.

The inverse problem under consideration might be formulated as follows : For given data F, V and u_m seek the unknown boundary Σ such that the solution u of the anisotropic Laplace equation satisfies the following overdetermined boundary value problem

$$\left\{\begin{array}{rll} -\text{ div }(\gamma(x)\nabla u) & = F & \text{in } \Omega\backslash\overline{S}, \\ \gamma(x)\nabla u.\mathbf{n} & = V & \text{on } \Gamma, \\ u & = u_m & \text{on } \Gamma, \\ u & = 0 & \text{on } \Sigma, \end{array}\right. \tag{1}$$

where γ is a scalar positive function describing the physical properties of the medium Ω. In this formulation the domain $\Omega\backslash\overline{S}$ is unknown since the free boundary Σ is unknown. This problem is ill posed in the sense of Hadamard.

The majority of works dealing with this kind of problems fall into the category of shape optimization and based on the shape differentiation technics. It is proved in [2, 6] that the studied inverse problems, treated as a shape optimization problems, are severely ill-posed (i.e. unstable), for both Dirichlet and Neumann conditions on the boundary Σ. Thus they have to use some regularization methods to solve them numerically.

We propose here an alternative approach combining the advantages of the Kohn-Vogelius formulation [5] and the topological sensitivity analysis method[1, 3, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13].

The Kohn-Vogelius formulation is a self regularization technique and rephrase the geometrical inverse problem into a shape optimization one. It leads to define for any given domain $S \subset \Omega$ two forward problems. The first one is associated to the Neumann datum V, which will be named as the “Neumann problem” :

$$(\mathcal{P}_N)\left\{\begin{array}{rll} \multicolumn{3}{l}{\text{Find } u_N \in H^1(\Omega\backslash\overline{S}) \text{ solving}} \\ -\text{ div }(\gamma(x)\nabla u_N) = & F & \text{in } \Omega\backslash\overline{S} \\ \gamma(x)\nabla u_N.\mathbf{n} = & V & \text{on } \Gamma \\ u_N = & 0 & \text{on } \Sigma. \end{array}\right. \tag{2}$$

The second one is associated to the Dirichlet (measured) datum u_m

$$(\mathcal{P}_D)\left\{\begin{array}{rll} \multicolumn{3}{l}{\text{Find } u_D \in H^1(\Omega\backslash\overline{S}) \text{ solving}} \\ -\text{ div }(\gamma(x)\nabla u_D) = & F & \text{in } \Omega\backslash\overline{S} \\ u_D = & \psi_m & \text{on } \Gamma \\ u_D = & 0 & \text{on } \Sigma. \end{array}\right. \tag{3}$$

One can remark that if $\Sigma = \partial S$ coincides with the actual boundary Σ^* then the misfit between the solutions vanishes, $u_D = u_N$. According to this observation, we propose an identification process based on the minimization of the following functional

$$\mathcal{J}(\Omega \backslash \overline{S}) = \|u_D - u_N\|^2 ,$$

where $\|.\|$ is the L^2-norm $\|.\|_{L^2(\Omega\backslash\overline{S})}$ or the semi-norm $|.|_{H^1(\Omega\backslash\overline{S})}$.

To minimize this misfit function we shall use the topological sensitivity analysis method. It consists in studying the variation of the function $\mathcal{J}$ with respect to a small topological perturbation of the domain Ω. For a small perturbation $\omega_{z,\varepsilon}$, that is centered at $z \in \Omega$ and has the shape $\omega_{z,\varepsilon} = z + \varepsilon\omega$ where $z \in \Omega$, $\varepsilon > 0$ and $\omega \subset \mathbb{R}^2$ is a given, regular and bounded domain containing the origin, the topological sensitivity analysis method would provide an asymptotic expansion of the function $\mathcal{J}$ in the following form :

$$\mathcal{J}(\Omega\backslash\overline{\omega_{z,\varepsilon}}) = \mathcal{J}(\Omega) + f(\varepsilon)\delta\mathcal{J}(z) + o(f(\varepsilon)), \quad \forall z \in \Omega,$$

where $f(\varepsilon)$ is a scalar positive function going to zero with ε. This expression is called the topological asymptotic expansion and $\delta\mathcal{J}$ the topological gradient. In order to minimize the cost function, the best location to insert a small perturbation in Ω is where $\delta\mathcal{J}$ is most negative. In fact if $\delta\mathcal{J}(z) < 0$, we have $\mathcal{J}(\Omega\backslash\overline{\omega_{z,\varepsilon}}) < \mathcal{J}(\Omega)$ for small ε. The function $\delta\mathcal{J}$ can be used as a descent direction in the domain optimization process.

The paper is organized as follows. In Section 2, we derive a topological sensitivity analysis for the Khon-Vogelius type functions. We discuss the semi-norm in Theorem 1 and the L^2-norm in Theorem 2. Based on the obtained theoretical results, we propose in Section 3 a one-shot reconstruction algorithm. The efficiency and accuracy of the proposed algorithm are illustrated by some numerical results.

2. Topological sensitivity analysis

In this section we derive a topological asymptotic expansion for the function $\mathcal{J}$. In the presence of a small geometric perturbation $\omega_{z,\varepsilon} = z + \varepsilon\omega$ in Ω, the function $\mathcal{J}$ is defined by

$$\mathcal{J}(\Omega\backslash\overline{\omega_{z,\varepsilon}}) = \|u_D^\varepsilon - u_N^\varepsilon\|^2$$

with u_N^ε and u_D^ε are the solutions to the Neumann and Dirichlet perturbed problems

$$(\mathcal{P}_N^\varepsilon)\begin{cases} -\text{ div }(\gamma(x)\nabla u_N^\varepsilon) = F & \text{in } \Omega\backslash\overline{\omega_{z,\varepsilon}} \\ \gamma(x)\nabla u_N^\varepsilon \mathbf{n} = V & \text{on } \Gamma \\ u_N^\varepsilon = 0 & \text{on } \partial\omega_{z,\varepsilon}, \end{cases} \qquad (\mathcal{P}_D^\varepsilon)\begin{cases} -\text{ div }(\gamma(x)\nabla u_D^\varepsilon) = F & \text{in } \Omega\backslash\overline{\omega_{z,\varepsilon}} \\ u_D^\varepsilon = u_m & \text{on } \Gamma \\ u_D^\varepsilon = 0 & \text{on } \partial\omega_{z,\varepsilon}. \end{cases}$$

Théorème 2.1 *(the semi-norm case). The function $\mathcal{J}$ defined by*

$$\mathcal{J}(\Omega \setminus \overline{\omega_{z,\varepsilon}}) = \int_{\Omega\backslash\overline{\omega_{z,\varepsilon}}} \gamma(x) \left|\nabla u_\varepsilon^N - \nabla u_\varepsilon^D\right|^2 dx,$$

admits the following asymptotic expansion

$$\mathcal{J}(\Omega \setminus \overline{\omega_{z,\varepsilon}}) = \mathcal{J}(\Omega) + \frac{-2\pi}{log(\varepsilon)}\gamma(z)\left[\left|u_0^N(z)\right|^2 - \left|u_0^D(z)\right|^2\right] + o(\frac{-1}{log(\varepsilon)}). \qquad [4]$$

Proof : Let $\Omega_{z,\varepsilon} = \Omega \setminus \overline{\omega_{z,\varepsilon}}$. The function $\mathcal{J}$ can be decomposed as

$$\mathcal{J}(\Omega_{z,\varepsilon}) = \int_{\Omega_{z,\varepsilon}} \gamma(x)|\nabla u_D^\varepsilon|^2 \mathrm{dx} + \int_{\Omega_{z,\varepsilon}} \gamma(x)|\nabla u_N^\varepsilon|^2 \mathrm{dx} - 2\int_{\Omega_{z,\varepsilon}} \gamma(x)\nabla u_D^\varepsilon.\nabla u_N^\varepsilon \mathrm{dx}.$$

Using Green formula, the Dirichlet term has the following variation

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_{z,\varepsilon}} \gamma(x)|\nabla u_D^\varepsilon|^2\ \mathrm{dx}\ - \int_{\Omega} \gamma(x)|\nabla u_D^0|^2\ \mathrm{dx} = &\ -\int_{\partial\omega_{z,\varepsilon}} \gamma(x)(\nabla u_D^\varepsilon - \nabla u_D^0).n\, u_D^0\ \mathrm{ds}\ + \int_{\omega_{z,\varepsilon}} \gamma(x)|\nabla u_D^0|^2\ \mathrm{dx} \\ &+2\int_{\Omega_{z,\varepsilon}} F\,(u_D^\varepsilon - u_D^0)\ \mathrm{dx}\ - 2\int_{\omega_{z,\varepsilon}} F\, u_D^0\ \mathrm{dx}\end{aligned}$$

Similarly, the Neumann term can be written as

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_{z,\varepsilon}} \gamma(x)|\nabla u_N^\varepsilon|^2 \mathrm{dx} - \int_{\Omega} \gamma(x)|\nabla u_N^0|^2 \mathrm{dx} = &\ \int_{\partial\omega_{z,\varepsilon}} \gamma(x)(\nabla u_N^\varepsilon - \nabla u_N^0).n\, u_N^0\ \mathrm{ds}\ - \int_{\omega_{z,\varepsilon}} \gamma(x)|\nabla u_N^0|^2\ \mathrm{dx} \\ &+2\int_{\partial\Omega} \gamma(x)(\nabla u_N^\varepsilon - \nabla u_N^0).n\, u_N^\varepsilon\ \mathrm{ds}\ .\end{aligned}$$

The Dirichlet/Neumann term can be decomposed as

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_{z,\varepsilon}} \gamma(x)\nabla u_D^\varepsilon.\nabla u_N^\varepsilon\ \mathrm{dx}\ - \int_{\Omega} \gamma(x)\nabla u_D^0.\nabla u_N^0\ \mathrm{dx} \quad = &\quad \int_{\Omega_{z,\varepsilon}} F(u_D^\varepsilon - u_D^0)\ \mathrm{dx}\ - \int_{\omega_{z,\varepsilon}} F\, u_D^0\ \mathrm{dx} \\ &+ \int_{\partial\Omega} \gamma(x)(\nabla u_N^\varepsilon - \nabla u_N^0).n\, u_D^0\ \mathrm{ds}\end{aligned}$$

The functional $\mathcal{J}$ has the following variation

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(\Omega_{z,\varepsilon}) - \mathcal{J}(\Omega)\ = &\ \ -\int_{\partial\omega_{z,\varepsilon}} \gamma(x)(\nabla u_D^\varepsilon - \nabla u_D^0).n\, u_D^0\ \mathrm{ds}\ + \int_{\partial\omega_{z,\varepsilon}} \gamma(x)(\nabla u_N^\varepsilon - \nabla u_N^0).n\, u_N^0\ \mathrm{ds} \\ &+ \int_{\omega_{z,\varepsilon}} \gamma(x)|\nabla u_D^0|^2\ \mathrm{dx} - \int_{\omega_{z,\varepsilon}} \gamma(x)|\nabla u_N^0|^2\ \mathrm{dx}.\end{aligned}$$

Due to elliptic regularity, ∇u_D^0 and ∇u_N^0 are uniformly bounded in $\omega_{z,\varepsilon}$, we have

$$\int_{\omega_{z,\varepsilon}} \gamma(x)|\nabla u_D^0|^2\ \mathrm{dx}\ = o(\varepsilon) \text{ and } \int_{\omega_{z,\varepsilon}} \gamma(x)|\nabla u_N^0|^2\ \mathrm{dx} = o(\varepsilon). \qquad [5]$$

Finally, we adapt the technique described in ([8],Section 3.4.2), we obtain the following expansions

$$\int_{\partial\omega_{z,\varepsilon}} \gamma(x)(\nabla u_D^\varepsilon - \nabla u_D^0).n\, u_D^0 \text{ ds} \quad = \quad 2\pi \frac{-1}{\log(\varepsilon)}\gamma(z)\,|u_D^0(z)|^2 + o(\frac{-1}{\log(\varepsilon)}), \text{ [6]}$$

$$\int_{\partial\omega_{z,\varepsilon}} \gamma(x)(\nabla u_N^\varepsilon - \nabla u_N^0).n\, u_N^0 \text{ ds} \quad = \quad 2\pi \frac{-1}{\log(\varepsilon)}\gamma(z)\,|u_N^0(z)|^2 + o(\frac{-1}{\log(\varepsilon)}). \text{ [7]}$$

Then, we deduce

$$\mathcal{J}(\Omega_{z,\varepsilon}) - \mathcal{J}(\Omega) = 2\pi\gamma(z)\frac{-1}{\log(\varepsilon)}\,(|u_D^0(z)|^2 - |u_N^0(z)|^2) + o(\frac{-1}{\log(\varepsilon)}).$$

Théorème 2.2 *(L^2-norm case). The function $\mathcal{J}$ defined by*

$$\mathcal{K}(\Omega \setminus \overline{\omega_{z,\varepsilon}}) = \int_{\Omega\setminus\overline{\omega_{z,\varepsilon}}} \left|u_\varepsilon^N - u_\varepsilon^D\right|^2 dx,$$

admits the following topologycal asymptotic expansion

$$\mathcal{K}(\Omega \setminus \overline{\omega_{z,\varepsilon}}) = \mathcal{K}(\Omega) + \frac{-2\pi}{log(\varepsilon)}\gamma(z)\left[u_0^N(z)v_0^N(z) + u_0^D(z)v_0^D(z)\right] + o(\frac{-1}{log(\varepsilon)}), \qquad \text{[8]}$$

where v_0^N and v_0^D are the solutions to the associated adjoint problems.

Proof : Follows from an adaptation of the technique described in ([8],Section 3.4.1) and the estimates $\left\|u_\varepsilon^N - u_0^N\right\|_{0,\Omega\setminus\overline{\omega_{z,\varepsilon}}} = o(\varepsilon)$ and $\left\|u_\varepsilon^D - u_0^D\right\|_{0,\Omega\setminus\overline{\omega_{z,\varepsilon}}} = o(\varepsilon)$.

3. Numerical implimentation

We start this section by a numerical validation of the theoretical result obtained in Theorem 2.1. Based on this result, we propose in section 3.2, a one-shot reconstruction algorithm.

3.1. Numerical validation of the asymptotic expansion

We will study the variation of the function $\Delta_z(\varepsilon)$ defined by $\Delta_z(\varepsilon) = \mathcal{J}(\Omega_{z,\varepsilon}) - \mathcal{J}(\Omega) + \frac{1}{\log(\varepsilon)}\delta\mathcal{J}(z)$ with respect to ε. We expect to prove numerically that the function Δ_z satisfies the obtained theoretical estimate $\Delta_z(\varepsilon) = o(\frac{-1}{\log(\varepsilon)})$. Denoting by α the parameter describing the behaviour of $\Delta_z(\varepsilon)$ with respect to ε, i.e. $|\Delta_z(\varepsilon)| = O(|\frac{-1}{\log(\varepsilon)}|^\alpha)$. Then, one can observe that α can be characterized as the slope of the line approximating the variation $\varepsilon \mapsto \log(|\Delta_z(\varepsilon)|)$ with respect to $\log(-\log(\varepsilon))$.

Next, we present the obtained numerical results for four arbitrary perturbations ω^i, $i = 1, 4$. The locations z_i of the considered perturbations ω^i and their associated slopes α_i are described in the following table. In Figure 1, we illustrate the variation of the function $\log(|\Delta_{z_i}(\varepsilon)|)$ with respect to $\log(-\log(\varepsilon))$. One can observe that the obtained slopes α_i confirm the behavior predicted by the theoretical results.

Perturbation ω^i	ω^1	ω^2	ω^3	ω^4
Location z_i	$z_1 = (1.5, 0.4)$	$z_2 = (2.5, 0.3)$	$z_3 = (2.3, -0.5)$	$z_4 = (1.8, -0.7)$
obtained slope α_i	$\alpha_1 = -1.35$	$\alpha_2 = -1.30$	$\alpha_3 = -1.29$	$\alpha_4 = -1.6$

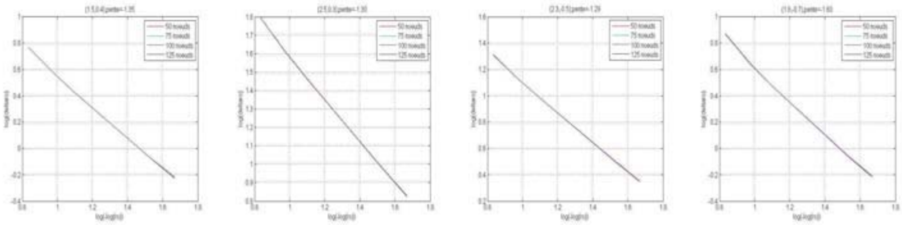


Figure 21 – Variation of $\log(|\Delta_{z_i}(\varepsilon)|)$ with respect to $\log(-\log(\varepsilon))$, $i = 1, \ldots, 4$.

3.2. One-shot reconstruction algorithm

We presente in this section a simple and efficient one-shot numerical algorithm for detecting the unknow subdomain S from overdetermined data on Γ.

Our numerical procedure is based on the asymptotic formula (4). The unknow subdomain S is reconstructed using a level set curve of the topological gradient $\delta\mathcal{J}$.

One-shot algorithm :

- Solve the two problems ($\mathcal{P}_N^0$) and ($\mathcal{P}_D^0$),
- Compute the topological gradient $\delta\mathcal{J}(z)$, $z \in \Omega$,
- Determine the subdomain S, : $S = \{x \in \Omega;\ \delta\mathcal{J}(x) \leq c\}$,
  where c is chosen in such away that the function $\mathcal{J}$ decreases as most as possible.

The unknow subdomain S is likely to be located at zone where the topological gradient $\delta\mathcal{J}$ is negative. This one-shot procedure has already been illustrated in [4] for the identification of cracks from overdetermined boundary data, in [7] for the detection of gas bubbles in Stokes flow.

In Figures 2 and 3, we presente some detection results obtained by our one-iteration algorithm. In Figure 2, we consider the case of simple and regular shapes ; circle and ellipse. As one can observe, the domain to be detected is located at zone where the topological gradient is negative and it is approximated by a level set curve of the topological gradient $\delta\mathcal{J}$. In both cases, the detection result is quite efficient. In Figure 3, we consider shapes with corners ; square and rectangular. The obtained result is again efficient.

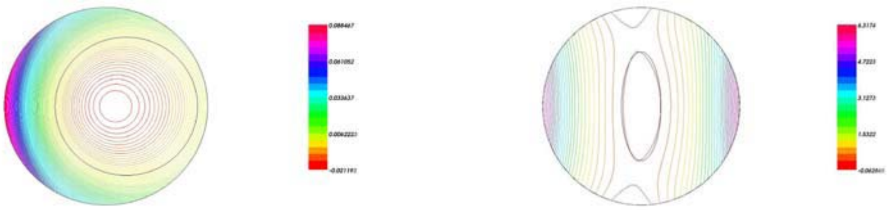


Figure 22 – Reconstruction of regular shapes ; circle and ellipse

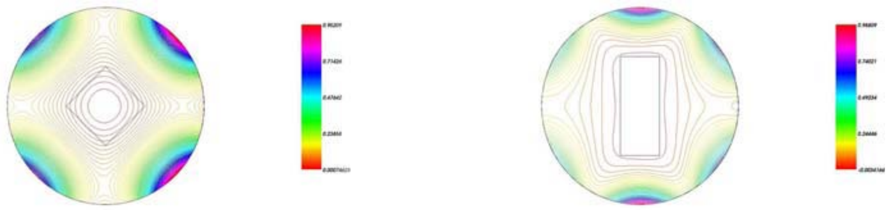


Figure 23 – Reconstruction of shapes with corners

Bibliographie

[1] M. Abdelwahed, M.Hassine, M. Masmoudi« Optimal shape design for fluid flow using topological perturbation technique », *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, n° 356, 2009, 548-563.

[2] L. Afraites, M. Dambrine, K. Eppler and K. Kateb, « Detecting perfectly insulated obstacles by shape optimization techniques of order two »,*Discrete Contin. Dyn. Syst.* , n° 8(2), 389-416, 2007.

[3] Ammari H., Kang H., « Reconstruction of small inhomogeneities from boundary measurements », *Lecture Notes in Mathematics*, n° 1846, Springer, 2004

[4] Amstutz S., Horchani I., Masmoudi M. « Crack detection by the topological gradient method », *Control and Cybernetics*, n° 34 (1), 2005, 81-101.

[5] Andrieux S., Baranger T. N., Ben Abda A. (2006), Solving Cauchy problems by minimizing an energy-like functional, *Inverse Problems*, **22**, 115-134.

[6] M. Badra F.Caubet and M. Dambrine, « Detecting an obstacle immersed in a fluid by shape optimization methods. », *M3AS*, n° 21 (10), 2069-2101, 2011.

[7] BEN ABDA A., HASSINE M., JAOUA M., MASMOUDI M., « Topological sensitivity analysis for the location of small cavities in Stokes flow », *SIAM J. Contr. Optim.*, n° 48 (5), 2871–2900, 2009.

[8] PH.GUILLAUME, M.HASSINE « Removing holes in topological shape optimization », *ESAIM, Control, Optimisation and Calculus of Variations*, n° 14 (1), 2008, 160-191.

[9] GUZINA B.B., BONNET M. « Small-inclusion asymptotic of misfit functionals for inverse problems in acoustics », *Inverse Problems*, n° 22, 2006, 1761-1785.

[10] M. HASSINE, S. JAN, M. MASMOUDI, « From differential calculus to $0-1$ topological optimization », *SIAM J. Cont. Optim.*, n° 45 (6), 1965-1987, 2007.

[11] MASMOUDI M., « The topological asymptotic », Computational Methods for Control Applications*(R.Glowinski H.Kawarada and J.Periaux, Eds), GAKUTO Inte. Ser. Math. Sci. Appl.*, n° 16, 52-73, 2002.

[12] J. SOKOLOWSKI, A. ZOCHOWSKI, « On the topological derivative in shape optimization », *SIAM J. Control Optim.*, n° 37 (4), 1251-1272, 1999.

[13] A. SCHUMACHER « Topologieoptimierung von bauteilstrukturen unter verwendung von lopchpositionierungkrieterien », *thesis, Universitat-Gesamthochschule-Siegen*, 1995.

Existence result for systems involving Sobolev critical exponents

Saâdia Tas[*] — Hadjira Lalili[**]

[*] Applied Mathematics Laboratory, Department of Mathematics, Faculty of Exact Sciences, University of Béjaia, Algeria tas_ saadia@yahoo.fr
[**] Department of Mathematics, Faculty of Exact Sciences, University of Béjaia, Algeria
lahlili.hadjira@yahoo.fr

RÉSUMÉ. Dans ce travail, nous nous intéressons à l'existence de solution faible pour un système elliptique à croissance critique dans un domaine borné. En utilisant le principe de concentration-compacité pour les espaces à exposants variables, un résultat d'existence est obtenu, sous certaines hypothèses de croissance des nonlinéarités.

ABSTRACT. In this work, we deal with the existence of weak solution for elliptic system with critical growth in bounded domain. Using the concentration compactness principle for spaces with variable exponents, existence result is obtained, under some growth assumptions on the reaction terms.

MOTS-CLÉS : p(x)-Laplacian, Espaces de Sobolev à exposants variables, exposants critiques de Sobolev, Principe de concentration compacité, solution faible.

KEYWORDS : p(x)-Laplacian, Variable exponent Sobolev spaces, Critical Sobolev exponents, Concentration compactness principle , Weak solution.

1. Introduction

The aim of this work is to prove the existence of nontrivial solution to the following elliptic system :

$$(\mathcal{S}) \qquad \begin{cases} -\Delta_{p(x)}u = |u|^{p^*(x)-2}u + \frac{\partial F}{\partial u}(x,u,v) & \text{in } \Omega \\ -\Delta_{q(x)}v = |v|^{q^*(x)-2}v + \frac{\partial F}{\partial v}(x,u,v) & \text{in } \Omega \\ u = 0, v = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

Where $\Delta_{p(x)}u = div(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u)$ is the p(x)-Laplacian operator, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a bounded domain with smouth boundary, $1 < p(x), q(x) < p^*(x) < N$, $p, q \in C_+(\overline{\Omega})$ and $p^*(x) = \frac{Np(x)}{N-p(x)}$. When $p(x) = p$ is the well known p-Laplacian. We will study this system by means of variable exponents function spaces. This kinds of research arise in recent studies of problems in elastics mechanics and the electrorheological fluids [1] and there are many works concerning the existence and multiplicity of solutions for variable exponent problems (equations or systems) . However, the p(x)-Laplacian operator possesses more complicated nonlinearity than p-Laplacian operator due to the fact that $\Delta_{p(x)}$ is not homogeneous. The main result of this work generalize the corresponding results in [3] to the variable setting. In this paper, the authors prove the existence of at least of one weak solution using Mountain Pass theorem. So, following the same idea, we shall use the variational method to show that $(\mathcal{S})$ has a nontrivial solution. The difficulty is also caused by the lack of compactness for the embedding $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*(x)}(\Omega)$.

2. Preliminary results and notations

We recall some background facts concerning the generalized Lebesque-Sobolev spaces and introduce some notations used below. Set

$$C_+(\Omega) = \{h \in C(\Omega), h(x) > 1, \text{for every } x \in \Omega\}$$

$$h^- = \min\{h(x), x \in \bar{\Omega}\}, \quad h^+ = \max\{h(x), x \in \bar{\Omega}\} \quad \text{for all} \quad h \in C_+(\Omega),$$

Let $p \in C_+(\Omega)$, the variable exponent Lebesgue space $L^{p(x)}(\Omega)$ is defined by

$$L^{p(x)}(\Omega) = \Big\{u; u \text{ is a real-valued measurable function and } \int_\Omega |u|^{p(x)}dx < \infty\Big\},$$

Endowed with norm

$$|\, u \,|_{L^{p(x)}} = \{\inf \lambda > 0 : \int_\Omega |\frac{u}{\lambda}|^{p(x)}dx \leq 1\},$$

1. See the book [4]

The variable exponent Sobolev space $W^{1,p(x)}(\Omega)$ is defined by

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \{\ u \in L^{p(x)}(\Omega) :\mid \nabla u \mid \in L^{p(x)}(\Omega)\}$$

Endowed with its natural norm

$$\| \ u \ \|_{W^{1,p(x)}} = \mid u \mid_{L^{p(x)}} + \mid \nabla u \mid_{L^{p(x)}}$$

We remember that $L^{p(x)}(\Omega)$, $W^{1,p(x)}(\Omega)$ are separated and reflexive Banach spaces. The dual space of $L^{p(x)}(\Omega)$ is $L^{p^{'}(x)}(\Omega)$, where $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p^{'}(x)} = 1, \forall x \in \Omega$.

Proposition 2.1 *[1] For $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ and $v \in L^{p^{'}(x)}(\Omega)$, we have*

$$\int_{\Omega} \mid uv \mid dx \leq (\frac{1}{p_{-}} + \frac{1}{p_{-}^{'}}) \leq \mid u \mid_{L^{p(x)}(\Omega)} \mid v \mid_{L^{p^{'}(x)}(\Omega)} \leq 2|u|_{L^{p(x)}(\Omega)}|v|_{L^{p^{'}(x)}(\Omega)}$$

Proposition 2.2 *[1] If $p : \Omega \to \mathbb{R}$ is Lipschitz continuous and $p^{+} < N$, then for any $q(x) \in L^{\infty}(\Omega)$ with $p(x) \leq q(x) \leq p^{*}(x)$, there is a continuous imbedding $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,q(x)}(\Omega)$. Moreover, if $ess \inf(p^{*}(x) - q(x)) > 0$ there is a compact embedding $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,q(x)}(\Omega)$.*

We denote X the product space $W_0^{1,p(x)}(\Omega) \times W_0^{1,q(x)}(\Omega)$, let

$$J(u,v) = \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx + \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} |\nabla v|^{q(x)} dx$$

$$K(u,v) = \int_{\Omega} F(x, u(x), v(x)) dx$$

$$L(u,v) = \int_{\Omega} \frac{1}{p^{*}(x)} |u|^{p^{*}(x)} dx + \int_{\Omega} \frac{1}{q^{*}(x)} |v|^{q^{*}(x)} dx$$

$$I(u,v) = J(u,v) - K(u,v) - L(u,v)$$

I is well defined and is of class $C^1(X,R)$. Moreover, for all (u,v), $(\varphi,\psi) \in X$:

$$\begin{aligned} I^{'}(u,v)(\varphi,\psi) &= \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} |\nabla v|^{q(x)-2} \nabla v \nabla \psi dx \\ &- \int_{\Omega} |\nabla u|^{p^{*}(x)-2} u \varphi dx - \int_{\Omega} |\nabla v|^{q^{*}(x)-2} v \psi dx \\ &- \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial u}(x,u,v) \varphi dx - \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial v}(x,u,v) \psi dx \end{aligned}$$

Hence, weak solutions of system $(\mathcal{S})$ are exactly critical points of the functional I.

Définition 2.1 *I satisfies the $(PS)_c$ if each sequence (u_n, v_n) of X verifying $I(u_n, v_n) \to$C and $I^{'}(u_n, v_n) \to 0$ in X^* possesses a convergent subsequence in X.*

Théorème 2.2 *[2] (Concentration-compactness for variable exponents) : Let $\{u_n\}_{n\in N} \subset W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ with $\| u_n \| \leq 1$ such that $\{u_n\}_{n\in N}$ converges weakly to u in $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ and $|\nabla u_n|^{p(x)} \rightharpoonup \mu$, $|u_n|^{p^*(x)} \rightharpoonup \nu$ (weakly in sense of measures). Put*

$$C_p^* \quad = \quad sup\{\int_\Omega |u|^{p^*(x)}dx : \| u \| \leq 1, u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)\}$$

then the limit measures are of the forme

$$\begin{aligned}
\mu &= |\nabla u_n|^{p(x)} + \Sigma_{j\in J}\mu_j\delta_{x_j} + \widetilde{\mu} \qquad \mu(\Omega) \leq 1 \\
\nu &= |u_n|^{p^*(x)} + \Sigma_{j\in J}\nu_j\delta_{x_j} \qquad \nu(\Omega) \leq C_p^* \\
\nu_j &\leq C_p^*\mu_j^{\frac{p^*(x_j)}{p(x_j)}}
\end{aligned}$$

where J is a countable set,$\{\mu_j\}, \{\nu_j\} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \{x_j\} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \widetilde{\mu}$ is a non-atomic nonnegative measure, the atom and the regular part satisfy the generalized Sobolev inequality

$$\nu(\Omega) \leq 2^{(p_+ p_+^*)/p_-} C_p^* \{\mu(\Omega)^{p_+^*/p_-}, \mu(\Omega)^{p_-^*/p^+}\}$$

$$\nu_j \leq C_p^* \max\{\mu_j^{p^{*+}/p_-}, \mu_j^{p_-^*/p^+}\}$$

Now we introduce some natural growth hypotheses on F in order to guarantee that the functional associated to $(\mathcal{S})$ satisfies the Palais-Smale conditions and the geometric assumptions of Mountain Pass lemma.
(F_1) $F \in C_1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}, \mathbb{R})$ and $F(x, 0, 0) = 0$,
(F_2) For all $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ and for almost every $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned}
&| \frac{\partial F}{\partial u}(x, u, v) | \leq a_1|(u, v)|^{p^- -1} + a_2(x)|(u, v)|^{p^+ -1} \\
&| \frac{\partial F}{\partial v}(x, u, v) | \leq b_1|(u, v)|^{q^- -1} + b_2(x)|(u, v)|^{q^+ -1}
\end{aligned}$$

Where $1 < p^-, q^- \leq p^+, q^+ < p_-^*, q_-^*$
and $a_i \in L^{p^{'}(x)}(\Omega) \bigcap L^{\beta(x)}(\Omega), b_i \in L^{q^{'}(x)}(\Omega) \bigcap L^{\beta(x)}(\Omega), \;\; i = 1, 2,$

$$\widetilde{p}(x) = \frac{p^*(x)p(x)}{p^*(x) - p(x)}, \;\; \beta(x) = \frac{p^*(x)q^*(x)}{p^*(x)q^*(x) - (p^*(x) + q^*(x))}, \;\; \widetilde{q}(x) = \frac{q^*(x)q(x)}{q^*(x) - q(x)}$$

(F_3) $\exists\theta_1 \in]p^+, p^*_-], \theta_2 \in]q^+, q^*_-]$, $M > 0$ for any $x \in \Omega$ and $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ with $|s|^{\theta_1} + |t|^{\theta_2} \geq 2M$:

$$0 < F(x,s,t) \leq \frac{s}{\theta_1} F_s(x,s,t) + \frac{t}{\theta_2} F_t(x,s,t)$$

(F_4) $F(x,s,t) = 0(\mid s \mid^{p^+} + \mid t \mid^{q^+})$ as $(s,t) \longrightarrow (0,0)$, uniformly w.r.t $x \in \Omega$.
(F_5) $F(x,s,t) \leq C_1 + C_2 \mid s \mid^{\sigma_1(x)} + C_3 \mid t \mid^{\sigma_2(x)} + C_4 \mid s \mid^{\sigma_3(x)} \mid t \mid^{\sigma_4(x)} \forall (u,s,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^2$, where

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4 \in C_+(\overline{\Omega}),$$

$$\sigma_1 < p^*, \quad \sigma_2 < q^*, \frac{\sigma_3}{p^*} + \frac{\sigma_4}{q^*} < 1 \quad in \ \overline{\Omega},$$

$$\sigma_1^-, \sigma_3^- > p^+ \quad and \quad \sigma_2^-, \sigma_4^- > q^+.$$

3. Existence of solution

Lemme 3.1 *Under the assumptions (F_1) and (F_2) the functional K is well defined, lower weakly semicontinous and it is of class C^1 in X. Moreover, the operator $K^{'}$ is compact from X to X^*.*

Lemme 3.2 *Let $(u_n, v_n) \subset X$ be a Palais-Smale sequence for the Euler Lagrange functional I, then under hypothese (F_3),(u_n, v_n) is bounded.*

Lemme 3.3 *Let $(u_n, v_n)_{n \in N} \subset X$ be a Palais-Smale sequence with energy level C, if $C < min(\frac{1}{N} C_p^{*^{-\frac{N-p^+}{p^+}}}, \frac{1}{N} C_q^{*^{-\frac{N-q^+}{q^+}}})$ then there exist a subsequence strongly convergent in X.*

Théorème 3.4 *If the hypotheses $(F_1) - (F_5)$ are satisfied, then the problem $(\mathcal{S})$ has at least one weak solution.*

Bibliographie

[1] X. Fan, J. Shen, D. Zhao, « Sobolev embendding theorems for spaces $W^{k,p(x)}(\Omega)$ », *J. Math. Appl*, **262** (2001), 749-760.

[2] X. Zhang, Y. Fu, « Solutions of p(x)-Laplacian equations with critical exponent and perturbations in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ », *EJDE*, **120** (2012) 1-14.

[3] A. Djellit, S. Tas, « Quasilnear elliptic systems with critical Sobolev exponents in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ », *Nonlinear Anal*, **66** (2007) 1485-1497.

[4] M. Ruzicka,« Electrorheological Fluids : Modeling and Mathematical theory », in lecture notes in Mathematics, Vol. 1748, Springer-Verlage, Berlin, 2000.

[5] X. Fan, Q. Zhang, D. Zhao, « Eigenvalues of the p(x)-Laplacian Dirichlet problem », *J. Math. Appl* **302** (2005) 306-317.

[6] A. El Hamidi, « Existence results to elliptic systems with nonstandard growth conditions », *J. Math. Anal. App*, **300** (2004) 30-42.

Indicateur de Saut : Cas d'une option Lookback

M. Lamarti Sefian[*] — R. Aboulaich[**] , — H. Ben Ameur[***]

[*,**] LERMA, Ecole Mohammadia d'Ingenieurs.
Avenue Ibn Sina B.O 765, Agdal, Rabat.
Maroc et LIRIMA [2] [*] memedma@yahoo.fr
[**] aboulaich@emi.ac.ma
LAMSIN, Ecole Nationale d'Ingenieurs de Tunis.
Campus universitaire 2092 MANAR II.
TUNIS
hbenameur@yahoo.ca
[****] IPEST, Ecole Nationale d'Ingenieurs de Tunis.
route Sidi Bou Said,B.P :51 2075 La Marsa.
TUNIS
hbenameur@yahoo.ca

RÉSUMÉ. On s'intéresse dans ce travail à l'estimation de la volatilité dans le modèle de Black et Scholes utilisé pour l'évaluation d'une option. La volatilité étant supposée en général constante, ce qui n'est pas réaliste et conduit à une sous évaluation du prix. Dans ce travail, nous supposons que la volatilité est constante par morceaux et nous introduisons un indicateur de saut qui nous permettera de déterminer la volatilité par un procédé itératif. Afin de monter l'efficacité de cette technique, nous présentons des résultats numériques, que nous comparons avec les résultats obtenus par la méthode ARCH.

ABSTRACT. We are interested on volatility estimation in the Black and Scholes model for option evaluation. In order to avoid under-evaluation of options, consequence of considering the volatility as a constant parameter in this model, we assume that the volatility is a piecewise constant function. We introduce a jump indicator to guide an iterative identification algorithm. We compare the obtained results using this algorithm with those obtained by ARCH method

MOTS-CLÉS : Indicateur de Saut, Probème Inverse, Option Lookback, modèle ARCH.

2. LIRIMA : Laboratoire International de Recherche en Informatique et Mathématiques Appliquées.

KEYWORDS : Jump Indicator , Inverse Problem, Lookback Option, ARCH model.

1. Introduction

Le modèle de Black et Sholes utilisé pour l'évaluation du prix d'une option, est un modèle simple mais il se base sur des conditions peu réalistes dans les marchés. L'une de ces hypothèses est la volatilité constante, ce qui entraîne une sous évaluation des prix des options européennes [5]. Plusieurs modèles se sont intéressés à introduire des sauts dans ce modèle afin d'améliorer les résultats. Le saut de la volatilité peut être dû aux niveaux atteints par celle ci dans l'historique ou à des informations intrinsèques qui perturbent le marché. La modélisation des sauts fut le travail de plusieurs recherches, Merton [8] considérait des discontinuités discrètes modélisées par la La loi de Poisson. D'autres travaux considérent une variation continue de la volatilité selon un processus ARCH ou comme une fonction de prix d'actifs [4], ou comme fonction du prix d'actifs et du temps, Dupire(1994) [6]. Le modèle que nous proposons dans ce travail, est un modèle déterministe, simple à mettre en oeuvre et permet de localiser les sauts de la volatilité. On s'inspire des travaux de Ben Ameur et al. [2] [3] où les auteurs construisent un indicateur de raffinement pour l'estimation du paramètre de la transmitivité hydraulique pour introduire l'indicateur de saut afin d'identifier les discontinuités discrètes de la volatilité σ. Nous allons comparer la méthode utilisée avec la méthode ARCH pour des données du marché S& P 500.

2. Problème Inverse

Dans ce qui suit, on s'intéresse à l'identification de la volatilité σ dans le cas d'une option Lookback, le modèle considéré est l'EDP de Black et Sholes étudié dans [1] :

$$\frac{\partial P}{\partial t}(t,S,M)+\frac{1}{2}\sigma(S,t)^2S^2\frac{\partial^2 P}{\partial S^2}(t,S,M)+rS\frac{\partial P}{\partial S}(t,S,M)-rP(t,S,M)=0 \quad (E_1)$$

où P est la prime, S est le prix du sous jacent, r est le taux qui est considéré constant et M est le maximum du prix pendant la durée de l'option. Lorsque la volatilité varie, le problème de calibration s'écrit :

$$\begin{cases} min_\sigma J(\sigma,P)=\frac{1}{2}||P(\sigma)-P_{obs}||^2 \\ \text{sous contrainte que P vérifie l'équation } E_1. \end{cases} \quad (P_1)$$

Le Lagrangien associé au problème de minimisation (P_1) sous la contrainte (E_1) s'écrit :

$$L(\sigma, P, q) = J(\sigma, P) - \int_{\Omega} (\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + r\frac{\partial P}{\partial S} - rP) q d\Omega \tag{1}$$

où q est le multiplicateur de Lagrange. L'EDP associée à l'état adjoint est donnée par :

$$\frac{\partial q}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 q}{\partial S^2} + rS\frac{\partial q}{\partial S} + rq = -|P - P_{obs}| \tag{2}$$

La condition d'optimalité obtenue est :

$$\frac{\partial J}{\partial \sigma}.\tau = -\int_{\Omega} \sigma S^2 \frac{\partial^2 P(\sigma, S, M)}{\partial S^2} q \tag{3}$$

A partir du gradient ainsi calculé, nous allons déterminer l'instant du saut par le calcul de l'Indicateur de Saut défini dans le paragraphe suivant.

3. Indicateur de Saut

L'estimation d'un paramètre σ dans les problèmes physiques est souvent faite à travers la résolution d'un problème inverse, en minimisant la différence entre les mesures expérimentales et celles obtenues par le modèle. Hend Ben Ameur [2] propose une méthode utilisant un indicateur de raffinement permettant de localiser les discontinuités de la transmitivité qui est le paramètre à estimer supposée constante par morceaux. Il s'agit dans son travail de retrouver une partition $\{Z_k\}_k$ de Ω telle que la transmissivité σ est définie par $\sigma = \sigma_k$ sur Z_k.

Par analogie avec cette démarche, nous proposons un indicateur de saut qui nous permettera de localiser les sauts de la volatilité dans le temps. La méthode consiste à localiser d'abord le saut de plus grande amplitude et de proche en proche on cherchera à localiser les sauts de plus petite amplitude. Afin de simplifier la présentation, on expliquera la démarche pour un seul saut, les tests numériques sont faits pour le cas de trois sauts, la méthode peut être généralisée à plusieurs sauts.

Soit (P_1) le problème de minimisation en considérant la volatilité σ_0^* constante pendant la durée de l'option. σ_0^* correspond à la solution du problème de minimisation de $J_{P_1}(\sigma)$ et soit (P_2) le problème de minimisation $J_{P_2}(\sigma)$ associé à une nouvelle partition Z_1 et Z_2. Notons $\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*)$ la solution du problème (P_2) avec σ_1^* la valeur de la volatilité dans la zone Z_1 et σ_2^* la valeur de la volatilité dans la zone Z_2.

Posons $c = \sigma_2^* - \sigma_1^*$ et soit le problème de minimisation J_{P_2} sous la contrainte c.

$$J_{P_2}(\sigma^*) = min_{c=\sigma_2^*-\sigma_1^*} J_{P_2}(\sigma) \tag{P_3}$$

si c=0, alors la solution $J_{P_2}(\sigma^*)$, avec $\sigma^* = (\sigma_0^*, \sigma_0^*)$ correspond aussi à la solution du problème sans contraintes $J_{P_1}(\sigma)$.

Notons $J^c = J_{P_2}(\sigma_1^*, \sigma_2^*)$ et $J^0 = J_{P_2}(\sigma_0^*, \sigma_0^*)$, au voisinage de $c = 0$ nous pouvons écrire :

$$J^c = J^0 + \frac{\partial J^c}{\partial c} \mid_{c=0} c + O(c) \tag{4}$$

La norme $\| \frac{\partial J^c}{\partial c} \mid_{c=0} \|$ qui mesure la variation de J^c par rapport à la différence entre les deux paramètres σ_1^* et σ_2^*, cette norme est l'Indicateur de Saut.
Soit le Lagrangien défini par :

$$L_c(\sigma, \lambda) = J(\sigma) + < \lambda, A\sigma - c > \tag{5}$$

qui correspond au problème de minimisation sous la contrainte c, avec A matrice ligne définie par $A = [-1\ 1]$ (A $\sigma^* = c$) et λ le multiplicateur de Lagrange. A l'optimum, nous avons :

$$\frac{\partial J_c^*}{\partial c} \mid_{c=0} -\lambda^* = 0$$

Dans notre cas, l'Indicateur de saut pour une nouvelle partition de $[0, T_{max}]$ est :

$$I = |\lambda^*| = |\frac{\partial J}{\partial \sigma_1}(\sigma^*)| = | - \frac{\partial J}{\partial \sigma_2}(\sigma^*)| \tag{6}$$

On calcule I en utilisant (3), et ensuite on corrige σ par la méthode du gradient. Dans ce qui suit nous allons présenter brièvement le modèle ARCH afin de comparer les résultats numériques des deux modèles.

4. Modèles ARCH

Les modèles de type ARCH sont des processus stochastiques qui décrivent la variation du moment du second ordre. Introduit par Robert F. Engle [7], le Modèle Auto Régressif Conditionnellement Hétéroscédastique se base sur la modélisation de la variance conditionnelle et identifie les périodes successives de la volatilité et de stabilité relatives. Le modèle ARCH(q) pour la volatilité est décrit par :

$$\begin{cases} \epsilon_i = \nu_i \sqrt{\sigma_i} \\ \sigma_i^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \epsilon_{t-i} \end{cases} \tag{7}$$

ν_i suit la Loi Normale et les (α_i) constituent les paramètres du modèle.
L'estimation de ces paramètres peut être faite par la méthode du Maximum de vraisemblance ou par la méthode des moindres Carrées.
Afin de déterminer l'adaptaion de la série de la volatilité au modèle ARCH(q), des tests

de normalité et de linéarité sont réalisés en plus de test d'hétéroscédasticité (ou non homoscédasticité) qui a pour objectif de déterminer si la variance de la série chronologique change au cours du temps, ce dernier est décrit comme suit :

– Hypothèse nulle H_0 : (d'homoscédasticité) $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_q = 0$

– Hypothèse alternative : au moins une valeur non nulle.

En se basant sur la statistique $LM = NR^2$ (Lagrange Multiplier) qui est distribuée selon la loi de $\chi_{p=2q}$.
N étant la taille de l'échantillon et R^2 est le coefficient de détermination.
Si LM est supérieur à la valeur théorique de χ, on rejette l' hypothèse nulle et on peut affirmer alors que le modèle est hétéroscédastique.

5. Résultats Numériques

Nous allons tester l'algorithme proposé sur le cours de S & P 500 entre 03/01/2011 et 25/05/2011 à la fermeture en déterminant pour la méthode Incidateur de Saut trois discontinuités.

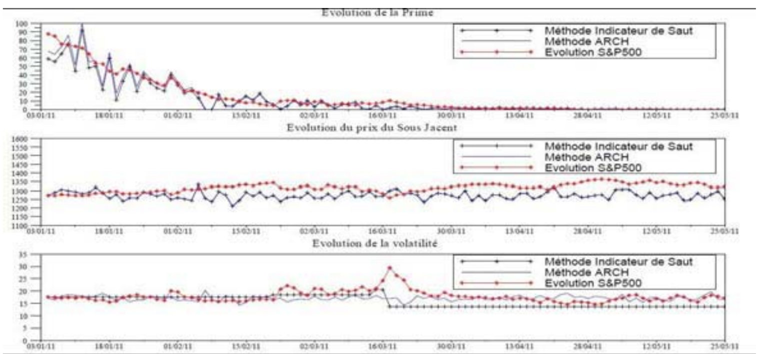


Figure 24 – comparaison de la volatilité observée sur le marché et celle estimée par Indicateur de Saut et par la méthode ARCH

Le premier saut de la volatilité détecté s'effectue le 18/02/2011 qui correspond à quatre jours avant la variation de la volatilité observée sur le marché tandis que le deuxième et le troisième sauts sont estimés le 16/03/2011 et le 14/03/2011 respectivement et qui correspondent exactement à une variation de la volatilité observée dans la salle de marché. La moyenne des erreurs entre le sous jacent et les estimations de celle ci par la méthode Indicateur des saut est 42,89 ce qui représente 3.26% de la moyenne du cours du stock Tandis que la moyenne des erreurs entre le sous jacent et l'estimation de celle ci par la méthode ARCH est 42,72 ce qui représente 3.25% de la moyenne du cours du stock .

6. Conclusion et perspectives

Lorsqu'on applique la technique de l'indicateur de saut, nous partageons la maturité en zones dans lesquelles la volatilité est constante. Ces sauts, sont très simples à localiser par l'algorithme proposé. Cette technique est efficace et très rapide et permet d'utiliser le modèle déterministe de Black et Scholes qui peut être résolu par la méthode des éléments finis pour déterminer la prime [1]. Les résultats numériques obtenus peuvent être améliorés en supposant plus de sauts.

Remerciements. Les auteurs remercient le projet Euro-méditéranéen (3+3) "Hydrinv" et le projet projet bilatéral Maroc - Tunisie MT/2011 (Complétion de données).

Bibliographie

[1] ABOULAICH, ALAMI IDRISSI, LAMARTI SEFIAN , *Simulation of European Lookback Options* ; IJAMAS vol 28 issue 4 pp :101-117 (2012).

[2] BENAMEUR, CHAVENT, JAFFRÉ , *Refinement and coarsening indicators for adaptive parameterization : application to the estimation of hydraulic transmissitivities* ; Inverse Problems 18 N :3, June 2002.

[3] BENAMEUR, CHAVENT CLÉMENT, WEIS , *The multi-dimensional refinement indicators algorithm for optimal parameterization* ; Inverse and Ill posed problems, 16, 2008.

[4] COX ET ROSS , *An intertemporal general equilibrium model of asset prices* ; Econometrica, 53 :363–384 (1985).

[5] DEBERSE, *Sous-évaluation des prix d'options par le modèle de Black & Scholes. Mise en évidence par une dynamique combinant mouvement brownien et processus à sauts* ; Sungard (2006)

[6] DUPIRE , *Pricing with Smile* ;Risk, vol 7, pp :18-20 (1994).

[7] ENGLE , *Autoregressive Conditional Hétéroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation* ; Econometrica vol 50,n° 4, pp :987-1008 (1982).

[8] MERTON, *Option pricing when the underlying stock returns are discontinuous*; Journal of Financial Economics V3 pp : 125-144 (1976).

Complétion de données et identification de puits de pompage via une méthode de minimisation globale

Thouraya Nouri Baranger* — Wafa Mansouri — Nejla Tlatli Hariga*****

* Université de Lyon, CNRS
Université Lyon1, LAMCOS UMR5259, France
Thouraya.Baranger@univ-lyon1.fr
,* Université de Tunis El Manar, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis
LAMSIN-ENIT, B.P. 37, 1002 Tunis-Belvedere, Tunisia
** Wafamansouri74@yahoo.com
*** tlatli@inat.agrinet.tn, nejla.hariga@lamsin.rnu.tn

RÉSUMÉ. L'identification des paramètres et des conditions aux limites sur une partie de la frontière d'un domaine à partir de données surabondantes sur la partie restante de la frontière est une des thématiques du large champ des problèmes inverses. Ce problème revient à résoudre un problème de Cauchy connu pour être mal posé, notamment en raison d'une condition de compatibilité sur les données remettant en cause l'existence et la stabilité de la solution de ce problème.

Nous nous basons dans ce travail sur la méthode de complétion de données introduite par Andrieux *et. al.* [2] puis généralisée par Baranger *et. al.* dans [3] où les auteurs analysent mathématiquement et numériquement une méthode d'approximation de la solution du problème de Cauchy dite énergétique. Notre contribution consiste en une modification de cette méthode pour pouvoir identifier en même temps les conditions aux limites manquantes et des paramètres hydrologiques.

ABSTRACT. Recovering complete boundary data on a part of the domain's boundary from over-specified data on another part of the domain's border, is known as data completion or Cauchy problem. Cauchy problem is known to be ill-posed, specially because of a compatibility condition on data questioning the existence and stability of the solution of this problem.

We based this work on the data completion method introduced by Andrieux *and. al.* [2] and then generalized by Baranger *and. al.* in [3], where authors minimize an energy-like error functional to solve the Cauchy problem. Our contribution is a generalization of this method in order to identify simultaneously the boundary conditions and hydrogeological parameters.

MOTS-CLÉS : Problème inverse, problème de Cauchy, complétion de données, identification des paramètres, état adjoint, éléments finis.

KEYWORDS : Inverse problem, Cauchy problem, data completion, parameter, identification, finite elements.

1. Introduction

Considérons le problème d'écoulement darcien suivant : soit le domaine donné Ω avec Γ_c une partie de sa frontiére sur laquelle nous disposons de mesures du flux hydraulique Φ et de la charge hydraulique H, nous voudrons déterminer le flux φ et la charge hydraulique h sur Γ_i une autre partie de la frontière de Ω, ainsi que le débit λ_j des puits de pompage existant à l'interieur du domaine. Ce problème s'écrit alors comme suit :
Trouver (t, φ, λ_j) tel qu'il existe un champs piezométrique h vérifiant :

$$\begin{cases} -div(T(x)\nabla h) & = \sum_{j=1}^{M} \lambda_j \delta(x - a_j) & \text{dans } \Omega \\ h & = H \quad et \quad T\nabla h.n = \Phi & \text{sur } \Gamma_c \\ h & = t \quad et \quad T\nabla h.n = \varphi & \text{sur } \Gamma_i \end{cases} \tag{1}$$

Dans ce travail, nous nous intéressons à un problème de complétion de données et identification des paramètres pour l'équation de l'écoulement stationnaire. Dans notre cas nous adoptons une méthode de résolution basée sur la minimisation d'une fonctionnelle d'erreur en énergie dépendant des données manquantes introduite par Andrieux et al [2]. Nous terminons notre travail par une comparaison entre les résultats numériques que nous avons obtenu et ceux fournis par Hariga et al [4, 5] pour le même problème hydrogéologie. Dans [4, 5], les auteurs ont procédé en deux étapes : ils commencent par compléter les données sur la frontière avec la méthode énergétique presentée dans [2, 3] définit sur un domaine fictif excluant les puits, puis en seconde étape, ils considèrent le sous domaine contenant les puits et ils identifient leurs débits à l'aide du principe de réciprocité [5].

2. Complétion de données et identification des paramètres

L'idée essentielle de notre analyse consiste à reconstruire deux problèmes directs bien posés, chacun utilisant l'une des données surabondantes et à minimiser l'écart entre leurs solutions respectives. Le principe de cette technique est de libérer les données surabondantes sans oublier qu'elles sont issues d'un même problème. Cette méthode de résolution du problème de complétion des données a été initialement intoduite par Andrieux et al [2] avec comme inconnues la variable d'état et le flux correspondant sur Γ_i. Dans ce travail, nous généralisons cette méthode en considérant en plus un terme source inconnu.
On note (η, τ, γ) les variables associées respectivement aux inconnues de Neumann , Di-

richlet et aux débits des puits. Les fonctions h_D et h_N sont solutions des deux problèmes suivants :

$$\begin{cases} -div(T(x)\nabla h_D) & = \sum_{j=1}^{M} \gamma_j \delta(x - a_j) & \text{dans } \Omega \\ h_D & = H & \text{sur } \Gamma_c \\ T(x)\nabla h_D.n & = \eta & \text{sur } \Gamma_i \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} -div(T(x)\nabla h_N) & = \sum_{j=1}^{M} \gamma_j \delta(x - a_j) & \text{dans } \Omega \\ h_N & = \tau & \text{sur } \Gamma_i \\ T(x)\nabla h_N.n & = \Phi & \text{sur } \Gamma_c \end{cases} \tag{3}$$

La méthode consiste ensuite à définir une fonctionnelle, notée $E(\eta, \tau, \gamma)$, mesurant l'écart entre les champs h_D et h_N. Cette fonctionnelle a pour expression :

$$E(\eta, \tau, \gamma) = \int_{\Omega} T(\nabla h_D - \nabla h_N)^2 \tag{4}$$

On cherchera alors à minimiser cette fonction, ce qui revient à résoudre le problème de minimisation suivante :

$$(t, \varphi, \lambda) = arg \min_{\eta,\tau,\gamma} E(\eta, \tau, \gamma) \tag{5}$$

La résolution de ce problème de minimisation nécessite la connaissance du gradient de la fonctionnelle d'erreur, pour cela nous avons recours à état adjoint qui permet d'évaluer le gradient dans une direction quelconque en utilisant uniquement deux champs adjoints.

3. Mise en œuvre et résultats numériques

Concernant les tests numériques, nous nous sommes basées sur ceux indiqués dans le papier de Hariga et. al [4, 5] afin de pouvoir comparer les résultats obtenus par les deux méthodes. En effet, Hariga et al ont résolu ce problème en deux étapes : ils commencent par compléter les données sur la frontière Γ_i à l'aide de la fonctionnelle d'erreur E définit sur un domaine fictif excluant les puits, puis en seconde étape ils retrouvent les débits des puits à l'aide du principe de réciprocité à partir de la connaissance totale des données sur toute la frontière de Ω.

Etude d'un cas avec huit puits

Position(km)	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
$Q_{exact}(ls^{-1})$	-50	-70	150	-30	80	10	-40	-20
$Q_{calc}(ls^{-1})$	-54.3	-70.2	148.3	-30.6	78.5	9.8	-41	-19.5
$Relativeerror(\%)$	8.6	0.28	1.13	2	1.87	2	2.5	2.5

Tableau 1 – Valeurs exactes des débits (Q_{exact}) et valeurs calculées (Q_{calc}) dans le cas de huit puits.

Influence du bruit

$Bruit(\%)$	1	2	4	6	8	10	12	14
$Q_{calc}(ls^{-1})$	-50.2	-50.5	-51	51.5	52	52.4	52.9	53.4
$Erreurrelative(\%)$	0.4	1	2	3	4	4.8	5.8	6.8

Tableau 2 – Valeurs calculées du débit (Q_{calc}) et erreurs trouvées pour differents bruits dans le cas d'un puit situé à ($2\ km, 3\ km$).

4. Comparer avec la méthode basée sur le principe de réciprocité

Nous comparons les résultats obtenus par notre méthode (error2) avec ceux obtenus par Hariga et al. [4, 5] (error1). Ils ont complété les données sur la frontière d'un domaine fictif, puis ils ont identifié les puits par l'utilisation du principe de réciprocité [5].

$Q_{exact}(ls^{-1})$	-50	-70	150	-30	80
Erreur relative 1(%)	14	2.7	1.4	11	6.25
Erreur relative 2(%)	8.6	0.28	1.13	2	1.87

Tableau 3 – Valeurs exactes des débits (Q_{exact}) et erreurs relatives dans le cas de cinq puits.

$Bruits(\%)$	0	2	4	8
Erreur relative 1(%)	0.3	3	4	6
Erreur relative 2(%)	0.1	1	3	4

Tableau 4 – Différents bruits dans le cas d'un puits situé à $x_0 = 2\ km$ et $y_0 = 5\ km$, avec un débits $Q_0 = -100ls^{-1}$.

$Distance\ d(\ km)$	16	10	6	3	2	1.5
Erreur relative 1(%)	2	6	8	9	1.5	17
Erreur relativ 2(%)	0.4	1	2	3	4	4.8

Tableau 5 – Influence de la distance relative entre les puits, dans le cas de deux puits avec $Q_1 = -100ls^{-1}$ et $Q_2 = -50ls^{-1}$.

5. Conclusion

L'originalité du présent travail, est de pouvoir compléter les données sur une partie de la frontière du domaine et identifier des paramètres en une seule étape via la minimisation d'une fonctionnelle d'écart à l'erreur type énergétique.
La comparaison des résultas obtenus avec ceux trouvée par Hariga et al, qui eux procèdent en deux étapes en ayant recours au principe de réciprocitè, est très concluante.

Bibliographie

[1] S. Andrieux et A. Ben Abda., « The reciprocity gap : a general concept for flaws identification », *Mechanics Research Communication*, **20** (1993), 415–420.

[2] S. Andrieux, T.N. Baranger et A. Ben Abda., « Solving problems by minimizing an energy-like functional », *Inverse Problems*, **22** (2006), 115–133.

[3] S. Andrieux et T.N. Baranger., « Constitutive law gap functionals for solving the Cauchy problem for linear elliptic PDE », *Applied Mathematics and Computation*, **218** (2011), 1970–1989.

[4] N.T. Hariga , R. Bouhlila et A. Ben Abda., « Identification of aquifer point sources and partial boundary condition from partial overspecified boundary data », *C.R. Acad Sci-Paris Géoscience*, **340** (2008), 245–250.

[5] N.T. Hariga , R. Bouhlila et A. Ben Abda., « Recovering Data in Groundwater : Boundary Conditions, Wells' Positions and wells' Fluxes », *Computational Geosciences*, **15** (2011), 637–645.

Numerical Resolution of an Inverse Problem

Identification of the local volatility

I. Medarhri[1,2] and R. Aboulaich[1,2]

1 LERMA, Mohammadia Engineering School, Mohammed V-Agdal University, Avenue Ibn Sina B.P 765 Agdal, Rabat, Morocco.
aboulaich@emi.ac.ma, i.medarhri@gmail.com.
2 LIRIMA, International Laboratory for Research in Computer Science and Applied Mathematics,www.lirima.org

ABSTRACT. We present in this work an identification method of the local volatility function. We propose to use the Logarithmic Dupire Equation, coupled with Tikhonov regularization method. Using the Euler-Lagrange equation, the computation of the volatility is reduced to solve the PDE problem (see [7] and [5]). In order to improve the algorithm, we suggest using a statistical approximation for the initialization of the process.
The identification algorithm proposed in this work, is tested on the synthetic data, and the results are compared with the results obtained in [2] .

RÉSUMÉ. Nous présentons dans ce travail une méthode d'identification de la fonction de valatilité locale. Nous proposons d'utiliser le modèle de Dupire avec changement logarithmique couplé avec la méthode de régularisation de Tikhonov. En utilisant l'équation d'Euler-Lagrange on se ramène à la résolution d'un problème EDP (see [7] and [5]) pour l'estimation de la volatilité. Afin d'améliorer l'algorithme, nous proposons d'utiliser une approximation statistique pour l'initialisation du procédé.
L' Algorithme d'identification proposé dans ce travail est testé sur des données synthétiques, et les résultats numériques seront comparés avec les résultats obtenus dans [2].

KEYWORDS : Inverse problem, locale volatility, Dupire PDE, Tikhonov regularization, optimization.

MOTS-CLÉS : Problème Inverse, volatilité locale, EDP de Dupire, Régularisation de Tikhonov, Optimisation.

1. Introduction

The price V of the Option value using Dupire equation is given by:

$$\frac{\partial V}{\partial T}(K,T) = -qV(K,T) - (r-q)K\frac{\partial V}{\partial K}(K,T) + \frac{1}{2}\sigma^2(K,T)S^2\frac{\partial^2 V}{\partial K^2} \qquad (1)$$

Where r is the constant rate of interest and q is the continuously compounded dividend on the underlying asset, and σ is the volatility function. The volatility σ is the unique parameter no observable of this model. We are interested to compute the volatility function σ from the observed Options prices on the market, using an inverse formulation. Afterwards we regularize the volatility function σ of the inverse problem ill-posed using the Tikhonov approach. This approach was used by Bonnans [4],Avellanda [3], Lagnado and Osher [7] ,N.El Hassan [5], ... This paper is based on the approach of N.El Hassan in [5], she proposes for each iteration an alternative approach in order to avoid the resolution of the gradient functional. As a solution for the Poisson equation, she proposes to calculate the volatility σ.

In this work, we present three Algorithms to determine the volatility function. In the first Algorithm (presented in [1]), we will use the algorithm proposed by N.El Hassan[5], coupled with the Logarithmic Dupire equation to compute the option price V(σ). Second Algorithm, we introduce a "false" time parameter θ in the Poisson equation given in Algorithm 1. Therefore, the Parabolic equation is been solved instead of the Elliptical equation. Finally, we will use a statistical approximation of the initial guess of the volatility, introduced in the algorithm 2.

2. The Logarithmic Dupire PDE

To obtain a less restrictive stability condition on time and space steps in the Equation (1), we choose to make a logarithmic of variable . We set:

$$y = \ln(K),$$
$$U(y,T) = V(K,T),$$
$$\widehat{\sigma}(y,T) = \sigma(K,T).$$

We obtain the Following PDE:

$$\frac{\partial U}{\partial T}(y,T) = -qU(y,T) - (r-q+\frac{1}{2}\widehat{\sigma}^2(y,T))\frac{\partial U}{\partial y}(y,T) + \frac{1}{2}\sigma^2(y,T)\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(y,T) \quad (2)$$

With the boundary condition follows :

$$\begin{cases} U(y,t_0) = max(S_0 - e^y, 0) & \text{for} \quad y_{min} \le y \le y_{max} \\ \lim_{y \to -\infty} U(y,T) = S_0 e^{-q(T-t_0)} & \text{for} \quad t_0 \le T \le T_{max} \\ \lim_{y \to +\infty} U(y,T) = 0 & \text{for} \quad t_0 \le T. \end{cases} \tag{3}$$

3. Alternative regularization strategy and Logarithmic Dupire's equation:

In general context, market calibration involves finding a local volatility function σ such that solution of (2) fall between the corresponding bid and ask market.We try to minimize the functional

$$G(\sigma) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} [U(y_j, T_i, \sigma) - U_{ij}]^2 \tag{4}$$

Since the problem (4) is ill-posed, because the set of price observations is discrete and finite. The function σ cannot be uniquely determined with guaranteed continuous dependence on the market price data. Therefore, this problem is reduced by a Tikhonov regularization technique. Then the equation (4) is rewritten as:

$$J(\sigma) = \|\sigma\|^2 + \lambda G(\sigma) \tag{5}$$

Where λ is the parameter of regularization. In [7], the regularization strategy calibrate the volatility that is based upon the Black-Scholes equation to determine the theoretical price of an Option $V(S,t,K,T,\sigma)$, but in this work we use the Logarithmic Dupire equation (See[1]). We apply the Euler-Lagrange Equation, to compute the function $J(\sigma)$, then the new equation to solve is:

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial S^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = \lambda W_1(\sigma). \tag{6}$$

$$Where, \qquad W_1(\sigma) = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{M_1} \frac{\partial U}{\partial \sigma}(y_j, T_i, \sigma)(U(y_j, T_i, \sigma) - U_{ij}) \tag{7}$$

To calculate $\frac{\partial U}{\partial \sigma}$, We consider the partial differential operator :

$$\mathfrak{L}(\sigma) = \frac{\partial}{\partial T} + (r - q + \frac{1}{2}\sigma^2(y,T))\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2}\sigma^2(y,T)\frac{\partial^2}{\partial y^2} + q \tag{8}$$

$$Then, \qquad \mathfrak{L}(\sigma)\frac{\partial U}{\partial \sigma} = \sigma(y,T)(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial U}{\partial y}) \tag{9}$$

4. Algorithms:

In this section, we describe briefly the proposed Algorithms.

4.1. Algorithm 1:

In Algorithm 1, we describe the steps to resolve the elliptic PDE (6). The calibration procedure require the numerical solution of PDE (6), and (2). The numerical procedure to minimize (5) and determine σ can now be summarized by the following algorithmic description. In order words, we give the proposed algorithm in order to determine σ:

Algorithm 1 Computation of σ using equation (6)

Require: $S \in [S_{min}, S_{max}]$, $t \in [0, T_{max}]$, Where T_{max} is the longest time expiration.
1. Select a finite-difference grid for Poisson equation $\{(S_m, t_n) : m = 0, .., M$ and $n = 0, .., N\}$
2. Choose an initial value of σ_0 (approximation the true volatility,e.g $\sigma_0(S_m, t_n) = constant$)
for $m = 0$ to M **do**
  for $n = 0$ to N **do**
    3. Solving the Dupire PDE using the finite-difference method to compute equation (2).
    4. Using the finite-difference method we calculate $\frac{\partial U(y,t,\sigma)}{\partial \sigma}$ (equation(9))
  end for
end for
5. Calculation of : $W_1(\sigma) = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{M_1} \frac{\partial U}{\partial \sigma}(y_j, T_i, \sigma)(U(y_j, T_i, \sigma) - U_{ij})$.
6. Solution of the Poisson equation:

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial S^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = \lambda W_1(\sigma),$$

7. Take the volatility function obtained in step 6, named σ_1,
if Difference between σ_1 and σ_0 is negligible.**then**
    return σ_0, **Stop**
else
    $\sigma_0 \leftarrow \sigma_1$ **return** to Step 3.
end if
return σ

4.2. Algorithm 2:

In this Algorithm, we introduce a 'false' time parameter θ and a function $\widehat{\sigma}(S,t,\theta)$. Starting with some initial guess $\widehat{\sigma}(S,t,\theta)$, we will solve a perturbed parabolic equation under the form :

$$\frac{\partial\widehat{\sigma}}{\partial\theta} = \frac{\partial^2\widehat{\sigma}}{\partial S^2} + \frac{\partial^2\widehat{\sigma}}{\partial t^2} - \lambda W_1(\sigma) \tag{10}$$

Where $W_1(\sigma)$ is given by:

$$W_1(\sigma) = \sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{M_1} \frac{\partial U}{\partial\sigma}(y_j,T_i,\sigma)(U(y_j,T_i,\sigma) - U_{ij}) \tag{11}$$

4.3. Algorithm 3:

Indeed,we use the statistical approximation used in [6]. First, we denote:

– n+1 : observations number.

– S_i : the underlying in the time i.

– τ : duration time intervals

The estimation, s, is given by the standard deviation:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(u_i - \overline{u})^2} \tag{12}$$

where : $u_i = ln(S_i/S_{i-1})$, for $i = 2,..,n$; and $\overline{u}$ is the average of u_i

Therefore the estimate of σ is:

$$\boxed{\sigma^* = s \setminus \sqrt{\tau}} \tag{13}$$

5. Numerical Result

This application can be demonstrated by carrying out the calibration using index option prices observed in the market. we selected the closing prices of some $S\&P500$ index options as of 3 January 2011 for this test.We choose the options expiring in 25 may 2011.we take $\lambda = 30$, The results obtained after 16 iteration using Algorithm 3 was compared with the true volatility. The statistical approximation of the initial guess volatility is $\sigma_0^* = 22.45\%$.

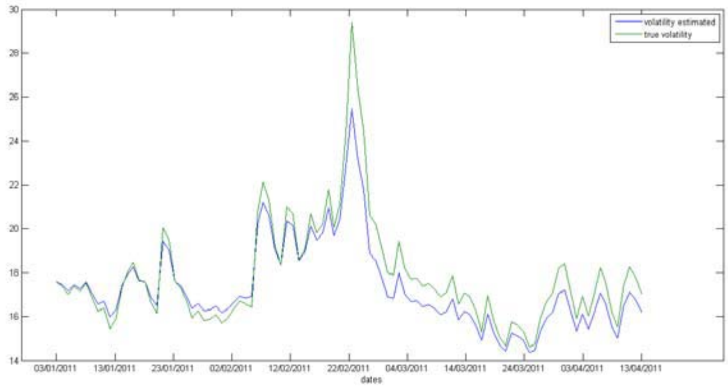


Figure 25: comparison of the observed volatility in the market and that estimated by algo 3

6. Conclusion

The proposed identification algorithm uses Dupire PDE model and a Tikhonov regularization method. Using a Euler- Lagrange equation, the computation of the volatility is reduced to a resolution of a Parabolic equation as proposed in [7]. In order to improve the method we propose to use a statistical estimation for the computation of the initial guess of a volatility. The numerical experiments prove the efficiency of the proposed Algorithm.

Acknowledgment

We would like to thank the LIRIMA laboratory, "Euro-Mediterranean" and "Hydrinv project " project.

References

[1] ABOULAICH,R., MEDARHRI,I.,(2013), The local Volatility estimation Hybridization between Logarithmic Dupire's Equation and Tikhonov regularization method, *Congrès International LEM2I,12-15 Février 2013*,

[2] ABOULAICH, R., BEN AMEUR, H. AND LAMARTI, S. (2013), Jump indicator : Case of a lookbackoption, *(submitted in Applied Mathematics)*.

[3] AVELLANEDA,M., FRIEDMAN,C., HOLMES,R. , AND SAMPERI,D. (1997), Calibrating volatility surfaces via relative entropy minimization, *Applied Mathematical, Vol(4), 1997*,

[4] BONNANS,J.F.,COGNET,J.M., VOLLE,S. (2002), Estimation de la volatilité locale d'actifs financiers par une méthode d'inversion numérique, *rapport de recherche INRIA, N(4648), 2002*,

[5] CHIARELLA, C., CRADDOCK, M., AND EL-HASSAN, N. (2007), The calibration of stock option pricing models using inverse problem methodology, *Scool of finance and Econimics,University of Technology Sydney (2007).*

[6] HULL, J. (2008), Options Futures And Other Derivatives, Vol. 7 of Pearson Education International, *Prentice Hall, Toronto.*

[7] LAGNADO, R. AND OSHER, S.(1997), A Technique for calibrating Derivative Security pricing models:Numerical solution of an inverse problem, *The journal of computational Finance.Vol(1), 13-25, 1997.*

[8] TIKHONOV,A.N. (1963), Regularization of incorrectly posed problems, *Soviet Mathematics,N(4),p(1624-1627), 1963*

Solving the Maxwell's equation by Discontinuous Galerkin methods coupled to an integral representation

Anis Mohamed[*] — Nabil Gmati[**]
Mohamed El Bouajaji [***] — Stephane Lanteri[****]

[*,**] Tunis El Manar University, National School of Engineering of Tunis
LAMSIN-ENIT, BP 37, LE BELVEDERE Tunis 1002
Tunisia
[*] midani.anis@gmail.com
[**] nabil.gmati@ipein.rnu.tn
[***] INRIA Nancy - Grand Est, CORIDA Project-Team
615 rue du Jardin Botanique, 54600 Villers-lès-Nancy.
France
mohamed.El_bouajaji@inria.fr
[****] INRIA, NACHOS project-team
2004 Route des Lucioles, B.P. 93 06902 Sophia Antipolis Cedex
France
Stephane.Lanteri@inria.fr

ABSTRACT. In this paper, we study the resolution of the 3D harmonic-regime Maxwell's equations by a discontinuous Galerkin method coupled with an integral representation on non-conforming triangular meshes. We deal with the theoretical formulation by limiting the computational domain with a fictitious boundary. We use on this boundary an absorbing condition using the integral representation of the solution. For the numerical resolution we use a GMRES method.

RÉSUMÉ. Dans cet article, nous étudions la résolution des équations de Maxwell en domaine non borné par une méthode de type Galerkin discontinu couplé à une représentation intégrale. Nous nous traitons la formulation théorique en limitant le domaine de calcul avec une frontière fictive. Nous utilisons sur cette frontière une condition d'absorption et en utilisant la représentation intégrale de la solution. Pour la résolution numérique nous utilisons la méthode GMRES.

KEYWORDS : Maxwell's equations, harmonic regime, discontinuous Galerkin method, integral representation, GMRES.

MOTS-CLÉS : Equations de Maxwell, régime harmonique, méthode Galerkin Discontinu, représentation intégrale, GMRES.

1. Introduction

We are interested in the resolution of the 3D time-harmonic Maxwell's equations using Galerkin Discontinuous methods coupled with an integral representation in the presence of an obstacle D.

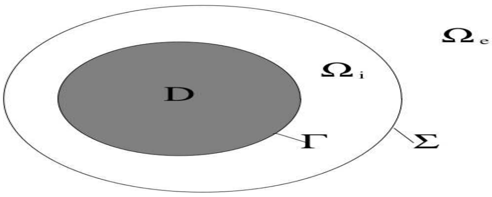


Figure 26: Diffraction of an electromagnetic wave by an obstacle (Σ the fictitious boundary and Γ the boundary of the obstacle D).

The harmonic solutions of Maxwell's equations satisfy the following system:

$$\begin{cases} \text{Find} \quad E, H \in H(curl, \Omega_i) \quad \text{such that:} \\ curl E - i\omega\mu H = 0 \quad \text{in} \quad \Omega_i \\ curl H + i\omega\varepsilon E = 0 \quad \text{in} \quad \Omega_i \\ E \wedge n = -E^{inc} \wedge n \quad \text{on} \quad \Gamma \\ E \wedge n - Z(H \wedge n) \wedge n = L_1(E,H) \wedge n - Z(L_2(E,H) \wedge n) \wedge n \quad \text{on} \quad \Sigma \end{cases} \qquad [1]$$

such that: $Z = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}$.
$H(curl, \Omega_i) = \{v \in (L^2(\Omega_i))^3 | curl(v) \in (L^2(\Omega_i))^3\}$.
where E and H are respectively the electric and magnetic fields. The parameters ε and μ are respectively the dielectric permittivity (or the electric conductivity) and the relative magnetic permeability that characterize the environment of propagation, and that describe the propagation of electromagnetic waves.

2. Bidimensional problem

In the transverse magnetic mode, the electric and magnetic fields will be written in 3D in this form $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & E_3 \end{bmatrix}^t$ and $H = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 & 0 \end{bmatrix}^t$. We obtain the new problem [2] written in the form conservative by treating each equation of system [1],

$$\begin{cases} i\omega QW + \nabla.F(W) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega_i \\ AW = -AW^{inc} \quad \text{on} \quad \Gamma \\ BW = BW^{RI} \quad \text{on} \quad \Sigma \end{cases} \qquad [2]$$

such that:
$W = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 & E_3 \end{bmatrix}^t$ is the new unknown vector.
$B = \begin{bmatrix} Zn_{x_2}^2 & -Zn_{x_1}n_{x_2} & -n_{x_2} \\ -Zn_{x_1}n_{x_2} & Zn_{x_1}^2 & n_{x_1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$ and $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
$\nabla.F(W) = \partial_{x_1}F_1(W) + \partial_{x_2}F_2(W)$, Where: $F(W) = (F_1(W), F_2(W))$ is a linear application from $\mathbb{R}^3$ to $(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ so that: $F_1(W)=A_1W$; $F_2(W)=A_2W$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ and } A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Variational Formulation

We consider now the problem [2]. We decompose the domain Ω_i into N triangular cells τ_i. In the following we denote the approximte solution by $W_i = [H_1^i, H_2^i, E_3^i]^t$ in V_h the projection of W on $P^{m_i}[\tau_i]^3$, where the functional space V_h is defined by:

$$V_h = \{W \in [L^2(\Omega_i)]^3 / W|_{\tau_i} = W_i \in P^{m_i}[\tau_i]^3; \forall \tau_i \in \tau_h\}.$$

and $P^{m_i}[\tau_i]$ the space of polynomials of degree $\leq m_i$ defined on τ_i. One still notes by:

- $a_{ij} = \tau_i \cap \tau_j$, $\Gamma_i = \tau_i \cap \Gamma$, $\Sigma_i = \tau_i \cap \Sigma$ and $\mathcal{C}_i = \tau_i \cap \mathcal{C}$.

In the basis, $(\varphi_{i1}, \varphi_{i1}, ..., \varphi_{id_i})$ of $P^{m_i}[\tau_i]$, $W_i(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{d_i} W_{ij}\varphi_{ij}(x), \quad W_{ij} \in \mathbb{R}^3$.

For a test function φ, and for all element τ_i of τ_h:

$$\int_{\tau_i} i\omega QW_i\varphi dx - \int_{\tau_i} \nabla\varphi.(F(W))_i dx + \sum_{j\in V_i} \int_{a_{ij}} [M^+W_i + M^-W_j]\varphi\partial\sigma$$
$$+\delta_{\Sigma_i}\left[\int_{\Sigma_i} M^+W_i\varphi\partial\sigma + \int_{\Sigma_i} M^-W^{RI}\varphi\partial\sigma\right] + \delta_{\Gamma_i}\int_{\Gamma_i}[M-A]W_i\varphi\partial\sigma = \delta_{\Gamma_i}\int_{\Gamma_i} AW_i^{inc}\varphi\partial\sigma$$

Where:

- For each subset $E \subset \Omega$, $\delta_E(x)$ is equal to, 1 if $x \in E$ and 0 elsewhere.
- $W^{RI}(x) = \displaystyle\int_{\mathcal{C}} K(x,y)W(y)dy$, Such that $K : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to M_3(\mathbb{C})$ is a Green kernel.

Denote also $F(W).n = MW$

---

4. Linear System

The problem reduces to the linear system: $(\mathbf{A} - \mathbf{C}).\mathbf{x} = \mathbf{b}$ such that $\mathbf{A}$ and $\mathbf{C}$ are square size matrices $N = 3 \times \underbrace{\text{number of degrees of freedom}}_{d_i} \times \underbrace{\text{number of cells}}_{N_c}$.

- $\mathbf{A}$ is a block defined matrix of size $3.d_i \times 3.d_i$ such that:
  For $i = 1, \ldots, N_c$; $\mathbf{A}(i,j) \in M_{3.d_i}(\mathbb{C})$
  - $\mathbf{A}(i,i) = D_i^1 - D_i^2 + D_i^a \times \delta_{ij} + D_i^\Gamma \times \delta_{\Gamma_i} + D_i^\Sigma \times \delta_{\Sigma_i}$
  - $\mathbf{A}(j,i) = B_{ij}^a \times \delta_{ij}$
    where δ_{ij} the Kronecker symbol
- $\mathbf{C}$ is a block defined matrix of size $3.d_i \times 3.d_j$ such that:
  For i , $j = 1, \ldots, N_c$; $\mathbf{C}(i,j) \in M_{3.d_i,3.d_j}(\mathbb{R})$
  - $\mathbf{C}(i,j) = -C_{ij} \times \delta_{\Sigma_i} \times \delta_{\mathcal{C}_j}$

4.1. Expressions of diagonal blocks

In each term of the formulation, where intervene the vector W_i gives rise to a block diagonal. This blocks are defined as follows: $D_i^1 = i\omega \left(Q \otimes \Phi_i\right)$, $D_i^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{2} \left(A_k \otimes \Phi_i^k\right)$, $D_i^a = \left(M^+ \otimes \Psi_i\right)$, $D_i^\Gamma = \left([M - A] \otimes \Psi_{\Gamma_i}\right)$ and $D_i^\Sigma = \left(M^+ \otimes \Psi_{\Sigma_i}\right)$

4.2. Expression of the extra-diagonal block

This block comes from the term of the formulation where intervene W_j defined by: $B_{ij}^a = \displaystyle\sum_{j \in V_i} \left(M^- \otimes \Psi_{ij}\right)$

4.3. Coupling matrix

The development of the term where it intervenes W^{RI}, we obtain the coupling block defined by: $C_{ij} = \dfrac{1}{2} \left(I_3 \otimes \Psi^{\Sigma_i}\right) .\mathcal{K}_{ij}. \left(I_3 \otimes \Psi^{\mathcal{C}_j}\right)$

5. Algorithm of Resolution and Numerical Study

For this study, the discontinuous Galerkin formulations coupled to an integral representation described in section (3) has been implemented in FORTRAN code, and for the resolution we use the preconditioned GMRES method by $\mathbf{A}^{-1}$, we obtain the system: $(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}).\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$. In each iteration the product $(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}).\mathbf{x}$ is performed with solving a linear system : $\mathbf{A}.\mathbf{Z} = \mathbf{C}.\mathbf{x}$, by a LU factorization.
Numerical solutions are shown in Figs. [27] and [28] in the form of the contour lines of the H_y components. Fig. [27] and [28] correspond to the analytical solution for this problem.

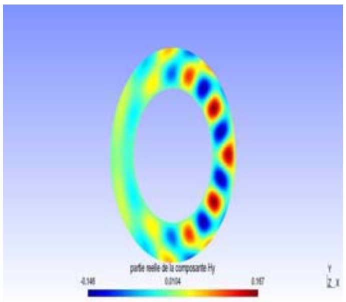


Figure 27: the contour lines of the H_y components

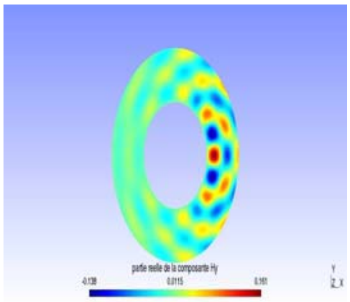


Figure 28: the contour lines of the H_y components

5.1. Numerical results

According to the previous results, we established that the method is efficient for low and intermediate level of frequency.

6. Conclusion

We have presented a solution obtained by the GMRES method for the large, sparse and complex coefficients algebric systems resulting from the discretization of the time-harmonic Maxwell equations by discontinuous Galerkin methods coupled to an integral representation.

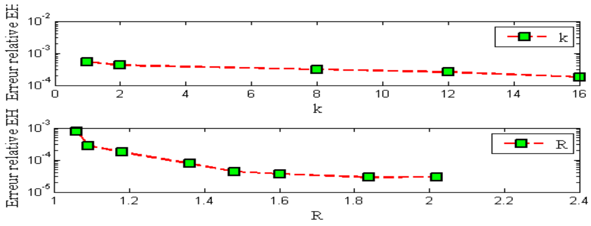


Figure 29: Variation of the error according to k & Variation of the error according to R

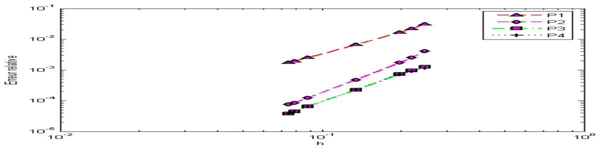


Figure 30: Variation of the error: P_1, P_2, P_3 and P_4

References

[1] N. Gmati, F. Ben Belgacem, M. Fournie and F. Jelassi, « On the Schwartz algorithms for the elliptic exterior boundary value problems », *ESAIM.Math.Model.Numer.Anal*, 39, **4** (2005), 639–714.

[2] S. Gratton V. Frayssé, L. Giraud and J. Langou, « A Set of GMRES Routines for Real and Complex Arithmetics on High Performance Computers », *Tech. Rep. TR/PA/03/3, CERFACS*, (2003).

[3] M. El Bouajaji and S. Lanteri., « High order discontinuous Galerkin method for the solution of 2D time-harmonic Maxwell's equations », *Appl.Math. Comput.*, (2012).

[4] M. Lenoir and A. Jami., « A variational formulation for exterior problems in linear hydrodynamics », *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **16** (1978), 341–359.

[5] C. Hazard and M. Lenoir., « On the solution of time-harmonic scattering problems for Maxwell's equations », *SIAM J. Math. Anal.*, 27, **6** (1996), 1597–1630.

Anisotropic parabolic equations in L^m

Fares Mokhtari*

* Ecole Supérieure de Commerce-Alger. Laboratoire des EDP, ENS-Kouba.
Alger, Algeria
fares_maths@yahoo.fr.

ABSTRACT. In this paper [6], we give a result of regularity of weak solutions for a class of nonlinear anisotropic parabolic equations with lower-order term when the right-hand side is L^m function, with m "small". This work generalizes some results given in [1] and [2]. .

RÉSUMÉ. Dans ce papier, nous donnons un résultat de régularité des solutions faibles pour une classe d'équations paraboliques anisotropes non linéaires avec un terme d'ordre inférieur lorsque le second membre est une fonction dans L^m, avec m "petit". Ce travail généralise certains résultats donnés dans [1] et [2].

KEYWORDS : Nonlinear parabolic equations, Anisotropic equations, L^m data.

MOTS-CLÉS : Equations paraboliques non linéaires, Equations anisotropes, À donnée L^m.

1. Introduction

In this work we study the regularity of solution of the following nonlinear anisotropic parabolic equation

$$(P) \qquad \begin{cases} \partial_t u - \operatorname{div}(\widehat{a}(t,x,u,Du)) + F(t,x,u) = f & \text{in } Q \\ u(0,x) = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } (0,T) \times \partial\Omega, \end{cases}$$

where Ω is a smooth bounded open set of $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$, $T > 0$ a real number, $Q = (0,T) \times \Omega$, and $\widehat{a} : Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ is a Carathéodory function and satisfying, a.e. (t,x) in Q and $\forall\, u \in \mathbb{R}$ and $\forall \xi, \xi' \in \mathbb{R}^N$, the following:

$$\widehat{a}(t,x,u,\xi)\xi \geq \alpha \sum_{i=1}^{N} |\xi_i|^{p_i}, \ \widehat{a}(\cdot) = (a_1(\cdot), \ldots, a_N(\cdot)) \qquad [1]$$

$$|a_i(t,x,u,\xi)| \leq \beta \Big(b + |u|^{\overline{p}} + \sum_{j=1}^{N} |\xi_j|^{p_j} \Big)^{1-\frac{1}{p_i}}, \quad i = 1, \ldots, N \qquad [2]$$

$$(\widehat{a}(t,x,u,\xi) - \widehat{a}(t,x,u,\xi'))(\xi - \xi') > 0, \ \xi \neq \xi' \qquad [3]$$

where α, β are strictly positive real numbers, b is a given positive function in $L^1(Q)$, and $p_i > 1$, $i = 1, \ldots, N$.
Let $F(t,x,u) : Q \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a Carathéodory function satisfying the following conditions:

$$\sup_{|\sigma| \leq \lambda} |F(t,x,\sigma)| \in L^1(Q), \quad \forall \lambda > 0 \qquad [4]$$

$$F(t,x,u)\operatorname{sign}(u) \geq 0, \quad \text{a.e. } (t,x) \in Q, \ \forall u \in \mathbb{R}. \qquad [5]$$

We assume that $f \in L^m(Q)$ when

$$1 < m < \frac{(N+2)\overline{p}}{(N+2)\overline{p} - N}, \quad \frac{1}{\overline{p}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i}, \quad m' = \frac{m}{m-1}, \qquad (6)$$

where the exponents $p_1, ..., p_N$ are restricted as follows:

$$\begin{cases} 1 + \frac{N}{N+1} < p_i < \frac{\overline{p}(2-m+N)}{(1-m)(2+N)\overline{p} + mN}, \quad i = 1, \ldots, N \\ \overline{p} < \frac{N(N+2)}{m(N+1)}. \end{cases} \qquad (7)$$

As a prototype example, we consider the model problem

$$\begin{cases} \partial_t u - \sum_{i=1}^{N} \Big(D_i(|D_i u|^{p_i - 2} D_i u) - |u|^{p_i - 1} u \Big) = f & \text{in } Q \\ u(0,x) = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } (0,T) \times \partial\Omega, \end{cases}$$

with $f \in L^m(Q)$, m as in (6), and $p_1, p_2, ..., p_N$ are restricted as in (7).

In the isotropic case ($p_1 = p_2 =, ..., = p_N = p$), it has been proved in [1] that there exists a weak solution $u \in L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega))$ to nonlinear parabolic equations with $p > 1 + \frac{N}{N+1}$ and $1 < m < \frac{(N+2)p}{(N+2)p-N}$. Existence and regularity of solutions to nonlinear anisotropic elliptic equations, with $F = 0$, $1 < m < \frac{N\overline{p}}{N\overline{p}-N+\overline{p}}$, and $2 - \frac{1}{N} < p_i < \frac{(N-1)\overline{p}}{N-\overline{p}}$, $\overline{p} < N$, has been proved in [2]. Recently in [5, 4], the author has discussed the existence of solutions for anisotropic parabolic equations with measures (or $L^1(0,T; L^1 \log L^1(\Omega))$) data under the assumptions

$$\begin{cases} 1 + \frac{N}{N+1} < p_i < \frac{\overline{p}(N+1)}{N}, \quad i = 1, \dots, N, \\ \overline{p} \leq \frac{N(N+2)}{N+1}. \end{cases}$$

In this paper, we treated the anisotropic parabolic case with $f \in L^m(Q)$, $1 < m < (N+2)\overline{p}/[(N+2)\overline{p} - N]$, and p_i for $i = 1, \dots, N$ are restricted as in (7). Before giving our results, it seems of interest to make some remarks.

Remarks: Let $p_i > 1 + \frac{N}{N+1}$, $i = 1, \dots, N$.

1) We have

$$\frac{\overline{p}(N+1)}{N} < \frac{\overline{p}(2-m+N)}{(1-m)(2+N)\overline{p} + mN}, \quad \forall m > 1.$$

2) In the isotropic case ($p_i = \overline{p} = p$), the assumption

$$p < \frac{p(2-m+N)}{(1-m)(2+N)p + mN}$$

is true for all $m > 1$.

3) If $\overline{p} \leq N$, we can write

$$\frac{(N+2)\overline{p}}{(N+2)\overline{p} - N} - \frac{N(N+2)}{\overline{p}(N+1)} = \frac{(N+2)((N+1)\overline{p} - N)(\overline{p} - N)}{\overline{p}(N+1)((N+2)\overline{p} - N)} \leq 0.$$

Then, the assumption $\overline{p} < \frac{N(N+2)}{m(N+1)}$ is true for all $m \in (1, \frac{(N+2)\overline{p}}{(N+2)\overline{p}-N})$.

2. On some anisotropic Sobolev spaces

Let Ω be a bounded smooth open subset of $\mathbb{R}^N$ and $\overrightarrow{p} = (p_1, ..., p_N) \in \mathbb{R}^N$ with $p_i \geq 1$ for $i = 1, \ldots, N$. We define the anisotropic space $W_0^{1,p_i}(\Omega)$ as the closure of $C_0^\infty(\Omega)$ with respect to the norm

$$\|u\|_i = \|u\|_{L^{p_i}(\Omega)} + \|D_i u\|_{L^{p_i}(\Omega)}, \quad D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Its dual is denoted by $(W_0^{1,p_i}(\Omega))'$. Next, we put

$$X_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega) = \bigcap_{i=1}^{N} W_0^{1,p_i}(\Omega) \quad \text{and} \quad \mathbb{L}^{\overrightarrow{p}}(0,T; X_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)) = \bigcap_{i=1}^{N} L^{p_i}(0,T; W_0^{1,p_i}(\Omega))$$

with

$$\|u\|_{X_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)} = \sum_{i=1}^{N} \|D_i u\|_{L^{p_i}(\Omega)}, \quad \|u\|_{\mathbb{L}^{\overrightarrow{p}}(0,T;X_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega))} = \sum_{i=1}^{N} \|u\|_{L^{p_i}(0,T;W_0^{1,p_i}(\Omega))}$$

3. Statements of results

Definition 3.1 *A function u is a weak solution of problem (P) if:*

$$u \in L^1(0,T; W_0^{1,1}(\Omega)),\ \widehat{a}(t,x,u,Du) \in L^1(Q)^N,\ F(t,x,u) \in L^1(Q),$$

and

$$-\int_Q u \partial_t \varphi \, dxdt + \int_Q \widehat{a}(t,x,u,Du) D\varphi \, dxdt + \int_Q F(t,x,u)\varphi \, dxdt = \int_Q \varphi f \, dxdt,$$

for all $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$ which is zero in a neighborhood of $(0,T) \times \partial\Omega$ and $\{T\} \times \Omega$.

The main result of this paper is the following.

Theorem 3.2 *Let p_i, $i = 1, \ldots, N$ are restricted as in (7), m as in (6), and $f \in L^m(Q)$. Then under the assumptions (10)-(5), the problem (P) has at least one weak solution $u \in \mathbb{L}^{\overrightarrow{q}}(0,T; X_0^{1,\overrightarrow{q}}(\Omega))$ where*

$$q_i = \frac{((N+1)\overline{p} - N)mp_i}{(N+2-m)\overline{p}}, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Proof. The proof needs three steps.

Step1: Approximation.

Let $(f_n) \subset C_0^\infty(Q)$ such that

$$f_n \to f \quad \text{strongly in} \quad L^m(Q),\ \text{as } n \to +\infty,$$

and

$$\|f_n\|_{L^m(Q)} \leq \|f\|_{L^m(Q)}, \quad \forall n \geq 1.$$

We define the problems (P_n) by

$$(P_n) \qquad \begin{cases} \partial_t u_n - \operatorname{div}(\widehat{a}(t,x,u_n,Du_n)) + F(t,x,u_n) = f_n & \text{in } Q \\ u_n(0,x) = 0 & \text{in } \Omega \\ u_n = 0 & \text{on } (0,T) \times \partial\Omega. \end{cases}$$

The existence of a solution u_n in $\mathbb{L}^{\overrightarrow{p}}(0,T;X_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)) \cap C([0,T];L^2(\Omega))$ of the problem (P_n) is classical; see for instance [3]. □

Step2: Uniform estimates on (u_n).

Lemma 3.3 ([6]) *Let m as in (6). Assume (10)-(5) hold and the corresponding exponents p_i, $i = 1, \ldots, N$ are restricted as in (7). Then there exists a constant $C_1 > 0$ such that for all $n \geq 1$:*

$$\|u_n\|_{\mathbb{L}^{\overrightarrow{q}}(0,T;X_0^{1,\overrightarrow{q}}(\Omega))} \leq C_1, \quad q_i = \frac{((N+1)\overline{p} - N)mp_i}{(N+2-m)\overline{p}}.$$

and

$$\|u_n\|_{L^{\overline{q}}(Q)} \leq C_1, \quad \frac{1}{\overline{q}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{q_i}. \tag{8}$$

Lemma 3.4 ([6]) *There exists a constant C_2 such that*

$$\|F(.,.,u_n)\|_{L^1(Q)} \leq C_2, \quad \forall n \geq 1.$$

Lemma 3.5 ([6]) *Assume that p_i, $i = 1, \ldots, N$ are restricted as in (7). Then*

$$r_i = \frac{m(N+1)p_i}{(2-m+N)(p_i-1)\overline{p}}\Big(\overline{p} - \frac{N}{N+1}\Big) > 1, \quad i = 1, \ldots, N.$$

The sequence $(u_n') = (\partial_t u_n)$ remains in a bounded set of $L^{r_-}(0,T;(X_0^{1,\overrightarrow{r}'}(\Omega))') + L^1(Q)$, $\overrightarrow{r}' = (r_1', ..., r_N')$, r_i' is the conjugate r_i, and $r_- = \min\{r_i, \quad i = 1, \ldots, N\}$.

Step3: Passage to the limit.

Let r_i given as in Lemma 3.5. Then, thanks to Lemma 3.5, we have that (u'_n) remains in a bounded set of the space

$$L^{r_-}(0,T;(X_0^{1,\overrightarrow{r}'}(\Omega))')+L^1(Q)\subset L^{r_-}(0,T;W^{-1,r_-}(\Omega))+L^1(Q).$$

By Lemma 3.3, (u_n) remains in a bounded set of

$$\mathbb{L}^{\overrightarrow{q}}(0,T;X_0^{1,\overrightarrow{q}}(\Omega))\subset L^{q_-}(0,T;W_0^{1,q_-}(\Omega)),\quad q_i=\frac{((N+1)\overline{p}-N)mp_i}{(N+2-m)\overline{p}}.$$

Using Corollary 4 in [7] we obtain, up to a subsequence, that

$$u_n\to u\quad\text{srongly in}\quad L^1(Q)\quad\text{and a.e. in}\quad Q. \tag{9}$$

Now, adopting the approach of [5], there exists a subsequence (still denoted (u_n)) such that

$$Du_n\to Du\quad\text{a.e. on}\quad Q. \tag{10}$$

Since $\widehat{a}$ is a Carathéodory function, by (9), (10), (2), and Lemma 3.3, we get for all $i=1,\ldots,N$

$$a_i(t,x,u_n,Du_n)\to a_i(t,x,u,Du)\quad\text{weakly in } L^{r_i}(Q), \tag{11}$$

where r_i given as in Lemma 3.5. Using the fact that F is a Carathéodory function, (4)-(5), (9), and (10), we work in exactly the same way as that Lemma 4.5 in [6], we obtain that

$$F(t,x,u_n)\to F(t,x,u)\quad\text{strongly in}\quad L^1(Q). \tag{12}$$

By (9), (11), (12) we can pass to the limit for $n\to+\infty$ in the weak formulation of (P_n) and we obtain that u is a weak solution for (P).

References

[1] L. Boccardo, A. Dall'Aglio, T. Gallouët, L. Orsina., « Nonlinear parabolic equations with measure data », *J. funct. Anal*, 147 (1997) 237–258.

[2] F. Li.,« Anisotropic elliptic equations in L^m », *Journal of Convex Analysis*, 8 (2) (2001) 417–422.

[3] J.L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non lineaires, Dunod, Paris, 1969.

[4] F. Mokhtari., « Anisotropic parabolic problems with Orlicz data », *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 34 (17) (2011) 2095–2102.

[5] F. Mokhtari, « Anisotropic parabolic problems with measures data », *Differential Equations and Applications*, 2 (1) (2010) 123–150.

[6] F. Mokhtari, « Nonlinear anisotropic parabolic equations in L^m », *Arab journal of mathematical Sciences*. (2013), to appear.

[7] J. Simon., « Compact sets in the space $L^p(0, T; B)$ », *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 146 (1987) 65–96.

[8] M. Troisi., « Theoremi di inclusione per Spazi di Sobolev non isotropi », *Ricerche di Matematica*, 18 (1969) 3–24.

Elliptic operators with complex unbounded coefficients on arbitrary domains : L^p-theory and kernel estimates

Sami Mourou

Laboratoire d'Analyse Mathématique et Applications,
Faculté des Sciences de Tunis,
Campus Universitaire,
2092 El Manar Tunis, Tunisie.
E-mail: Sami.Mourou@fsg.rnu.tn

ABSTRACT. Let Ω be a domain in $\mathbb{R}^N$ and consider a second order linear partial differential operator A in divergence form on Ω which is not required to be uniformly elliptic and whose coefficients are allowed to be complex, unbounded and measurable. Under rather general conditions on the growth of the coefficients we construct a quasi-contractive analytic semigroup $(e^{-tA_V})_{t\geq 0}$ on $L^2(\Omega, dx)$, whose generator A_V gives an operator realization of A with general boundary conditions. Under suitable additional conditions on the imaginary parts of the diffusion coefficients, we prove that for a wide class of boundary conditions, the semigroup $(e^{-tA_V})_{t\geq 0}$ is quasi-L^p-contractive for $p \in (1, \infty)$. We then show that the semigroup $(e^{-tA_V})_{t\geq 0}$ is a semigroup of integral operators. Our main result is pointwise Gaussian upper bounds for the integral kernel of $(e^{-tA_V})_{t\geq 0}$. In contrast to the previous literature the diffusions coefficients are not required to be bounded or regular. A new approach based on Davies-Gaffney estimates is used. It is applied to a number of examples, including some degenerate elliptic operators arising in Financial Mathematics, and generalized Ornstein-Uhlenbeck operators with potentials. We also investigate operators in nondivergence form, and obtain similar results provided that the diffusion coefficients satisfy further requirements.

RÉSUMÉ. Mettre ici votre résumé en français.

KEYWORDS : Second order elliptic operators, Analytic semigroups, Boundary conditions, Davies-Gaffney estimates, Heat kernels, Gaussian bounds, Phragmèn-Lindelöf theorem.

MOTS-CLÉS : Liste des mots clés en français séparés par une virgule.

We deal with complex elliptic operators, not necessarily uniformly elliptic, of the form

$$Au = -\sum_{k,j=1}^{N} D_k(a_{kj}D_ju) + \sum_{k=1}^{N} b_{1k}D_ku + \sum_{k=1}^{N} D_k(b_{2k}u) + a_0u,$$

defined in an arbitrary domain Ω and subject to various boundary conditions. We allow all the coefficients to be unbounded measurable functions on Ω.

1. The realization of A in $L^2(\Omega)$

Here we assume the following conditions on the coefficients a_{kj}, b_{1k}, b_{2k}, a_0 ($k, j = 1, \dots, N$) of the operator A, which are allowed to be complex valued measurable functions.

(H1) There exist a strictly elliptic matrix $Q = (q_{kj})_{k,j=1}^N$ of complex measurable functions on Ω, i.e., there exists $\eta > 0$ such that

$$\mathrm{Re} \sum_{k,j=1}^{N} q_{kj}(x)\xi_k\overline{\xi_j} \geq \eta|\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{C}^N, \text{ a.e. } x \in \Omega,$$

and a vector $\beta = (\beta_k)_{k=1}^N$ with each $\beta_k \in L^2_{loc}(\Omega)$ and $\mathrm{essinf}|\beta_k| > 0$ such that

$$\mathrm{Re} \int_\Omega \sum_{k,j=1}^{N} \Big(a_{kj}(x) - \beta_k(x)\overline{\beta_j}(x)q_{kj}(x)\Big)\xi_k\overline{\xi_j}dx \geq 0, \quad \xi \in \mathbb{C}^N,$$

$$|a_{kj}(x)| \leq c_0|\beta_k(x)\beta_j(x)|, \quad k, j = 1, \dots, N, \text{ a.e. } x \in \Omega,$$

for some constant $c_0 > 0$.

(H2) $\mathrm{Re}a_0 \in L^1_{loc}(\Omega)$ and there exist constants $\omega, c_3 > 0$ such that $\mathrm{essinf}(\mathrm{Re}a_0 + \omega) > 0$ [1] and

$$|\mathrm{Im}a_0(x)| \leq c_3(\mathrm{Re}a_0(x) + \omega), \quad \text{a.e. } x \in \Omega.$$

(H3) For every $i = 1, 2$, there is a constant $0 < c_i < \frac{1}{2}\min(1/N, \eta)$ such that

$$|b_{ik}(x)| \leq c_i|\beta_k(x)\alpha(x)|, \quad \text{a.e. } x \in \Omega, \ k = 1, \dots, N,$$

where

$$\alpha(x) := (\mathrm{Re}a_0(x) + \omega)^{1/2}, \quad x \in \Omega.$$

1. Without loss of generality, we will assume in what follows that $\mathrm{essinf}(\mathrm{Re}a_0 + \omega) \geq 1$ and $\mathrm{essinf}|\beta_k| \geq 1$.

The introduction of these conditions is the heart of the matter in the present work. Since the growth of the coefficients is referred to a given pair (Q, β) and α, which in turn may grow at infinity, we need weighted spaces rather than the usual Sobolev spaces. So, we introduce the intrinsic (α, β)-weighted Sobolev space $W^{1,2}_{(\alpha,\beta)}(\Omega)$ of all complex measurable functions u on Ω such that αu and $\beta_k D_k u$ ($k = 1, \ldots, N$) belong to $L^2(\Omega)$, endowed with the weighted norm

$$\|u\|_{W^{1,2}_{(\alpha,\beta)}(\Omega)} := \|\alpha u\|_2 + \sum_{k=1}^{N} \|\beta_k D_k u\|_2.$$

We denote by $W^{1,2}_{0_{(\alpha,\beta)}}(\Omega)$ the closure of $C_c^\infty(\Omega)$ in the norm of this space. Note that the conditions $\mathrm{essinf}(\mathrm{Re} a_0 + \omega) \geq 1$ and $\mathrm{essinf}|\beta_k| \geq 1$ ($k = 1, \ldots, N$) imply, in particular, that $W^{1,2}_{(\alpha,\beta)}(\Omega)$ and $W^{1,2}_{0_{(\alpha,\beta)}}(\Omega)$ are continuously embedded in $W^{1,2}(\Omega)$ and $W^{1,2}_0(\Omega)$, respectively, and are densely embedded in $L^2(\Omega)$.

Here is our first main theorem.

Theorem 1.1 *Assume that* (H1)–(H3) *hold. Let V be a closed subspace of $W^{1,2}_{(\alpha,\beta)}(\Omega)$ that contains $W^{1,2}_{0_{(\alpha,\beta)}}(\Omega)$. Then, the realization A_V of A in $L^2(\Omega)$ with domain*

$$D(A_V) := \Big\{ u \in V : \text{ there exists } v \in L^2(\Omega) \text{ such that } \mathfrak{a}_V(u, \phi) = \langle v|\phi\rangle_2 \text{ for all } \phi \in V \Big\},$$

where $\mathfrak{a}_V$ is the sesquilinear form given by

$$\mathfrak{a}_V(u, v) = \int_\Omega \sum_{k,j=1}^{N} a_{kj} D_k u \overline{D_j v} dx + \int_\Omega \sum_{k=1}^{N} b_{1k} \overline{v} D_k u dx - \int_\Omega \sum_{k=1}^{N} b_{2k} u \overline{D_k v} dx + \int_\Omega a_0 u \overline{v} dx$$

with domain $D(\mathfrak{a}_V) = V$, generates a quasi-contractive analytic semigroup $(e^{-tA_V})_{t \geq 0}$ in $L^2(\Omega)$.

Note that the choice of the space V determines the boundary conditions.

2. Quasi-contractivity on $L^p(\Omega)$ for $p \in (1, \infty)$

Let us now consider the following additional conditions on the diffusion coefficients a_{kj} and the space V.

(H4) The space V satisfies

$$u \in V \Rightarrow (|u| - 1)^+ \mathrm{sign} u \in V.$$

(H5) Either

(C1) the coefficients a_{kj} $(k, j = 1, \dots, N)$ are real-valued functions,

or

(C2) the following conditions are satisfied:

(i) For every $k, j = 1, \dots, N$,

$$\mathrm{Im}(a_{kj} + a_{jk}) = 0,$$

and one of the following conditions holds:

(a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} D_j \mathrm{Im} a_{kj} \in L^{\infty}(\Omega)$;

(b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} D_j \mathrm{Im} a_{kj} \in L^1_{loc}(\Omega)$ and there exist two constants $0 \leq \epsilon < 1$ and $\theta \in \mathbb{R}$ such that

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{N} \mathrm{Im}(b_{1k} + b_{2k})(x) D_j \mathrm{Im} a_{kj}(x) \\ &\leq \frac{1}{2}\left[\Big(\mathrm{Im}(b_{1k} + b_{2k})(x)\Big)^2 + \epsilon\Big(\sum_{j=1}^{N} D_j \mathrm{Im} a_{kj}(x)\Big)^2\right] + \theta, \quad \text{a.e. } x \in \Omega;\end{aligned}$$

(ii) for all $u \in V$, $w \in C^{\infty}(\Omega) \cap W^{1,2}_{(\alpha,\beta)}(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} \sum_{kj=1}^{N} \mathrm{Im}(a_{kj}) w \overline{D_j u} dx = -\int_{\Omega} \sum_{kj=1}^{N} D_j \mathrm{Im}(a_{kj}) w \overline{u} dx - \int_{\Omega} \sum_{kj=1}^{N} \mathrm{Im}(a_{kj}) \overline{u} D_j w dx;$$

(iii) there exist constants $0 \leq \nu < 1$ and $\zeta \geq 0$ such that

$$\frac{1}{4\eta} \sum_{k=1}^{N} \Big(\sum_{j=1}^{N} D_j \mathrm{Im} a_{kj}(x) - \mathrm{Im}(b_{1k} + b_{2k})(x) \Big)^2 \leq \nu \mathrm{Re} a_0(x) + \zeta, \quad \text{a.e. } x \in \Omega;$$

(iv) the space V satisfies in addition

$$u \in V \Rightarrow (\mathrm{Re} u)^{+} \in V.$$

Our second main theorem is the following.

Theorem 2.1 *Assume that* (H1)–(H5) *hold. Then, the semigroup* $(e^{-tA_V})_{t\geq 0}$ *interpolates on* $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$. *Moreover,*

$$\|e^{-tA_V}\|_{p\to p} \leq e^{\omega_p t}, \quad t \geq 0,$$

where ω_p *is a positive constant depending only on* p.

3. Davies-Gaffney Estimates

Let us assume further that

(H6) There exist three constants $\zeta \geq 0$ and γ, $\sigma > 0$, with $0 < \gamma + \sigma < 1/2$, such that

$$\frac{1}{2\gamma\eta}\Big(\sum_{k,j=1}^{N}|a_{kj}(x)|^2\Big)^2 + \sum_{k=1}^{N}\Big[\Big(|b_{1k}(x)| + |b_{2k}(x)|\Big)^2 + \frac{2\eta}{\sigma}(\mathrm{Re}b_{2k}(x))^2\Big]$$
$$\leq 2\eta\Big(\mathrm{Re}a_0(x) + \nu\Big) + \zeta, \quad \text{a.e. } x \in \Omega,$$

(H7) There exist a sequence $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ of $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ and an increasing sequence of open subsets $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ covering Ω, such that the following hold:

(i) for every $n \in \mathbb{N}$,

$$u \in V \Rightarrow e^{\kappa\,\phi_n\, d(.,U)} u \in V$$

for all $\kappa > 0$ and open subset $U \subset \Omega$;

(ii) for every $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \phi_n \leq 1$, $\phi_n = 1$ in Ω_n, $\mathrm{supp}\phi_n \subset \Omega_{n+1}$ and $|\nabla\phi_n| \leq \gamma_n$ for some real sequence $\gamma_n \to 0$ independent of x.

Our main result in this section reads as follows.

Theorem 3.1 *Assume that* (H1), (H2), (H3), (H6) *and* (H7) *hold. Then, there exists* $\delta > 0$ *such that*

$$|\langle e^{-z(A_V+\nu)}u_1|u_2\rangle| \quad \leq \quad \exp\left(-\mathrm{Re}\frac{e^{i(\frac{\pi}{2}-\arctan C_\nu)}\mathrm{dist}(U_1,U_2)^2}{4\delta\sin(\arctan C_\nu)w(z)}\right)\|u_1\|_2\|u_2\|_2,$$
$$z \in \Sigma(\arctan C_\nu),$$

for any open subsets U_1, $U_2 \subset \Omega$ *and for every* $u_i \in L^2(\Omega)$ *with* $\mathrm{supp}\, u_i \subseteq U_i$, $i = 1, 2$.

4. Gaussian upper bounds

Now further suppose

(H8) The space V is continuously embedded into $L^{2^*}(\Omega)$, where $2^* = \infty$ if $N = 1$, 2^* is any number in $(2, \infty)$ if $N = 2$ and $2^* = \frac{2N}{N-2}$ if $N \geq 3$.

Here is the main theorem.

Theorem 4.1 *Assume that* (H1)–(H8) *hold. Then the semigroup* $(e^{-z(A_V+\nu)})_{z\in\Sigma(\arctan C_\nu)\cup\{0\}}$ *is given by*

$$(e^{-z(A_V+\nu)}u)(x) = \int_\Omega k_V(z,x,y)u(y)dy, \quad \textit{a.e. } x \in \Omega,\ z \in \Sigma(\arctan C_\nu),\ u \in L^2(\Omega),$$

where the kernel $k_V : \Sigma(\arctan C_\nu) \times \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ *satisfies*

$$\begin{aligned} |k_V(z,x_1,x_2)| \quad &\leq \quad eC_\varepsilon(\mathrm{Re}z)^{-\frac{N}{2}}e^{-(\nu+s(A_V))\mathrm{Re}z}\Big[1+(\theta+\varepsilon+\nu+s(A_V))\mathrm{Re}z\Big]^{\frac{N}{2}} \\ &\times\Big[\mathrm{Re}\frac{|x_1-x_2|^2}{4\delta z}\Big]^{\frac{N}{2}}\exp\left(-\mathrm{Re}\frac{e^{i(\frac{\pi}{2}-\arctan C_\nu)}|x_1-x_2|^2}{4\delta\sin(\arctan C_\nu)w(z)}\right), \\ &\textit{for } \mathrm{Re}\frac{|x-y|^2}{z} \geq 4\delta; \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} |k_V(z,x,y)| \leq \quad &eC_\varepsilon(\mathrm{Re}z)^{-\frac{N}{2}}e^{-(\nu+s(A_V))\mathrm{Re}z}\Big[1+\big(\theta+\varepsilon+\nu+s(A_V)\big)\mathrm{Re}z\Big]^{\frac{N}{2}} \\ &\times\exp\Big(-\mathrm{Re}\tfrac{|x-y|^2}{4\delta z}\Big), \quad \textit{for } \mathrm{Re}\tfrac{|x-y|^2}{z} < 4\delta, \end{aligned}$$

for all $\varepsilon > 0$ *and for almost every* $x,\ y \in \Omega$.

References

[1] S. Mourou and M. Selmi,« Quasi-L^p-contractive analytic semigroups generated by elliptic operators with complex unbounded coefficients on arbitrary domains, » *Semigroup Forum* **85**, (2012) 5–36.

[2] S. Mourou and M. Selmi,« Gaussian upper bounds for heat kernels of second order complex elliptic operators with unbounded diffusion coefficients on arbitrary domains, » to appear in *Semigroup Forum*.

Stable Manifolds of Nonautonomous

Boundary Cauchy Problems

T. S. Doan[*] — M. Moussi[**] — S. Siegmund[***]

[*] Technical University Dresden and Institute of Mathematics, Hanoi
Institute of Analysis, Technical University Dresden
12 Zellescher Weg, D-01069 Dresden, Germany
Vietnam
dtson@tu-dresden.de
[**] University Mohammed I, Oujda
Department of Mathematics and Informatics, Faculty of sciences,
University Mohammed I 60000 Oujda, Morocco
Morocco
mohmoussi@hotmail.com
[***] Technical University Dresden
Institute of Analysis, Technical University Dresden
12 Zellescher Weg, D-01069 Dresden, Germany
Germany
stefan.siegmund@tu-dresden.de

ABSTRACT. In this talk we present the existence of stable manifolds for nonlinear boundary Cauchy problems. An example of nonautonomous structured population equations is given.

RÉSUMÉ. Dans cet exposé, nous présentons l'existence des variétés stables pour les problèmes de Cauchy non linéaires avec des conditions au bord. Un exemple de la dynamique de population est donné.

KEYWORDS : nonautonomous boundary Cauchy problem; stable manifold; structured population equation.

MOTS-CLÉS : Problème de Cauchy avec conditions au bord ; variété stable ; dynamique de population.

1. Introduction

Consider the nonlinear boundary Cauchy problem for arbitrary $\tau \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = A_{\max}(t)u(t), \quad t \in [\tau, \infty), \\ L(t)u(t) = f(t, u(t)), \quad t \in [\tau, \infty), \\ u(\tau) = x, \end{cases} \tag{1}$$

where $A_{\max}(t)$ is a closed operator on a Banach space X endowed with a maximal domain $D(A_{\max}(t))$, and $L(t) : D(A_{\max}(t)) \to \partial X$, with a 'boundary space' ∂X and a function $f : \mathbb{R}_+ \times X \to \partial X$, the solution $u : [\tau, \infty) \to X$ takes the initial value $x \in X$ at time τ. This type of equation has recently been suggested and investigated as a model class with various applications like population equations, retarded differential (difference) equations, heat equations and boundary control problems. The corresponding linear boundary Cauchy problem of (1) is given by

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = A_{\max}(t)u(t), \quad t \in [\tau, \infty), \\ L(t)u(t) = 0, \quad t \in [\tau, \infty), \\ u(\tau) = x. \end{cases} \tag{2}$$

The homogeneous boundary Cauchy problem (2) has been investigated by Kellermann [3] and Nguyen Lan [4]. In these papers, the authors proved the existence of solutions to these problems and generation of an evolution family.

In [2] the authors have studied the boundary Cauchy problem in the case that the first equation in (1) is replaced by an inhomogeneous equation $\frac{d}{dt}u(t) = A_{\max}(t)u(t) + g(t)$ and f in the second equation is replaced by $f(t, u(t)) \equiv f(t)$. For this type of equation they established a variation of constants formula which can be easily extended to a variation of constants formula for (1) using the contraction fixed point theorem. Utilizing the variation of constants formula we will follow the Lyapunov-Perron approach to develop an invariant manifold theory for the class of equations (1).

2. Preliminaries

In this section we recall some definitions and results, formulate assumptions and present an example.

2.1. Linear nonautonomous boundary Cauchy problems

A family of linear (unbounded) operators $(A(t))_{0\leq t\leq T}$ defined on a Banach space X is called a *stable family* if there are constants $M \geq 1$ and $\omega \in \mathbb{R}$ such that $(\omega, \infty) \subset \rho(A(t))$ for all $0 \leq t \leq T$ and

$$\Big\| \prod_{i=1}^{k} R(\lambda, A(t_i)) \Big\| \leq M(\lambda - \omega)^{-k}$$

for $\lambda > \omega$ and any finite sequence $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k \leq T$.

A family of linear bounded operators $(U(t,s))_{t\geq s\in J}$, $J := \mathbb{R}_+$ or $\mathbb{R}$, on a Banach space X is called *evolution family* if

(1) $U(t,s) = U(t,r)U(r,s)$ and $U(s,s) = \mathrm{id}_X$ for all $t \geq r \geq s \in J$,

(2) the mapping $\{(t,s) \in J \times J\ : t \geq s\} \ni (t,s) \mapsto U(t,s) \in \mathcal{L}(X)$ is strongly continuous.

Definition 2.1 (Exponential Splitting) *An evolution family $(U(t,s))_{t\geq s\geq 0}$ on a Banach space X has an* exponential splitting *with exponents $\alpha < \beta$, if there exist projections $P(t), t \in \mathbb{R}_+$, being uniformly bounded and strongly continuous and a constant $N \geq 1$ such that*

(1) $P(t)U(t,s) = U(t,s)P(s)$ for all $t \geq s \geq 0$,

(2) the restriction $U_Q(t,s) : Q(s)X \to Q(t)X$ is invertible for $t \geq s \geq 0$ and we set $U(s,t) := [U_Q(t,s)]^{-1}$, where $Q(t) := \mathrm{id}_X - P(t)$.

(3) $\|U(t,s)P(s)\| \leq Ne^{\alpha(t-s)}$ and $\|[U_Q(t,s)Q(s)]^{-1}\| \leq Ne^{-\beta(t-s)}$ for all $t \geq s \geq 0$.

Let $X, D, \partial X$ be Banach spaces such that D is dense and continuously embedded in X. On these spaces, the operators $A_{\max}(t) \in \mathcal{L}(D,X), L(t) \in \mathcal{L}(D, \partial X)$, for $t \geq 0$, are supposed to satisfy the following hypotheses:

(H1) There are positive constants C_1, C_2 such that

$$C_1\|x\|_D \leq \|x\| + \|A_{\max}(t)x\| \leq C_2\|x\|_D$$

for all $x \in D$ and $t \geq 0$;

(H2) for each $x \in D$ the mapping $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto A_{\max}(t)x \in X$ is continuously differentiable;

(H3) the operators $L(t) : D \to \partial X, t \geq 0$, are surjective;

(H4) for each $x \in D$ the mapping $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto L(t)x \in \partial X$ is continuously differentiable;

(H5) there exist constants $\gamma > 0$ and $\omega \in \mathbb{R}$ such that

$$||L(t)x||_{\partial X} \geq \gamma^{-1}(\lambda - \omega)||x||_X,$$

for $x \in \ker(\lambda\, \mathrm{id}_X - A_{\max}(t)), \lambda > \omega$ and $t \geq 0$;
(H6) the family of operators $(A(t))_{t\geq 0}$, $A(t) := A_{\max}(t)|_{\ker L(t)}$, generates an evolution family $(U(t,s))_{t\geq s\geq 0}$.

To illustrate sufficient and natural conditions which imply the assumptions (H1)-(H6) for application-relevant classes of boundary Cauchy problems we consider the following structured population equation:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(t,a,x) = -\dfrac{\partial}{\partial a}u(t,a,x) - \mu(a,x)u(t,a,x) + A(a,x)u(t,a,x), \\ \hfill t \geq s, a \geq 0, x \in \Omega, \\ u(t,0,x) = \int_0^\infty \beta(t,a,x)u(t,a,x)\; da, \quad t \geq s, x \in \Omega, \\ u(s,a,x) = f(a,x), \quad a \geq 0, x \in \Omega. \end{cases} \tag{3}$$

Here Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^n$, the function $u(t,a,x)$ represents the density of individuals of the population of age a and size x at time t. The functions μ and β correspond to the aging and the birth rates, respectively.

2.2. Nonlinear boundary Cauchy problems

In case $f \equiv 0$ the boundary Cauchy problem (1) reduces to the linear boundary Cauchy problem (2). Let $(U(t,s))_{t\geq s\geq 0}$ denote the evolution family from (H6). We want to study nonlinear perturbations (1) of (2) and therefore assume that the nonlinearity f is not too far away from 0:

(H7) The nonlinear part $f : \mathbb{R}_+ \times X \to \partial X$ is assumed to be continuous, satisfies that $f(t,0) = 0$ for all $t \in \mathbb{R}_+$ and there exists a positive constant ℓ such that one has the global Lipschitz estimate

$$\|f(t,x) - f(t,\bar{x})\| \leq \ell\|x - \bar{x}\| \quad \text{for all } x, \bar{x} \in X, t \in \mathbb{R}_+.$$

Under the assumptions (H1)-(H7) the semilinear boundary Cauchy problem (1) admits a unique mild solution. For $\tau \in \mathbb{R}_+$, $x \in X$, a function $u = u(\cdot,\tau,x) : [\tau,\infty) \to X$ is called *mild solution of* (1) if it satisfies the integral equation

$$u(t,\tau,x) = U(t,\tau)x + \lim_{\lambda\to\infty}\int_\tau^\infty U(t,\sigma)\lambda L_\lambda f(\sigma, u(\sigma,\tau,x))\; d\sigma, \quad t \geq \tau. \tag{4}$$

The unique existence follows with the usual contraction arguments and uses the *variation of constants formula* from [2] for solutions $v : [\tau,\infty) \to X$ of inhomogeneous boundary Cauchy problems, i.e. systems (1) with $f(t,u(t)) \equiv g(t)$ independent of $u(t)$

$$v(t) = U(t,\tau)x + \lim_{\lambda\to\infty}\int_\tau^\infty U(t,\sigma)\lambda L_{\lambda,\sigma} g(\sigma)\; d\sigma, \quad t \geq \tau,$$

where $L_{\lambda,t} := \left[L(t)|_{\ker(\lambda\,\mathrm{id}_X - A_{\max}(t))}\right]^{-1} : \partial X \to \ker(\lambda\,\mathrm{id}_X - A_{\max}(t))$

3. Integral Manifolds of Nonlinear Boundary Cauchy Problems

In this section, we consider the system (1) where $A_{\max}(t), L(t), f(t,x)$ are assumed to satisfy assumptions (H1)-(H7). For $\tau \in \mathbb{R}_+$ and $x \in X$ let $u(\cdot,\tau,x)$ denote the mild solution of (1) satisfying that $u(\tau) = x$. In case the evolution family $(U(t,s))_{t\geq s\geq 0}$ of the corresponding linear boundary Cauchy problem has an exponential splitting with exponents $\alpha < \beta$, projections $P(\cdot)$, $Q(\cdot) = I - P(\cdot)$ and constant N then for all $\zeta \in (\alpha,\beta)$ the two sets

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_\zeta^s &= \Big\{(\tau,\xi) \in \mathbb{R}_+ \times X : \tau \in \mathbb{R}_+, \xi \in P(\tau)X\Big\},\\ \mathcal{M}_\zeta^u &= \Big\{(\tau,\xi) \in \mathbb{R}_+ \times X : \tau \in \mathbb{R}_+, \xi \in Q(\tau)X\Big\},\end{aligned}$$

are called *(pseudo)-stable* and *(pseudo)-unstable vector bundles* or *manifolds*, they consist of solutions which are exponentially bounded from above and below, respectively, in the sense of Definition 2.1. In case $\alpha < 0 < \beta$ they are called *stable* and *unstable*, respectively.

Our aim in this section is to construct nonlinear analogues of $\mathcal{M}_\zeta^s$ and $\mathcal{M}_\zeta^u$ by using the Lyapunov-Perron approach as e.g. in [1]. Since solution curves are sometimes also called *integral curves* and because $\mathcal{M}_\zeta^s$ and $\mathcal{M}_\zeta^u$ are invariant manifolds, i.e. consist of solution curves, they are also called *integral manifolds*.

By (H7) equation (1) has the zero solution. We show that for each fixed $\tau \in \mathbb{R}_+$ the set of mild solutions $\phi \in C([\tau,\infty),X)$ of (1) which converge to zero exponentially fast as $t \to \infty$ forms a so-called stable manifold which is the graph of a Lipschitz-continuous chart. In fact, we prove more generally, that sets of solutions which are exponentially bounded by $Ne^{\zeta(t-\tau)}$ for $t \geq \tau$ form manifolds, so-called ζ-pseudo-stable manifolds. To this end choose $\zeta \in \mathbb{R}, \tau \in \mathbb{R}_+$. Then the set

$$\mathcal{X}_{\tau,\zeta}^+(X) := \left\{\phi \in C([\tau,\infty),X) : \sup_{t\geq\tau} e^{\zeta(\tau-t)}\|\phi(t)\| < \infty\right\}$$

is a Banach space with respect to the norm

$$\|\phi\|_{\tau,\zeta} := \sup_{t\geq\tau} e^{\zeta(\tau-t)}\|\phi(t)\|.$$

We define the *Lyapunov-Perron Operators* $\mathcal{T}^+ : \mathcal{X}_{\tau,\zeta}^+(X) \times X \to \mathcal{X}_{\tau,\zeta}^+(X)$ by

$$\mathcal{T}^+(\phi,x)(t) := U(t,\tau)P(\tau)x + \lim_{\lambda\to\infty}\int_\tau^\infty G(t,\sigma)\lambda L_{\lambda,\sigma} f(\sigma,\phi(\sigma))\,d\sigma, \tag{5}$$

where the *Green's function* G is defined by

$$G(t,s) := \begin{cases} U(t,s)P(s) & \text{for } t \geq s, \\ -U(t,s)Q(s) & \text{for } t \leq s. \end{cases}$$

Definition 3.1 *For any $\zeta \in \mathbb{R}$, the ζ*-pseudo stable manifold *is defined as*

$$\mathcal{W}^s_\zeta := \Big\{(\tau, x) \in \mathbb{R}_+ \times X : \phi \in \mathcal{X}^+_{\tau,\zeta}(X) \text{ is mild sol. of } (1) \text{ and } P(\tau)\phi(\tau) = x\Big\}.$$

Theorem 3.2 *Assume that* (1) *satisfies the assumptions (H1)-(H7) and suppose that the corresponding evolution family $(U(t,s))_{t\geq s\geq 0}$ has an exponential splitting with exponents $\alpha < \beta$, projections $P(\cdot)$ and constant N. Furthermore, we assume that $N\ell\gamma < \beta - \alpha$. Choose and fix $\eta \in (\frac{N\ell\gamma}{2}, \frac{\beta-\alpha}{2})$. Then for any $\zeta \in [\alpha+\eta, \beta-\eta]$, the ζ-pseudo stable manifold $\mathcal{W}^s_\zeta$ has the following representation*

$$\mathcal{W}^s_\zeta = \Big\{(\tau, \xi + s^+(\tau,\xi)) \in \mathbb{R}_+ \times X : \tau \in \mathbb{R}_+, \xi \in P(\tau)X\Big\}, \tag{6}$$

with for each $\tau \in \mathbb{R}_+$ the uniquely determined continuous mapping $s^+(\tau,\cdot) : P(\tau)X \to X$ given by

$$s^+(\tau,\xi) = \lim_{\lambda\to\infty} \int_\tau^\infty G(\tau,\sigma)\lambda L_{\lambda,\sigma} f(\sigma,\phi(\sigma))\, d\sigma, \tag{7}$$

where ϕ is the unique fixed point of $\mathcal{T}^+(\cdot,\xi)$. Furthermore, for each $\tau \in \mathbb{R}_+$ the function $s^+(\tau,\cdot)$ satisfies

$$s^+(\tau,0) \equiv 0 \quad \textit{and} \quad \textit{Lip}(s^+(\tau,\cdot)) \leq \frac{N^2\ell\gamma}{\eta - 2Nl\gamma}.$$

References

[1] B. Aulbach and T. Wanner, « Integral manifolds for Caratheodory type differential equations in Banach spaces,« , *Six lectures on dynamical systems, World Scientific Publishing, River Edge, NJ*,(1996), 45–119.

[2] S. Boulite, L. Maniar and M. Moussi, « Wellposedness and asymptotic behaviour of non-autonomous boundary Cauchy problems« , *Forum Mathematicum*, **18** (2006), no. 4, 611–638.

[3] H. Kellermann, « Linear evolution equations with time-dependent domain« , *Semesterbericht Funktionalanalysis, Tübingen, Wintersemester*, (1985), 15–45.

[4] T.L. Nguyen, « On nonautonomous functional-differential equations« , *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **239** (1999), no. 1, 158–174.

Approximation and uniform polynomial stability of c_0-semigroups

S. Nafiri* — L. Maniar**

* Departement of Mathematics, Faculty of Sciences Semlalia, Cadi Ayyad University, B.P. 2390, 40000 Marrakesh
Morocco
nafirisalim@gmail.com
** Departement of Mathematics, Faculty of Sciences Semlalia, Cadi Ayyad University, B.P. 2390, 40000 Marrakesh
Morocco
lahcenmaniar@gmail.com

ABSTRACT. Consider the classical solutions of the abstract approximate problem

$$x_n'(t) = A_n x_n(t),\ t \geq 0, \quad x_n(0) = x_n^0,\ n \in \mathbb{N},$$

given by $x_n(t) = T_n(t)x_n^0,\ t \geq 0, x_n^0 \in D(A_n)$, where A_n generates a family of c_0-semigroups $T_n(t)$ on Hilbert spaces H_n. Classical solutions of this problem, may converge to 0 polynomially, but not exponentially, in the following sense

$$\|T_n(t)x\| \leq C_n t^{-\beta} \|(-A_n)^\alpha x\|,\ x \in D(A_n^\alpha), \quad t > 0,\ n \in \mathbb{N},$$

for some constants $\alpha, \beta > 0$. This paper has two objectives. First, necessary and sufficient conditions are given to characterize the uniform polynomial stability of the sequence $T_n(t)$ on Hilbert spaces H_n. Secondly, we present some applications of our results to the approximation in control of a one-dimensional thermoelastic system, subject to Dirichlet-Dirichlet and a hyperbolic-parabolic abstract system. The uniform polynomial stability and strong convergence of corresponding semigroups associated with approximate scheme are proved.

RÉSUMÉ. On considère la suite des solutions classiques du problème approché abstrait suivant

$$x_n'(t) = A_n x_n(t),\ t \geq 0, \quad x_n(0) = x_n^0,\ n \in \mathbb{N},$$

donnée par $x_n(t) = T_n(t)x_n^0,\ t \geq 0, x_n^0 \in D(A_n)$, où A_n engendre une famille de c_0-semigroupes $T_n(t)$ sur des espaces de Hilbert H_n. Les solutions classiques de ce problème, peuvent converger vers 0 polynomialement, et non pas exponentiellement, dans le sens suivant

$$\|T_n(t)x\| \leq C_n t^{-\beta} \|(-A_n)^\alpha x\|,\ x \in D(A_n^\alpha), \quad t > 0,\ n \in \mathbb{N},$$

pour des constantes $\alpha, \beta > 0$. Ce papier a deux objectifs. Premièrement, des conditions nécessaires et suffisantes sont données afin de caractériser la stabilité polynomiale uniforme d'une famille de c_0-semigroupes $T_n(t)$ sur des espaces de Hilbert H_n. Deuxièment, nous présentons quelques applications de notre résultat pour un système thermoélastique 1d, puis un système hyperbolique-parabolique abstrait.
La stabilité polynomiale uniforme et la forte convergence des semigroupes associés aux schémas approchés sont aussi prouvées.

KEYWORDS : linear thermoelastic system, uniform polynomial stability, semigroup, approximation in control.

MOTS-CLÉS : système thermoélastique linéaire, stabilité polynomiale uniforme, semigroupe, approximation en contrôle.

1. Introduction

One of the main issues in the theory of approximation of partial differential equations is to determine whether the approximate solutions of these equations approach an equilibrium and if yes how fast do the approximate solutions approach it.
Consider the classical solutions of the abstract discrete problem

$$x_n'(t) = A_n x_n(t),\ t \geq 0, \quad x_n(0) = x_n^0, \tag{1}$$

given by $x_n(t) = T_n(t)x_n^0,\ t \geq 0,\ x_n^0 \in D(A_n)$, where the sequence A_n generates a family of c_0-semigroups $T_n(t)$ on the Hilbert spaces H_n. Moreover, we assume that the sequence of generators A_n is closed, $0 \in \rho(A_n)$ and

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} ||A_n^{-1}|| < \infty.$$

Recall that a sequence of c_0-semigroups $T_n(t)$ on the Hilbert spaces H_n are said to be uniformly exponentially stable if

$$\exists M, \alpha > 0 : \|T_n(t)x_n^0\| \leq Me^{-\alpha t}\|x_n^0\|, \forall n. \tag{2}$$

Proving the existence of positive constants M and α independent of n is not easy in general. As the counterexample in [1] shows, even for semigroups $T_n(t) = e^{A_n t}$ with A_n being an $n \times n$ matrix, uniform negative boundedness away from zero of the spectrum $\sigma(A_n)$ of A_n does not guarantee the existence of such constants.
This problem was treated first by Banks in [2], Zuazua and Infante later in [3] tried to characterize these constants independently of n for vibrating systems and many others authors like Carlos Castro, Ramdani,Tucsnak, Liu and Zheng see e. g. [4, 3, 5, 6]. In fact, [5] gives a characterization of uniform exponential stability applied to a one dimensional

thermoelastic system.
However, in general solutions of (1) may converge to 0 polynomially, and not exponentially. This motivate us to study the asymptotic behavior of such approximate systems, i.e.

$$\|tT_n(t)A_n^{-\alpha}\| \leq C, \qquad \forall t > 0, \ \forall n. \tag{3}$$

for some constants $\alpha > 0$. Hence the interest to study the uniform polynomial stability of such c_0-semigroups $T_n(t)$.
We use standard notations. We denote by $\sigma(A_n)$, $\rho(A_n)$, $D(A_n)$, and $R(., A_n)$ the spectrem of A_n, the resolvent set of A_n, the domain of A_n and the resolvent $(. - A_n)^{-1}$ of A_n respectively. By c_0, C, C', M, k etc., we denote generic constants which may change from line to line.

2. Uniform polynomial stability of C_0-semigroups

We give now the main result of this work which gives necessary and sufficient conditions to characterize the uniform polynomial stability of $T_n(t)$, a sequence of c_0-semigroups on Hilbert spaces H_n.
For a single semigroup $T(t)$, the characterization of its polynomial stability was given by Borichev and Tomilov in [7], see also [8].

Theorem 2.1 *Let $T_n(t)$ $(n = 1, \dots)$ be a uniformly bounded sequence of c_0-semigroups on the Hilbert spaces H_n and let A_n be the corresponding infinitesimal generators, such that $i\mathbb{R} \subset \rho(A_n)$ and $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} ||A_n^{-1}|| < \infty$. Then for a fixed $\alpha > 0$, the following conditions are equivalent:*

(i) $$\sup_{s\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}} |s|^{-\alpha}\|R(is, A_n)\| < \infty.$$

(ii) $$\sup_{t>0,\ n\in\mathbb{N}} \|tT_n(t)A_n^{-\alpha}\| < \infty.$$

(iii) $$\sup_{t>0,\ n\in\mathbb{N}} \|t^{\frac{1}{\alpha}} T_n(t)A_n^{-1}\| < \infty.$$

3. Application

In order to illustrate our result of uniform polynomial stability, we investigate the following examples. We consider a one-dimensional linear thermoelastic system, on a bounded domain $\Omega = (0, \pi)$:

3.1. 1d-linear thermoelastic system:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) + \gamma\theta(x,t) = 0 & in\ (0,\pi)\times(0,\infty), \\ \theta_t(x,t) - \gamma u_t(x,t) - k\theta_{xx}(x,t) = 0 & in\ (0,\pi)\times(0,\infty), \\ u(x,t)\mid_{x=0,\pi} = 0 = \theta(x,t)\mid_{x=0,\pi} & on\ (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x),\ \theta(x,0) = \theta_0(x) & on\ (0,\pi), \end{cases} \tag{4}$$

where u is proportional to the displacement and θ is the relative temperature.
The constants $\gamma > 0$ and $k > 0$ represent, respectively, the coupling parameter and thermal diffusivity.

3.2. Abstract hyperbolic-parabolic system:

We consider the abstract hyperbolic-parabolic system related to thermoelastic models

$$\begin{cases} u_{tt} + \rho A^2 u - \mu A^\gamma \theta = 0, \\ \theta_t + \kappa A\theta + \sigma A^\gamma u_t = 0, \\ u(0) = u_0,\ u_t(0) = u_1,\ \theta(0) = \theta_0, \end{cases} \tag{5}$$

where ρ, μ, κ and σ are positive constants, $0 \leq \gamma \leq 1$ and A a self-adjoint non-negative operator in a Hilbert space H, with domain $D(A)$.

Here we show that the approximating semigroups $T_n(t)$ tends to $T(t)$ and $T_n^*(t)$ tends to $T^*(t)$ as the parameter n goes to infinity and if the approximate initial data are well chosen. This is obtained with the help of a general version of the Trotter-Kato Theorem proved in [9] that is appropriated when the approximated semigroups are defined in proper subspaces of the limit one.

References

[1] F. L. Huang., Characteristic conditions for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert spaces, Ann. Diff. Eq., 1 (1985), 43–56.

[2] H. T. Banks., K. Ito and C. Wang., Exponentially stable approximations of weakly damped wave equations, International Series in Numerical Analysis, 100, (1991), 1–33.

[3] J. A. Infante and E. Zuazua., Boundary observability for the space semi-discretizations of the $1-d$ wave equation, ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis-Modélisation Mathématique et Analyse Numérique, 33.2, (1999), 407–438.

[4] C. Castro and S. Micu., Boundary controllability of a linear semi-discrete 1-D wave equation derived from a mixed finite element method, Numerische Mathematik, Volume: 102, Issue: 3, 2006, 413–462.

[5] Z. Y. Liu and S. Zheng., Uniform Exponential Stability and Approximation in Control of a thermoelastic System, SIAM J. Control and optimization, Vol. 32, No. 5, (1994), 1226–1246.

[6] K. Ramdani., T. Takahashi and M. Tucsnak., Uniformly exponentially stable approximations for a class of second order evolution equations, ESAIM COCV, (2007), 503–527.

[7] A. Borichev., Y. Tomilov., Optimal polynomial decay of functions and operator semigroups, Mathematische Annalen, Volume 347, Issue 2, 2010, 455–478.

[8] A. Bátkai., K.-J. Engel., J. Prüss and R. Schnaubelt., Polynomial stability of operator semigroups. Math. Nachr, 279, (2006), 1425-1440.

[9] K.-J. Engel and R. Nagel., One-parameter semigroups for linear evolution equations, Springer-Verlag, NewYork, 2000.

La résolution de l'équation de KdV à coefficients variables en utilisant la méthode de la variable fonctionnelle

Samia ouamane

Département de Physique
Université de constantine 1, Route Ein El Bey, Constantine
Algérie
sam_ouam@hotmail.com

RÉSUMÉ. Nous avons appliqué la méthode de la variable fonctionnelle pour trouver les solutions exactes de l'équation d'ondes non-linéaires, l'équation de KdV à coefficients variables. En appliquant la méthode de la variable fonctionnelle, nous avons obtenu des solutions exactes des ondes notamment les solutions périodiques et les solutions de soliton-like et nous avons trouvé la vitesse d'impulsion qui est affectée par les coefficients variables. Cette méthode est un outil puissant à la recherche des solutions exactes.

ABSTRACT. We have applied the functional variable method to find the exact solutions of the non-linear waves equation, the KdV equation with variable coefficients. By applying the functional variable method, we have obtained the exact solutions in particular, the periodic solutions and the soliton-like solutions and we have found the impulse velocity which is affected by the variable coefficients. This method is a powerful tool to the search of exact traveling solutions in closed form.

MOTS-CLÉS : variable fonctionnelle, l'équation de KdV, soliton-like

KEYWORDS : functional variable, KdV equation, soliton-like

1. Introduction

La plupart des recherches font introduire des fonctions d'essais [1, 2, 3, 4] pour la détermination des différentes solutions de soliton pour étudier les équations non-linéaires à coefficients constants. Dans la section suivante, nous étudions l'équation de KdV à coefficients variables (dépendant du temps) en utilisant la méthode de la variable fonctionnelle.

2. La description de la méthode

Considérons l'équation différentielle partielle non-linéaire suivante, écrite en plusieurs variables indépendantes [5, 6, 7]

$$P\left(u, u_t, u_y, u_z, u_{xy}, u_{yz}, u_{xx}, ...\right) = 0, \tag{1}$$

les indices expriment les dérivées partielles de la fonction inconnue $u(t, x, y, z, ..)$, P est une fonction qui relie les différents êtres mathmatiques tels que $u, u_t, u_y, u_z, u_{xy}, u_{yz}, u_{xx}, ...$ On exprime la nouvelle variable d'onde par :

$$\xi = \delta + \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \chi_i \tag{2}$$

χ_i sont les variables indépendantes, δ et α_i sont des paramètres.

Nous introduisons la transformation suivante pour la solution d'onde

$$u\left(\chi_0, \chi_1, ...\right) = U\left(\xi\right) \tag{3}$$

et avec la règle de chaîne

$$\frac{\partial}{\partial \chi_i}\left(.\right) = \alpha_i \frac{d}{d\,\xi}\left(.\right), \quad \frac{\partial^2}{\partial \chi_i\,\partial \chi_j}\left(.\right) = \alpha_i\,\alpha j \frac{d^{\,2}}{d\,\xi^2}\left(.\right), ... \tag{4}$$

Avec l'utilisation des relations (4) et (5), l'équation différentielle partielle non-linéaire (2) est convertie en

$$Q\left(U, U_\xi, U_{\xi\xi}, U_{\xi\xi\xi}, U_{\xi\xi\xi\xi}, ...\right) = 0 \tag{5}$$

On introduit la fonction inconnue U comme une variable fonctionnelle écrite sous la forme

$$U_\xi = F\left(U\right) \tag{6}$$

et les dérivées successives de U sont

$$U_{\xi\xi} = \frac{1}{2}\left(F^2\right)', U_{\xi\xi\xi} = \frac{1}{2}\left(F^2\right)''\sqrt{F^2}, U_{\xi\xi\xi\xi} = \frac{1}{2}\left[\left(F^2\right)'''F^2 + \left(F^2\right)''\left(F^2\right)'\right], ... \tag{7}$$

L' équation différentielle ordinaire (6) peut être réduite en termes de U, F et ses dérivées en utilisant la relation (9), on obtient une fonction R de la forme

$$R\left(U, F, F\,', F\,'', F\,''', F^4.......\right) = 0 \tag{8}$$

L'Eq.(10) fournit l'expression de F, et alternativement avec l'Eq.(8), on peut extraire les solutions appropriées au problème original. Dans la suite, nous examinons l'équation de KdV traitée par la méthode d'ansatze.

Nous examinons l'équation de *KdV* [8]

$$V_t + f\left(t\right)V_x + g\left(t\right)VV_x + h\left(t\right)V_{xxx} = \alpha\left(t\right), \tag{9}$$

où $f(t)$, $g(t)$ et $h(t)$ sont des coefficients dépendant du temps, et $\alpha(t)$ est le terme de force.

on pose [8]

$$u\left(x,t\right) = V\left(x,t\right) + \beta\left(t\right), \tag{10}$$

où

$$\beta\left(t\right) = \int \alpha\left(t\right)dt \tag{11}$$

La substitution de la relation (12) dans l'Eq.(11) mène à l'équation homogène de KdV

$$u_t + \left[f\left(t\right) + \beta\left(t\right)g\left(t\right)\right]u_x + g\left(t\right)uu_x + h\left(t\right)u_{xxx} = 0 \tag{12}$$

on utilise la variable d'onde

$$\xi\left(x,t\right) = \eta\left(t\right)\left[\left(x - \upsilon(t)\,t\right)\right] \tag{13}$$

avec $\eta\left(t\right)$ et $\upsilon(t)$ des paramètres qui seront déterminés en fonction des coefficients dépendant du temps

En utilisant la relation $u(t,x) = U(\xi)$ et en employant la règle de chaîne, l'Eq.(15) se ramène après intégration à la forme suivante

$$\left\{x\frac{d\eta\left(t\right)}{dt}-\frac{d\left[t\,\eta\left(t\right)v\left(t\right)\right]}{dt}+\eta\left(t\right)\left[f\left(t\right)+\beta\left(t\right)g\left(t\right)\right]\right\}U+\eta\left(t\right)\frac{g\left(t\right)}{2}U^{\,2}+\eta^{3}\left(t\right)h\left(t\right)U_{\xi\xi}=0 \tag{14}$$

de l'Eq.(9), nous déduisons $\eta\left(t\right)=k$ (où k est une constante) et l'expression de la fonction $F(U)$ s'écrit

$$F\left(U\right)=\frac{1}{k}\sqrt{\frac{S\left(t\right)}{h\left(t\right)}}U\sqrt{1-\frac{g\left(t\right)}{3S\left(t\right)}U} \tag{15}$$

avec $S\left(t\right)=\frac{d[t\ v(t)]}{dt}-f\left(t\right)-\beta\left(t\right)g\left(t\right)$

Évidemment, en vertu de l'Eq.(15), l'Eq.(8) est complètement intégrable, puisque ses solutions sont déduites directement de l'intégrale :

$$\int\frac{dy}{y\sqrt{1-y}}=\ln\left|\frac{-1+\sqrt{1-y}}{1+\sqrt{1-y}}\right| \tag{16}$$

Suivant l'Eq.(8) et (15), nous pouvons obtenir l'équation quadratique suivante

$$A^{2}Z^{2}+4\left(1-A^{2}\right)Z-4\left(1-A^{2}\right)=0 \tag{17}$$

avec

$$Z=\frac{g\left(t\right)}{3S\left(t\right)}U \tag{18}$$

et

$$A=\frac{2\tanh\left[\frac{1}{2k}\sqrt{\frac{S(t)}{h(t)}}\xi\right]}{\left\{1+\tanh^{2}\left[\frac{1}{2k}\sqrt{\frac{S(t)}{h(t)}}\xi\right]\right\}} \tag{19}$$

1. Pour $S\left(t\right)h\left(t\right)<0$

En imposant à la relation $\frac{1}{2k}\sqrt{-\frac{S(t)}{h(t)}}$ d'être égale à l'unité, la vitesse s'écrit :

$$v\left(t\right)=\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\left[\left(f\left(t\right)+\beta\left(t\right)g\left(t\right)\right)-\ 4h(t)k\right]dt \tag{20}$$

et les solutions de solitons sont exprimées par :

$$V_1(x,t) = -\frac{12k^2h(t)}{g(t)}\sec^2[k((x-\upsilon(t)\,t))] - \beta(t) \tag{21}$$

$$V_2(x,t) = -\frac{12k^2h(t)}{g(t)}\csc^2[k((x-\upsilon(t)\,t))] - \beta(t) \tag{22}$$

2. Pour $S(t)\,h(t) > 0$

En imposant à la relation $\frac{1}{2k}\sqrt{\frac{S(t)}{h(t)}}$ d'être égale à l'unité, la vitesse s'écrit :

$$\upsilon(t) = \frac{1}{t}\int_0^t [(f(t) + \beta(t)\,g(t)) + \ 4h(t)k]\,dt \tag{23}$$

et l'amplitude $A(t) = \frac{12k^2h(t)}{g(t)}$
et les solutions de solitons sont exprimées par :

$$V_1(x,t) = \frac{12k^2h(t)}{g(t)}\operatorname{sech}^2[k((x-\upsilon(t)\,t))] - \beta(t) \tag{24}$$

$$V_2(x,t) = -\frac{12k^2h(t)}{g(t)}\operatorname{csch}^2[k((x-\upsilon(t)\,t))] - \beta(t) \tag{25}$$

3. Conclusion

Nous avons étudié l'équation de KdV , qui contient des coefficients dépendant du temps. Les solutions de type soliton sont obtenues en employant la méthode de la variable fonctionnelle. On note que pour les deux cas, les solutions exactes sont identiques avec celles trouvées en [8] par la méthode d'ansatze. Nous remarquons que la vitesse d'impulsion $\upsilon(t)$ est affectée par les coefficients qui dépendent du temps $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ et $\beta(t)$.

Il est important de noter que dans notre méthode, la recherche des solutions se fait par intégration directe du système, tandis que par les méthodes d'ansatze, la solution est d'abord supposée. La présente méthode peut être appliquée aux équations d'évolution non-linéaires avec des coefficients dépendant du temps.

Bibliographie

[1] H. Triki, A.M. Wazwaz, Appl. Math. Comput. 214 (2009) 370–373.

[2] H. Triki, A.M. Wazwaz, Phys. Lett. A 373 (2009) 2162–2215.

[3] A. Biswas, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 14 (2009) 3226–3229.

[4] A. Biswas, Phys. Lett. A 372 (2008) 4601–4602.

[5] A. Zerarka and S. Ouamane, World Journal of Modelling and Simulation, Vol. 6 (2010) No. 2, pp. 150-160

[6] A. Zerarka , S. Ouamane and A. Attaf, Waves in Random and Complex Media, 21(2011) No. 1, 44-56.

[7] Samia Ouamane, « L’approche polynomiale et les techniques de décomposition dans le traitement des équations différentielles aux dérivées partielles de la physique » thèse de Doctorat, Université Mohamed Khider, Biskra, Algérie, 2012.

[8] A.M. Wazwaz, Appl.Math. and Comput. 217 (2010) 2277–2281.

Estimation *a posteriori* de l'erreur d'approximation du problème de la diffusion par une méthode multi-échelles

Z. Mghazli [1] — Kh. Ould Ahmed Ould Blal [2]

[1,2] (LIRNE)-(E.I.M.A)-Université Ibn Tofail, Faculté des Sciences B.P. 133 Kenitra, MAROC
[1] mghazli_zoubida@yahoo.com
[2] kh.ouldahmed@gmail.com

RÉSUMÉ. Dans ce travail nous proposons de donner des estimations *a posteriori* de type résidus en vue d'une adaptation de maillage permettant de rendre la méthode multi-échelles traitée dans [2], encore plus performante. Pour cela, comme dans la construction de la méthode, nous procédons en deux étapes. La première étape concerne le maillage fin qui a permis le calcul des fonctions de base multi-échelles. Nous proposons une première adaptation de maillage dans la détermination de ces fonctions. Dans la deuxième étape, la solution globale du problème est obtenue par une formulation couplant ces fonctions de base muti-échelles basées sur le maillage grossier. Une estimation *a posteriori* sur l'erreur commise en approchant la solution du problème avec la solution globale ainsi définie, permettra de savoir si le maillage utilisé est "optimal".

ABSTRACT. In this work we propose to give an *a posteriori* estimates for a mesh adaptation method. The objective is to make even better the multiscale treated in [2]. For this, as in the construction of the method, we proceed in two steps. The first one concerns the fine mesh which allowing to the computation of basic functions multiscale. We propose a first mesh adaptation to determine these functions. In the second step, the solution of the formulation problem is obtained by combining these basic multi-scales functions based on the coarse mesh. An *a posteriori* estimate will determine whether the mesh size used is "optimal".

MOTS-CLÉS : Elements Finis, Element finis multi-échelle, estimation a postriori, indicateurs d'erreurs

KEYWORDS : Finite Element, Multi-scale Finite Element Method, A posteriori error estimates, Error indicator .

1. Introduction

La méthode des éléments finis multi-échelles (MsFEM) a été introduite dans un premier temps par T.Hou et X.H Wu pour les problèmes elliptiques à coefficients fortement oscillants (voir [4] ou [3] pour une revue récente). L'idée principale de MsFEM provient d'un travail de Babuska et Osborn [1]. L'objectif de cette méthode est de capturer la structure multi-échelles de la solution via des fonctions de base locales qui contiennent l'information essentielle des petites échelles. Elle permet ainsi de recouvrir l'information locale en s'adaptant aux caractéristiques spéciales des échelles, ce qui fait d'elle un outil puissant.
Dans ce travail nous proposons de donner les estimations *a posteriori* en vue d'une adaptation de maillage permettant de rendre la méthode multi-échelles traitée dans [2], encore plus performante. Pour cela, comme dans la construction de la méthode, nous procédons en deux étapes. La première étape concerne le maillage fin qui a permis le calcul des fonctions de base multi-échelles. Nous proposons une première adaptation de maillage dans la détermination de ces fonctions. Dans la deuxième étape, la solution globale du problème est obtenue par une formulation couplant ces fonctions de base muti-échelles basées sur le maillage grossier. Une estimation *a posteriori* sur l'erreur commise en approchant la solution du problème avec la solution globale ainsi définie, permettra de savoir si le maillage utilisé est "optimal".

2. Position du problème

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$. Pour une fonction u de $\Omega \to \mathbb{R}$, ν est dans $\mathbb{L}^\infty(\Omega)$ vérifiant pour tout $x \in \Omega$, $\nu(x) \geq \nu_{min} > 0$.
Pour $f \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ le problème de diffusion est : chercher u solution de

$$\left\{ \begin{array}{rll} Lu = -\text{Div}\,(\nu\nabla u) + u & = f & \text{dans } \Omega, \\ u & = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{1}$$

dont une formulation variationnelle est :

$$\text{Trouver } u \in \mathbb{V} \text{ tel que } a(u,v) = (f,v),\ \forall v \in \mathbb{V}, \tag{2}$$

où $\mathbb{V} = \mathbb{H}^1_0(\Omega)$, $\mathbb{H}^1_0(\Omega) = \big\{\varphi \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \nabla\varphi \in (\mathbb{L}^2(\Omega))^2,\ \varphi|_\Gamma = 0\big\}$,
$a(u,v) = \int_\Omega (\nu\nabla u : \nabla v + uv)\,dx$ et $(u,v) = \int_\Omega uv\,dx$, $\forall\, u,v \in \mathbb{V}$.

Notons par $\|\cdot\|_{E,\Omega}$ la norme énergie définie par $\|v\|^2_{(\nu,\Omega)} := \int_\Omega(\nu|\nabla u|^2 + |u|^2)dx$. La forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ est continue et $\mathbb{V}$-elliptique pour cette norme, ce qui donne l'existence et l'unicité de la solution de (2) par le théorème de Lax-Milgram.

3. Méthode multi-échelles

Soit $\mathcal{T}_H$ une triangulation régulière de Ω en triangles ou rectangles K :

$$\Omega = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_H} K.$$

Nous faisons les notations suivantes :

– H_K est le diamètre de l'élément K, $H = \max_K H_K$,
– $\mathcal{E}_H$ est l'ensemble des arêtes des éléments $K \in \mathcal{T}_H$ sauf celles qui font partie de $\partial\Omega$,
– $\mathbb{P}(E)$ est l'espace des fonctions polynomiales de degrés ≤ 1 sur $E \in \mathcal{E}_H$.

La méthode d'approximation proposée est basée sur deux ingrédients principaux : la construction des fonctions de base multi-échelles et une formulation variationnelle couplant ces fonctions et fournissant une approximation précise de la solution. Les fonctions de base multi-échelles sont conçues pour saisir les caractéristiques multi-échelle de la solution et contiennent des informations sur les petites échelles. Elles sont construites à partir de celles des éléments finis standards ($\psi^i,\ i = 1, ..., n$) dans un maillage grossier $\mathcal{T}_H$ de telle manière qu'elles aient le même support et coïncident avec elles sur la frontière de chaque élément de ce support et vérifient l'équation $L\phi = 0$ sur chaque maille grossière. L'approximation de ces fonctions est faite dans $\mathbb{P}^2$ en considérant un maillage fin $\mathcal{T}_h(K)$ dans chaque $K \in \mathcal{T}_H$. La solution globale est maintenant cherchée dans l'espace engendré par ces fonctions de base.

$$\mathbb{V}_H^h = \mathbb{V}ect\left\{\Phi^i_{H,h},\ i = 1, ..., n\right\}$$

Le problème discret global est l'approximation du problème (2) dans les espaces $\mathbb{V}_H^h$: chercher $u_H^h \in \mathbb{V}_H^h$ tels que

$$a(u_H^h, v_H^h) = \int_\Omega f v_H dx,\ \ \forall\ v_H^h \in \mathbb{V}_H^h. \tag{3}$$

Des estimations a priori de l'erreur d'approximation pour ce type de résolution sont traitées dans [2].

4. Estimation *a posteriori* de type résidu

Dans ce travail nous proposons de donner les estimations *a posteriori* en vue d'une adaptation de maillage permettant de rendre cette méthode encore plus performante. Pour cela, comme dans la construction de la méthode, nous procédons en deux étapes.

La première étape concerne le maillage fin qui a permis le calcul des fonctions de base multi-échelles. Ce calcul pouvant être fait par Calcul Parallèle, nous proposons une première adaptation de maillage dans la détermination de ces fonctions. Comme c'est un calcul local, il est réduit et une adaptation ne couterait pas trop cher. Les indicateurs de type résidus dans ce cas sont calssiques et sont de la forme

$$\eta_T := \left(\alpha_T^2 \left\| div(\nu \nabla \Phi_{h,H}) - \Phi_{h,H} \right\|_{0,T}^2 + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_T} \alpha_e^2 \left\| [\nu \nabla_{n_e} \Phi_{h,H}]_e \right\|_{0,e}^2 \right)^{1/2} \qquad [4]$$

où les constantes α_T et α_e sont choisies pour avoir une estimation *a posteriori* efficace , fiable et robuste.
Dans la deuxième étape, la solution globale du problème est obtenue par une formulation couplant ces fonctions de base muti-échelles basées sur le maillage grossier. Une estimation a posteriori sur l'erreur commise en approchant la solution du problème avec la solution globale ainsi définie, permettra de savoir si le maillage utilisé est "optimal". Les indicateurs développés nous permettront de localiser les endroits où éventuellement il faut plus (ou moins) de fonctions de base multi-échelles. Cette démarche nous permet donc de trouver le nombre "optimal" de fonction de base multi-échelles.
Le développement d'estimation *a posteriori* nécessite de définir un opérateur d'interpolation de type Clément adéquat, vérifiant les bonnes estimations. L'opérateur utilisé ici est défini par

$$A_H^h(v) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{\omega_i} \int_{\omega_i} v dx \right) \Phi_H^{i,h}$$

où N est le nombre de fonctions de base multi-échelles, et ω_i est le support de $\Phi_H^{i,h}$, la $i$ème fonction de base multi-échelles.

La borne supérieur de l'erreur est de la forme

$$\left\| u - u_H^h \right\|_\nu \quad \preceq \quad \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_H} \left[\eta_K^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h(K)} \eta_{T,K}^2 + \sum_{T \in K} \alpha_T^2 \left\| f - f_h \right\|_{0,T}^2 \right] \right)^{1/2}$$

avec

$$\begin{aligned}\eta_K : &= \sum_{E\in\mathcal{E}_K} \alpha_E^2 \left\| \left[\nu\nabla_{n_E} u_H^h\right]_E \right\|_{0,E}^2 \\ \eta_{T,K} : &= \sum_{T\in K} \alpha_T^2 \left\| f_h + div(\nu\nabla u_H^h) - u_H^h \right\|_{0,T}^2 + \frac{1}{2}\sum_{T\in K}\sum_{e\in\mathcal{E}_T,\, e\subset K} \alpha_e^2 \left\| \left[\nu\nabla_{n_e} u_H^h\right]_e \right\|_{0,e}^2\end{aligned}$$

Nous pouvons adopter deux stratégies pour améliorer la solution approchée globale :
La première stratégie : Approcher au mieux les fonctions de base multi-échelles par raffinement du maillage fin en utilisant l'estimation :

$$\left\| \phi_H - \phi_H^{i,h} \right\|_{\nu,K} \preceq \left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h(K)} \eta_T^2 \right)^{1/2}$$

puis utiliser les indicateurs sur $E \in \mathcal{E}_H$ pour raffiner le maillage grossier

La deuxième stratégie Pour chaque $K \in \mathcal{T}_H$, calculer les valeurs de indicateurs sur $E \in \mathcal{E}_H$ et les indicateurs sur le maillage fin et décider suivant les valeurs de ces indicateurs quel maillage raffiner.

Des tests numérique seront présentés.

Bibliographie

[1] I. Babuska, J. E. Osborn.,« Generalized finite element methods : their performance and their relation to mixed methods »,*SIAM J.Numer. Anal. 20* (1983),pp. 510-536.

[2] L. Carballal Perdiz, P. Degond, F. Deluzet, R. Loubère, A. Lozinski, J.-M. Rovarch. « Multiscale Finite Element Method for perforted domains. », *Travail en préparation.* ISSN 0029-599X.

[3] Y. Efendiev, T.Y. Hou.,« Multiscale Finite Element Methods Theory and Applications »,Springer Science+Business Media, LLC 2009.

[4] T.Y. Hou, X.H. Wu., « Multiscale finite element method for elliptic problems in composite materials and porous media », *J. Comput. Phys.*, 134 :169-189, 1997.

A Carleman estimate for the two dimensional heat equation with mixed boundary conditions

T. Ali Ziane [1] — H. Ouzzane [2] — O. Zair [3]

[1,2,3] USTHB, Faculté de Mathématiques, Laboratoire AMNEDP
B.P. 32, El Alia, Bab Ezzouar, 16111, Alger
Algérie
[1] taliziane@gmail.com
[2] hadjer.ouzzane7@gmail.com
[3] wahzair@gmail.com

ABSTRACT. It is well known, that in a regular domain, the solutions of the Laplace equation with mixed boundary conditions can present a singular part. In this work, we prove a Carleman estimate for the two dimensional domain heat equation in presence of these singularities.

RÉSUMÉ. Il est bien connu, que dans un ouvert régulier, les solutions du problème mélé, pour l'équation de Laplace présentent des singularités. Le but de ce travail est d'établir une inégalité de Carleman pour l'équation de la chaleur en dimension deux en présence de ces singularités.

KEYWORDS : Carleman estimates, mixed boundary conditions, singularities.

MOTS-CLÉS : Inégalités de Carleman, conditions mixtes, singularités.

1. Introduction

Let Ω be a bounded open connected set of $\mathbb{R}^2$ with C^2 boundary $\Gamma = \partial\Omega$. Let Γ_D and Γ_N be two subsets of Γ such that : $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ and $\overline{\Gamma}_D \cap \overline{\Gamma}_N = \{S_1, S_2\}$. Let $\omega \subset \Omega$ be a non empty open subset. For $T > 0$, we set $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $\Sigma_{DT} = \Gamma_D \times (0,T)$, $\Sigma_{NT} = \Gamma_N \times (0,T)$ and $\Sigma_T = \Gamma \times (0,T)$. We will denote by $\nu(x)$ the outward unit normal to Ω at $x \in \Gamma$. We consider the following mixed boundary value problem:

$$\begin{cases} -\triangle u = f & \text{in} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{on} \quad \Gamma_D, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{on} \quad \Gamma_N, \end{cases} \tag{1}$$

where f is given in $L^2(\Omega)$ and $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ is the normal derivative of u. It is well known, see [6], that the solution of (1) is not in $H^2(\Omega)$, and more precisely the solution, according to [7] is given by

$$u(r,\theta) = u_R(r,\theta) + C_1\sqrt{r_1}\sin\frac{\theta_1}{2}\chi_1 + C_2\sqrt{r_2}\cos\frac{\theta_2}{2}\chi_2, \tag{2}$$

where $u_R \in H^2(\Omega)$ is the regular part, (r_j, θ_j) are the local polar coordinates at S_j, C_j are real constants, χ_j is a cut-off function such that $0 \leq \chi_j \leq 1$ and $\chi_j = 1$ on a neighborhood of S_j.

The aim of this note is to establish a Carleman estimate for the following problem

$$\begin{cases} \partial_t u - \triangle u = f & \text{in} \quad Q_T, \\ u = 0 & \text{on} \quad \Sigma_{DT}, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{on} \quad \Sigma_{NT}, \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{in} \quad \Omega, \end{cases} \tag{3}$$

where $u_0 \in L^2(\Omega)$ and $f \in L^2(Q_T)$.

Carleman estimates have many applications varying from the quantification of the unique continuation problems, inverse problems to stabilization and control theory. These applications are the motivation to prove a suitable Carleman estimate for our problem. To our knowledge, very few results on Carleman estimates in the presence of singularities have been established. We cite [2] for the laplace equation for a domain with a corner, [1] for the heat equation in a singular domain and [3] for the wave equation with mixed conditions using microlocal approach. Our methodology here is in a similar spirit of [1, 4, 5, 8]. In order to get well-posedness for (3), we define the following spaces

$$V = \{u \in H^1(\Omega); \quad u = 0 \text{ on } \Gamma_D\}$$

$$\begin{aligned} D(-\triangle) &= \{u \in V; \quad \triangle u \in L^2(\Omega); \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ on } \Gamma_N\}, \\ &= \{u \in V \cap H^2(\Omega); \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ on } \Gamma_N\} \oplus \text{span}\{r^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\theta}{2}, r^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\theta}{2}\}. \end{aligned}$$

Problem (3) has a unique solution $u \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap C((0,T); D(-\triangle)) \cap C^1((0,T); L^2(\Omega))$. Note that, even for very smooth data f and u_0 , the solution of (3) is not regular near S_1 and S_2.

2. Main result

In the following, for $k = 0, 1$, we set

$$\xi_k(x,t) = \frac{e^{(-1)^k \lambda \beta(x)}}{t(T-t)} \quad , \qquad \alpha_k(x,t) = \frac{e^{2\lambda ||\beta||_\infty} - e^{(-1)^k \lambda \beta(x)}}{t(T-t)}. \tag{4}$$

Here, $\lambda \geq 1$ is a parameter and $\beta = \beta(x)$ is a function satisfying

$$\beta \in C^2(\overline{\Omega}), \quad \beta(x) > 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \ \beta(x) = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega, \quad |\nabla \beta| > 0 \quad \text{on} \quad \overline{\Omega \setminus \omega'}, \tag{5}$$

where $\omega' \subset\subset \omega$ is a non empty open set. The existence of β satisfying (2.1) is proved in [8]. We state our main result, for $\alpha = \alpha_0$ and $\xi = \xi_0$:

Theorem 2.1 *Given $f \in L^2(Q_T)$ and $u_0 \in L^2(\Omega)$. There exists s_0, λ_0 and $C = C(\Omega, \omega)$ such that for any $s > s_0$, $\lambda > \lambda_0$ the solution of (3) satisfies*

$$I(u, \xi_0, \alpha_0, Q_T) \leq C \left(\int\limits_{Q_T} e^{-2s\alpha_0} |f|^2 dx\, dt + s^3 \lambda^4 \int_{\omega \times (0,T)} \xi_0^3 e^{-2s\alpha_0} |u|^2 dx\, dt \right), \tag{6}$$

where

$$I(u, \xi, \alpha, Q_T) = \int\limits_{Q_T} e^{-2s\alpha} \left((s\xi)^{-1} \left(|\partial_t u|^2 + |\Delta u|^2 \right) + s\lambda^2 \xi \, |\nabla u|^2 + s^3 \lambda^4 \xi^3 |u|^2 \right) dx\, dt. \tag{7}$$

Sketch of the proof. The proof will be given in four steps.

Regularization of the solution :

The regularity of the solution u is not sufficient to do some integrations by parts. We then approximate u by a sequence of regular functions (u_n). Spaces $D(-\triangle)$ and

$D((-\triangle)^2)$ are dense in $L^2(\Omega)$, then for $u_0 \in L^2(\Omega)$ and $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, there exist sequences $(u_n^0)_n \subset D((-\triangle)^2)$ and $(f_n)_n \subset C^1(0,T;D(-\triangle))$ such that $(u_n^0)_n$ converges to u_0 in $L^2(\Omega)$ and $(f_n)_n$ converges to f in $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, then the problem (3) with $f = f_n$ and $u_0 = u_n^0$ has a unique solution $u_n \in C^2((0,T);L^2(\Omega)) \cap C^1([0,T];D(-\triangle))$ and we can prove the following lemma

Lemma 2.2 *For $k = 0,1$, set $\psi_{n,k}(x,t) = e^{-s\alpha_k(x,t)}u_n(x,t)$ and $\psi_k(x,t) = e^{-s\alpha_k(x,t)}u(x,t)$, we have*

1) $(u_n)_n$ converges to u in $L^2(0,T;V)$,

2) $(\triangle\psi_{n,k})_n$ converges to $(\triangle\psi_k)$ in $L^2(Q_T)$.

In the sequel, and for simplicity, we will drop the index n.

Approximation of the domain :

To remedy the lack of regularity of the solution near S_1 and S_2, we set, for $\varepsilon > 0$

$$\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \bigcup_{k=1}^{2} B(S_k,\varepsilon), \quad \partial\Omega_\varepsilon = \Gamma_D^\varepsilon \cup \Gamma_N^\varepsilon \cup C_\varepsilon^1 \cup C_\varepsilon^2,$$

$$Q_{\varepsilon,T} = \Omega_\varepsilon \times (0,T), \quad \Sigma_{\varepsilon,T} = \partial\Omega_\varepsilon \times (0,T), \quad C_\varepsilon^k = \partial B(S_k,\varepsilon) \cap \Omega,$$

where $B(S_k,\varepsilon)$ is the ball of radius ε and centred in S_k.

Derivation of the Carleman estimate :

For $k = 0,1$, Let

$$\xi_k(x,t) = \frac{e^{(-1)^k\lambda\beta(x)}}{t(T-t)} \quad , \qquad \alpha_k(x,t) = \frac{e^{2\lambda||\beta||_\infty} - e^{(-1)^k\lambda\beta(x)}}{t(T-t)}, \tag{8}$$

we set

$$\psi_k(x,t) = e^{-s\alpha_k(x,t)}u(x,t) \tag{9}$$

and

$$L\psi_k = M_1\psi_k + M_2\psi_k = F_k,$$

where

$$\begin{cases} M_1\psi_k = 2s\lambda^2\xi_k|\nabla\beta|^2\psi_k + 2(-1)^k s\lambda\xi_k\nabla\beta.\nabla\psi_k + \partial_t\psi_k, \\ M_2\psi_k = -s^2\lambda^2\left|\nabla\beta\right|^2\xi_k^2\psi_k - \Delta\psi_k + s\partial_t\alpha_k\psi_k, \\ F_k = e^{-s\alpha_k}f - (-1)^k s\lambda\xi_k\Delta\beta\psi_k + s\lambda^2\xi_k\left|\nabla\beta\right|^2\psi_k, \end{cases}$$

$(M_1\psi_k)_i\,, (M_2\psi_k)_j$ are respectively the i-th and the j-th term of $M_1\psi_k$ and of $M_2\psi_k$.

$$\|M_1\psi_k\|^2_{L^2(Q_T)}+\|M_2\psi_k\|^2_{L^2(Q_T)}+2\sum_{i,j=1}^{3} < (M_1\psi_k)_i\,, (M_2\psi_k)_j >_{L^2(Q_T)} = \|F_k\|^2_{L^2(Q_T)}\,. \tag{10}$$

Using integration by parts in (10), we derive the following inequality

Lemma 2.3 *There exists s_0, λ_0 and $C = C(\Omega,\omega)$ such that for any $s > s_0$, $\lambda > \lambda_0$,*

$$\begin{aligned} I(\psi_k,\xi_k,\alpha_k,Q_{\varepsilon,T}) + J(\psi_k,\xi_k,\alpha_k,\Sigma_{\varepsilon,T}) \quad \le \quad & C\left(\int\limits_{Q_{\varepsilon,T}} e^{-2s\alpha_k}|f|^2 dx\, dt \right. && [11] \\ & \left. +s^3\lambda^4 \int_{\omega\times(0,T)} \xi_k^3|\psi_k|^2 dx\, dt\right), && [12] \end{aligned}$$

where $I(\psi_k,\xi_k,\alpha_k,Q_{\varepsilon,T})$ is given by (7) and

$$\begin{aligned} J(\psi_k,\xi_k,\alpha_k,\Sigma) \quad = \quad & 2(-1)^{k+1}\left(s^3\lambda^3 \int\limits_{\Sigma} \xi_k^3|\nabla\beta|^2\nabla\beta.\nu|\psi_k|^2 d\sigma dt \right. \\ & +(-1)^k 2s\lambda^2 \int\limits_{\Sigma} \xi_k \frac{\partial\psi_k}{\partial\nu}|\nabla\beta|^2\psi_k d\sigma\, dt \\ & +2s\lambda \int\limits_{\Sigma} \xi_k\left(\nabla\beta.\nabla\psi_k\right)\frac{\partial\psi_k}{\partial\nu}\, d\sigma\, dt - s\lambda\int\limits_{\Sigma} \xi_k\left|\nabla\psi_k\right|^2\left(\nabla\beta.\nu\right) d\sigma\, dt \\ & \left. +(-1)^k \int\limits_{\Sigma} \frac{\partial\psi_k}{\partial\nu}\partial_t\psi_k d\sigma dt - s^2\lambda\int\limits_{\Sigma} \xi\alpha_t\nabla\beta.\nu|\psi|^2 d\sigma\, dt\right) \end{aligned}$$

and

$$J(\cdot,\cdot,\cdot,\Sigma_{\varepsilon,T}) = J(\cdot,\cdot,\cdot,\Sigma^D_{\varepsilon,T}) + J(\cdot,\cdot,\cdot,\Sigma^N_{\varepsilon,T}) + J(\cdot,\cdot,\cdot,C^1_{\varepsilon,T}) + J(\cdot,\cdot,\cdot,C^2_{\varepsilon,T}). \tag{13}$$

Treatment of boundary terms and passing to the limit in ε :

Since $\beta = 0$ on Γ then $\alpha_0 = \alpha_1$, $\xi_0 = \xi_1$ and $\psi_0 = \psi_1$ we deduce that

$$\psi_0 = \psi_1 = 0, \quad \frac{\partial\psi_0}{\partial\nu} = \frac{\partial\psi_1}{\partial\nu}, \quad \text{on } \Gamma^\varepsilon_D \qquad \frac{\partial\psi_0}{\partial\nu} = -\frac{\partial\psi_1}{\partial\nu}, \quad |\nabla\psi_0| = |\nabla\psi_1| \quad \text{on } \Gamma^\varepsilon_N,$$

which implies that

$$\sum_{k=0}^{1} J(\psi_k, \xi_k, \alpha_k, \Sigma_{\varepsilon,T}^D) = \sum_{k=0}^{1} J(\psi_k, \xi_k, \alpha_k, \Sigma_{\varepsilon,T}^N) = 0. \tag{14}$$

On C_ε^l, $l = 1, 2$, we use the density of $D(-\triangle) \cap C^1(\overline{\Omega}) \oplus \mathrm{span}\{r^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\theta}{2}, r^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\theta}{2}\}$ in $D(-\triangle)$, this allows us to write u in the form (2) with $u_R(\cdot, t) \in C^1(\overline{\Omega})$ for all $t \in (0, T)$, which implies that, for any $t \in (0, T)$

$$\psi_k(\cdot, t) = O(\sqrt{\varepsilon}) \quad \text{and} \quad |\nabla \psi_k(\cdot, t)| = O(\tfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}).$$

Using the continuity of α_k and ξ_k, one can have

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{k=0}^{1} J(\psi_k, \xi_k, \alpha_k, C_\varepsilon^l) = 0,\ l = 1, 2. \tag{15}$$

Then from $(13) - (15)$ we deduce that

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{k=0}^{1} J(\psi_k, \xi_k, \alpha_k, \Sigma_{\varepsilon,T}) = 0.$$

Finally, by Lebesgue's theorem, we have

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{k=0}^{1} I(\psi_k, \xi_k, \alpha_k, Q_{\varepsilon,T}) = \sum_{k=0}^{1} I(\psi_k, \xi_k, \alpha_k, Q_T).$$

To achieve the proof of theorem 2.1 we use, as in [4, 8], the usual technics for Carleman estimates and the fact that

$$\xi_1 \le \xi_0 \quad \text{and} \quad e^{-s\alpha_1} \le e^{-s\alpha_0}.$$

Acknowledgment. The authors would like to thank A. Benabdallah for numerous useful discussions. This work is supported by the PNR Sciences fondamentales agreement N° 25/57 and Programme Tassili Projet 11 MDU 834.

References

[1] A. H. Belghazi, F.Smadhi, N.Zaidi, O.Zair., « Carleman inequalities for the two-dimensional heat equation in singular domains », *Mathematical Control and Related Fields.*, **2(4);331-359**, (2012).

[2] L. Bourgeois., « A stability estimate for ill-posed elliptic Cauchy problems in a domain with corners », *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser I.*, **345:385-390**, (2007).

[3] P. Cornilleau, L. Robbiano., « Carleman estimates for the zaremba boundary condition and stabilization of waves », *arXiv:1110.5164v2.*, **1-37**, (2012).

[4] E. Fernandez-Cara, M. Gonzalez-Burgos, S.Guerrero, J.P. Puel., « Null controllability of the heat equation with boundary Fourier conditions: the linear case. », *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, **12(3):442-465**, (2006).

[5] Xiaoyu Fu., « Logarithmic decay of hyperbolic equations with arbitrary small boundary damping », *Comm. Partial Differential Equations*, **34(7-9):957-975**, (2009).

[6] E. Shamir., « Regularity of mixed second order elliptic problems », *Israel Math, J.*, **6:150-168**, (1968).

[7] P. Grisvard., « Contrôlabilité exacte des solutions de l'équation des ondes en présence de singularités », *J.Math. Pures Appli.*, **68(2): 215-259**, (1989).

[8] A. Fursikov and O.Yu. Imanuvilov., « Controllability of evolutions equations », *eoul National Evolution, Korea, Lecture Notes*, **34**, (1996).

Potential theory for quasilinear

elliptic equations in $\mathcal{W}^{1,p(\cdot)}(\Omega)$

A. Qabil — A. Baalal[*] .

[*] LMACS, Laboratoire de Modélisation, Analyse et Controle des Systemes, Département de Mathématiques et d'Informatique, Faculté des Sciences Ain Chock, Km 8 Route El Jadida B.P. 5366 Maarif, Casablanca, MAROC
qabil79@gmail.com

ABSTRACT. We discuss the potential theory associated with the quasilinear elliptic equation in $\mathcal{W}^{1,p(\cdot)}(\Omega)$:

$$-\operatorname{div}(\mathcal{A}(x,\nabla u)) + \mathcal{B}(x,u) = 0.$$

We prove a comparison principle for p(.)-supersolutions and p(.)-subsolutions, existence and uniqueness of the p(.)-Dirichlet problem related to the sheaf $\mathcal{H}$ of continuous solutions of (1), We study the validity of the Keller-Osserman property.

RÉSUMÉ. Dans un espace de Sobolev à exposant variable , en utilisant le p(.)-problème de l'obstacle pour établir l'existence et l'unicité de la p(.)-solution de l'équation suivante :

$$-\operatorname{div}(\mathcal{A}(x,\nabla u)) + \mathcal{B}(x,u) = 0.$$

On généralise d'une part, le principe de comparaison dans $\mathcal{W}^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ pour les p (.)-super solutions, et d'autre part on montre l'existence et l'unicité du problème de Dirichlet, afin de prouver la propriété de Keller-Osserman.

KEYWORDS : Quasilinear elliptic equation, the p(.)-obstacle problem, variable exponent, p(.)-Supersolution, p(.)-Subsolution, p(.)-regular set, comparison principal, Keller-Osserman property.

MOTS-CLÉS : Equation elliptique quasilinéaire, le p(.)-problème de l'obstacle, exposant variable, p(.)-Supersolution, p(.)-Subsolution, ensemble p(.)-régulier, principe de comparison, propriété de Keller-Osserman.

1. Introduction

The equation we have in mind is :

$$-\operatorname{div}(\mathcal{A}(x,\nabla u)) + \mathcal{B}(x,u) = 0\,, \tag{1}$$

where $\mathcal{A} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ and $\mathcal{B} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are Caratheodory functions.

An axiomatic potential theory associated with the equation $\operatorname{div}(\mathcal{A}(x,\nabla u)) = 0$ was introduced and discussed in [3]and recently generalized by Hasto and Harjulehto in [**?**]. These axiomatic setting illustrated by the study of the p(.)-Laplacian problem

$$\Delta_{p(x)} u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u). \tag{2}$$

obtained by $\mathcal{A}(x,\nabla u) = |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u$ for all $x \in \mathbb{R}^d$

This paper is divided into **four sections**: In the **second section** we introduce the basic notation and after recalling some basic facts about variable exponent spaces **in section 3**, we move on to elementary properties of (weak) p(.)-solutions and p(.)-supersolutions (resp. p(.)-subsolutions) of equation (1).These results in **section 4** follow from the same proofs in fixed exponent case, wa also introduce **the p(.)-obstacle problem** apparently for the first time in the equation (1).
In **the section 5** our objectify is to generalized ***the Comparison Principle*** in the variable exponent Sobolev spaces $\mathcal{W}^{1,p(\cdot)}(\Omega)$, for p(.)-supersolutions and p(.)-subsolutions, to prove existence and uniqueness of Dirichlet problem related to the Sheaf $\mathcal{H}$ of continuous solutions of

$$-\operatorname{div}(\mathcal{A}(x,\nabla u)) + \mathcal{B}(x,u) = 0$$

By regularity theory [8], any bounded solution of (1) can be redefined in a set of measure zero so that becomes continuous.

2. Spaces $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ and $\mathcal{W}^{1,p(\cdot)}(\Omega)$

We define the Lebesgue space with variable exponent $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ as the set of all measurable functions $p : \Omega \to]1,+\infty[$ called a ***variable exponent*** and we denote $p^- := \operatorname{ess\,inf}_{x\in\overline{\Omega}} p(x)$ and $p^+ := \operatorname{ess\,sup}_{x\in\overline{\Omega}} p(x)$. For each open bounded subset Ω of $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$, we denote

$$\mathcal{C}_+(\bar{\Omega}) = \{p \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) : p(x) > 1 \text{ for any } x \in \bar{\Omega}\},$$

defines a norm in $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, called **the Luxemburg norm**.

We define the variable exponent Sobolev space (see [5], [4])by

$$W^{1,p(.)}(\Omega) = \{u \in L^{p(.)}(\Omega) : \|\nabla u\| \in L^{p(.)}(\Omega)\}.$$

with the norm

$$\|u\|_{1,p(.)} = \|u\|_{p(.)} + \|\nabla u\|_{p(.)} \quad \forall u \in W^{1,p(.)}(\Omega). \tag{3}$$

we say that measurable function $p(.)$ belongs to the class of ***Log-Hölder*** continuous functions if:

$$(L-H)\begin{cases} \exists C > 0 : |p(x) - p(y)| \leq \frac{C}{-\log|x-y|} for |x-y| < \frac{1}{2}, \\ 1 < p^- \leq p^+ < d. \end{cases}$$

3. Existence and Uniqueness of p(.)-Solutions

We will investigate the existence of p(.)-solutions $u \in \mathcal{W}^{1,p(x)}(\Omega)$ where $1 < p(x) < d$ for all $x \in \Omega$

$$-\operatorname{div}(\mathcal{A}(x, \nabla u)) + \mathcal{B}(x, u) = 0.$$

We suppose that $\mathcal{A} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ is a caratheodory function satisfying the following assumptions:

(M) $[\mathcal{A}(x,\xi) - \mathcal{A}(x,\eta)](\xi - \eta) > 0$ for all $\xi \neq \eta \in \mathbb{R}^d$;

(H1) $|\mathcal{A}(x,\xi)| \leq \beta[k(x) + |\xi|^{p(x)-1}]$;

(H2) $\mathcal{A}(x,\xi)\xi \geq \nu|\xi|^{p(x)}$;

where $k(x)$ is a positive function lying in $L^{p'(x)}(\Omega)$ and $\beta, \nu > 0$.
we suppose that the function $\mathcal{B} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are given Caratheodory function and the following structure conditions are satisfied:

(I) $\zeta \to \mathcal{B}(x,\zeta)$ is increasing and $\mathcal{B}(x,0) = 0$ for every $x \in \mathbb{R}^d$.

(H3) $|\mathcal{B}(x,\xi)| \leq g(x) + |\xi|^{\delta(x)}$ for a.e. $x \in \Omega$, all $\xi \in \mathbb{R}^d$,

where $g : \Omega \to \mathbb{R}^+$, $g \in L^{p'(x)}(\Omega)$ and $0 \leq \delta(x) < p(x) - 1$.

Definition : We say that a $u \in \mathcal{W}^{1,p(x)}_{\text{loc}}(\Omega)$ is a ***p(.)-supersolution*** of (1) in Ω provided that for all $\varphi \in \mathcal{W}^{1,p(x)}_0(\Omega)$ and $\mathcal{B}(.,u) \in L^{p(x)^{*'}}_{\text{loc}}(\Omega)$,

$$\int_\Omega \mathcal{A}(x, \nabla u) \cdot \nabla\varphi dx + \int_\Omega \mathcal{B}(x,u)\varphi dx \geq 0 \quad .$$

For $u \in \mathcal{W}^{1,p(.)}(\Omega)$ and $\mathcal{B}(.,u) \in L^{p'^{*}(.)}_{\text{loc}}(\Omega)$, we define the operator

$$\mathcal{L} : \mathcal{W}^{1,p(.)}(\Omega) \to \mathcal{W}^{-1,p(.)'}(\Omega)$$

as

$$\langle \mathcal{L}(u), \varphi \rangle := \int_\Omega \mathcal{A}(x, \nabla u) \cdot \nabla \varphi dx + \int_\Omega \mathcal{B}(x, u) \varphi dx\,, \quad \varphi \in \mathcal{W}_0^{1,p(x)}(\Omega)$$

here $\langle .,. \rangle$ is the pairing between $\mathcal{W}^{-1,p(x)'}(\Omega)$ and $\mathcal{W}^{1,p(x)}(\Omega)$.
We consider the variational inequality

$$\langle \mathcal{L}(u), v-u \rangle \geqslant 0, \quad \forall v \in \mathcal{K}, u \in \mathcal{K}, \tag{4}$$

where $\mathcal{K}$ is a given closed convex set in $\mathcal{W}^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ such that for given $f \in \mathcal{W}^{1,p(\cdot)}(\Omega)$,

$$\mathcal{K} \subset f + \mathcal{W}_0^{1,p(\cdot)}(\Omega).$$

Typical examples of closed convex sets $\mathcal{K}$ are as follows: for $f \in \mathcal{W}^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ and ψ_1, ψ_2 : $\Omega \to [-\infty, +\infty]$ let the convex set is

$$\mathcal{K}^f_{\psi_1,\psi_2} = \left\{ u \in \mathcal{W}^{1,p(\cdot)}(\Omega) : \psi_1 \leq u \leq \psi_2 \text{ a.e. in } \Omega,\ u - f \in \mathcal{W}_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \right\}. \tag{5}$$

We say that a function $u \in \mathcal{K}^f_{\psi_1}$ is ***a solution of the p(.)-obstacle problem*** $\mathcal{K}^f_{\psi_1}$ if:

$$\langle \mathcal{L}(u), v-u \rangle \geq 0\,, \quad v \in \mathcal{K}^f_{\psi_1}$$

For the uniqueness of a solution to the p(.)-obstacle problem we have the following lemma [3, Lemma 3.22]:

Lemma 3.1

Suppose that u is a solution to the p(.)-obstacle problem in $\mathcal{K}^f_{\psi_1}(\Omega)$. If $v \in \mathcal{W}^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ is a p(.)-supersolution of (1) *in Ω such that* $\min(u,v) \in \mathcal{K}^f_{\psi_1}(\Omega)$*, then a.e. $u \leqslant v$ in Ω.*

Theorem 3.2 *Let ψ_1 and ψ_2 in $L^\infty(\Omega)$, $f \in \mathcal{W}^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ and $\mathcal{K}^f_{\psi_1,\psi_2}$ as above assume that $\mathcal{K}^f_{\psi_1,\psi_2}$ is non empty. Then for every positive constant M, $\|\psi_1\|_\infty \vee \|\psi_2\|_\infty \leqslant < +\infty$ the variational inequality* (4) *has a unique solution.*
Moreover, if $w \in \mathcal{W}^{1,p(x)}(\Omega)$ is a p(.)-supersolution (resp. p(.)-subsolution) to the equation (1) *such that $w \wedge u$ (resp. $w \vee u$) $\in \mathcal{K}^f_{\psi_1,\psi_2}$, then $u \leqslant w$ (resp. $w \leqslant u$).*

As an application of Theorem 3.2, we have the following two theorems.

Theorem 3.3 *Let $f \in \mathcal{W}^{1,p(\cdot)}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ and*

$$\mathcal{K} = \left\{ u \in \mathcal{W}^{1,p(\cdot)}(\Omega) : f \leq u \leqslant \|f\|_\infty \textit{ a. e.}, u - f \in \mathcal{W}_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \right\}.$$

Then there exists $u \in \mathcal{K}$ such that

$$\langle \mathcal{L}(u), v-u \rangle \geqslant 0 \quad \textit{for all } v \in \mathcal{K}\,.$$

Moreover, u is a p(.)-supersolution of (1) *in Ω.*

Theorem 3.4 *Let Ω be a bounded open set of $\mathbb{R}^d$, $f \in \mathcal{W}^{1,p(.)}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Then there is a unique function $u \in \mathcal{W}^{1,p(.)}(\Omega)$ with $u - f \in \mathcal{W}_0^{1,p(.)}(\Omega)$ such that*

$$\int_\Omega \mathcal{A}(x, \nabla u) \cdot \nabla \varphi dx + \int_\Omega \mathcal{B}(x, u)\varphi dx = 0,$$

whenever $\varphi \in \mathcal{W}_0^{1,p(.)}(\Omega)$.

4. Comparison Principle and Dirichlet Problem

Definition (4.1): A relatively compact open set U is called ***regular***, if for every continuous function f on ∂U, there exists a unique continuous p(.)-solution u of (1) on U such that $\lim_{x \to y} u(x) = f(y)$ for all $y \in \partial U$.

If U is $p(x)$-regular and $f \in \mathcal{W}^{1,p(x)}(U) \cap \mathcal{C}(\overline{U})$, then the p(.)-solution u given by Theorem 3.4 satisfies

$$\lim_{x \in U, x \to z} u(x) = f(z)$$

for all $z \in \partial U$ [8, Corollary 4.18].

The following *comparison principle* is useful for the potential theory associated with equation (1):

Lemma 4.1 *Suppose that u is a p(.)-supersolution and v is a p(.)-subsolution on Ω such that*

$$\limsup_{x \to y} v(x) \leqslant \liminf_{x \to y} u(x)$$

for all $y \in \partial\Omega$ and if both sides of the inequality are not simultaneously $+\infty$ or $-\infty$, then $v \leqslant u$ in Ω.

Theorem 4.2 *Every $p(.)$-regular set is regular in the sense of definition (4.1).*

5. Keller-Osserman Property

Let $\mathcal{H}$ be the sheaf of continuous solutions related to the equation (1.1).

Definition: Let U be a relatively compact open subset of $\mathbb{R}^d$. A function $u \in \mathcal{H}^+(U)$ is called regular Evans function for $\mathcal{H}$ and U if $\lim_{U \ni x \to z} u(x) = +\infty$ for every regular point z in the boundary of U.

Definition: We shall say that $\mathcal{H}$ satisfies the Keller-Osserman property, denoted (KO), if every ball admits a regular Evans function for $\mathcal{H}$.

Proposition 5.1 *$\mathcal{H}$ satisfies the (KO) condition if and only if $\mathcal{H}^+$ is locally uniformly bounded (i.e. for every non empty open set U in $\mathbb{R}^d$ and for every compact $K \subset U$, there exists a constant $C > 0$ such that $\sup_K u \leqslant C$ for every $u \in \mathcal{H}^+(U)$).*

Theorem 5.1 *Assume that $\mathcal{A}$ satisfy the following supplementary conditions*

i) For every $x_0 \in \mathbb{R}^d$, the function F from $\mathbb{R}^d$ to $\mathbb{R}^d$ defined by

$F(x) = \mathcal{A}(x, x - x_0)$ is differentiable and $\operatorname{div} F$ is locally (essentially) bounded.

ii) $\mathcal{A}(x, \lambda\xi) = \lambda\,|\lambda|^{p(x)-2}\,\mathcal{A}(x,\xi)$ for every $\lambda \in \mathbb{R}$ and every $x, \xi \in \mathbb{R}^d$.

Then the (KO) property is valid by $\mathcal{H}$.

References

[1] A.Baalal & A.Boukricha: *Potentail Theory For Quasilinear Elliptic Equations*, Electronic Journal of Diferential Equations, Vol. 2001(2001), No. 31, pp. 1-20.

[2] A. Baalal & Nedra BelHaj Rhouma : *Dirichlet problem for quasi-linear elliptic equations*, Electronic Journal of Diferential Equations, Vol. 2002(2002), No. 82, pp. 1-18.

[3] J. Heinonen, T. Kilpläinen, and O. Martio: *Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations* , Clarendon Press, Oxford New York Tokyo, 1993.

[4] L.Diening ,P.Harjulehto, P.Hasto, M.Ruzicka: *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents*, Academic Press, New York, 2011.

[5] O. Kováu(c)ik and J. Rákosnik: *On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{1,p(x)}$*, Czechoslovak Math, J. 41(116)(1991), 592-618.

[6] Stanislav Antontsev & Sergey Shmarev: *Elliptic Equations with Anisotropic Nonlinearity and Nonstandard Growth Conditions*, Handbook Of Differential Equations Stationary Partial Differential Equations, volume 3 Edited by M. Chipot and P. Quittner © 2006 Elsevier.

[7] M.B.Benboubker, E.Azroul, A.Barbara: *Quasilinear Elliptic Problems With Nonstandard Groweth*, Electronic Journal of Diferential Equations, Vol. 2011(2011), No. 62, pp. 1-16.

[8] J. Malý and W. P. Ziemmer, *Fine regularity of solutions of partial differential equations*, Mathematical Surveys and monographs, no. 51, American Mathematical Society, 1997.

Modélisation d'une inclusion mince rugueuse

L. Rahmani* — **K. Lemrabet**** — **D. Teniou**** — **F. Bedouhene***

** Laboratoire AMNEDP,
Faculté de Mathématiques,
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene (USTHB),
Algérie.
keddourlemrabet@yahoo.fr, deteniou@gmail.com.
* Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées (LMPA),
Université Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou (UMMTO),
Algérie,
rahmani_lei@yahoo.fr, fbedouhene@yahoo.fr.

ABSTRACT. We consider a problem posed over a domain that consists of two regions separated by a thin rough layer. Using the techniques of matched asymptotic expansions and periodic homogenization, we investigate an asymptotic expansion of the solution that takes into account its rapid oscillations in the vicinity of the rough inclusion. This work is inspired by [2], [3] and [4].

RÉSUMÉ. Dans ce travail, on étudie un problème posé sur un domaine composé de deux milieux homogènes séparés par une couche mince rugueuse. La petite épaisseur de la couche mince et les rugosités de sa surface, présentent des oscillations rapides qui engendrent des instabilités lors de la simulation numérique de la solution. Pour faire face à ces difficultés, on cherche à approcher ce problème par un autre qui ne fait pas intervenir la couche mince, mais qui rend compte de son effet. Cet effet se traduit par des conditions de transmission entre les deux milieux homogènes. La construction de telles conditions repose sur un développement asymptotique de la solution en fonction du petit paramètre qui caractérise à la fois l'épaisseur et les oscillations rapides de la surface rugueuse. Cependant, les variations rapides de la solution au voisinage de celle-ci ne permettent pas d'écrire un développement uniforme sur le domaine global : on adopte alors une approche qui mixte la théorie de l'homogénéisation et la technique des développements asymptotiques raccordés. L'étude qui suit s'inspire des méthodes développées dans [2], [3] et [4].

KEYWORDS : thin rough layer, homogenization, matched asymptotic expansion.

MOTS-CLÉS : couche mince rugueuse, homogénéisation, développements asymptotiques raccordés.

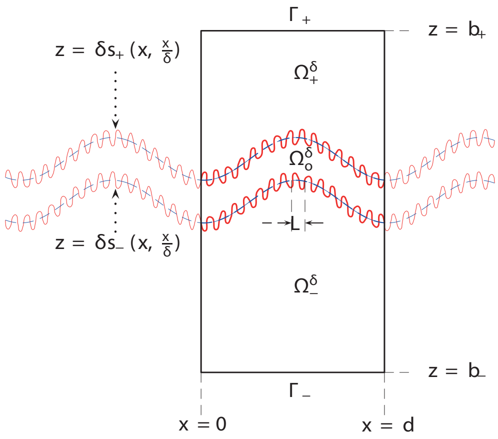
1. Position du problème

On considère un problème de transmission posé sur un domaine composé de deux milieux séparés par une couche mince rugueuse. Dans le but de faire une analyse asymptotique de la solution, on prend un échantillon représentatif, que l'on reproduit par périodicité.

On désigne par $\Omega_+^\delta \subset \mathbb{R}^3$ et $\Omega_-^\delta \subset \mathbb{R}^3$ les domaines correspondant aux deux milieux homogènes, et par Ω_o^δ la couche mince qui les sépare (voir figure ci- contre).
Le petit paramètre δ caractérise à la fois la petite amplitude et les oscillations rapides de la surface rugueuse. Celle-ci est décrite par une fonction à deux échelles :

$$\begin{aligned} z &= \delta s^{\pm}(x_1, x_2, \frac{x_1}{\delta}, \frac{x_2}{\delta}) \\ &= \delta s^{\pm}(x_1, x_2, \sigma_1, \sigma_2)_{|\sigma_1 = x_1/\delta, \sigma_2 = x_2/\delta}. \end{aligned}$$

Les fonctions $x \to s^{\pm}(x, \sigma)$ et $\sigma \to s^{\pm}(x, \sigma)$ sont respectivement périodiques de p ériodes $d = (d_1, d_2)$ et $L = (L_1, L_2)$.



Soient $f_\pm \in L^2(\Omega_\pm^\delta)$. Le problème de transmission auquel on s'intéresse s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} p_+ \Delta u_+^\delta = f_+ & \text{dans } \Omega_+^\delta, \\ p_- \Delta u_-^\delta = f_- & \text{dans } \Omega_-^\delta \\ p_o \Delta u_o^\delta = 0 & \text{dans } \Omega_o^\delta, \\ u_+^\delta = u_o^\delta, \quad p_+ \dfrac{\partial u_+^\delta}{\partial n} = p_o \dfrac{\partial u_o^\delta}{\partial n} & \text{sur } S_+^\delta, \\ u_-^\delta = u_o^\delta, \quad p_- \dfrac{\partial u_-^\delta}{\partial n} = p_o \dfrac{\partial u_o^\delta}{\partial n} & \text{sur } S_-^\delta, \\ u_+^\delta = 0 \quad \text{sur } \Gamma_+, \qquad u_-^\delta = 0 & \text{sur } \Gamma_-. \end{array} \right. \tag{1}$$

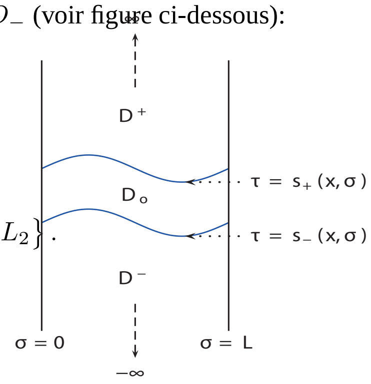
On suppose que f_+ et f_- sont indépendants de δ et qu'ils sont à support loin de la surface rugueuse. On fait l'hypothèse que les coefficients p_+et p_- ne dépendent pas de δ, tandis que p_o varie en δ^{-1} : $p_o = \delta^{-1} q$, avec $q > 0$.

2. Développement asymptotique.

2.1. Développement de la solution.

On introduit la cellule de base $D = D_+ \cup \bar{D}_o \cup D_-$ (voir figure ci-dessous):

$$D_+ = \left\{(\sigma,\tau) \in \mathbb{R}^3,\ \sigma \in Q_L,\ \tau > s^+(x,\sigma)\right\},$$
$$D_- = \left\{(\sigma,\tau) \in \mathbb{R}^3,\ \sigma \in Q_L,\ \tau < s^-(x,\sigma)\right\},$$
$$D_o = \left\{(\sigma,\tau) \in \mathbb{R}^3,\ \sigma \in Q_L,\ s^- < \tau < s^+\right\},$$
$$Q_L = \left\{\sigma = (\sigma_1,\sigma_2) \in \mathbb{R}^2; 0 < \sigma_1 < L_1, 0 < \sigma_2 < L_2\right\}.$$



Les bords $S^\pm$ de D_0 correspondent aux surfaces décrites par l'équation $\tau = s^\pm(x,\sigma)$.

On suppose l'existence du développement asymptotique suivant :

• Loin de la couche rugueuse (développement externe):

$$u^\delta(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n V_+^n(x,z) \quad \text{si } z > 0 \qquad \text{et} \qquad u^\delta(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n V_-^n(x,z) \quad si\ z < 0, \tag{2}$$

où les termes $V_\pm^n$ (champs lointains), indépendants de δ, sont définis sur $\Omega_\pm$:

$$\Omega_+ = \left\{(x,z) \in \mathbb{R}^3,\ x \in Q_d,\ b_+ > z > 0\right\}; \Omega_- = \left\{(x,z) \in \mathbb{R}^3,\ x \in Q_d,\ b_- < z < 0\right\}.$$

• Au voisinage de la couche rugueuse (développement interne) :

$$u^\delta(x,z) = U^\delta(x,\sigma,\tau) = \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \delta^n U_\pm^n(x,\sigma,\tau), & (\sigma,\tau) \in D_\pm \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} \delta^n U_0^n(x,\sigma,\tau), & (\sigma,\tau) \in D_0. \end{cases} \tag{3}$$

Les termes U^n (champs proches) sont périodiques de période L en σ: $U^n(x,\sigma+L,\tau) = U^n(x,\sigma,\tau)$. On note par Γ l'interface :

$$\Gamma = \left\{(x,z) \in \mathbb{R}^3,\ x \in Q_d,\ z = 0\right\}.$$

Equations des champs lointains. En substituant le développement externe de u^δ dans les équations du problème (1) et en identifiant formellement les coefficients de même puissance de δ, on obtient

$$\begin{cases} p_\pm \Delta V_\pm^n = \varepsilon_n^0 f_\pm & \text{dans } \Omega_\pm, \\ V_\pm^n = 0 & \text{sur } \Gamma_\pm, \end{cases} \tag{4}$$

où $\varepsilon_n^0 = 1$ si $n = 0$ et 0 sinon. Ces équations ne permettent pas de définir complètement V^n : il manque des conditions de transmission entre V_+^n et V_-^n , sur l'interface Γ.
Equations des champs proches. Au voisinage de la couche mince, on réécrit les équations du problème en fonction des variables x, σ et τ et on injecte le développement de U^δ ; on obtient alors deux types de problèmes:
• Un problème de type Neumann sur D_o :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_{\sigma,\tau} U_o^m (x,\sigma,\tau) = F_o^m (x,\sigma,\tau) \text{ dans } D_o, \\ (\nabla_\sigma s^+ . \nabla_\sigma U_o^m - \partial_\tau U_o^{0m}) (x,\sigma,s^+(x,\sigma)) = G_m^+ (x,\sigma,s^+(x,\sigma)) \text{ sur } S^+, \\ (\nabla_\sigma s^- . \nabla_\sigma U_o^m - \partial_\tau U_o^{0m}) (x,\sigma,s^-(x,\sigma)) = G_m^- (x,\sigma,s^-(x,\sigma)) \text{ sur } S^-. \end{array} \right. \quad (5)$$

• Un problème de type Dirichlet sur $D_\pm$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_{\sigma,\tau} U_\pm^m (x,\sigma,\tau) = F_\pm^m (x,\sigma,\tau) \text{ dans } D_\pm, \\ U_\pm^m (x,\sigma,s^\pm(x,\sigma)) = U_o^m (x,\sigma,s^\pm(x,\sigma)) \text{ sur } S^\pm, \end{array} \right. \quad (6)$$

où les données $F_\pm^m$ vérifient $(\Delta_{\sigma,\tau})^{m-1} F_\pm^m (x,\sigma,\tau) = 0$.
On montre que le problème (5) admet une solution, dans l'espace de Sobolev $H_\#^1 (D_o)$, unique (à une constante près) si F_o^m et $G_m^\pm$ vérifient la condition de compatibilité naturelle. Par ailleurs, sous des hypothèses de régularité et de décroissance à l'infini sur $F_\pm^m$, le problème (6) admet une solution unique dans l'espace

$$W_\#^1(D_\pm) = \left\{ \phi \in L^2_{\# loc}(D_\pm); \frac{\phi}{\sqrt{1+\tau^2}} \in L_\#^2(D), \nabla_{\sigma\tau}\phi \in \mathbb{L}_\#^2(D_\pm) \right\}.$$

2.2. Conditions de raccord

Comportement des champs lointains au voisinage de l'interface. Un développement de Taylor au voisinage de Γ montre que

$$V_\pm^n (x,z) = \sum_{k\in\mathbb{N}} z^k \left[S_k^0 (\nabla_x) V_{\pm|\Gamma}^n + S_k^1 (\nabla_x) D_z V_{\pm|\Gamma}^n \right],$$

où $k! S_k^0 (\nabla_x) = \left\{ \begin{array}{c} (-\Delta_x)^p \text{ si } k = 2p, \\ 0 \text{ sinon,} \end{array} \right.$ et $k! S_k^1 (\nabla_x) = \left\{ \begin{array}{l} (-\Delta_x)^p \text{ si } k = 2p+1, \\ 0 \text{ sinon.} \end{array} \right.$.
Comportement des champs proches à l'infini. Pour comprendre le comportement des champs proches à l'infini, on développe les fonctions $\sigma \to U_\pm^n (x,\sigma,\tau)$ en série de Fourier. En désignant par $\mathbb{P}_m$ l'espace des polynômes de la variable τ, d'ordre m, dont les coefficients sont des fonctions régulières de x ; on montre qu'il existe des polynômes $p_\pm^{2n} (x,\tau)$, $p_\pm^{2n+1} (x,\tau) \in \mathbb{P}_{2n+1}$ et pour $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2, \mathbf{k} \neq \mathbf{0}$, $p_{\pm\mathbf{k}}^n \in \mathbb{P}_n$, tels que :

$$U_\pm^n (x,\sigma,\tau) = p_\pm^n (x,\tau) + \sum_{\mathbf{k}\neq\mathbf{0}} p_{\pm\mathbf{k}}^n (x,\tau) \, e^{-\frac{2\pi|\mathbf{k}|}{L_1 L_2}\tau} e^{\frac{2i\pi}{L_1 L_2}\mathbf{k}.\sigma}.$$

Dans la suite, on posera $l_D\left(U_{\pm}^{n}\right)=p_{\pm}^{n}\left(x,0\right)$ et $l_N\left(U_{\pm}^{n}\right)=\frac{d}{d\tau}p_{\pm}^{n}\left(x,0\right).$
Conditions de raccord. Si $z=\delta^{\alpha}$ avec $0<\alpha<1$, alors $\lim_{\delta\to 0}\delta^{\alpha}=0$ mais $\lim_{\delta\to 0}\frac{\delta^{\alpha}}{\delta}=\infty$. Le développement des champs proches quand $\tau=\frac{z}{\delta}$ tend vers $\pm\infty$ doit coincider avec le développement des champs lointains au voisinage de Γ (i.e. quand z tend vers 0). Il s'en suit :

$$\sum_0^{\infty}\delta^n p_{\pm}^{n}\left(x,\tau\right)\approx\sum_0^{\infty}\delta^n V_{\pm}^{n}\left(x,\delta\tau\right).$$

En utilisant le comportement de $V_{\pm}^{n}$ au voisinage de Γ et celui des $U_{\pm}^{n}$ au voisinage de l'infini, on déduit les conditions de raccord :

$$l_D\left(U_{\pm}^{n}\right)=V_{\pm|\Gamma}^{n}\text{ et }l_N\left(U_{\pm}^{n}\right)=D_zV_{\pm|\Gamma}^{n-1}.$$

2.3. Détermination des termes du développement

• **Détermination des termes des champs proches $\mathbf{U}_o^0,\ \mathbf{U}_{\pm}^0,\mathbf{U}_o^1,\ \mathbf{U}_{\pm}^1$.**
Le terme U_o^0 résout le problème (5), avec des seconds membres nuls, ce qui donne: $U_o^0=U_o^0\left(x\right)$ (constante dépendant uniquement de x). Les termes $U_{\pm}^0$ sont solutions du problème (6), avec $F_{\pm}^0=0$. On montre alors que $U_{\pm}^0=U_o^0(x)$. De plus, les conditions de raccord donnent :

$$U_o^0(x)=V_{+|\Gamma}^0=V_{-|\Gamma}^0,$$

ce qui fournit la première condition de transmission manquante pour le problème résolu par V^0. Par ailleurs, en exploitant le problème vérifié par U_o^1, on obtient

$$U_o^1(x,\sigma,\tau)=A_o^1(x,\sigma,\tau).\nabla_x U_o^0\left(x\right)+W_o^1(x),$$

où $A_o^1(x,\sigma,\tau)$ est une solution du problème (5), avec $F_0^0=0$ et $G_0^{\pm}=-\nabla_{\sigma}s^{\pm}(x,\sigma)$. Les termes $U_{\pm}^1$ sont déterminés alors en résolvant le problème (6), avec $F_{\pm}^1=0$.
• **Détermination des termes lointains** V^0,V^1.
Pour définir V^0, il faut identifier la deuxième condition de transmission portant sur les dérivées normales. Pour cela, on établit une relation entre $l_N\left(U_{+}^1\right)$ et $l_N\left(U_{-}^1\right)$, en imposant la condition de compatibilité pour le problème résolu par U_o^2. On démontre alors que le terme V^0 est solution du problème de transmission

$$\left\{\begin{array}{c}p_{\pm}\Delta V_{\pm}^0=f_{\pm}\quad\text{dans }\Omega_{\pm},\\ V_{\pm}^0=0\quad\text{sur }\Gamma_{\pm},\\ V_{+}^0=V_{-}^0,\quad p_{+}\partial_z V_{+}^0=p_{-}\partial_z V_{+}^0+Q(V_{+}^0,V_{-}^0)\quad\text{sur }\Gamma\end{array}\right.$$

où le terme $Q(V_+^0, V_-^0)$ est donné par :

$$Q(V_+^0, V_-^0) = \frac{q}{L_1 L_2} \left[\int_{Q_L} \left[\nabla_x s^+ .(\nabla_\sigma \left(A_o^1 . \nabla_x V_{+|\Gamma}^0 \right) + \nabla_x V_{+|\Gamma}^0) + \nabla_\sigma s^+ . \nabla_x \left(A_o^1 . \nabla_x V_{+|\Gamma}^0 \right) \right] d\sigma \right.$$
$$- \int_{Q_L} \left[\nabla_x s^- .(\nabla_\sigma \left(A_o^1 . \nabla_x V_{-|\Gamma}^0 \right) + \nabla_x V_{-|\Gamma}^0) + \nabla_\sigma s^- . \nabla_x \left(A_o^1 . \nabla_x V_{-|\Gamma}^0 \right) \right] d\sigma$$
$$\left. - \int_{D^o} \left(2\nabla_\sigma . \nabla_x (A_o^1 . \nabla_x V_{+|\Gamma}^0) + \Delta_x V_{+|\Gamma}^0 \right) d\sigma d\tau \right] .$$

Pour déterminer V^1, on établit la première condition de transmission entre V_+^1 et V_-^1, en liant $l_D \left(U_+^1 \right)$ et $l_D \left(U_-^1 \right)$. Par ailleurs, la condition de transmission entre les dérivées normales $\partial_z V_+^1$ et $\partial_z V_-^1$ est établie en liant $l_N \left(U_+^2 \right)$ et $l_N \left(U_-^2 \right)$ (ce qui correspond à la condition de compatibilité pour la détermination de U_0^3).

2.4. Approximation asymptotique

Pour définir une approximation sur tout le domaine, on recolle une approximation interne et une approximation externe. On choisit une fonction $\eta(\delta)$ telle que $\lim_{\delta \to 0} \frac{\eta(\delta)}{\delta} = +\infty$ et $\lim_{\delta \to 0} \eta(\delta) = 0$, et une fonction de troncature $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant:

$\chi(t) = 1$ pour $|t| \le \max \left\{ \inf s^-, \sup s^+ \right\}$ et $\chi(t) = 0$ pour $|t| \ge 2 \max \left\{ \inf s^-, \sup s^+ \right\}$,

et on pose $\chi_\eta(z) = \chi(\frac{z}{\eta})$. L'approximation globale est alors:

$$u_\delta^\eta(x,z) = \chi_\eta(z) \phi_\delta^i(x,z) + (1 - \chi_\eta(z)) \, \phi_\delta^e(x,z),$$

où $\phi_\delta^e(x,z) = V^0(x,z) + \delta V^1(x,z)$ et $\phi_\delta^i(x,z) = U^0 \left(x, \frac{x}{\delta}, \frac{z}{\delta} \right) + \delta U^1 \left(x, \frac{x}{\delta}, \frac{z}{\delta} \right)$,

et on montre que

$$\left\| u^\delta - u_\delta^\eta \right\| \le C \delta^{\frac{3}{2}}.$$

Support : Ce travail est supporté par le projet PNR n° 25/67/11, Laboratoire AMNEDP USTHB, DGRSDT.

References

[1] A. Bendali and K. Lemrabet. « The effect of a thin coating on the scattering of a time-harmonic wave for the Helmholtz equation », SIAM J. Appl. Math., 56 (6) (1996), 1664-1693.

[2] B. Delourme, H. Haddar, P. Joly. « Approximate models for wave propagation across thin periodic interfaces », Journal de Mathématiques pures et appliquées, 98 (2012), 28-71.

[3] J. R. Poirier, A. Bendali, P. Borderies. « Impedance boundary conditions for the scattering of time-harmonic waves by rapidly varying surfaces », Antennas and propagation, IEEE transactions, 54(3) (2006), 995-1005.

[4] K. Schmidt and S. Tordeux. Asymptotic modelling of conductive thin sheets. Zeitschrift fur Angewandte Mathematik and physik, 61 (4) : 603-626, 2010.

An Inverse Eigenvalue Problem of Computing Guided Mode In a Graded-Index Optical Fiber with a Circular Section

Hayat REZGUI*

* ENS of Kouba. Algiers, Algeria, Email: rezguihayat2003@yahoo.fr

ABSTRACT. This work is concerned with an inverse eigenvalue problem (problem of reconstructing the refractive index) of computing guided modes that propagate under weak guidance assumptions, in a graded-index optical fiber of circular section, knowing only a finite number of spectral data.

RÉSUMÉ. Ce travail porte sur un problème inverse aux valeurs propres (qui consiste à reconstruire l'indice de réfraction) du calcul des modes guidés susceptibles de se propager sous les conditions de faible guidage, dans une fibre optique à gradient d'indice et de section circulaire, et ce en connaissant un nombre fini de données spectrales.

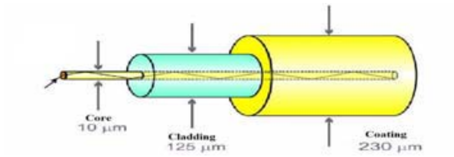
KEYWORDS : inverse problem, eigenvalues, optical fibers of circular section, guided modes, regularization.

MOTS-CLÉS : problème inverse, valeurs propres, fibres optiques de section circulaire, modes guidés, régularisation.

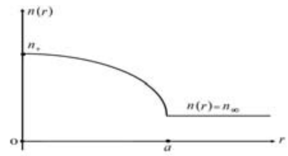
1. Introduction.

This work is concerned with an inverse eigenvalue problem of computing guided modes that propagate under weak guidance assumptions, in a graded-index optical fiber with a circular section.(Figure (a), Figure (b))

We recall that computing these guided modes (direct problem) consists in solving the



(a) An optical fiber.



(b) A graded (parabolic) index profile($\alpha = 2$).

following scalar eigenvalue problem $(\mathcal{P})$ posed in the plane $\mathbb{R}^2$ $([1], [2], [4])$:

$$(\mathcal{P}) \left| \begin{array}{l} \text{Find } \lambda \in \left]0, V^2\right[,\ u \in H^1(\mathbb{R}^2),\ u \neq 0 \text{ , such that:} \\ -\Delta u(x,y) + q(x,y)u(x,y) = -\lambda u(x,y), \text{ dans } \mathbb{R}^2 \end{array} \right.$$

where:

$\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ is the Laplacian operator in two dimensions.

The graded-index fiber whose radial index distribution n (which is a real-valued function depending on (x, y)) has the form: $([1], [2], [3])$:

$$n(x,y) = n(r) = \begin{cases} n_+\sqrt{1 - 2\delta\left(\dfrac{r}{a}\right)^\alpha} & , 0 \leq r = \sqrt{x^2+y^2} \leq a \\ n_\infty & , a \leq r = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

and satisfying:

$n \in L^\infty(\mathbb{R}^2),\ n_+ = \sup\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} n(x,y),\ n_- = \inf\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} n(x,y).$

$\delta = \dfrac{n_+^2 - n_\infty^2}{2n_+^2},\ \delta \ll 1,$ δ is the normalized difference index.

$n_\infty = n_+\sqrt{1-2\delta},\quad n_+ > n_\infty.$

and thus:

$$\begin{aligned} q(x,y) = q(r) &= -k^2(n^2(x,y) - n_\infty^2) \\ &= -k^2\left(n_+^2 - 2n_+^2\delta\left(\frac{r}{a}\right)^\alpha - n_\infty^2\right)\cdot\chi_{[0,a]} \end{aligned}$$

such that: $\chi_{[0,a]}$ represents the indicator (characteristic) function of $[0,a]$. We note that q is a bounded function with a compact support.In the other hand, we have:
a is the characteristic radius of the fiber's core, ($1 \leq a$) r is the radial coordinate.
$\lambda = \beta^2 - k^2 n_\infty^2$ is an eigenvalue of (P) γ is the wavelength in free space.
$V^2 = k^2(n_+^2 - n_\infty^2)$, V is called the normalized frequency, β represents the propagation constant.
$k = \dfrac{2\pi}{\gamma}$ is the wavenumber, it is constant, α is a positive real number.
u is a transverse component of the electromagnetic field.
The major difficulty in calculating the couple (λ, u) in the problem $(\mathcal{P})$ is the way to take into account the character of the unbounded domain which is $\mathbb{R}^2$.

2. The Objective of this work.

The aim of this work is to determine the refractive index n, knowing only a finite number of spectral data, with a numerical method based on the least squares procedure. The inverse problem to be solved is then:

$$(\mathrm{P}_2)\left|\begin{array}{l} \text{Find } q \text{ (a smooth function) on } \mathbb{R}^2 \text{ such that :} \\ -\Delta u(x,y) + q(x,y)u(x,y) = -\lambda u(x,y), \quad \text{in } \Omega_R \subset \mathbb{R}^2. \end{array}\right.$$

where: $\Omega_R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x^2 + y^2 < R^2\right\}$, and: $1 \leq a < R$.
We denote:
$c = (c_0, c_1, ..., c_{m-1})^t \in \mathbb{R}^m$.
$\lambda_1(c), \lambda_2(c), ..., \lambda_n(c)$ are the n first eigenvalues of problem (P_2) associated to $p(r)$, with Dirichlet conditions.
$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ are the n first eigenvalues of problem (P_2) associated to $q(r)$, with Dirichlet conditions.
$\Lambda(c) = (\lambda_1(c), \lambda_2(c), ..., \lambda_n(c))^t \in \mathbb{R}^n$.
$\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)^t \in \mathbb{R}^n$.
In what follows, we set: $M = \dfrac{k^2(n_+^2 - n_\infty^2)}{a(m+1)R^{m-1}}$.
and: $\mathcal{C}(M) = \left\{c = (c_0, c_1, ..., c_{m-1})^t\, in\mathbb{R}^m / \;\forall j:\; 0 \leq j \leq m-1 : |c_j| \leq M\right\}$.

3. The Adopted Numerical Method.

Let $c^* = \left(c_0^*, c_1^*, ..., c_{m-1}^*\right)^t \in \mathcal{C}(M)$ be an initial value of $c = (c_0, c_1, ..., c_{m-1})^t$, that being said:

$$p^*(r) = \begin{cases} (a-r).\sum_{j=0}^{m-1} c_j^* r^j & , \forall r \in [0, a] \\ 0 & , \forall r \in [a, R] \end{cases}$$

After replacing $q(x, y) = q(r)$ by $p^*(r)$ in the problem (P_2), we will determine the n first eigenvalues $\lambda_1(c^*), \lambda_2(c^*), ..., \lambda_n(c^*)$ associated to Dirichlet conditions, and therefore $\Lambda(c^*) = (\lambda_1(c^*), \lambda_2(c^*), ..., \lambda_n(c^*))^t \in \mathbb{R}^n$.
we consider the initial linearization $L_1(c)$ of $\Lambda(c^*)$ defined by:

$$L_1(c) = \Lambda(c^*) + \Gamma_1.(c - c^*)$$

where Γ_1 is the matrix defined by:

$$\Gamma_1 = \left(\frac{\partial \lambda_k}{\partial c_j}(c^*)\right)_{1 \leq k \leq n,\ 0 \leq j \leq m-1}$$

we conclude that: $\Gamma_1 \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.
It's obviously that $L_1(c) \in \mathbb{R}^n$, since:

$$\Lambda(c^*) \in \mathbb{R}^n, \Gamma_1 \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \text{ and } (c - c^*) \in \mathbb{R}^m$$

so $L_1(c) = (L_1^1(c), L_1^2(c), ..., L_1^n(c))^t$
where:
$\forall$k, 1 $\leq$k$\leq$ n :

$$\begin{aligned} L_1^k(c) &= \lambda_k(c^*) + \sum_{j=0}^{m-1} \left(\frac{\partial \lambda_k}{\partial c_j}(c^*).(c_j - c_j^*)\right) \\ &= \lambda_k(c^*) + (\nabla \lambda_k(c^*))^t.(c - c^*) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial c_j}\left(c^1\right) \approx \frac{\delta \lambda_k}{\delta c_j}\left(c^1\right) = \frac{\lambda_k\left(c^1\right) - \lambda_k(c^*)}{c_j^1 - c_j^*}.$$

Generally, for each $i \geq 2$, we consider the linearization of $\left(\lambda_k\left(c^i\right)\right)_{1 \leq k \leq n}$ defined by:

$$L_i(c) = \Lambda\left(c^{i-1}\right) + \Gamma_i.\left(c - c^{i-1}\right)$$

where Γ_i is the matrix defined by:

$$\Gamma_i = \left(\frac{\partial \lambda_k}{\partial c_j}\left(c^{i-1}\right)\right)_{1 \leq k \leq n,\ 0 \leq j \leq m-1}$$

Hence: $\Gamma_i \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, $L_i(c) \in \mathbb{R}^n$.
It's obviously that $L_i(c) \in \mathbb{R}^n$, since:

$$\Lambda\left(c^i\right) \in \mathbb{R}^n,\ \Gamma_i \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \text{ and } \left(c - c^i\right) \in \mathbb{R}^m$$

so $L_i(c) = (L_i^1(c), L_i^2(c), ..., L_i^n(c))^t$
where: $\forall k; 1 \leq k \leq n$:

$$\begin{aligned} L_i^k(c) &= \lambda_k(c^i) + \textstyle\sum_{j=0}^m \left(\frac{\partial \lambda_k}{\partial c_j}(c^i).(c_j - c_j^i)\right) \\ &= \lambda_k(c^i) + \nabla\lambda_k(c^i).(c - c^i) \end{aligned}$$

Lemma 3.1 *We note that:* $\forall i \in \mathbb{N}^*; \quad \|\Gamma_i\|_2 > 0.$

Proposition 3.1 *Let* $f_i : \mathcal{C}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$*, such that:*

$$f_i(c) = \|\Lambda - L_i(c)\|_2, \forall i \in \mathbb{N}^*.$$

Then: $\forall i \in \mathbb{N}^*$, f_i *is a continuous function on* $\mathcal{C}(M)$.

Axiom 1 *In fact,* $\forall i \in \mathbb{N}^*$: *the function* f_i *is a lipschitzian function on* $\mathcal{C}(M)$.

The First Stage:
we set:$c^1 = \arg\min_{c \in \mathcal{C}(M)} \|\Lambda - L_1(c)\|_2$
it means that: $\left\|\Lambda - L_1(c^1)\right\|_2 = \min_{c \in \mathcal{C}(M)} \|\Lambda - L_1(c)\|_2$
The ith Stage: $\mathbf{i \geq 2}$
Now, after determining the initial linearization $L_1(c)$, we move to the next stage which is the determination of the general linearization $L_i(c)$ at each step i ($\mathbf{i \geq 2}$), this leads to the construction of the matrix Γ_i at each step i, using the following formula:

$$c^i = \arg\min_{c \in \mathcal{C}(M)} \|\Lambda - L_i(c)\|_2$$

which means that: $\forall j : 0 \leq j \leq m-1, \forall k : 1 \leq k \leq n :$
$\left\|\Lambda - L_i(c^i)\right\|_2 = \min_{c \in \mathcal{C}(M)} \|\Lambda - L_i(c)\|_2$ and:

$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial c_j}\left(c^i\right) \approx \frac{\delta \lambda_k}{\delta c_j}\left(c^i\right) = \frac{\lambda_k\left(c^i\right) - \lambda_k\left(c^{i-1}\right)}{c_j^i - c_j^{i-1}}$$

we repeat this numerical process until we find:

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}^*, \exists c \in \mathcal{C}(M) :\ \|\Lambda - L_{n_0}(c)\|_2 \text{ is too small.}$$

Then we consider: $c = (c_0, c_1, ..., c_{m-1})^t \in \mathcal{C}(M)$
which minimize $\|\Lambda - L_{n_0}(c)\|_2$, and however; we replace by $c = (c_0, c_1, ..., c_{m-1})^t$ in the expression of:

$$p(r) = (a-r). \sum_{j=0}^{m-1} c_j r^j, \forall r \in [0,a]\,. \text{ and } p(r) = 0, \forall r \in [a,R]\,.$$

References

[1] M. Djellouli. R., « Contribution à l'Analyse Mathématique et au Calcul des Modes Guidés des Fibres Optiques », Thèse de Doctorat es-Sciences, Université Paris-Sud, France, 1988.

[2] M. Djellouli. R, M. Bekkey. C, M. Choutri. A. and Mlle. Rezgui. H., « A Local Boundary Condition Coupled to a Finite Element Method to Compute Guided Modes of Optical Fibers under the Weak Guidance Assumptions », *Mathematical Method in the Applied Sciences*, **23** (2000), 1551–1583.

[3] M. Okamoto. K., « Fundamentals of Optical Waveguides », Elsevier: USA, 2006.

[4] Mlle. Rezgui. H., « Une méthode d'éléments finis couplée à une condition artificielle pour le calcul des modes guidés dans les fibres optiques en régime de faible guidage », Thèse de Magistère, Ecole Normale Supérieure de Kouba, Algiers, Algeria, 1999.

Estimation des paramètres dans un milieu poreux : coefficient d'emmagasinement et transmissivitié hydraulique

Mohamed El Hédi Riahi * — Hend Ben Ameur — Jérôme Jaffré*****

* LAMSIN-ENIT, B.P. 37, 1002 Tunis-Belvedere, Tunis, Tunisia
riahi28@yahoo.fr
** LAMSIN-ENIT & IPEST, B.P. 37, 1002 Tunis-Belvedere, Tunisia
hbenameur@yahoo.ca
*** Inria-Rocquencourt, BP 105, 78153 Le Chesnay Cedex, France
Jerome.Jaffre@inria.fr

RÉSUMÉ. Dans ce travail nous nous intéressons à la résolution d'un problème inverse d'estimation de paramètres dans un milieu poreux.
Le problème étudié consiste à identifier simultanément le coefficient d'emmagasinement et la transmissivité hydraulique dans un écoulement souterrain gouverné par une équation parabolique linéaire. Les deux paramètres sont supposés constants par zone, il faut identifier à la fois les formes géométriques des zones et les valeurs des deux paramètres.
Le problème est formulé comme un problème de minimisation d'une fonction moindre carré qui mesure l'écart entre les hauteurs piézométriques mesurées et les quantités correspondantes calculées avec les valeurs courantes des paramètres [1, 2]. Nous utilisons la technique de paramétrisation adaptative guidée par les indicateurs de raffinement [1, 4]. L'algorithme de résolution du problème inverse d'estimation de paramètres considéré est validé avec des données de la nappe de la montagne Rocky au USA [6].

ABSTRACT. In this work, we are interested on the inverse problem of parameters estimation in porous media. The problem is to identify storage coefficient and hydraulic transmissivity simultaneously in groundwater flow gouverned by a linear parabolic equation.
The two parameters are assumed to be a piecewise constant space functions. The unknowns are storage coefficient, hydraulic transmissivity as well as the geometry in these zones when these parameters are constant. This problem is formulated as a minimization problem of an objective function defined as a least-squares which shows the difference between measurements and the corresponding quantities computed with the current parameters values [1, 2]. We use an adaptative parametrization technique guided by refinement indicators[1, 4]. We test the algorithm considered to solve the inverse problem of parameter estimation with data the aquifer of the Rocky Mountaine in USA [6].

MOTS-CLÉS : Problème inverse, estimation des paramètres, coefficient d'emagasinement, transmissivité hydraulique, paramétrisation, indicateur de raffinement.

KEYWORDS : Inverse problem, parameter identification, storage coefficient, hydraulic transmissivity,parametrization, refinement indicators.

1. Introduction

L'hydrogéologie, ou l'étude des nappes phréatiques est une source abondantes de problèmes inverses. En effet il est difficile d'accéder aux couches du sous-sol pour mesurer les propriétés des roches [2]. C'est dans ce but se pose le problème de l'estimation des paramètres hydrogéologiques. Dans ce travail, on s'interesse à l'estimation du coefficient d'emmagasinement et de la transmissivité hydraulique dans un écoulement souterrain gouverné par une équation parabolique linéaire. On considère que ces deux paramètres dépendent de la variable espace. De plus en passant d'une zone géologique à une autre, ces deux paramètres presentent des fortes discontinuités à l'interface entre ces zones. Le coefficient d'emmagasinement et la transmissivité sont alors considérés constants par zones, les frontières de ces zones sont à déterminer aussi bien que les valeurs des paramètres dans les zones.

2. Problème direct

Soit l'équation qui modélise les écoulements d'eau dans une nappe captive [1, 2].

$$S\frac{\partial H}{\partial t} - div(T\nabla H) = Q \quad \text{dans } \Omega \times [0, t_f] \tag{1}$$

avec S coefficient d'emmagasinement, T transmissivité hydraulique, H hauteur piézométrique et Q terme source.
Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et la variable de temps t appartient à l'intervalle $[0, t_f]$
A cette équation nous associons des conditions aux limites et des conditions initiales qui s'écrivent :

$$\begin{array}{rcll} H & = & H_d & \text{dans } \Gamma_D \times [0, t_f], \\ (-T\nabla H).n & = & q_N & \text{dans } \Gamma_N \times [0, t_f], \\ H(0) & = & H_0 & \text{dans } \Omega, \end{array} \tag{2}$$

où n est la normale extérieure à Ω, Γ_D et Γ_N sont les parties du bord de Ω où sont vérifiées les conditions de Dirichlet et de Neumann respectivement.
Les équations (1) et (2) représentent le problème direct sous sa forme continue. Pour la résolution numérique de ce problème, nous utilisons le code $SUTRA$ qui est un code

aux éléments finis qui résout les problèmes des écoulements saturés et non-saturés et le transfert de solutés ou de chaleur [6].

3. Problème inverse

Le problème inverse d'estimation de paramètres que nous considérons est posé comme un problème de minimisation d'une fonction moindre carré mesurant l'écart entre les hauteurs piézométriques mesurées et celles calculées avec les paramètres courants [1, 2]. La fonction objectif discrète est définie par :

$$J(S,T) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} |H^{cal}(M_j,t_i) - d_{ij}^{obs}|^2 \tag{3}$$

avec d_{ij}^{obs} hauteur piézométrique mesurée au point M_j et à l'instant t_i et $H^{cal}(x_j,t_i)$ hauteur piézométrique calculée via le modèle. Pour la minimisation de J nous utilisons le code N2QN1 qui utilise la méthode de Quasi-Newton avec approximation de la Hessienne par la méthode BFGS.
Une étape assez importante dans l'algorithme d'optimisation considère et celle du calcul du gradient de la fonction J par rapport aux paramètres du problème. Nous utilisons la méthode de l'état adjoint pour calculer le gradient de J par rapport à S et T.
L'état adjoint p satisfait les équations suivantes :

$$\begin{aligned} -S\frac{\partial p}{\partial t} - div(T\nabla p) = -(H(S,T) - d^{obs}) \text{ dans } \Omega \times [0,t_f] \\ p = 0 \text{ sur } \Gamma_D \times [0,t_f] \\ (-T\nabla p).n = 0 \text{ sur } \Gamma_N \times [0,t_f] \\ p(t_f) = 0 \text{ dans } \Omega \end{aligned} \tag{4}$$

Le gradient de J par rapport à S et T s'exprime en fonction de H solution du problème direct et de p solution du problème adjoint, il est donné par :

$$\frac{\partial J}{\partial S} = \int_{[0,t_f]}\int_{\Omega} \frac{\partial H}{\partial t} p \quad dtd\Omega, \frac{\partial J}{\partial T} = \int_{[0,t_f]}\int_{\Omega} \nabla H \nabla p \quad dtd\Omega \tag{5}$$

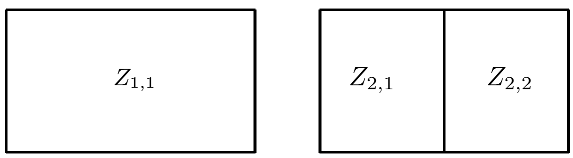
4. Paramétrisation adaptative

Pour la résolution numérique du problème direct nous commençons par la discrétisation du domaine spatio-temporelle. Si nous utilisons la même grille de discrétisation pour les paramètres, les paramètres inconnus auront autant de composantes que de mailles de discrétisation. Sachant que le nombre d'observations des hauteurs piézométriques est très réduit, il ne serait pas possible de déterminer le paramètre comme inconnue par maille. Il

est essentiel de réduire le nombre d'inconnus. Pour cela on développe une méthode qui minimise le nombre de paramètres à estimer et puisse tenir compte du nombre d'observations disponibles.
Comme exemples de techniques de paramétrisation en hydrogéologie,, nous pouvons citer la zonation introduite par Cooly en 1977 [3], l'interpolation introduite par Yech et Yoon en 1981 [3] et la paramétrisation multiéchelle utilisée par Chavent et Liu [1, 3].
Dans le cadre de ce travail nous utilisons la technique de paramétrisation adaptative guidé par des indicateurs de raffinement developpée par H. Ben Ameur, G. Chavent et J. Jaffré [1]. L'idée de cette technique est de passer de l'itération i à l'itération $i+1$ en ajoutant un degré de liberté, sélectionné suivant un indicateur de raffinement de façon que l'optimisation à l'itération $i+1$ produise une diminution importante de la fonction objectif, relativement à l'itération i [1]. La paramétrisation de l'étape $i+1$ compte une zone de plus par rapport à la paramétrisation de l'étape i

4.1. Indicateur de raffinement

Pour définir la nouvelle paramétrisation, nous utilisons des indicateurs de raffinements. Ces indicateurs permtent de localiser les discontinuités des paramètres qui n'ont pas encore été pris en considération, une seule, estimée plus impottant, est retenue.
Nous allons procéder sur un exemple [1, 3] :
Soit la figure suivante :



Problème P_1 Problème P_2

Soit le problème P_1 à une seule zone $Z_{1,1}$. On suppose que la transmissivité hydraulique et le coefficient d'emmagasinement sont constants dans tout le domaine $Z_{1,1}$. Alors nous avons un seul paramètre $m_1 = (S_{1,1}, T_{1,1})$ à estimer. Soit $m_1^{opt} = (S_{1,1}^{opt}, T_{1,1}^{opt})$ la solution du problème d'optimisation.
Supposons maintenant que le domaine est subdivisé en deux zones, donc P_2 à deux zones $Z_{2,1}$ et $Z_{2,2}$. La fonction objectif J devient une fonction à deux variables $J(m_{2,1}, m_{2,2})$. Sachant que les paramètres $m_{2,1} = (S_{2,1}, T_{2,1})$ et $m_{2,2} = (S_{2,2}, T_{2,2})$ ont des valeurs différentes dans chaque zone.
Notons $(m_{2,1}^{opt}, m_{2,2}^{opt})$ la solution du problème d'optimisation. Nous définissons la discon-

tinuité de paramètres $c = (c_1, c_2)$ avec $c_1 = S_{2,1} - S_{2,2}$ et $c_2 = T_{2,1} - T_{2,2}$
Ces deux conditions peuvent s'écrire comme une équation algébrique $Am_2 = c$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, m_2 = \begin{pmatrix} S_{2,1} \\ T_{2,1} \\ S_{2,2} \\ T_{2,2} \end{pmatrix}$$

Estimer le paramètre m_2 revient à résoudre :

$$J^c(m_2^{opt}) = J^c(m_{2,1}^{opt}, m_{2,2}^{opt}) = \min_{Am_2=c} J^c(m_2), \tag{6}$$

On introduit le Lagrangien définit par :

$$L^c(m_2, \lambda) = J^c(m_2) + (\lambda, Am_2 - c) \tag{7}$$

Où λ est le multiplicateur de Lagarnge associé à la contrainte $Am_2 = c$.
Le développement de Taylor de la fonction J^c au voisinage de $c = 0$ à l'ordre 1 est donné par :

$$J^{c,opt}(m_2) = J^{0,opt}(m_2^{opt}) + c\frac{\partial J^{c,opt}(m_2^{opt}, \lambda^{opt})}{\partial c}\Big/_{c=0} + o(c) \tag{8}$$

$||\frac{\partial J^{c,opt}(m_2^{opt}, \lambda^{opt})}{\partial c}\Big/_{c=0}||$ modélise à un première ordre la variation $|J^{c,opt}(m_2) - J^{0,opt}(m_2)|$.
Cette quantitée définit l'indicateur de raffinement.

4.2. Algorithme

Nous adaptons un algorithme initialement proposé pour l'estimation des transmissivités hydrauliques [1].
Ou cas d'estimation de paramètres vectoriel une étape de cet algorithme s'écrit :

1) Minimiser J avec la paramétrisation courante $\mathcal{P}$

2) Pour chaque partie Ω_i de $\mathcal{P}$, calculer les indicateurs de raffinement.

3) Calculer I_{max} : Extraire les coupes dont les indicateurs correspondants sont supérieurs ou égaux à $\delta * I_{max}$, $0.5 \leq \delta \leq 1$.

4) Retenir la coupe qui donne la décroissance la plus importante de J.

5) Mettre à jour de $\mathcal{P}$.

5. Test numérique

Nous avons estimé la transmissivité hydraulique et le coefficient d'emmagasinement avec les données la nappe de Rocky Mountaine aux USA [6]. Nous commençons par une

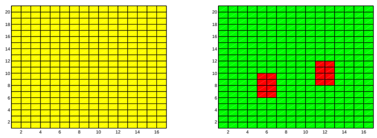


Figure 31 – Paramétrisation initiale de T Paramétrisation finale de T

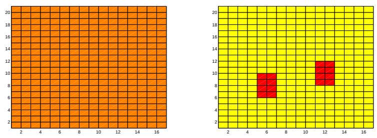


Figure 32 – Paramétrisation initiale de S Paramétrisation finale de S

paramétrisation constant pour chaque paramètres S et T :
Nous avons bien arrivé à la paramétrisation exacte de la nappe de ROCKY pour chaque T et S.

Bibliographie

[1] F.Delay, A.Buoro, G.De Marsily,J.Delhomme , 1999, *40 Years of inverse problems in hydrogeology*. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 2. Science de la terre et des planètes 73-87, 1999.

[2] N.Sun, 1994, *Inverse Problems In Groundwater Modeling*, Kluwer Academic Publishers, 1994.

[3] M.Hayek, Ph.Achkerer, F.Lehmann,*Identification des paramèters hydrogéologiques par approche multiechelle*, IMFS Strasbourg.

[4] H.Ben Ameur, J.Jaffré, G. Chavent, 2002 , *Refinement and coarsening indicators for adaptive parameterization application to estimation of hydraulic transmissivities*, Inverse Problems, 775-794,2002.

[5] H.Ben Ameur, F.Clément, P.Weis, G. Chavent,2002 , *Image segmentation with multidimensional refinement indicators.*, Problems in Science and Engineering.

[6] Voss Clifford.I, M.Provost Alden, *A model for saturated-unsaturated variable-density ground-water flow with solute or energy transport.*, June, 2003.

TAMTAM, Algérie, Alger 27 — 30 Avril 2013

Modèles numériques

de transport réactif en milieu poreux

Sabit souhila* — Erhel Jocelyne**

* , ** INRIA-Rennes
INRIA, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex
France
* . souhila.sabit@inria.fr
** . jocelyne.erhel@inria.fr

RÉSUMÉ. La modélisation du transport réactif en milieu poreux est un problème complexe cumulant les difficultés de la modélisation du transport avec celles de la chimie. Après discrétisation en espace, le modèle semi-discret est un système couplé algébro-différentiel. L'objectif de ce papier est de comparer dans ce cadre le schéma d'Euler explicite (méthode SNIA) avec un schéma BDF implicite (méthode GDAE). SNIA permet de découpler transport et chimie mais a des contraintes de stabilité. GDAE, associée à un logciel spécifique, n'a pas ces contraintes et permet d'adapter dynamiquement le pas de temps, mais chaque pas de temps est coûteux en calcul. Des essais numériques illustrent les comportements des deux méthodes.

ABSTRACT. Modeling of reactive transport in porous media is a complex problem combinaison the difficulties of transport modeling with those of chemistry. After spatial discretization, the semi-discrete model is a coupled algebro-differential system. The objective of this paper is to compare in this framework the explicit Euler scheme (SNIA method) with an implicit BDF scheme (GDAE method). SNIA decouples transport from chemistry but has stability constraints. GDAE, combined with a specific software, does not have these constraints and provides a dynamic timestep adaptation, but each timestep is computationaly expensive.

MOTS-CLÉS : PDAE, chimie, transport, Newton

KEYWORDS : PDAE, chemistry, transport, Newton

1. Introduction

Le transport réactif de contaminants en milieu poreux est modélisé par des équations aux dérivées partielles et algébriques dont les inconnues sont les quantités des espèces chimiques [1], [2]. La plupart des modèles numériques utilisent une méthode des lignes, qui induit un système semi-discret algébro-différentiel, après discrétisation en espace [3]. L'approche séquentielle non itérative (SNIA) utilise ensuite un schéma d'Euler explicite. L'approche globale de substitution directe (DSA) utilise un schéma d'Euler implicite et une méthode de Newton. L'approche globale GDAE généralise DSA en proposant un schéma implicite BDF à ordre et pas variable [3],[4]. Elle est implémentée dans le logiciel GRT3D [5].

L'objectif de ce papier est de comparer l'approche SNIA et l'approche GDAE, en termes de coûts d'utilisation mémoire, de temps de calcul, de précision des résultats. Des essais numériques avec un cas test 2D illustrent le comportement de ces deux approches.

2. Modèle

2.1. Modèle géochimique

Nous considérons un système géochimique composé d'espèces chimiques aqueuses ou fixées et d'espèces minérales précipitées. Nous supposons que toutes les réactions chimiques sont à l'équilibre thermodynamique et que le seuil de saturation est toujours atteint pour les minéraux présents. Nous définissons des espèces secondaires dont les concentrations s'expriment à partir d'espèces principales, appelées composantes, à l'aide des lois d'action de masse. Ensuite nous introduisons les concentrations totales analytiques pour exprimer les lois de conservation de la masse. Soit $X = (c, s, p)$ l'ensemble des inconnues chimiques, où c (respectivement s,p) est le vecteur des N_c concentrations des composantes aqueuses (respectivement N_s composantes fixées, N_p minéraux). Soit T (respectivement W) la concentration totale analytique des composantes mobiles (respectivement fixées). Dans un système fermé, T et W sont donnés, alors qu'ils peuvent varier dans un système ouvert. Le modèle géochimique s'écrit $\Phi(X) = (T, W, 1)$ avec les contraintes $c \geq 0, s \geq 0, p > 0$, où $\Phi(X)$ traduit les lois de conservation de la masse ainsi que les seuils de saturation des minéraux.

2.2. Modèle de transport réactif

Les phénomènes d'advection et de dispersion régissent le transport de solutés. Le tenseur de dispersion est défini par $D = d_m I + \alpha_T \|v\| I + (\alpha_L - \alpha_T)\frac{vv^T}{\|v\|}$, où d_m est le coefficient de diffusion moléculaire, α_L (resp. α_T) est le coefficient de dispersion longitudinale (resp. transversale), v est la vitesse du fluide. Sous des hypothèses classiques, l'opérateur de transport s'écrit : $\mathcal{L}(u) = \nabla \cdot (vu - D\nabla u)$. Soit $C(X)$ le vecteur des concentrations totales des composantes aqueuses, qui sont les seules espèces mobiles. Grâce à la séparation en composantes et à la définition des totaux analytiques, leur transport est modélisé par :

$$\omega \frac{\partial T_i}{\partial t} + \mathcal{L}(C_i(X)) = Q_i, \quad i = 1, \ldots, N_c, \tag{1}$$

où ω est la porosité et Q_i est un terme source donné. Ce système d'équations est complétée par des conditions initiales et des conditions aux limites. Ici, on suppose que W est donné, tandis que T est variable. Les équations de transport sont couplées à celles de la chimie en tout point du domaine.

2.3. Discrétisation spatiale

La plupart des modèles numériques utilisent la méthode des lignes, qui discrétise d'abord en espace puis en temps. La discrétisation spatiale choisie doit éviter les artefacts numériques tels qu'oscillations ou diffusion artificielles. L'opérateur de transport discret s'écrit $LU - G$, où L est une matrice carrée d'ordre N_m, le nombre de points spatiaux et où G représente les conditions aux limites.

Les variables du modèle numérique de transport réactif sont stockées dans des tableaux, par exemple $T = (T_1, \ldots, T_{N_m})$. La colonne $T_j, j = 1, \ldots, N_m$ contient toutes les composantes en un point et la ligne $T_i, i = 1, \ldots, N_c$ contient une composante en tous les points.

Avec ces notations, le système semi-discret de transport s'écrit

$$\begin{cases} \omega \frac{dT_i}{dt} + LC_i(X) = Q_i + G_i, \quad i = 1, \ldots, N_c, \\ \Phi(X_j) = (T_j, W_j, 1), \quad j = 1, \ldots, N_m, \\ \text{condition initiale pour } T. \end{cases} \tag{2}$$

3. Approche explicite(SNIA)

L'approche séquentielle non itérative SNIA est une méthode basée sur le schéma d'Euler explicite et s'écrit très simplement, avec un pas de temps Δt :

$$\begin{cases} \omega T_i^{n+1} + \Delta t L C_i(X^n) = \omega T_i^n + \Delta t (Q_i^n + G_i^n), \quad i = 1, \ldots, N_c, \\ \Phi(X_j^{n+1}) = (T_j^{n+1}, W_j^{n+1}, 1), \quad j = 1, \ldots, N_m. \end{cases}$$

À chaque pas de temps, on calcule explicitement et de façon indépendante les totaux T_i, puis on résout dans chaque maille de façon indépendante la spéciation chimique. Les contraintes de stabilité imposent de choisir un pas de temps petit, lié au pas d'espace Δx.

4. Approche globale (GDAE)

Le système semi-discret (2) est un système algébro-différentiel d'indice 1, dont le Jacobien peut être calculé [3, 4]. Les approches DSA sont basées sur un schéma en temps implicite, qui conduit à un système non linéaire couplé à chaque pas de temps, résolu globalement par une méthode de Newton. La méthode GDAE utilise un schéma BDF, où les dérivées sont approchées par $\frac{dT_i}{dt} \simeq \frac{a}{\Delta t}T_i + \frac{1}{\Delta t}Z_i$, où a est donné, Δt est le pas de temps et Z_i est une combinaison de T_i aux pas de temps précédents. On obtient alors le système non linéaire

$$\begin{cases} \frac{a\omega}{\Delta t}T_i + LC_i(X) + ... = 0, \\ \Phi(X_j) - (T_j, W_j, 1) + ... = 0. \end{cases}$$

où ... désigne une quantité connue. On peut alors éliminer T pour obtenir un système avec la variable X [4].

Il est important de pouvoir ajuster dynamiquement l'ordre du schéma et le pas de temps, en fonction de la précision souhaitée et de la convergence de la méthode de Newton. Afin de gagner du temps de calcul, il faut aussi geler le Jacobien tant que les critères de précision et convergence sont satisfaits. Cette approche est implémentée dans le logiciel GRT3D [5], qui s'appuie sur le logiciel MT3D pour discrétiser le transport [2], sur la suite SUNDIALS pour intégrer le système algébro-différentiel [6] et sur UMFPACK [**?**] pour résoudre les systèmes linéarisés.

5. Résultats numériques : test ANDRA 2D

Nous utilisons un cas test fourni par l'Andra, où une eau alcaline est injectée dans un milieu poreux 2D contenant du quartz [4]. Le domaine est un rectangle de taille $5m \times 3.5m$ et le milieu, initialement saturé en eau, contient 10 moles/l de quartz sans eau alcaline. On injecte une eau alcaline (NaOH), avec une concentration 10^{-2} moles/l, au point M de coordonnées (1 ; 1.75). Le système géochimique contient trois composants aqueux Na^+ (inerte chimiquement), OH^- et H_4SiO_4, deux espèces aqueuses secondaires H^+ et $H_3SiO_4^-$ et un précipité SiO_2, qui réagissent de la façon suivante :

$$\begin{cases} H_2O & \rightleftarrows & H^+ + OH^- & K_1 = 10^{-14}, \\ H_4SiO_4 & \rightleftarrows & SiO_2 + 2H_2O & K_2 = 10^{-9.8}, \\ H_4SiO_4 & \rightleftarrows & H_3SiO_4^- + H^+ & K_3 = 10^{3.6}. \end{cases}$$

Les données de transport sont les suivantes : $\omega = 1$, $v = (5.7 \times 10^{-7}, 0)^T$ m.s^{-1}, $d_m = 0$, $\alpha_L = 0.2\ m$, $\alpha_T = 0.05\ m$. Un flux nul est imposé au bord du domaine et la simulation dure 30 jours.

La composante inerte Na^+ satisfait une équation de transport dont la solution analytique est :

$$x_{Na^+} = \frac{0.01\delta_M}{4v\pi\sqrt{\alpha_L\alpha_T}t} \exp\left(-\frac{(x - x_M - vt)^2}{4v\alpha_L t} - \frac{(y - y_M)^2}{4v\alpha_T t}\right).$$

L'erreur E_{Na^+} est définie par

$$E_{Na^+} = [\frac{1}{N_m N_t} \sum_{n,j} (\tilde{x}_{Na^+}(m_j, t_n) - x_{Na^+}(m_j, t_n))]^{1/2}$$

où $\tilde{x}_{Na^+}(m_j, t_n)$ est la solution calculée en chaque point $m_j, j = 1....N_m$ et à chaque instant $t_n, n = 1...N_t$.

Le domaine est maillé de façon régulière avec $N_m = n_1 \times n_2$ cellules. Avec SNIA, le pas de temps $\triangle t_e$ est choisi de façon à garantir la stabilité numérique, tandis qu'il est adapté dynamiquement avec GDAE. La figure (33) montre le temps de calcul et l'espace mémoire utilisés par les deux méthodes pour quatre maillages. la méthode globale GDAE est nettement plus précise et plus rapide que la méthode explicite SNIA. Par contre, le logiciel GRT3D utilise un peu plus de mémoire, tout en restant à moins de 1 Go pour le maillage le plus fin.

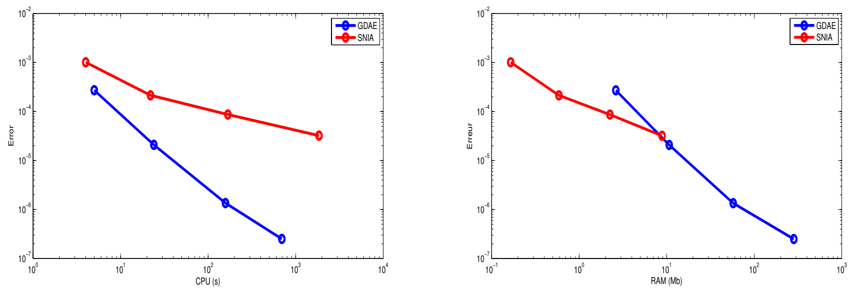


Figure 33 – Erreur E_{Na^+} pour GDAE (en bleu) et SNIA (en rouge) pour 4 maillages : $N_m = 21 \times 14,\ \triangle t_e = 3600;\ N_m = 41 \times 28,\ \triangle t_e = 1296;\ N_m = 81 \times 56, \triangle t_e = 432;$ $N_m = 161 \times 112, \triangle t_e = 120$; à gauche : temps CPU (s) ; à droite : mémoire RAM (MB).

Conclusion

Cet article présente une comparaison entre une approche explicite SNIA et une approche globale GDAE pour simuler un transport réactif. Au vu des résultats, le choix de GDAE s'impose. Nous travaillons maintenant à réduire le coût mémoire dans le logiciel GRT3D.

Remerciements. Ce travail est partiellement financé par l'Andra et par le programme ANR-MN-2012 (projet H2MNO4).

Bibliographie

[1] Craig M. Bethke. « Geochemical Reaction Modeling : Concepts and Applications », Oxford University Press, 1996.

[2] C. Zheng and G. D. Bennett. « Applied Contaminant Transport Modeling », second edition. John Wiley and Sons, New-York, 2002.

[3] C. de Dieuleveult, J. Erhel , M. Kern. « A global strategy for solving reactive transport equations » ; Journal of Computational Physics, France, 2009.

[4] J. Erhel, S. Sabit, and C. de Dieuleveult. « Computational Technology Reviews, chapter Solving Partial Differential Algebraic Equations and Reactive Transport Models ». Saxe-Coburg Publications, 2013.

[5] S. Sabit and N. Soualem. « Suite logicielle grt3d (global reactive transport 3d) ». Rapport de contrat andra, INRIA, 2011.

[6] A. C. Hindmarsh, P. N. Brown, K. E. Grant, S. L. Lee, R. Serban, D. E. Shumaker, , and C. S. Woodward. « SUNDIALS : Suite of nonlinear and differential/algebraic equation solvers ». ACM Transactions on Mathematical Software, 31 :363–396, 2005. Also available as LLNL technical report UCRL-JP-200037.

Autour de l'approximation de Born-Oppenheimer

A. Senoussaoui*— B. Messirdi**

* Université d'Oran, Faculté des Sciences Exactes et Appliquées, Département de Mathématiques
B.P.1524 El Mnaouar, Oran 31000
ALGERIA
senoussaoui_abdou@yahoo.fr
** Université d'Oran, Faculté des Sciences Exactes et Appliquées, Département de Mathématiques
B.P.1524 El Mnaouar, Oran 31000
ALGERIA
bmessirdi@yahoo.fr

RÉSUMÉ. On étudie le spectre discret et les résonances d'une classe générale des Hamiltoniens quantiques de type Schrödinger :

$$H = -h^2\Delta_x + P(x, y, D_y) \text{ sur } L^2\left(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^p\right), n, p \in \mathbb{N}^*$$

lorsque h tend vers 0^+, Δ_x est laplacien sur $\mathbb{R}_x^n$, $Q(x) = P(x, y, D_y)$ est un opérateur pseudo-différentiel sur $L^2\left(\mathbb{R}_y^p\right)$, $x \in \mathbb{R}_x^n$ représent la position des noyaux, $y \in \mathbb{R}_y^p$ est celle des électrons et h est proportionel à l'inverse de la racine carrée de la masse nucleaire. C'est notamment le cas des Hamiltoniens dans l'approximation de Born-Oppenheimer lorsque $Q(x) = -\Delta_y + V(x, y)$ où $V(x, y)$ est le potentiel décrivant l'interaction moléculaire.

ABSTRACT. We study the discrete spectrum and the resonances of a general class of Schrödinger Hamiltonian of type:

$$H = -h^2\Delta_x + P(x, y, D_y) \text{ on } L^2\left(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^p\right), n, p \in \mathbb{N}^*$$

when h tends to 0^+, Δ_x is the Laplacien on $\mathbb{R}_x^n$, $Q(x) = P(x, y, D_y)$ is a pseudodifferential operator on $L^2\left(\mathbb{R}_y^p\right)$, $x \in \mathbb{R}_x^n$ represents the position of the nuclei, $y \in \mathbb{R}_y^p$ is the position of electrons and h is proportional to the inverse of the square-root of nuclear mass. This is the case for the Hamiltonian in the Born-Oppenheimer approximation when $Q(x) = -\Delta_y + V(x, y)$ here $V(x, y)$ is the molecular potential interaction.

MOTS-CLÉS : Hamiltonien, spectre, résonance, opérateur h-pseudo-différentiel,...

KEYWORDS : Hamiltonian, spectrum, resonance, h-pseudodifferential operator...

1. Introduction

L'approximation de Born-Oppenheimer est une méthode introduite dans [1] pour l'étude du spectre des molécules et consiste essentiellement à traiter séparément les partucules légères (électrons) et les particules lourdes (noyaux).

Considérons par exemple le cas de deux noyaux A et B, de masse M, de positions x_A et x_B, autour desquels gravitent un électron e, de masse 1 et de position x_e.

L'Hamiltonien d'un tel système s'écrit :

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2M}\partial^2_{x_A} - \frac{1}{2M}\partial^2_{x_B} - \frac{1}{2}\partial^2_{x_e} + V\left(x_A - x_e\right) + V\left(x_B - x_e\right) + W\left(x_A - x_B\right)$$

où V et W sont les potentiels d'interaction :

$$V\left(x\right) = -\frac{\alpha}{|x|}; \quad W\left(x\right) = \frac{\beta}{|x|} \qquad \left(\alpha \text{ et } \beta > 0\right)$$

par le changement de variables :

$$R = \left(Mx_A + Mx_B + x_e\right)\left(2M+1\right)^{-1},\ x = \left(x_A - x_B\right),\ y = x_e - \left(x_A + x_B\right)/2$$

l'hamiltonien $\mathcal{H}$ s'écrit :

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2\left(2M+1\right)}\partial^2_R + P\left(x, y, D_x, D_y\right)$$

$$P\left(x, y, D_x, D_y\right) = -\frac{1}{M}\partial^2_x - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2M}\right)\partial^2_y + V\left(\frac{x}{2} - y\right) + V\left(\frac{x}{2} + y\right) + W\left(x\right)$$

l'opérateur $\mathcal{H}$ est donc complètement découplé et l'étude de la molécule se ramène, lorsque M tend vers $+\infty$, à celle de l'opérateur P sur $L^2\left(\mathbb{R}^6\right)$, dont le spectre définit les niveaux d'énergie de la molécule.

Pour simplifier les notations, on prendra P sous la forme :

$$P = -h^2\Delta_x - \Delta_y + V\left(x, y\right) = -h^2\Delta_x + Q\left(x\right)$$

et on fera l'étude sur $L^2\left(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^p_y\right)$ avec $h\left(= \frac{1}{\sqrt{M}}\right)$ tendant vers zèro.

Dans les dix dernieres années, beaucoup de travaux ont été faits par plusieurs auteurs dans le but d'appliquer les techniques semi-classiques aux problèmes dans lequels apparaisent des variables extra non semi-classiques, mais ce sont notamment les résultats de Martinez [6], Gérard-Martinez-Sjöstrand [2] , Klein-Martinez-Seiler-Wang [5], Messirdi-Senoussaoui [10] et ceux de Martinez [7] qui sont utilisés ici et qui ont motivé cette étude.

L'objet de ce travail est de prouver l'existence des développements asymptotiques en puissances de $h^{1/2}$ des valeurs propres et des fonctions propres de $H,$ ceci permet de généraliser les deux résultats, pour des Hamiltoniens dans l'approximation de Born-Oppenheimer, de [6] dans le cas des potentiels réguliers et de [5] pour des potentiels Coulombiens singuliers.

Par le biais de l'inversion de l'opérateur de Grushin associé, on arrive à réduire l'étude spectrale de H à celle d'une matrice d'opérateurs h-pseudo-différentiels n'agissant que sur $\oplus m \oplus L^2\left(\mathbb{R}_x^n\right)$, dont le rang dépend du niveau d'énergie auquel on s'intéresse, et de symbole principal la matrice diagonale $diag\left(\xi^2+\lambda_j\left(x\right)\right)_{j=1}^m$ où $\left\{\lambda_1\left(x\right),\lambda_2\left(x\right),...,\lambda_m\left(x\right)\right\}$ est un paquet de valeurs propres de $Q\left(x\right)$.

On utilise ensuite la théorie générale de B. Helffer et J. Sjöstrand [3] pour construire les valeurs propres et les fonctions propres approchées de H. (On se restreint ici aux valeurs propres dans l'intervalle $[0, Ch], C > 0$ arbitraire)

A l'aide d'une estimation de type Agmon, on montre que ces constructions BKW approximent convenablement les vraies valeurs propres et les vraies fonctions propres associeés de P.

Cependant, cette technique n'est pas suffisante quand on veut étudier le spectre continu de H (voir Messirdi-Senoussaoui [11]), ou à fortiori ses résonances, la raison de ceci est que la région classiquement permise (par rapport à x) devient non bornée.

Nous supposons que n'importe quel électron ne peut être ionisé près du niveau d'énergie λ_0, et que les valeurs propres $\lambda_j(x)$ de l'opérateur $Q(x)$ ne sont pas dégénérées à l'infini. Cette dernière hypothèse est essentielle pour obtenir un bon comportement des projecteurs spectraux de $Q(x)$ près de l'infini. La raison est que notre technique se base fortement sur le calcul pseudo-différentiel à symbole opérateur [12, 7], qui exige beaucoup de régularité.

On construit d'abord un changement de variable en y qui permet de localiser les singularités du potentiel $V\left(x,y\right)$ dans une région compacte. Ensuite les techniques précédentes peuvent être adaptées à n'importe quelle distorsion complexe de P (les résonances de H sont accessibles à partir des distorsions analytiques présentées par Hunziker [4] et développées par Messirdi [8], l'étude spectrale de H est réduite à celle d'une matrice d'opérateurs h-pseudo-différentiels sur $L^2(\mathbb{R}_x^{3n})$. Finalement, par la méthode de Feshbach nous obtenons le résultat de réduction : z est une résonance de H si et seulement si il existe un nombre complexe θ assez petit, $Im\theta > 0$, tel que $0 \in \sigma_{disc} A_\theta^{-+}(z)$.

$A_\theta^{-+}(z)$ est une matrice finie d'opérateurs h-pseudo-différentiels analytiques en θ.

2. Hypothèses et résultats

On établit les hypothèses suivantes sur l'opérateur $Q(x) = P(x, y, D_y)$

(H1) $Q(x)$ est auto-adjoint semi borné inférieurement sur $\mathcal{H}_2 = L^2\left(\mathbb{R}_y^p\right)$ de domaine $\mathcal{H}_1$ ne dépend pas de x

(H2) on suppose que le spectre de $Q(x)$ se décompose en deux parties :

$$Sp(Q(x)) = \{\lambda_1(x), \lambda_2(x), ..., \lambda_m(x)\} \cup \Gamma(x)$$

où $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ dépendent continument en x et qui sont isolé au reste du spectre de $Q(x)$ c.à.d $\exists\delta > 0$,

$$\inf \Gamma(x) > \max\{\lambda_1(x), \lambda_2(x), ..., \lambda_m(x)\} + \delta,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

et uniformément séparé en d'hors d'un compact de $\mathbb{R}^n$

$$\exists\widetilde{C} > 0,\ \inf_{j\neq k;\ |x|\geq C} |\lambda_j(x) - \lambda_k(x)| \geq \widetilde{C},\ C > 0$$

(H3) $Q(x) \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2))$ (la régularité de l'opérateur $Q(x)$ par rapport à x en tant qu'opérateur de $\mathcal{H}_1$ à $\mathcal{H}_2$) C_b^∞ est l'espace des fonction de classe C^∞ et qui ont des dérivées bornées de tout ordre.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère l'opérateur matriciel dit de Grushin suivant :

$$\mathcal{P}(\lambda) = \begin{pmatrix} H - \lambda & \overset{m}{\underset{j=1}{\oplus}} u_j(x) \\ <.,\overset{m}{\underset{j=1}{\oplus}} u_j(x) >_{\mathcal{H}_2} & 0 \end{pmatrix} \text{ sur } L^2(\mathbb{R}^n, \mathcal{H}_1) \oplus \left(L^2(\mathbb{R}^n)\right)^{\oplus m}$$

Notons $\lambda_+ = \inf_{x\in\mathbb{R}^n} \{Sp(Q(x)) \setminus \{\lambda_1(x), \lambda_2(x), ..., \lambda_m(x)\}\}$, alors nous avons le théorème :

Théorème 2.1 *$\forall\lambda < \lambda_+$, l'opérateur $\mathcal{P}(\lambda)$ est inversible de $H^2(\mathbb{R}^n, \mathcal{H}_1) \oplus \left(L^2(\mathbb{R}^n)\right)^{\oplus m}$ dans $L^2(\mathbb{R}^n, \mathcal{H}_2) \oplus \left(L^2(\mathbb{R}^n)\right)^{\oplus m}$ d'inverse s'écrit se la forme :*

$$\mathcal{P}(\lambda)^{-1} = \begin{pmatrix} E(\lambda) & E_+(\lambda) \\ E_-(\lambda) & E_{-+}(\lambda) \end{pmatrix}$$

avec $E(\lambda), E_\pm(\lambda)$ et $E_{-+}(\lambda)$ sont des opérateurs h-pseudo-différentiels.

De plus,

$$\lambda \in Sp(H) \Longleftrightarrow \lambda \in Sp(F(\lambda))$$

où $F(\lambda) = \lambda - E_{-+}(\lambda)$ est un système d'opérateurs h-pseudo-différentiels n'agissant que sur la variable x et de symbole principal la matrice diagonale $diag\left(\xi^2 + \lambda_j(x)\right)_{1\leq j\leq m}$.

Pour θ reél assez petit, nous considérons la dilatation U_θ définie par :

$$U_\theta\varphi\left(x,y\right)=e^{n\theta/2}\varphi\left(xe^\theta,y\right),\ \ \varphi\in C_0^\infty\left(\mathbb{R}_x^n\times\mathbb{R}_y^p\right)$$

U_θ est un opérateur unitaire sur $L^2\left(\mathbb{R}_x^n\times\mathbb{R}_y^p\right)$.
La dilatation $H_\theta=U_\theta HU_\theta^{-1}$ de l'opérateur H :

$$H_\theta=-h^2e^{-2\theta}\Delta_x+P\left(xe^\theta,y,D_y\right).$$

Définition 2.2 *Le nombre complexe ρ est une résonance de l'opérateur H si $Re\rho>\inf\sigma_{ess}\left(H\right)$ et s'il existe θ assez petit, $Im\theta>0$, tel que $\rho\in\sigma_{disc}\left(H_\theta\right)$. σ_{ess} et σ_{disc} sont respectivement le sepectre essentiel et le spectre discrèt.*

Notons par Γ l'ensemble des résonances de l'opérateur H.

Théorème 2.3 *Sous les hypothèses $(H1)$ à $(H3)$, et pour tout z un nombre complexe assez proche de λ_+, il existe une matrice $M\times M$ d'opérateurs h-pseudo-différentiels $A_\theta^{-+}(z)$, θ complexe assez petit, sur $\mathbb{R}^n$ dépendent analytiquement en θ tels que :*

$$z\in\Gamma(h)\Leftrightarrow\exists\theta\in\mathbb{C},\ Im\theta>0,0\in\sigma_{disc}(A_\theta^{-+}(z)).$$

En particulier, $F\left(z\right)=z-A_\theta^{-+}(z)$ a pour symbole principale la matrice diagonale $diag\left(\xi^2+\lambda_j\left(xe^\theta\right)\right)_{1\leq j\leq M}$.

Bibliographie

[1] M. Born ; R. Oppenheimer. « Zur Quantentheorie der Molekeln. » *Annal. Phys.* **Vol 84** (1927), 457.

[2] C. Gérard ; A. Martinez and J. Sjöstrand. « A mathematical approach to the effective hamiltonian in perturbed periodic problems. » *Comm. Math. Physics* **vol 142 (4)**, (1991).

[3] B. Helffer ; J. Sjöstrand. « Multipes wells in the semiclassical limit I. » *Comm. P.D.E.* **vol 9 (4)** (1984), p337-408.

[4] W. Hunziker. « Distorsion analycity and molecular resonance curves.« *Ann. I.H.P.* **vol 45** (1986), p339–358.

[5] M. Klein ; A. Martinez ; R. Seiler and X. P. Wang. « On the Born-Oppenheimer expansion for polyatomic molecules. » *Comm. Math. Physics*, (1992), p607–639.

[6] A. Martinez. « Développements asymptotiques et effet tunnel dans l'approximation de Born-Oppenheimer.« *Ann. I.H.P.* **Vol 49, (3)** (1989), p239–257.

[7] A. Martinez. « An introduction to semiclassical and microlocal analysis, Springer-Verlag, New-York, UTX series, 2002.

[8] A. Martinez ; B. Messirdi. « Resonances of diatomic molecules in the Born-Oppenheimer approximation.« *Comm. P.D.E.* **Vol 19 (7/8)** (1994), p1139–1162.

[9] B. Messirdi. « Asymptotique de Born-Oppenheimer pour la pr édissociation moléculaire (cas de potentiels réguliers).« *Ann. I.H.P.* **vol 61, (3)** (1994), p255–292.

[10] B. Messirdi ; A. Senoussaoui. « Méthode BKW formelle et spectre des molécules polyatomiques dans l'approximation de Born-Oppenheimer.« *Canad. J. Phys.* **Vol 79, (4)** (2001), p757–771.

[11] B. Messirdi ; A. Senoussaoui and G. Djellouli. « Resonances of polyatomic molecules in the Born-Oppenheimer approximation.« *J. Math. Phys.* **vol 46, (1)** (2005).

[12] A. Senoussaoui. « Opérateurs h-admissibles matriciels à symbole opérateur.« *African Diaspora Journal of Mathematics* **Vol 4, no.1** (2007), p7–27.

Absorbing Layers conditions for linearized and non linear 2d Shallow Water equations.

H. Barucq*,1 — J. Diaz*,2 — M. Tlemcani**

* INRIA Bordeaux Sud-Ouest, Project-Team Magique 3D and LMA.
UPPA, Université de Pau et des Pays de l'Adour
Pau - France
*,1 helene.barucq@inria.fr, *,2 julien.diaz@inria.fr
** USTO-MB Université des Sciences et de la Technologie d'Oran.
Département de Physique, LAAR.
Oran - Algérie
mounir.tlemcani@univ-pau.fr

ABSTRACT. Based on a former work [1] and a divergence-rotational formulation of Shallow Water Equations (SWE), we propose a stable Perfectly Matched Layer (PML) for the rotationg SWE linearized around an oblique mean flow. The compuation does not require any auxiliary variable in the physical domain. Furthermore, the formulation is suitable to design absorbing layers for non linear SWE system.

RÉSUMÉ. En se basant sur un travail antérieur [1] et sur une formulation divergence-rotationel des équations d'eau peu profonde (SWE), nous proposons une couche absorbante parfaitement adaptée pour les équations SWE avec rotation et linéarisées autour d'un écoulement moyen oblique. Le calcul ne nécessite aucune variable auxilliaire dans le domaine physique. En outre, la formulation est convenable pour construire des couches absorbantes pour le système SWE non linéaire.

KEYWORDS : PML, Linerarized shallow water, Gravity waves, Vorticity, Coriolis, Oblique flow, Non linear shallow water .

MOTS-CLÉS : PML, Eau peu profonde linéarisée, Ondes de gravité, Vorticité, Coriolis, Ecoulement oblique, Eau peu profonde non linéaire.

1. Introduction

Shallow Water Equations are a simplification of Navier Stokes equations when the vertical length scale is much smaller than the horizontal length scale (the wave length). They are widely used in atmospheric and ocean modelling. In large scale meteorological forecasting models which take into account the Earth's rotation (Coriolis Forces), the physical domains are huge (for instance a whole ocean) and an accurate numerical solution to these equations is not possible, even with High Performance Computing technologies. So, for unbounded domains, the simulations require artificial boundaries that should be transparent. In the case of acoustic wave equation, this can be achieved by using Absorbing Boundary Conditions [] or Perfectly Matched Layers (PML) [3]. The principle of this latter consists in surrounding the computational domain by a non-physical absorbing layer. They are called Perfectly Matched because their interface with the computational domain does generate any reflection, whatever the frequency and the angle of incidence of the waves. However, beside the difficulty of forming PML equations for an oblique mean flow where both types of waves present inconsistencies between their group and phase velocities [2], the extension of this technique to non linear equations is still an open issue.

In a previous work [1], we have proposed a PML for linearized SWE where the inversion of a transport operator has required the introduction of an auxiliary variable in the physical domain. We propose here a new formulation of this PML which overcomes this drawback, based on a divergence-rotational formulation, and we show that the technique can be extended to construct an efficient Absorbing Layer for the non linear Shallow Water equations.

2. New PML formulation for linearized 2d SWE

The 2d- rotating shallow water equations on an $f-$plane in non conservative form are:

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t \mathbf{h} + \mathbf{u}\partial_x \mathbf{h} + \mathbf{v}\partial_y \mathbf{h} + \mathbf{h}\left(\partial_x \mathbf{u} + \partial_y \mathbf{v}\right) = 0, \\ \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u}\partial_x \mathbf{u} + \mathbf{v}\partial_y \mathbf{u} + g\partial_x \mathbf{h} - f\mathbf{v} = 0, \\ \partial_t \mathbf{v} + \mathbf{u}\partial_x \mathbf{v} + \mathbf{v}\partial_y \mathbf{v} + g\partial_y \mathbf{h} + f\mathbf{u} = 0, \end{array}\right. \tag{1}$$

where $\mathbf{h}$ is the elevation of the water from $z = 0$, $\mathbf{u}$ and $\mathbf{v}$ are the components of the velocity field, g is the gravity constant and f is the Coriolis parameter. Assuming that $\mathbf{h}$, $\mathbf{u}$ and $\mathbf{v}$ vary weakly around a mean state, denoted respectively by H, U and V, the linearized horizontal momentum equations for 2d shallow water system are:

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\partial_t + U\partial_x + V\partial_y\right) h + H\left(\partial_x u + \partial_y v\right) = 0 \\ \left(\partial_t + U\partial_x + V\partial_y\right) u + g\partial_x h - fv = 0 \\ \left(\partial_t + U\partial_x + V\partial_y\right) v + g\partial_y h + fu = 0 \end{array}\right. \tag{2}$$

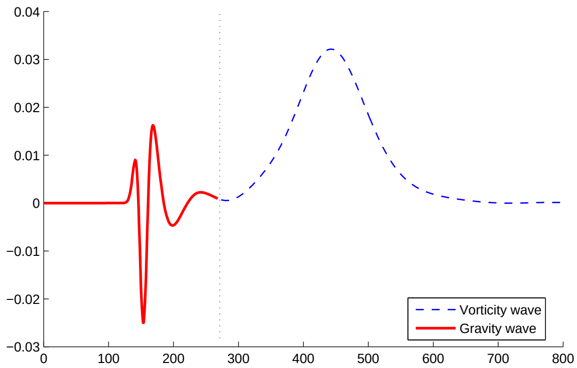
where $h = \mathbf{h} - H$ is the water elevation from the mean value and u and v are such that $\mathbf{u} = U + u$ and $\mathbf{v} = V + v$. We only consider in this work the subsonic regime, i.e. such that $U^2 + V^2 < gH$. The dispersion relations for (2) are known to be

$$(\omega + Uk_x + Vk_y)^2 = gH\left(k_x^2 + k_y^2\right) + f^2 \tag{3}$$

for inertia-gravity adjustment waves and

$$\omega + Uk_x + Vk_y = 0 \tag{4}$$

for geostrophic adjustment waves. The main difficulty of forming PML equations for oblique mean flow is that both types of waves present inconsistencies between their group and phase velocities. It is well-known [2] that this induces instabilities with classical Perfectly Matched Layers. However, we have in hand an exact transparent condition for geostrophic adjustment waves that are divergent free. Hence, an efficient strategy consists in deriving PMLs acting only on inertia-gravity adjustment waves and in absorbing geostrophic waves by a transparent conditions at the end of the layers. Though, when considering the rotating 2d SWE, vorticity becomes important (see the following Figure) and the inversion of the transport operator requires the computation of an additional auxiliary variable in the whole computational domain.



To avoid this drawback, we propose to rewrite system (2) by using the divergence of the flow, $\delta = \partial_x u + \partial_y v$ and its rotational $\xi = \partial_x v - \partial_y u$. Then, straightforward linear combinations of equations in system (2) yields the following div-rot formulation for the unknowns (h, δ, ξ) :

$$\mathbf{G}h + H\delta = 0 \quad [5]$$

$$\mathbf{G}\xi + f\delta = 0 \quad [6]$$

$$\mathbf{G}\delta + g\Delta h - f\xi = 0 \quad [7]$$

where $\mathbf{G} = \partial_t + U\partial_x + V\partial_y$ denotes the transport operator.

To uncouple the advective waves from the vorticity ones, we formally [1] left multiply (5) and (7) by $\mathbf{G}$ and substract the first equation from the second one. Using finally (6), we check that the divergent part of the flow satisfies the advective Klein-Gordon (KG) equation

$$\mathbf{L}\delta + f^2\delta = 0, \tag{8}$$

where $\mathbf{L} = \mathbf{G}^2 - gH\Delta$ is the advective wave operator. The dispersion relation of this equation is once again given by (1). Similarly, subtracting (6) from (5), we obtain a transport equation:

$$\mathbf{G}\left(\frac{h}{H} - \frac{\xi}{f}\right) = 0, \tag{9}$$

whose dispersion relation is given by (4). The quantity $\phi = h/H - \xi/f$ is called the potential vorticity and must be conserved in our scheme. It satisfies the transport equation $\mathbf{G}\phi = 0$. It follows that a stable PML for the linear shallow water system can be obtained by **a)** applying a preliminary change of variable to remove the inconsistent waves; **b)** applying the PML change of variable only to equation (6) and **c)** applying the inverse change of variable to **a)**. Let us denote by $\mathbf{L}^{PML}$ the transformed operator obtained following these three steps to the wave operator $\mathbf{L}$. We used a condensed form of the PML associated to the KG equation which is valid in both the physical domain where $\mathbf{L} = \mathbf{L}^{PML}$ and the PML-layer, as follows:

$$\mathbf{L}\delta + f^2\delta = \left(\mathbf{L} - \mathbf{L}^{PML}\right)\delta,$$

and we denote by $\mathbf{p} = \left(\mathbf{L} - \mathbf{L}^{PML}\right)\delta$ the perturbation variable. Hence, the PML div-rot formulation can be obtained by multiplying formally this last equation by $\mathbf{G}^{-1}$, where only the third equation is perturbed by the variable $\mathbf{p}$, as follows:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}h + H\delta &= 0 && [10] \\ \mathbf{G}\xi + f\delta &= 0 && [11] \\ \mathbf{G}\delta + g\Delta h - f\xi &= \mathbf{G}^{-1}p && [12] \end{aligned}$$

However, since in rotating shallow water the vorticity modes prohibit the inversion of the transport operator $\mathbf{G}$, the computation of $\mathbf{G}^{-1}p$ requires an auxiliary variable in the hole computational domain. In order to overcome this drawback, we have looked at the relationship between the div-rot formulation (5)...(7) and the primal one (2). It seems that

1. This must be done carefully in the non linear case.

the two formulations are equivalent up to a harmonic function denoted by $\mathbf{q}$ in the sense that any solution of the modified primal system

$$\mathbf{G}h + H\left(\partial_x u + \partial_y v\right) = 0 \quad [13]$$

$$\mathbf{G}u + g\partial_x h - fv = \partial_x \mathbf{q} \quad [14]$$

$$\mathbf{G}v + g\partial_y h + fu = \partial_y \mathbf{q} \quad [15]$$

induces a divergence and a rotational which are solution the (5)...(7) if $\mathbf{q}$ is harmonic, i.e., $\Delta\mathbf{q} = \mathbf{0}$.

The advantage of this last formulation lies in the fact that if we impose homogeneous Neumann or Dirichlet conditions for $\mathbf{q}$ on the boundary of the physical domain, then by the analytic continuation theorem, $\mathbf{q}$ is necessarily equal zero in the interior domain. Moreover, the KG equation is self-contained in this formulation. We propose then our PML system as follows:

$$\mathbf{G}h + H\left(\partial_x u + \partial_y v\right) = 0 \quad [16]$$

$$\mathbf{G}u + g\partial_x h - fv = \partial_x \mathbf{q} \quad [17]$$

$$\mathbf{G}v + g\partial_y h + fu = \partial_y \mathbf{q} \quad [18]$$

$$\mathbf{G}\Delta\mathbf{q} = \mathbf{p} \quad [19]$$

where $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ in the physical domain and $\mathbf{p} = \left(\mathbf{L} - \mathbf{L}^{PML}\right)\left(\partial_x u + \partial_y v\right)$ in the PML-layer, with only natural transmission conditions on the interface. At the outer boundary of the computational domain we impose a transparent condition on h which is exact for vorticity modes.

Conclusion

The introduction of the elliptic equation $\Delta \mathbf{q} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{p}$ seems to be not attractive from a computational view point. However, it requires elliptic solvers only in the PML region. Fast Fourier Transform FFT algorithms can actually overcome this drawback. Moreover, the proposed formulation is nice suitable in a Finite Element Method FEM or a DG type method. Even more, it can be easily extended to the non linear SWE.

References

[1] H. Barucq., J. Diaz and M. Tlemcani, « New absorbing layers conditions for short water waves », *J. Comput Phys*, **229** (2010) 58–72.

[2] E. Bécache., S. Fauqueux and P. Joly, « Stability of perfectly matched layers, group velocities and anisotropic waves », *J. Comput. Phys*, **188** (2) (2003) 399–433.

[3] J. Bérenger., « A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves », *J. Comput. Phys*, **114** (2) (1994) 185–200.

The Convex Envelope of a Function Using a Nonlinear Parabolic Problem of Monge Ampère Type.

Anis Younes*— Mohamed Bouchiba**

* Faculty of Sciences of Tunis,
Tunis El Manar University - 2092, Tunisia
younesanis@yahoo.fr
** National Institute of Applied Sciences and Technology,
University of Carthage - 1080, Tunisia
mohamed.bouchiba@yahoo.fr

ABSTRACT. We study the evolution of a hyper-surface moving according to its normals with a speed proportional at the Gauss curvature which leads to a nonlinear parabolic problem of Monge-Amp'ere type. In one dimension we use the motion of a convex graph to approximate the convex envelope of a giving function. The existence and uniqueness of the problem and the numerical result are considered.

RÉSUMÉ. Nous étudions l'évolution du mouvement d'un graphe en fonction de ses normales avec une vitesse proportionnelle à la courbure de Gauss qui conduit à un problème parabolique non-linéaire de type Monge-Ampère . En dimension 1, nous utilisons le mouvement d'un graphe convexe, rapprochant l'enveloppe convexe d'une fonction donnée. L'existence et l'unicité du problème et le numérique sont par suite considérés .

KEYWORDS : Monge-Ampere equation, Gauss curvature, maximal-monotone operators, convex envelope.

MOTS-CLÉS : Equation de Monge-Ampere , Courbure de Gauss, Operator Maximal-Monotone , Envelope Convex .

1. Introduction

The evolution of a hyper-surface, moving according to its normals with a speed proportional at the Gauss curvature on each point of the hyper-surface and in the direction of the outer normal vector, leads to the following nonlinear parabolic problem of Monge-Ampère type :

$$(P_N) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{det[D^2u]}{(1+|Du|^2)^{\frac{N+1}{2}}} = 0 & x \in \Omega, t \in [0,T] \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \Omega \\ u(x,t) = \Phi(x,t) & (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T] \\ u & \text{convex} \end{cases}$$

where Ω is a bounded open convex N-dimensional domain with smooth boundary $\partial\Omega,\ u_0$ and Φ are smooth given functions,and $c(x,t,u)$ is a bounded non negative function.
$D_iu = \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad i = 1,...,N,$, $\quad Du =^t (D_1u,..,D_Nu)$ and $D_{ij}u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \quad i,j = 1,..,N$, with $[D^2u] = (D_{ij}u) \quad i,j = 1..,N$.
The characterization and approximation of the convex envelope of a function theoretically is well studied in $[3]$ and $[4]$.
Our main results is a numerical approach in the sens to evolve the graph of u_0 according to its normals with a speed proportional at the Gauss curvature.
In this paper we consider the case $N = 1$. In the next section we start with $c(x,t,u) = 1$.
We prove an existence and uniqueness theorem by using the method of maximal monotone operators .
In a third section we describe an extrapolated Crank-Nicolson difference scheme for numerical approximation of the solution of (P_1) .

In the end we give a numerical method for the approximation of f^{**} the convex envelope of f by taking an adequate function $c(x,t,u)$ in problem (P_1).

2. Existence Result

We solve (P_1) by using the method of maximal monotone operators[2]. So we rewrite it as an O.D.E. :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0 \quad t \in]0,T[\\ u(o) = u_0 \end{cases}$$

with :

$$Au = -\frac{D^2u}{1+Du^2} = -D(Arctg(Du)) \tag{1}$$

We show that the operator A is the subdifferential of a convex proper lower-semicontinuous function on $L^2(\Omega)$, where $\Omega =]0,1[$.

Let $\Psi : L^2(\Omega) \to [-\infty, +\infty]$ be defined by:

$$\Psi(u) = \begin{cases} \phi(u) & if \quad u \in H_0^1(\Omega) \\ +\infty & otherwise \end{cases}$$

where ϕ is defined on $H_0^1(\Omega)$ by:

$$\phi(u) = \int_0^1 F(Du(x))dx \quad \text{where} \quad F(x) = \int_0^x Arctg(s)ds \tag{2}$$

Proposition 1: The function Ψ is proper lower-semicontinuous and convex on $L^2(\Omega)$.

Proposition 2 :
Let $u_0 \in L^2(\Omega)$ Then:

1) Problem (P_1) has a unique solution $u \in C([0,T], L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$ and satisfying : $\sqrt{t}\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$.

2) If $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, then $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$ and $u \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega))$.

3. Numerical Scheme

In this section we are concerned with the construction of a difference scheme for the boundary value problem P_1 . Let N be a positive integer and h defined by the relation $(N+1)h = 1$. For $0 < 2k < T$ we let J be the largest integer such that $kJ \le T$.

We use a modification of the standard Crank-Nicolson difference scheme which is based on well-known predictor-corrector difference schemes for ordinary differential equations. Thus, let $w(x,t)$ satisfies :

$$(P_1) \qquad \begin{cases} (1+Dw^2)\frac{\partial w}{\partial t} - D^2 w = 0 & x \in]0,1[, t \in]0,T[\\ w(x,0) = \phi(x) & x \in]0,1[\\ w(0,t) = w(1,t) = 0 & t \in [0,T] \end{cases}$$

We define the standard difference operators D_+ ,D_- and D_0 in the usual way :

$$D_+u(x) = \frac{u(x+h)-u(x)}{h}, \quad D_-u(x) = \frac{u(x)-u(x-h)}{h}$$

$$D_0u(x) = \frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h}.$$

We shall construct two sequences $u_0, u_1, ..., u_J$ and $u_{\frac{1}{2}}, u_{\frac{3}{2}}, ..., u_{J-\frac{1}{2}}$ by induction . First, we put $u_0 = \phi$ and : $u_{\frac{1}{2}} = \phi + \frac{k}{2G(D_0\phi)}[D_+D_-\phi]$ where $G(p) = 1 + p^2$.

Now, assume that $u_0, u_1, ..., u_j$ and $u_{\frac{1}{2}}, u_{\frac{3}{2}}, ..., u_{j+\frac{1}{2}}$ have already been defined . Then u_{j+1} is defined to be the unique solution of the linearized Crank-Nicolson difference equation :

$$G(D_0 u_{j+\frac{1}{2}})(u_{j+1} - u_j) = \frac{k}{2} D_+D_-(u_{j+1} + u_j) \quad (3)$$

and $u_{j+\frac{3}{2}}$ is defined directly by the linear extrapolation formula:

$$u_{j+\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}u_{j+1} - \frac{1}{2}u_j. \quad (4)$$

We give some numerical examples for different giving u_0 using this scheme in the end of this paper.

3.1. Approximate Envelope

we give a new method to approximate the convex envelope $f^{\star\star}$ of a function f ([3] section 1).

Let $f : [0,1] \to \Re$ be a function bounded below by a convex function u_0 and assume that $f(0) = f(1) = 0$.
Our approach is to evolve the graph of u_0 according to its normals with a speed proportional at the Gauss curvature and which vanish at all point x_i if $u(x_i, t_i) = f(x_i)$ for $t > t_i$.

For that we consider the problem P_2 :

$$(P_2) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - C(x,t,u;f)\frac{D^2u}{(1+Du^2)} = 0 & x \in]0,1[, t \in]0,T[\\ u(x,0) = u_0(x) & x \in]0,1[\\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t \in [0,T] \end{cases}$$

where

$$C(x,t,u;f) = \begin{cases} 1 & if \quad u(x,t) < f(x) \\ 0 & if \quad u(x,t) = f(x) \end{cases}$$

Since C is a non negative function ,for all $t \geq 0$, we have : $x \to u(x,t)$ is convex and $u(x,t) \leq f(x)$ where u is a solution of (P_2) .For large T the function $u(x,T)$ is an approximation of the convex envelope of f .

3.2. Numerical Examples

For a giving f we define the convex function $u_0(x) = -\alpha.\sqrt{1-(2x-1)^2}$ where α is a constant such that : $u_0(x) \leq f(x) \quad \forall x \in [0,1]$.

First in the following graphic we represent f and $u(.,T)$ witch represent $f^{\star\star}$ using the Crank-Nicolson scheme of section 3 .

For two giving f the next figures represent $u(x_i, t_i)$ solution of (P_2) and $f(x_i)$ for $i = 1, ..., 10$. The approximate convex envelope $f^{\star\star}$ is $u(.,T)$ for large T.

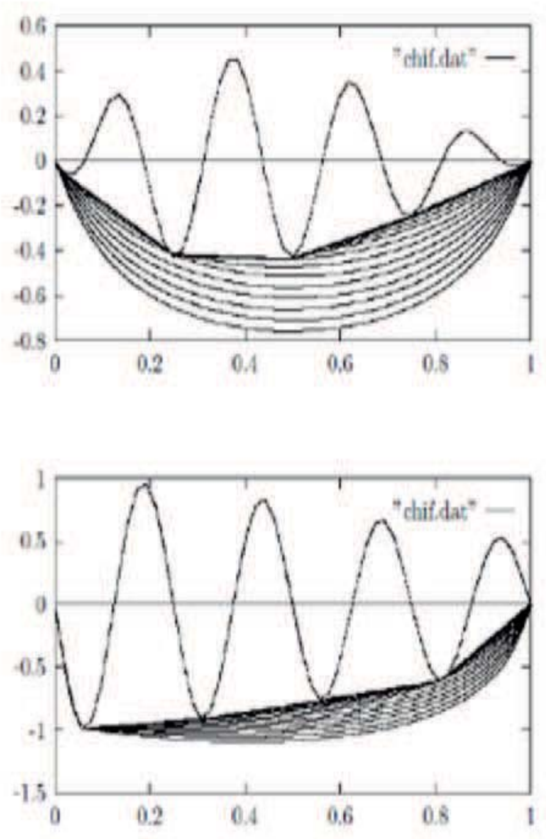


Figure 34: Envelope

References

[1] V. Barbu., « Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces », Noordhoff, Leyden 1975.

[2] A.M. Oberman., « Computing the convex envelope using a nonlinear partiel differentiel equation », *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **Vol. 18, No. 5** (2008), 759–780.

[3] A. M. Oberman., « The convex envelope is the solution of a nonlinear obstacle problem », *Proc. Amer. Math. Soc* , **no. 6** (2007), 1689–1694 (electronic). MR 2286077 (2007k:35184).

[4] F. Kadhi and A. Trad., « Characterization and approximation of the convex envelope of a function », *J. Optim. Th. Appl.* , **110** (2001), 457–466.

Résolution numérique d'un problème de contrôle optimal de l'obstacle

Billel Zireg* — Radouen Ghanem**

* Laboratoire d'analyse numérique, optimisation et statistique, LANOS
Université Badji Mokhtar, Annaba
B.P. 12, 23000, Annaba
Algerie
ziregbillel@hotmail.fr
** Laboratoire d'analyse numérique, optimisation et statistique, LANOS
Université Badji Mokhtar, Annaba
B.P. 12, 23000, Annaba
Algerie
radouen_ghanem@hotmail.com

RÉSUMÉ. Dans ce travail, on s'intéresse à la résolution numérique d'un problème de contrôle optimal de l'obstacle où la fonction d'état vérifie un problème de l'obstacle unilatéral et la fonction contrôle est l'obstacle.

ABSTRACT. In this work, we are interested in the numerical solution of an obstacle optimal control problem where the state function satisfies an unilateral obstacle problem and the control function is the obstacle.

MOTS-CLÉS : contrôle optimal, méthode de Newton, obstacle problem.

KEYWORDS : optimal control, Newton method, obstacle problem.

1. Introduction et position du problème

On considère un problème de commande optimale où la fonction d' état y vérifie une inéquation variationnelle unilatérale de type obstacle où la fonction de contrôle φ est l'obstacle. Nous cherchons alors un état qui est voisin d'un profil désiré z_d.

Ce problème de contrôle optimal $(\mathcal{P})$ est défini sous la forme :

$$\min \left\{ J(\varphi) := \frac{1}{2} \int_\Omega \left(\mathcal{T}(\varphi) - z_d\right)^2 dx + \frac{\nu}{2} \left(\int_\Omega (\Delta\varphi)^2 \, dx \right),\ \varphi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \right\},$$

où $y := \mathcal{T}(\varphi)$ est l'unique solution de l'inéquation variationnelle suivante

$$\sigma(y,\, y - v) \leq (y - v,\, f)\,, \ \text{ pour tout } v \text{ dans } \mathcal{K}(\varphi) \tag{1}$$

où $\sigma(\cdot,\cdot)$, vérifie les hypothèses suivantes :

$(\boldsymbol{H_1})$ **Continuité :**

$$\exists\, C > 0, \forall \varphi, \psi \in H^1(\Omega),\ |\sigma(\varphi,\psi)| \leq C \, \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \|\psi\|_{H^1(\Omega)} \tag{2}$$

$(\boldsymbol{H_2})$ **Coercivité :**

$$\exists\, c > 0, \forall \varphi \in H^1(\Omega),\ \sigma(\varphi,\varphi) \geq c \, \|\varphi\|^2_{H^1(\Omega)} \tag{3}$$

et f est dans $L^2(\Omega)$ un terme source non nul, avec

$$\mathcal{K}(\varphi) := \left\{ y \in H_0^1(\Omega) \mid y \geq \varphi \text{ p.p. dans } \Omega \right\}.$$

Le fait d'ajouter le terme $\|\Delta\varphi\|^2_{L^2(\Omega)}$ dans la fonction objectif J permet de dire que si φ_n est une suite minimisante alors $\|\Delta\varphi_n\|_{L^2(\Omega)}$ est borné. Comme φ_n est dans $H_0^1(\Omega)$ et que $\|\Delta\varphi\|_{L^2(\Omega)}$ est une norme équivalente à la norme de $\mathcal{U}$ cela veut dire que la suite φ_n est bornée dans $H^2(\Omega)$, donc elle converge faiblement vers φ^* (contrôle optimal) dans $H^2(\Omega)$ et fortement vers φ^* dans $H_0^1(\Omega)$. Donc le terme $\|\Delta\varphi\|^2_{L^2(\Omega)}$, nous permet d'assurer de la compacité et permet également de simplifier le problème en supprimant la contrainte introduite dans [2], par

$$\mathcal{U}_{ad} = \mathcal{B}_{H^2}(0,R) := \{\varphi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \mid \|\varphi\|_{H^2} \leq R\}$$

où R est un réel qui peut être choisi suffisament grand.

2. Méthode de résolution du problème $(\mathcal{P})$

Afin de caractériser la solution optimale et exhiber les conditions d'optimalité, la difficulté principale qui se présente pour ce genre de problème, est qu'il est impossible d'assurer une quelconque propriété de différentiabilité (même Gâteaux) de l'application $\mathcal{T}$: contrôle $\mapsto$ état. La seule différentiabilité faible utilisable est la notion de différentiabilité conique proposée par Mignot [4], qui permet de trouver un système de conditions d'optimalité qu'on ne peut pas exploiter numériquement.

Nous pouvons alors adopter plusieurs points de vue et comme notre principale motivation est essentiellement numèrique, l'idée étant toujours de se ramener à un problème gouverné par une équation variationnelle où la technique de base est l'approximation de l'opérateur $\mathcal{T}$ déjà utilisée par exemple dans [1].

Il sagit d'approximer le sous-différentiel $\partial I_{\mathcal{K}}(\cdot)$ de la fonction indicatrice de $\mathcal{K}$ de (1) pour remplacer le problème $(\mathcal{P})$ par une famille de problème approchés réguliers gouvernés par une équation semilinéaire [3].

Ensuite, on démontre l'existence d'un contrôle optimal dans $H^2(\Omega)$ et on donne des conditions nécessaires d'optimalité approchées qui dépendent du paramètre d'approximation δ, (voir le théorème ci-dessous donné dans [3]).

Théorème 2.1 *Si φ^δ est une solution optimal de $\left(P^\delta\right)$, $z_d \in L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(\Omega)$, $\nu > 0$, $\delta > 0$ et $y^\delta := \mathcal{T}^\delta\left(\varphi^\delta\right)$, il existe p^δ dans $\mathcal{U} = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ tel que le système suivant $\left(S^\delta\right)$, soit vérifié*

$$\sigma\left(y^\delta, v\right) + \left(\beta_\delta\left(y^\delta - \varphi^\delta\right), v\right) = (f, v) \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega) \tag{4a}$$

$$\sigma\left(p^\delta, w\right) + \left(\beta_\delta'\left(y^\delta - \varphi^\delta\right) p^\delta, w\right) = \left(y^\delta - z_d, w\right) \text{ pour tout } w \in H_0^1(\Omega) \tag{4b}$$

$$\nu\tilde{\sigma}\left(\varphi^\delta, u\right) = \left(\beta_\delta{}'\left(y^\delta - \varphi^\delta\right) p^\delta, u\right) \text{ pour tout } u \in \mathcal{W} \tag{4c}$$

où

$$\beta_\delta(r) := \frac{1}{\delta}\begin{cases} 0 & \text{if } r \geq 0 \\ -r^2 & \text{if } r \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \\ r + \frac{1}{4} & \text{if } r \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

et δ est le paramètre d'approximation qui tend vers 0 et
$\mathcal{W} := \left\{u; u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \text{ et } \Delta u \,|_{\partial\Omega} = 0\right\}$, *où* $\tilde{\sigma}(u, v) = \displaystyle\int_\Omega \Delta u \Delta v dx$.

Pour la résolution numérique du problème $(\mathcal{P})$, on prend $\sigma(u, v) = \langle -\Delta u, v\rangle$, ensuite on discrétise le système des conditions d'optimalité donné par le théorème 2.1 en utilisant la méthode des différences finies (en dimension une, pour $d = 1$ et en dimension deux pour $d = 2$).

Ainsi, on obtient un système approché-discret (qui dépend du paramètre d'approximation δ et du paramètre de discrétisation h), on propse ensuite un algorithme itérative (voir ci-dessous) pour résoudre le système approché-discret par la méthode de Gauss-Seidel basée pricipalement sur la méthode itérative de Newton amorti.

Algorithm 2

Input : $\left\{y_0^\delta, \varphi_0^\delta, p_0^\delta, \delta, \nu, \omega_y, \omega_\varphi, \varepsilon\right\}$ choose $\varphi_0^\delta \in W, \varepsilon$ and δ in $\mathbb{R}_+^*$;
Begin :
If $\left(A_h^1 + \beta'_\delta\left(y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta\right)\right)$ is singular **Stop.**
Else
Solve $\left(A_h^d + \beta'_\delta\left(y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta\right)\right).r_n^\delta = -\omega_y\left(A_h^d y_{n-1}^\delta + \beta_\delta\left(y_{n-1}^\delta - \varphi_{n-1}^\delta\right) - f\right)$ on r_n^δ,
Then $y_n^\delta = y_{n-1}^\delta + r_n^\delta$.
End if
If $\left(A_h^d + \beta'_\delta\left(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta\right)\right)$ is singular **Stop.**
Else
Solve $\left(A_h^d + \beta'_\delta\left(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta\right)\right)p_n^\delta = y_n^\delta - z$ on p_n^δ.
End if
If $\left(-\nu A_h^d A_h^d + \beta''_\delta\left(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta\right)p_n^\delta\right)$ is not invertible **Stop.**
Else
Solve $\left(\left(-\nu A_h^d A_h^d + \beta''_\delta\left(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta\right)\right)p_n^\delta\right)r_n^\delta = \omega_\varphi\left(\nu A_h^d A_h^d \varphi_{n-1}^\delta + \beta'_\delta\left(y_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta\right)p_n^\delta\right)$ on r_n^δ.
Then $\varphi_n^\delta = \varphi_{n-1}^\delta + r_n^\delta$
End if
If max$\left(\| y_n^\delta - y_{n-1}^\delta \|_{H^1(\Omega)}, \| \varphi_n^\delta - \varphi_{n-1}^\delta \|_{H^2(\Omega)}, \| p_n^\delta - p_{n-1}^\delta \|_{H^1(\Omega)}\right) \leq \varepsilon$ **Stop.**
Eensure : $s_n^\delta := \left(y_n^\delta, \varphi_n^\delta, p_n^\delta\right)$ **is a solution**
Else ; $n \leftarrow n+1$, **Go to Begin.**
End if
End algorithm.

où A_h^d pour $d = 1, 2$ est la matrice obtenue aprés discrétisation de l'opérateur $-\Delta$, ensuite on montre que l'algorithme proposé converge loacalement pour $\|\varphi^\delta\|_{H^2(\Omega)} < R$ avec un taux de convergence linéaire (voir le théorème ci-dessous)

Théorème 2.2 *Soient* $e_n^\delta := \left(y_n^\delta, \varphi_n^\delta\right)$ *la solution donnée par l'algorithme 1 et* $\bar{e}^\delta := \left(\bar{y}^\delta, \bar{\varphi}^\delta\right)$ *la solution du système des conditions d'optimalité* (4)*, alors on a*

$$\| e_n^\delta - \bar{e}^\delta \|_{H^1(\Omega)\times H^2(\Omega)} \leq k \max\left\{ \| e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta \|^2_{H^1(\Omega)\times H^2(\Omega)}, \| e_{n-1}^\delta - \bar{e}^\delta \|_{H^1(\Omega)\times H^2(\Omega)} \right\}, \tag{5}$$

où $k < 1$ *et ne dépend pas de* δ *et de* h*.*

Remerciements. Nous remercions tous les auteurs des versions antérieurs de TAMTAM.

Bibliographie

[1] V. Barbu, Analysis and Controle of Non Linear Infinite Dimensional Systems, Math, Sci.

[2] M. Bergounioux et S. lenhart, Optimal control of the bilateral obstacle problems, SIAM Journal on Control and Optimization, 43, (2004), 249-255.

[3] R. Ghanem, Optimal control of unilateral obstacle problem with a source term, Positivity, 13(2), (2009), 321-338.

[4] F. Mignot, *Contrôle dans les inéquatons variationelles elliptiques*, Journal of Functional Analysis, (**22**) : 466-476, (1976).

Troisième partie

Posters

Stabilisation frontière de l'équation des ondes en présence de singularités

F. Alabau-Boussouira[1] — T. Ali Ziane[2] — F. Arab[3] — O. Zair[4]

[1] INRIA Lorraine Equipe-projet CORIDA Université Paul Verlaine-Metz LMAM, UMR CNRS 7122, Metz, France. fatiha.alabau@univ-lorraine.fr.
[2,3,4] Laboratoire AMNEDP, Faculté de mathématiques USTHB, BP 32 El Alia Bab Ezzouar 16111, Alger, Algérie.
[2] taliziane@gmail.com, [3] fatima.arab22@gmail.com, [4] wahzair@gmail.com.

RÉSUMÉ. Dans ce travail, on étudie la stabilisation frontière de l'équation des ondes à l'aide d'un feedback linéaire ou non linéaire. En raison des conditions aux limites mixtes, ces cas génèrent des singularités. Sous une condition géométrique simple qui concerne l'orientation de la frontière, on obtient des résultats de stabilisation dans les deux cas.

ABSTRACT. In this work, we study the boundary stabilization of the wave equation with a linear or nonlinear feedback. Due to mixed boundary conditions, these cases generate singularities. Under a simple geometrical condition concerning the orientation of the boundary, we obtain stabilization results in both cases.

MOTS-CLÉS : Dissipation non linéaire, Feedback frontière, Equations hyperboliques, problème mixte.

KEYWORDS : Nonlinear dissipation, Boundary damping, Hyperbolic equations, mixed problem.

1. Introduction

On s'intéresse à la stabilisation de l'équation des ondes non linéaires par un Feedback localisé sur une partie de la frontière. Nous montrons que les inégalités générales pondérés intégrantes ainsi que les arguments de convexité nous permettent de produire la formule qui conduit aux taux de décroissance de l'énergie en termes de comportement de Feedback non linéaire proche de l'origine en présence de singularités. Notre travail complète les travaux de [1]. Nous avons, par ailleurs, prouvé l'optimalité de nos résultats pour l'équation des ondes à une dimension avec damping frontière non linéaire en présence de singularités.

Soit Ω est un ouvert non vide borné de $\mathbb{R}^2$ de frontière Γ de classe C^2. Soit $\{\Gamma_D, \Gamma_N\}$ est une partition de Γ telle que $\overline{\Gamma}_D \cap \overline{\Gamma}_N = \{S_1, S_2\}$. Soit $x_0$un point de $\mathbb{R}^2$, $m(x) = x - x_0$ un multiplicateur tel que $m.\nu \leq 0$ sur Γ_D et $m.\nu > 0$ sur Γ_N où $\nu(x)$ le vecteur normal unitaire de Ω pour $x \in \Gamma$ et $m.\nu = 0$ sur $\{S_1, S_2\}$ .On considère le problème mixte suivant

$$\begin{cases} -\triangle u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_{D,} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Gamma_N; \end{cases} \tag{1}$$

où f est donnée dans $L^2(\Omega)$ et $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ est la derivée normal de u. La solution de (1) n'est pas dans $H^2(\Omega)$, et peut s'écrire (d'après [3]) sous la forme

$$u(r,\theta) = u_R(r,\theta) + C_1\sqrt{r_1}\sin\frac{\theta_1}{2}\chi_1 + C_2\sqrt{r_2}\cos\frac{\theta_2}{2}\chi_2, \tag{2}$$

où $u_R \in H^2(\Omega)$ est la partie régulière, (r_j, θ_j) les coordonées polaires locales aux points S_j, C_j des constantes réelles, χ_j sont des fonctions de troncatures telles que $0 \leq \chi_j \leq 1$ et $\chi_j = 1$ sur un voisinage de S_j.

Le but de ce travail est l'étude de la stabilisation frontière de la solution du problème suivant

$$\begin{cases} u_{tt} - \triangle u = 0 & \text{dans } (0,+\infty) \times \Omega \\ u = 0 & \text{sur } (0,+\infty) \times \Gamma_D \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + m.\nu d(u_t) = 0 & \text{sur } (0,+\infty) \times \Gamma_N \\ u(0,.) = u^0 & \text{dans } \Omega \\ u_t(0,.) = u^1 & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{3}$$

où d satisfait

$$\left\{\begin{array}{l} d \in C(\mathbb{R}) \text{ croissante monotone,} \\ \exists\, g \in C^1(\mathbb{R}) \text{ fonction impair strictement croissante tel que} \\ |v| \leq |d(v)| \leq C|v| \qquad \text{si} \qquad |v| \geq 1, \\ g(|v|) \leq |d(v)| \leq Cg^{-1}(|v|) \qquad \text{si} \qquad |v| \leq 1. \end{array}\right. \tag{HD}$$

2. Résultat principal

Soit $\eta > 0$ et $T_0 > 0$ est un nombre réel fixé et soit F une fonction strictement croissante de $[0,+\infty)$ sur $[0,\eta)$, avec $F(0)=0$ et

$$\lim_{y \to +\infty} F(y) = \eta.$$

Pour tout $r \in (0.\eta)$, on définit une fonction

$$K_r(\tau) = \int_\tau^r \frac{dy}{yF^{-1}(y)}$$

et Ψ_r qui est une fonction strictement croissante définit de $\left[\frac{1}{F^{-1}(r)}, +\infty\right)$ sur $\left[\frac{1}{F^{-1}(r)}, +\infty\right)$ par

$$\Psi_r(z) = z + K_r\left(F\left(\frac{1}{z}\right)\right) \geq z \quad \forall z \geq \frac{1}{F^{-1}(r)}$$

On commence par énoncer les résultats suivants dûs à [1].

Proposition 2.1 (voir [1]) *Soit g une fonction donnée impaire strictement croissante C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $g'(0)=0$. On suppose qu'il existe $r_0 > 0$ tel que la fonction H définie par*

$$H(x) = \sqrt{x}\, g\left(\sqrt{x}\right) \tag{4}$$

est strictement convexe sur $[0, r_0^2]$. On pose

$$\widehat{H}(x) = \left\{\begin{array}{ll} H(x) & \textit{si } x \in [0, r_0^2] \\ +\infty & \textit{si } x \in \mathbb{R}/[0, r_0^2] \end{array}\right. \tag{5}$$

et on définit la fonction F par

$$F(y) = \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\widehat{H}^*(y)}{y} & \textit{si } y \in (0, \infty) \\ 0 & \textit{si } y = 0, \end{array}\right. \tag{6}$$

avec $\widehat{H}^*$ le conjugué convexe de $\widehat{H}$. Alors F est une fonction strictement croissante continue de $[0,+\infty)$ sur $[0,r_0^2)$ donnée par :

$$F(y)=\begin{cases}(H')^{-1}(y)-\dfrac{H\left((H')^{-1}(y)\right)}{y} & \text{si } y\in[0,H'\left(r_0^2\right)]\\ r_0^2-\dfrac{H\left(r_0^2\right)}{y}, & \text{si } y\in\left[H'\left(r_0^2\right),\infty\right).\end{cases}.$$

Théorème 2.1 (voir [1]) *Soit $g\in C^1(\mathbb{R})$ une fonction impaire strictement croissante tel que $g'(0)=0$. On suppose qu'il existe $r_0>0$ tel que $g\in C^2([0,r_0])$ et une fonction H definie par (14) est strictement convexe sur $[0,r_0^2]$.Soit $T_0>0$ un nombre réel fixé, soit E une fonction décroissante absolument continue de $[0,+\infty)$ sur $[0,+\infty)$ et soit $\beta=\beta_{E(0)}$ dépend de $E(0)$ de la manière suivante*

$$\beta=\beta_{E(0)}=\max\left(\eta_1,\eta_2E(0)\right) \tag{7}$$

où η_1 et η_2 ne dépend pas de $E(0)$ tel que

$$0<\frac{E(0)}{2F\left(H'\left(r_0^2\right)\right)}\leq\beta \tag{8}$$

et

$$\int_S^T E(T)\,F^{-1}\left(\frac{E(T)}{2\beta}\right)dt\leq T_0E(S)\quad\forall\,0\leq S\leq T \tag{9}$$

Alors, E décroit comme suit :

$$E(t)\leq 2\beta_{E(0)}z^2(t)\,\frac{z(t)\,g'(z(t))-g(z(t))}{z(t)\,g'(z(t))+g(z(t))},\quad\forall t\geq\frac{T_0}{H'\left(r_0^2\right)} \tag{10}$$

où

$$z(t)=\varphi^{-1}\left(\frac{t}{T_0}\right) \tag{11}$$

avec $\varphi:(0,r_0]\to\left[\frac{1}{H'\left(r_0^2\right)},+\infty\right)$ est strictement décroissante, définie par

$$\varphi(v)=\frac{2v}{vg'(v)+g(v)}+4\alpha(v) \tag{12}$$

et

$$\alpha(\tau)=\int_\tau^{r_0}\frac{g(u)\left(u^2g''(u)+ug'(u)-g(u)\right)}{\left(ug'(u)+g(u)\right)^2\left(ug'(u)-g(u)\right)}du. \tag{13}$$

Nous donnons maintenant le résultat principal de notre travail :

Théorème 2.2 *Sous les hypothèses géometriques et* (2) *. Supposons en outre, qu'il existe* $r_0 \in (0,1)$ *avec* $g(r_0) < 1$*, de telle sorte que* $g \in C^2([0,r_0])$ *et une fonction* H *definie par* (14) *est strictement convexe sur* $[0,r_0^2]$*. Alors* E *satisfait l'estimation* (10)*, où* $z(t)$ *est donnée par* (11)*, et* φ *et* α *sont respectivement donnés par* (12) *et* (13)*. La constante* $\beta_{E(0)}$ *dépend de* $E(0)$ *de la même manière que dans la formule* (8)*.*

Preuve. La preuve se fait en plusieurs étapes et s'inspire des travaux de [1] et [2]

Approximation du domaine :

Pour remédier au manque de régularité de la solution au voisinage de S_1 et S_2, on pose, pour $\varepsilon > 0$

$$\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \bigcup_{k=1}^{2} B(S_k,\varepsilon), \quad \partial\Omega_\varepsilon = \Gamma_D^\varepsilon \cup \Gamma_N^\varepsilon \cup C_\varepsilon^1 \cup C_\varepsilon^2,$$

$$Q_{\varepsilon,T} = \Omega_\varepsilon \times (0,T), \quad \Sigma_{\varepsilon,T} = \partial\Omega_\varepsilon \times (0,T), \quad C_\varepsilon^k = \partial B(S_k,\varepsilon) \cap \Omega,$$

où $B(S_k,\varepsilon)$ est la boule de rayon ε et centrée en S_k.

On considère

$$I(\varepsilon) = \int_{\Omega(\varepsilon)} \int_S^T f(E)\,(u_{tt} - \triangle u)\, Mu = 0$$

avec

$$Mu = m.\nabla u + \frac{N-1}{2} u.$$

En intégrant par parties on obtient

$$\int_S^T Ef(E) = \int_S^T E' f'(E) \int_{\Omega_\varepsilon} u_t Mu - \left[f(E) \int_{\Omega_\varepsilon} u_t Mu \right]_S^T + I(\Gamma_D^\varepsilon) + I(\Gamma_N^\varepsilon) + I\left(C_\varepsilon^1\right) + I\left(C_\varepsilon^2\right).$$

avec

$$I(\Gamma) = \int_S^T f(E) \int_\Gamma \left[\frac{\partial u}{\partial \nu}\left(m\nabla u + \frac{1}{2} u \right) + \frac{m.\nu}{2}\left(|u_t|^2 - |\nabla u|^2 \right) \right]$$

On passe à la limite quand $\varepsilon \to 0$ sur $\Omega(\varepsilon)$, $\Gamma_D(\varepsilon)$ et $\Gamma_N(\varepsilon)$ en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue. Et sur $C(\varepsilon)$ on développe la solution sous la forme

(2) comme dans [2], après le passage à la limite on obtient la même condition géométrique que dans [2] c'est à dire $m \cdot \tau < 0$, et on obtient l'inégalité suivante

$$\int_S^T Ef(E) \leq \int_S^T E'f'(E) \int_\Omega u_t Mu - \left[f(E) \int_\Omega u_t Mu \right]_S^T + \int_S^T f(E) \int_{\Gamma_N} m.\nu \left[\frac{1}{2} \left(|u_t|^2 - |\nabla u|^2 \right) - \left(m.\nabla u + \frac{1}{2} u \right) d(u_t) \right]$$

Finalement, En procédant comme dans [1] on obtient les deux inégalités (8) et (9) d'où la décroissance (10). □

3. Exemples de taux de décroissance de l'énergie

On donne quelque exemple de la fonction g :

Exemple 3.1 (Le cas exponentiel) *Soit g donné par $g(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ sur $(0, r_0]$. Alors l'énergie de la solution (3) satisfait*

$$E(t) \leq \beta_{E(0)} \left(\theta^{-1} \left(\frac{D}{t} \right) \right)^2$$

pour t suffisamment grand et pour tout $(u^0, u^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ et la fonction θ est definie par

$$\theta(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}, \qquad x > 0$$

De plus, la propriété suivante :

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\theta^{-1}(1/t)}{g^{-1}(1/t)} = 1.$$

Exemple 3.2 (Le cas polynomial) *Soit g donné par $g(x) = x^p$ où $p > 1$ sur $(0, r_0]$. Alors l'énergie de la solution (3) satisfait*

$$E(t) \leq \beta_{E(0)} t^{-\frac{2}{p-1}}$$

pour t suffisamment grand et pour tout $(u^0, u^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Exemple 3.3 (Entre polynômes) *Soit g donné par $g(x) = x^p (\ln(1/x))^q$ où $p > 2$ et $q > 1$ sur $(0, r_0]$. Alors l'énergie de la solution (3) satisfait*

$$E(t) \leq \beta_{E(0)} \left(\theta^{-1} \left(\frac{D}{t} \right) \right)^2$$

pour t suffisamment grand et pour tout $\left(u^0, u^1\right) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ et la fonction θ est definie par

$$\theta(x) = x^{p-1} (\ln(1/x))^q, \qquad x \in (0,1)$$

De plus, la propriété suivante :

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\theta^{-1}(1/t)}{g^{-1}(1/t)} = 0.$$

Exemple 3.4 (Plus qu'un polynôme, moins qu'une exponentielle) *Soit g donné par $g(x) = e^{(\ln(1/x))^p}$ où $1 < p < 2$ sur $(0, r_0]$. Alors l'énergie de la solution (3) satisfait*

$$E(t) \leq \beta_{E(0)} \left(\theta^{-1} \left(\frac{D}{t} \right) \right)^2$$

pour t suffisamment grand et pour tout $\left(u^0, u^1\right) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ et la fonction θ est définie par

$$\theta(x) = x^{-1} (\ln(1/x)) e^{(\ln(1/x))^p}, \qquad x \in (0,1)$$

De plus, la propriété suivante :

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\theta^{-1}(1/t)}{g^{-1}(1/t)} = 0.$$

Remerciements. Ce travail est financé par le projet PNR Sciences fondamentales N° 25/57

Bibliographie

[1] F. Alabau-Boussouira, Convexity and weighted integral inequalities for energy decay rates of nonlinear dissipative hyperbolic systems, Appl. Math. Optim. 51, 61–105 (2005).

[2] R. Bey, J. Lohéac et M. Moussaoui, Singularities of the solution of a mixed problem for a general second order elliptic equation and boundary stabilization of the wave equation, J. Math. pures et appl., 78, p. 1043-1067 (1999).

[3] P. Grisvard, Contrôlabilité exacte des solutions de l'équation des ondes en présence de singularités, J. Math. pures et appl., 68, 215-259 (1989).

Error Estimates of a Numerical Study

for Navier Stokes Problem coupled with Darcy's Equation

A. Assala[1] — F.Z. Nouri[2]

Mathematical Modeling and Numerical Simulation Laboratory LAM^{2}SIN,
Faculty of Sciences, Badji Mokhtar University, P.O. Box 12, 23000 Annaba, Algeria
[1] m2ma.assala@gmail.com

ABSTRACT. This paper is devoted to the numerical study of the coupled system of Navier-Stokes and Darcy equations by means of the Beavers-Joseph-Saffman's condition on the interface. This model is discretized using the discontinuous Galerkin finite element method in the hole domain. In this work we present a *priori* error estimates and we define three families of error indicators of a residual type for the resulting discrete problem which are associated with one element of the triangulation or with one edge of this element, so that they are fully appropriate for an adaptive rafinement of the mesh where necessary. A local a posteriori error estimation is given.

RÉSUMÉ. Cet article est dévoué à l'étude numérique du système couplé des équations de Navier-Stokes et Darcy avec les conditions de Beavers-Joseph-Saffman sur l'interface. Ce modèle qui décrit l'interaction d'un écoulement souterrain avec un écoulement surfacique est discrétisé par la méthode de Galerkin discontinue. Dans ce travail on présente des estimations d'erreur a *priori* et on présente trois familles d'indicateurs d'erreur du type résidu pour le problème discret résultant qui sont associés à un élément de la triangulation ou à un coté de cet élément. Ces familles fournissent une bonne représentation locale de l'erreur, et donc ce sont des outils de base pour l'adaptation de maillage. Une estimation d'erreur a posteriori locale est donnée.

KEYWORDS : Navier-Stokes Equations, Darcy Equations, Discontinuous Galerkin, Error Estimates.

MOTS-CLÉS : Equations de Navier-Stokes, Equations de Darcy, Galerkin discontinue, Estimation d'erreurs.

1. Introduction

Coupling incompressible flow and porous media flow has become an active area of research because of the wide range of applications (see for instance[8],[6] and [5]). In recent years, there has been considerable interest in the discontinuous Galerkin finite element method for the numerical solution of a wide range of partial differential equations; for an extensive survey of this area of research, we refer the reader to [7], and references therein. This method have several important advantages; it is well suited for solving flows in heterogeneous porous media because it is locally mass conservative, it can be of high order and it is easily implemented on unstructured non-conforming meshes. Here, we make use of this method to solve the coupled Navier-Stokes and Darcy equations where the different physical flows are coupled via appropriate conditions that include the balance of forces and the Beavers-Joseph-Saffman's law. Our aim is to derive a priori and a posteriori error estimates for this model.

2. Mathematical model

Let Ω be a bounded domain in $\mathbb{R}^d$ $(d = 2)$ subdivised into two disjoint subdomains Ω_1, Ω_2. Let Γ_{12} be the interface $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ and $\Gamma_i = \partial\Omega_i \backslash \Gamma_{12}$, $i = 1, 2$. Denote by $u_i = u \mid_{\Omega_i}$ the fluide velocity and by $p_i = p \mid_{\Omega_i}$ the fluide pressure. The body forces f_1 and f_2 respectively act on Ω_1 and Ω_2. The flow in the domain Ω_1 is incompressible and is characterized by the Navier-Stokes equations.

$$\begin{cases} -\nabla.(2\nu D(u_1) - p_1 I) + u_1.\nabla u_1 = f_1 \quad \text{in } \Omega_1 \\ \nabla.u_1 = 0 \quad \text{in } \Omega_1 \\ u_1 = 0 \quad \text{on } \Gamma_1 \end{cases} \tag{2.1}$$

Here D is the strain tensor $D(u_1) = \dfrac{1}{2}\left(\nabla u_1 + \nabla u_1^T\right)$ and $\nu > 0$ is the kinematic fluid viscosity. In the region Ω_2, the fluid pressure and velocity satisfy the single phase Darcy flow equations.

$$\begin{cases} -\nabla.K\nabla p_2 = f_2 \quad \text{in } \Omega_2 \\ -K\nabla p_2 = u_2 \quad \text{in } \Omega_2 \\ p_2 = g_D \quad \text{on } \Gamma_{2D} \\ K\nabla p_2.n_2 = g_N \quad \text{on } \Gamma_{2N} \end{cases} \tag{2.2}$$

Where $\Gamma_{2D} \cup \Gamma_{2N} = \Gamma_2$ and $K = \dfrac{k\rho g}{\nu}$ is a symmetric positive definite tensor with k represents the permeability, ρ the density of the fluide, g the acceleration due to the gravity and n_2 is the unit normal vector to Γ_2. The physical quantities are coupled through appropriate interface conditions given by

$$\begin{cases} u_1.n_{12} = -u_2.n_{12} \\ u_1.\tau_{12} = -2\nu G(D(u_1)n_{12}).\tau_{12} \\ ((-2\nu D(u_1) + p_1 I)n_{12}).n_{12} + \dfrac{1}{2}(u_1.u_1) = p_2 \end{cases} \tag{2.3}$$

Where n_{12} (resp.τ_{12}) is the unit normal (resp. tangential) vector to Γ_{12} directed from Ω_1 to Ω_2 (resp. on the interface Γ_{12}) and $G > 0$ is an experimentally determined constant.

3. Variational formulation

The variational formulation is set as: Find $u_1 \in X_1$, $p_1 \in M_1$ and $p_2 \in H^1(\Omega_2)$ S.T.

$$\begin{gathered} \forall v_1 \in X_1, q_2 \in M_2, a_{NS}(u_1, v_1) + b_{NS}(v_1, p_1) + c_{NS}(u_1, v_1) \\ +a_D(p_2, q_2) + \gamma_{12}(u_1, p_2; v_1, q_2) = L(v_1, q_2) \\ \forall q_1 \in M_1, \quad b_{NS}(u_1, q_1) = 0 \end{gathered} \tag{3.1}$$

Where

$$\begin{gathered} X_1 = \left\{ v_1 \in \left(H^1(\Omega_1)\right)^2,\ v_1 = 0 \text{ on } \Gamma_1 \right\}, M_1 = L^2(\Omega_1) \\ M_2 = \left\{ q_2 \in H^1(\Omega_2),\ q_2 = 0 \text{ on } \Gamma_{2D} \right\} \end{gathered}$$

$$\begin{aligned} & a_{NS}(u_1, v_1) = 2\nu (D(u_1), D(v_1))_{\Omega_1} \\ & b_{NS}(v_1, p_1) = -(p_1, \nabla.v_1)_{\Omega_1} \\ & c_{NS}(u_1, v_1) = (u_1, \nabla u_1, v_1)_{\Omega_1} \\ & a_D(p_2, q_2) = (K\nabla p_2, \nabla q_2)_{\Omega_2} \\ & \gamma_{12}(u_1, p_2; v_1, q_2) = (p_2, v_1.n_{12})_{\Gamma_{12}} + \frac{1}{G}(u_1.\tau_{12}, v_1.\tau_{12})_{\Gamma_{12}} \\ & \qquad - (u_1.n_{12}, q_2)_{\Gamma_{12}} - \frac{1}{2}(u_1.u_1, v_1.n_{12})_{\Gamma_{12}} \\ & L(v_1, q_2) = (f_1, v_1)_{\Omega_1} + (f_2, q_2)_{\Omega_2} + (g_N, q_2)_{\Gamma_{2N}} \end{aligned}$$

To prove the existence and the uniqueness of the solution to (3.1), we refer the reader to [4] and [1].

4. Numerical approximation

Let us consider a regular family of triangulations of Ω, denoted by ε^h of diameter h. For $i = 1, 2$, let ε_i^h be the restriction of ε^h to Ω_i, and let Γ_i^h denote the set of edges of

ε_i^h interior to Ω_i. We propose the discontinuous Galerkin method. For, we introduce the discontinuous finite element spaces with their norms where $k_1 \geq 1$ and $k_2 \geq 1$

$$\begin{aligned} X_1^h &= \left\{ v_1^h \in \left(L^2(\Omega_1)\right)^2 ; \forall E \in \varepsilon_1^h,\ v_1^h\ |_E \in \left(\mathbb{P}_{k_1}(E)\right)^2 \right\} \\ M_1^h &= \left\{ q_1^h \in L^2(\Omega_1) ; \forall E \in \varepsilon_1^h, q_1^h\ |_E \in \mathbb{P}_{k_1-1}(E) \right\} \\ M_2^h &= \left\{ q_2^h \in L^2(\Omega_2) ; \forall E \in \varepsilon_2^h,\ q_2^h\ |_E \in \mathbb{P}_{k_2}(E) \right\} \end{aligned}$$

$$\forall v_1^h \in X_1^h,\ \left\| v_1^h \right\|_{X_1} = \left(2 \sum_{E \in \varepsilon_1^h} \left\| D\left(v_1^h\right) \right\|_{L^2(E)}^2 + \sum_{e \in \Gamma_1^h \cup \Gamma_1} \frac{\sigma_e}{|e|} \left\| \left[v_1^h \right] \right\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\forall q_2^h \in M_2^h,\ \left\| q_2^h \right\|_{M_2} = \left(\sum_{E \in \varepsilon_2^h} \left\| K^{\frac{1}{2}} \nabla q_2^h \right\|_{L^2(E)}^2 + \sum_{e \in \Gamma_2^h \cup \Gamma_{2D}} \frac{\sigma_e}{|e|} \left\| \left[q_2^h \right] \right\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\forall q_1^h \in M_1^h,\ \left\| q_1^h \right\|_{M_1} = \left\| q_1^h \right\|_{L^2(\Omega_1)}$$

Here the parameter $\sigma_e \geq 0$ takes a constant value over each edge e, and $|e|$ denotes the length of e. We also introduce the jump bilinear forms

$$J_1\left(u_1^h, v_1^h\right) = \sum_{e \in \Gamma_1^h \cup \Gamma_1} \frac{\sigma_e}{|e|} \int_e \left[u_1^h\right] \left[v_1^h\right],\ \ J_2\left(v_1^h, w_1^h\right) = \sum_{e \in \Gamma_2^h \cup \Gamma_{2D}} \frac{\sigma_e}{|e|} \int_e \left[v_1^h\right] \left[w_1^h\right]$$

4.1. Discontinuous Galerkin Scheme

Find $\left(u_1^h, p_1^h, p_2^h\right) \in X_1^h \times M_1^h \times M_2^h$ such that

$$\begin{gathered} \forall v_1^h \in X_1^h, \forall q_2^h \in M_2^h \quad a_{\epsilon_1}\left(u_1^h, v_1^h\right) + b_{DG}\left(v_1^h, p_1^h\right) + a_{\epsilon_2}\left(p_2^h, q_2^h\right) \\ + c_{DG}\left(u_1^h; u_1^h, v_1^h\right) + \gamma_{12}\left(u_1^h, p_2^h; v_1^h, q_2^h\right) = L_{DG}\left(v_1^h, q_2^h\right) \qquad (4.1) \\ \forall q_1^h \in M_1^h, \quad b_{DG}\left(u_1^h, q_1^h\right) = 0 \end{gathered}$$

with $a_{\epsilon_1}\left(u_1^h, v_1^h\right),\ b_{DG}\left(v_1^h, p_1^h\right),\ a_{\epsilon_2}\left(p_2^h, q_2^h\right),\ \gamma_{12}\left(u_1^h, p_2^h; v_1^h, q_2^h\right),\ c_{DG}\left(u_1^h; v_1^h, w_1^h\right)$ and $L_{DG}\left(v_1^h, q_2^h\right)$ the discretised forms associated to (3.1). Note that

$$\partial E_- = \left\{ x \in \partial E : \left\{ u_1^h \right\} . n_E < 0 \right\}$$

Problem (4.1) has a unique solution (to prove this we adapt results of [1] and [2]).

4.2. A priori error estimates

Theorem 4.1 [4] *Assume that the solution (u_1, p_1, p_2) of problem (3.1) belongs to $\left(H^{k_1+1}(\Omega_1)\right)^2 \times H^{k_1}(\Omega_1) \times H^{k_2+1}(\Omega_2)$. Then, there exists a constant C independent of h and ν such that*

$$\nu \left\|u_1 - u_1^h\right\|_{X_1}^2 + \left\|p_2 - p_2^h\right\|_{M_2}^2 \leq Ch^{2k_1} |u_1|_{H^{k_1+1}(\Omega_1)}^2 \left(\frac{\mathcal{R}_0^2 + \mathcal{R}_1^2}{\nu^2} + \nu + 1\right) + Ch^{2k_2}\left(1 + \frac{1}{\nu}\right) \|p_2\|_{H^{k_2+1}(\Omega_2)}^2 + Ch^{2k_1}\frac{1}{\nu}\|p_1\|_{H^{k_1}(\Omega_1)}^2$$

Furthermore, there is a constant$C$ independent of h such that

$$\left\|p_1 - p_1^h\right\|_{M_1} \leq C\left(h^{k_1}|u_1|_{H^{k_1+1}(\Omega_1)} + h^{k_2}|p_2|_{H^{k_2+1}(\Omega_2)} + h^{k_1}|p_1|_{H^{k_1}(\Omega_1)}\right).$$

Where $\left(\nu \|u_1\|_{X_1}^2 + \|p_2\|_{M_2}^2\right) \leq \mathcal{R}_1^2$ and $\mathcal{R}_0$ is defined by (3.27) in [2].

4.3. A posteriori error estimation

Let f_{1h} and f_{2h} be the approximations of f_1 and f_2 respectively in Z_h. Similary, we denote by g_{Nh} the approximations of g_N in W_h, where l depends on k_1 and k_2.

$$Z_h = \left\{\mu_h \in L^2(\Omega_i)^d, i = 1, 2, \forall E \in \varepsilon_i^h : \mu_h|_E \in \mathcal{P}_l(E)\right\}$$
$$W_h = \left\{\mu_h^* \in L^2(\Gamma_{2N}), \forall e \in \varepsilon_2^h \backslash \Gamma_2^h : \mu_h^*|_e \in \mathcal{P}_m(e), m \geq 0\right\}$$

We consider three families of error indicators, related to Ω_1, Ω_2 and Γ_{12} respectively.

– For each E in ε_1^h, we have

$$\eta_E^F = h_E \left\|f_{1h} + \nabla.\left(2\nu D\left(u_1^h\right)\right) - \nabla p_1^h - u_1^h.\nabla u_1^h - \frac{1}{2}\left(\nabla.u_1^h\right).u_1^h\right\|_{L^2(E)^d} + \left\|\nabla u_1^h\right\|_{L^2(E)} + \sum_{e\in\Gamma_1^h\cup\Gamma_1} h_e^{\frac{1}{2}} \left\|(1+\epsilon_1).2\nu\left\{D\left(u_1^h\right).n_e\right\} + \frac{\nu\sigma_e}{|e|}\left[u_1^h\right] + \left\{p_1^h\right\}.n_e + \frac{1}{2}\left\{u_1^h.u_1^h\right\}.n_e + \left[u_1^h\right].n_e\right\|_{L^2(e)^d} + h_E\left\|\left\{u_1^h\right\}.n_E.\left(u_1^{h(int)} - u_1^{h(ext)}\right)\right\|_{L^2(\partial E\_(z)\backslash\Gamma_{12})^d}$$

– For each E in ε_2^h, we have

$$\eta_E^P = h_E \left\| f_{2h} + \nabla . K \nabla p_2^h \right\|_{L^2(E)} + \sum_{e \in \varepsilon_2^h \setminus \Gamma_2^h} \left\| g_{Nh} - K \nabla p_2^h . n_e \right\|_{L^2(e)}$$

$$+ \sum_{e \in \Gamma_2^h \cup \Gamma_{2D}} h_e^{\frac{1}{2}} \left\| (1+\epsilon_2) \left\{ K \nabla p_2^h . n_e \right\} + \frac{\sigma_e}{|e|} \left[p_2^h \right] \right\|_{L^2(e)}$$

– For each e in ε_{12}^h, we have

$$\eta_e^{12} = \left\| \frac{1}{G} \left(u_1^h . \tau_{12} \right) . \tau_{12} - \frac{1}{2} \left(u_1^h . u_1^h \right) . n_{12} + u_1^h . n_{12} \right\|_{L^2(e)^d} + \left\| p_2^h . n_{12} \right\|_{L^2(e)}$$

Where h_e denotes the length of an edge e, h_E is the diameter of an element E and the parameters $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \{-1, 0, +1\}$ allow to switch from symmetric to non-symmetric bilinear forms.

Theorem 4.2 *Assume that the data f_1, f_2 are in $L^2(\Omega_1)$ and $L^2(\Omega_2)$ respectively, the data g_N in $L^2(\Gamma_{2N})$ and g_D in $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{2D})$. The following a posteriori error estimate holds between the solution (u_1, p_1, p_2) of problem (3.1) and the solution $\left(u_1^h, p_1^h, p_2^h\right)$ of problem (4.1)*

$$\left\| u_1 - u_1^h \right\|_{H^1(\Omega_1)} + \left\| p_1 - p_1^h \right\|_{L^2(\Omega_1)} + \left\| p_2 - p_2^h \right\|_{H^1(\Omega_2)} \tag{4.2}$$

$$\leq c \left[\sum_{E \in \varepsilon_1^h} \left(\left(\eta_E^F \right)^2 + h_E^2 \left\| f_1 - f_{1h} \right\|_{L^2(E)^d}^2 \right) \right.$$

$$+ \sum_{E \in \varepsilon_2^h} \left(\left(\eta_E^P \right)^2 + h_E^2 \left\| f_2 - f_{2h} \right\|_{L^2(E)}^2 + \sum_{e \in \varepsilon_e^N} h_e \left\| g_N - g_{Nh} \right\|_{L^2(e)}^2 \right)$$

$$\left. + \sum_{e \in \varepsilon_{12}^h} \left(\eta_e^{12} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + c' \left(\left\| K \nabla \left(g_D - i_h^{\Gamma_{2D}} g_D \right) \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{2D})} \right.$$

$$\left. + \frac{\sigma_e}{|e|} \left\| \left(g_D - i_h^{\Gamma_{2D}} g_D \right) \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{2D})} \right)$$

Where $i_h^{\Gamma_{2D}}$ is the Lagrange interpolation operator on Γ_{2D}, ε_e^N is the set of edges of an element E in ε_2^h which are contained in Γ_{2N}, and ε_{12}^h is the set of edges which are contained in Γ_{12}.

5. Conclusion

In this paper, we have considered a problem coupling Navier-Stokes and Darcy equations similar to the one by $[2]$ and $[1]$ and proposed the discontinuous Galerkin finite element method for discretization.We obtained local a posteriori error estimation and error indicators of a residual type. To complete this work, we will prove an upper bound for each error indicator to conclude that the estimation (4.2) is optimal and validate the obtained results by numerical simulations.

References

[1] C. Bernardi, F. Hecht and F.Z. Nouri, A New finite element discretisation for the solution of Stokes problem coupled with Darcy equation, IMA J. Numerical Analysis, 30, pp. 61-93, 2010.

[2] P. Chidyagwai, B. Rivière. Numerical modeling of coupled surface and subsurface flow systems, Advanced in Water Resources., Vol. 33 (2010), pp. 92–105.

[3] V. Girault, B. Rivière, M. F. Wheeler. A discontinuous Galerkin method with non-overlapping domain decomposition for the Stokes and Navier-Stokes problems, Mathematics of Computation. Vol. 74 (2004), pp. 53–84.

[4] V. Girault, B. Rivière. DG approximation of coupled Navier-Stokes and Darcy equations by Beaver-Joseph-Saffman interface condition, SIAM Journal on Numerical Analysis., Vol. 47 (2009), pp. 2052–2089.

[5] N. Hanspal, A. Waghode, V. Nassehi, R. Wakeman, Numerical analysis of coupled Stokes/Darcy flows in industrial filtrations, Transport in Porous Media., Vol. 64 (2006), pp. 73–101.

[6] V. Nassehi, Modelling of combined Navier-Stokes and Darcy flos in cross-flow,membrane filtration, Chemical Engineering Science., Vol. 53 (1998), pp. 1253–1265.

[7] B. Rivière, Discontinuous Galerkin Methods for Solving Elliptic and Parabolic Equations, Theory and Implementation, Frontiers in Applied Mathematics, 2008.

[8] A. Salinger, R. Aris, J. Derby. Finite element formulations for large-scale coupled flows in adjacent porous and open fluid domains, International Journal for Numerical Methods in Fluids. Vol. 18 (2004), pp. 1185–1209.

Modified Crank-Nicholson method for one-dimensional diffusion equation with nonlocal boundary conditions

Abdelfatah Bouziani* — Souad Bensaid**

* Larbi Ben M'Hidi University Oum El Bouaghi, 04000, Algeria
aefbouziani@yahoo.fr
* University of Batna, 05000, Algeria
bensaids@hotmail.com

ABSTRACT. This talk is considred to solve one-dimensional diffusion equation with nonlocal boundary specifications model various physical problems. We used the modified Crank-Nicholson method. The new algorithm are tested in the problem from the literature.

RÉSUMÉ. Ce discours est considéré pour résoudre l'équation de diffusion avec une dimension par des conditions non locale pour différent problèmes physique.En utilisant la méthode de Crank-Nicholson modifiée. Le nouveau algorithme est testé par un exemple de litérature.

KEYWORDS : One-dimensional diffusion equation; Nonlocal boundary conditions ; Modified Crank-Nicholson method.

MOTS-CLÉS : Equation de diffusion ; Condition nonlocale ; Méthode de Crank-Nicholson modifiée.

1. Introduction

In this talk, we interest to study the numerical solution for the diffusion equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \qquad 0 < x < 1, \qquad 0 < t \leq T, \tag{1}$$

with the initial condition

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 < x < 1, \tag{2}$$

and the nonlocal boundary conditions

$$u(0,t) = \int_0^1 p(x,t)\, u(x,t)\, dx + E(t), \qquad 0 < t \leq T, \tag{3}$$

$$u(1,t) = \int_0^1 q(x,t)\, u(x,t)\, dx + G(t), \qquad 0 < t \leq T, \tag{4}$$

where $f,\ \varphi,\ p,\ q,\ G$ and E are known functions, so must be determined the function u.

Recently, this kind of nonlocal boundary-value problem has many important applications in chemical diffusion, thermoelasticity, heat conduction processes, population dynamics, vibration problems, nuclear reactor dynamics, biotechnology and mathematical biology, and so forth [2, 3, 4, 19, 20] and the references therein. Also, this problem arises in the quasi-static theory of thermoelasticity treated by several mathematicians such as Day [5, 6]. Dagan [8] describes the quasi-static flexure of a thermoelastic rod of unit length. The detailed of this example can be found in [7]. Friedman in [13], Kawohl in [15] and others extended the Day's result which they generalized the parabolic equation in several space variables.

The numerical solution of this problem and its variations has been considered in several papers. Ekolin [11] proved the convergence of the Crank-Nicolson method by using an energy argument, Morton and Mayers [18], and Yunkang Liu considered the Crank-Nicolson method (θ-method). Fairweather, López-Marcos [12] considered the Crank-Nicolson Galerkin method, Ang [1] solved the problem by using the Laplace transform, Zhi-Zhong Sun [21] used the high order difference scheme and recently, Dehghan [9]-[10] presented different explicit and implicit methods, Javidi [14] considered the method of lines (MOL), Martín-Vaquero, Vigo-Aguiar [17] used a Crandall formula, Mu [16] and Lin-Zhou [22] proposed a general technique for solving the solution in the reproducing kernel space.

2. Modified Crank-Nicholson method

First, we take positive integers N and M. We divide the intervals $[0, 1]$ and $[0, T]$ into M and N subintervals of equal lengths $\delta x = 1/M$ and $\delta t = T/N$, respectively. By u_i^n, we denote the approximation to u at the i^{th} grid-point and n^{th} time step. The Grid point $(x_i,\ t_n)$ are given by

$$x_i = i\,(\delta x)\,, \qquad i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ M, \quad t_n = n\,(\delta t)\,, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N,$$

in which M is an even integer. We introduce the following notation:

$$f_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(f_i^{n+1} + f_i^n\right),$$

and it is well known [**?**] that the standard central difference operators δ_x^2 defined by

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i \approx \frac{1}{h^2}\delta_x^2 u_i \equiv \frac{1}{h^2}\left(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}\right), \tag{5}$$

give only second-order approximations to $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, where i represents the x indice for spatial grid points, h represent the grid spacing in the x dimensions, respectively. We take the classical Crank-Nicholson finite difference approximation to equation (1.1), it comes

$$\frac{1}{\Delta t}\left(u_i^{n+1} - u_i^n\right) - \alpha\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} = f_i^{n+\frac{1}{2}}. \tag{6}$$

The derivative in this method is approximated by this expression

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\delta_x^2}{1+\frac{1}{12}\delta_x^2}u_i^{n+1} + \frac{\delta_x^2}{1+\frac{1}{12}\delta_x^2}u_i^n\right), \tag{7}$$

inserting (2.3) in (2.2), yields

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\delta t} - \frac{\alpha}{2\,(\delta x)^2}\left(\frac{\delta_x^2}{1+\frac{1}{12}\delta_x^2}u_i^{n+1} + \frac{\delta_x^2}{1+\frac{1}{12}\delta_x^2}u_i^n\right) = f_i^{n+\frac{1}{2}}, \tag{8}$$

where n and i represent the time step and spatial grid points. Using relation (2.2), we can eliminate the second derivative, which is fourth-order accurate is space using a three-point scencil, and we put $r \approx \frac{\alpha \delta t}{(\delta x)^2}$, we obtain

$$\begin{aligned} & (1-6r)\,u_{i-1}^{n+1} + 2\,(5+6r)\,u_i^{n+1} + (1-6r)\,u_{i+1}^{n+1} \\ = \; & (1+6r)\,u_{i-1}^n + 2\,(5-6r)\,u_i^n + (1+6r)\,u_{i+1}^n \\ & + (\delta t)\left(f_{i-1}^{n+\frac{1}{2}} + 10 f_i^{n+\frac{1}{2}} + f_{i+1}^{n+\frac{1}{2}}\right). \end{aligned} \qquad [9]$$

There are $M-1$ linear equations from (2.4) in $M+1$ unknowns $u_0, u_1, \cdots, u_M$. In order to solve for unknowns, we need two more equations. So, let us formally approximate integrals in (1.3) and (1.4) numerically by Simpson's rule (which requires M to be even). Letting $M = 2m$, yields

$$\begin{aligned}&\left((\delta x)\, p_0^{n+1} - 3\right) u_0^{n+1} + 4\,(\delta x)\, p_1^{n+1} u_1^{n+1} \\ &+2\,(\delta x)\, p_2^{n+1} u_2^{n+1} + \cdots + 4\,(\delta x)\, p_{M-1}^{n+1} u_{M-1}^{n+1} + (\delta x)\, p_M^{n+1} u_M^{n+1} \simeq -3E^{n+1}.\end{aligned} \qquad [10]$$

and

$$\begin{aligned}&(\delta x)\, q_0^{n+1} u_0^{n+1} + 4\,(\delta x)\, q_1^{n+1} u_1^{n+1} + 2\,(\delta x)\, q_2^{n+1} u_2^{n+1} \\ &+ \cdots + 4\,(\delta x)\, q_{M-1}^{n+1} u_{M-1}^{n+1} + \left((\delta x)\, q_M^{n+1} - 3\right) u_M^{n+1} \simeq -3G^{n+1}.\end{aligned} \qquad [11]$$

We write the system in the matrix form

$$A^{n+1} U^{n+1} = B^{n+1}, \qquad (12)$$

which

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & & a_{0(M-1)} & a_{0M} \\ (1-6r) & 2\,(5+6r) & (1-6r) & & & 0 \\ 0 & (1-6r) & 2\,(5+6r) & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & 2\,(5+6r) & (1-6r) \\ a_{M0} & a_{M1} & a_{M2} & & a_{M(M-1)} & a_{MM} \end{pmatrix}, \qquad (13)$$

and

$$B^{n+1} = \begin{pmatrix} -3E^{n+1} \\ (1+6r)\, u_0^n + 2\,(5-6r)\, u_1^n + (1+6r)\, u_2^n \\ + (\delta t) \left(f_0^{n+\frac{1}{2}} + 10 f_1^{n+\frac{1}{2}} + f_2^{n+\frac{1}{2}}\right) \\ \vdots \\ (1+6r)\, u_{M-2}^n + 2\,(5-6r)\, u_{M-1}^n + (1+6r)\, u_M^n \\ + (\delta t) \left(f_{M-2}^{n+\frac{1}{2}} + 10 f_{M-1}^{n+\frac{1}{2}} + f_M^{n+\frac{1}{2}}\right) \\ -3G^{n+1} \end{pmatrix}, \qquad (14)$$

where

$$a_{00} = (\delta x)\, p_0^{n+1} - 3, \quad a_{0,2i-1} = 4\,(\delta x)\, p_{2i-1}^{n+1}, \quad i = 1 : \tfrac{M}{2}, \quad a_{0,2i} = 2\,(\delta x)\, p_{2i}^{n+1},$$
$$i = 1 : \tfrac{M}{2} - 1, \quad a_{0M} = (\delta x)\, p_M^{n+1}, \quad a_{M0} = (\delta x)\, q_0^{n+1}, \quad a_{0,2i-1} = 4\,(\delta x)\, p_{2i-1}^{n+1}, \quad i = 1 : \tfrac{M}{2},$$
$$a_{0,2i} = 2\,(\delta x)\, p_{2i}^{n+1}, \quad i = 1 : \tfrac{M}{2} - 1, \quad \text{and} \quad a_{MM} = (\delta x)\, q_M^{n+1} - 3.$$

3. Numerical tests

Now, we will give the results of the numerical analysis. Since the exact solution is known for this test case, we can demonstrate the effectiveness of the new method. In order to get the solution of (2.4), we use (2.8) and Matlab 7.9.0 program. The numerical solutions u_i^n represent the numerical solutions of modified Crank-Nicholson method at $(x_i,\ t_n)$.

Test. Consider problem (1.1)-(1.4) with

$$f(x,t) = -\exp(-t)\left(x(x-1) + \frac{\delta}{6(1+\delta)} + 2\right), \qquad x \in (0,1),\ 0 < t \le T,$$

$$\varphi(x) = x(x-1) + \frac{\delta}{6(1+\delta)}, \qquad x \in [0,1],$$

$p(x) = q(x) = -\delta$, and $G(t) = E(t) = 0$, where $\delta = 0.0144$, and the exact solution is

$$u(x,t) = \exp(-t)\left(x(x-1) + \frac{\delta}{6(1+\delta)}\right).$$

Table

Comparison of numerical solution with solution for $dt = 0.0000625$, $h = 0.0125$ at different times

x	t	Error	Computed Solution	Exact Solution
0.25	0.10	$2.109219331 \times 10^{-11}$	0.16751623334342	0.16751623334695
	0.15	$2.629811426 \times 10^{-11}$	0.15934637023696	0.15934637024115
	0.20	$2.960833639 \times 10^{-11}$	0.15157495605628	0.15157495606076
	0.25	$3.172064504 \times 10^{-11}$	0.14418255821783	0.14418255822240
0.50	0.10	$2.212780205 \times 10^{-11}$	0.22406857196924	0.22406857197420
	0.15	$2.765887039 \times 10^{-11}$	0.21314061876182	0.21314061876771
	0.20	$3.118520815 \times 10^{-11}$	0.20274562812182	0.20274562812814
	0.25	$3.343188042 \times 10^{-11}$	0.19285760715792	0.19285760716436
0.75	0.10	$2.107363615 \times 10^{-11}$	0.16751623334342	0.16751623334695
	0.15	$2.628261189 \times 10^{-11}$	0.15934637023696	0.15934637024115
	0.20	$2.960595591 \times 10^{-11}$	0.15157495605628	0.15157495606076
	0.25	$3.172257007 \times 10^{-11}$	0.14418255821783	0.14418255822240
1.00	0.10	$2.128290832 \times 10^{-11}$	0.00214078253473	0.00214078253478
	0.15	$2.656018689 \times 10^{-11}$	0.00203637533849	0.00203637533854
	0.20	$2.992170757 \times 10^{-11}$	0.00193706014129	0.00193706014135
	0.25	$3.206436254 \times 10^{-11}$	0.00184258860342	0.00184258860348

4. Conclusion

In this talk, an efficient fourth-order numerical algorithm based on the Padé approximation has been developed for one-dimensional diffusion equation with nonlocal boundary specifications replacing the classical boundary conditions. It is an implicit scheme. Numerical results show that the solution is accurate.

References

[1] W. T. Ang, *A method of solution for the one-dimensional heat equation subject to nonlocal conditions*, Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 26 (2002), 185-191.

[2] J. R. Cannon, *The one-dimensional heat equation*, in: K. Rach (Ed.), Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 23, Addison-Wesley, Reading, MA, 1984.

[3] J. R. Cannon, J. van der Hoek, *Diffusion subject to specification of mass*, J. Math. Anal. Appl. 115 (1986) 517–529.

[4] V. Capasso, K. Kunisch, *A reaction-diffusion system arising in modeling man-environment diseases*, Quart. Appl. Math. 46 (1988) 431–449.

[5] W. A. Day, *Extension of a property of the heat equation to linear thermoelasticity and other theories*, Quart. Appl. Math. 40 (1982) 319-330.

[6] W. A. Day, *A decreasing property of solutions of parabolic equations with applications to thermoelasticity*, Quart. Appl. Math. 41 (1983) 468-475.

[7] W. A. Day, *Heat Conduction with in Linear Thermoelasticity*, Springer, New York, 1985.

[8] G. Dagan, *The significance of heterogeneity of evolving scales to transport in porous formations*, Water Resour. Res. 13 (1994) 3327–3336.

[9] M. Dehghan, *Numerical solution of a parabolic equation with non-local boundary specifications*, Appl. Math. Comput. 145 (2003) 185-194.

[10] M. Dehghan, *Numerical solution of a parabolic equation subject to specification of energy*, Applied Mathematics Computation, 149 (2004) 31-45.

[11] G. Ekolin, *Finite difference methods for a nonlocal boundary value problem for the heat equation*, BIT 31 (1991) 245-261.

[12] G. Fairweather, J. C. López-Marcos, *Galerkin methods for a semilinear parabolic problem with nonlocal boundary conditions*, Adv. Comput. Math. 6 (1996) 243-262.

[13] A. Friedman, *Monotonic decay of solutions of parabolic equations with nonlocal boundary conditions*, Quart. Appl. Math. 44 (1986) 401-407.

[14] M. Javidi, *The MOL solution for the one-dimentional heat equation subject to nonlocal conditions*, International Mathematical Forum, 2006, no. 12, 597-602.

[15] B. Kawohl, *Remark on a paper by W. A. Day on a maximum principle under nonlocal boundary conditions*, Quart. Appl. Math. 44 (1987) 751-752.

[16] Lihua Mu, Hong Du, *The solution of a parabolic differential equation with non-local boundary conditions in the reproducing kernel space,* Applied Mathematics and Computation, 202:2 (2008), 708-714.

[17] J. Martín-Vaquero, J. Vigo-Aguiar, *A note on efficient techniques for the second-order parabolic equation subject to non-local conditions,* Appl. Numer. Math. 59 (2009) 1258–1264.

[18] K. W. Morton, D. F. Mayers, *Numerical solution of partial differential equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[19] S. Wang, *The numerical method for the conduction subject to moving boundary energy specification*, Numer. Heat Transfer 130 (1990) 35–38.

[20] S. Wang, Y. Lin, *A finite difference solution to an inverse problem determining a control function in a parabolic partial differential equations*, Inv. Prob. 5 (1989) 631–640.

[21] Zhi-Zhong Sun, *A high-order difference scheme for a nonlocal boundary-value problem for the heat equation*, Computational methods in applied mathematics, 1:4 (2001), 398-414.

[22] Yingzhen Lin, Yongfang Zhou, *Solving the reaction-diffusions equations with non-local boundary conditions based on reproducing kernel space*, Numer. Methods Partial Differential Equations, 25:6 (2009), 1461-1481.

On a Direct Study of an Operator Riccati

Equation Appearing in Boundary Value Problems Factorization

N. Bouarroudj* — L. Belaib**

* Department of Mathematics and informatics ENSET d'Oran
Algeria
nadra_belaib@yahoo.fr
** Department of Mathematics University of Oran
Algeria
lekhmissi@yahoo.fr

ABSTRACT. We propose a direct study of the Riccati equation satisfied by the Neumann-Dirichlet operator defined on a moving section for an elliptic boundary value problem set in a circular domain [3]. Similar equations are studied in control theory. The additional difficulty of this problem is due to the unboundedness of the solution of the equation. The Yosida regularization is used to overcome it.

RÉSUMÉ. On propose dans une étude directe de l'équation de Riccati que vérifie l'opérateur Neumann-Dirichlet sur une section variable pour un problème aux limites elliptique posé dans un domaine circulaire présenté dans [3]. Des équations semblables sont étudiées en théorie du contrôle. Le problème étudié ici présente une difficulté liée au fait que l'opérateurs est non bornés. On utilise pour la surmonter la régularisation de Yosida.

KEYWORDS : Factorization, Riccati equation, Neumann-Dirichlet operator.

MOTS-CLÉS : Factorisation, équation de Riccati, opérateur Neumann-Dirichlet.

1. Introduction

Operator Riccati differential equations are used in the theory of linear-quadratic optimal control of infinite dimensional systems. The operator is the adjoint state to state operator and it allows to compute the optimal feedback control. It is derived by using the invariant embeding technique of R. Bellman. These equations were studied by J. L. Lions [7] using a Galerkin method and also by A. Bensoussan [1] in the context of Kalman filtering. In [6] a direct study of Riccati equations was made in a Hilbert-Schmidt operator framework. Also Tartar [5], at the same time, studied these equations by a fixed point argument. We present here a study of a similar Riccati equation arising in the theory of elliptic boundary value problems factorization. Here the operator satisfying the Riccati equation represents a Neumann to Dirichlet operator on a section of the domain. This kind of Riccati operator equation is not usually found in the litterature of control of infinite dimensional systems as here the solution of the equation are unbounded operators. We present a direct study of the particular operator Riccati equation arising from the factorization of the Poisson equation in a circular domain

2. Method of factorisation by space invariant embeding

We consider the Dirichlet problem for the Poisson equation defined over Ω by:

$$(\mathcal{P}_0) \begin{cases} -\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \\ u \mid_{\Gamma_a} = 0, . \end{cases}$$

Where Γ_a denotes the circle of radius a and center at the origin. Introducing polar coordinates $u(x, y) = \hat{u}(\rho, \theta)$, where $x = \rho \cos\theta, y = \rho \sin\theta, \rho \in \,]0, a[$and $\theta \in [0, 2\pi]$, then:

$$(\mathcal{P}_1) \begin{cases} -\dfrac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \rho^2} - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \hat{u}}{\partial \rho} - \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \theta^2} = f \quad \text{in } \widehat{\Omega} = \,]0, a[\times [0, 2\pi] \\ \hat{u} \mid_{\Gamma_a} = 0 \\ \hat{u} \mid_{\theta=0} = \hat{u} \mid_{\theta=2\pi} \\ \dfrac{\partial \hat{u}}{\partial \theta} \mid_{\theta=0} = \dfrac{\partial \hat{u}}{\partial \theta} \mid_{\theta=2\pi} \end{cases}$$

However, by doing this, we introduce a singularity at the origin. Furthermore the analogous of the computation done in [**?**] would need to know $u(0)$ which is not a data of a problem. In order to avoid this difficulty we start by defining the following intermediate problem:

$$(\mathcal{P}_{0,\varepsilon})\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = f \quad \text{ in } \Omega\backslash\Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon \mid_{\Gamma_a} = 0 \\ \int_{\Gamma_\varepsilon} \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial \rho} d\Gamma_\varepsilon \ = 0 \\ u_\varepsilon \mid_{\Gamma_\varepsilon} \text{ is constant.} \end{cases}$$

Where Ω_ε is a circular domain verifing $\overline{\Omega_\varepsilon} \subset \Omega$, and Γ_ε is the boundary of Ω_ε. The choise of the boundary conditions on Γ_ε corresponds to a nul total flux. The oxiliary problem $(\mathcal{P}_{0,\varepsilon})$ converge to the initial $(\mathcal{P}_0)$.

We can write problem $(\mathcal{P}_{0,\varepsilon})$ in polar coordinates:

$$(\mathcal{P}_{1,\varepsilon})\begin{cases} -\dfrac{\partial^2 \hat{u}_\varepsilon}{\partial \rho^2} - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial \rho} - \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 \hat{u}_\varepsilon}{\partial \theta^2} = f \text{ , in } \widehat{\Omega} \setminus \widehat{\Omega}_\varepsilon =]\varepsilon, a[\times [0, 2\pi] \\ \hat{u}_\varepsilon \mid_{\Gamma_a} = 0 \\ \hat{u}_\varepsilon \mid_{\Gamma_\varepsilon} \text{ constant, } \int_{\Gamma_\varepsilon} \dfrac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial \rho} d\theta = 0 \\ \hat{u}_\varepsilon \mid_{\theta=0} = \hat{u}_\varepsilon \mid_{\theta=2\pi} \\ \dfrac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial \theta} \mid_{\theta=0} = \dfrac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial \theta} \mid_{\theta=2\pi} \end{cases}$$

We embed this problem in the family of similar problems defined by:

$$(\mathcal{P}_{s,h})\begin{cases} -\dfrac{\partial^2 \hat{u}_s}{\partial \rho^2} - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \hat{u}_s}{\partial \rho} - \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 \hat{u}_s}{\partial \theta^2} = f \quad \text{dans } \widehat{\Omega} \setminus \widehat{\Omega}_s =]s, \ a[\times [0, \ 2\pi] \\ \hat{u}_s \mid_{\Gamma_a} = 0 \\ \dfrac{\partial \hat{u}_s}{\partial \rho} \mid_{\Gamma_s} = h \\ \hat{u}_s \mid_{\theta=0} = \hat{u}_s \mid_{\theta=2\pi} \\ \dfrac{\partial \hat{u}_s}{\partial \theta} \mid_{\theta=0} = \dfrac{\partial \hat{u}_s}{\partial \theta} \mid_{\theta=2\pi} \end{cases}$$

The Newmann-Dirichlet map on $\Gamma_s : h \mapsto \hat{u}_s|_{\Gamma_s}$, is affine, so there exist an operator $P(s)$ and a residual $r(s)$ such that

$$\hat{u}_s|_{\Gamma_s} = P(s)h + r(s). \tag{1}$$

Furthermore, the solution $\hat{u}_\varepsilon$ of $(\mathcal{P}_{1,\varepsilon})$ is given by

$$\hat{u}_\varepsilon(\rho, \theta) = (P(\rho)\frac{\partial \hat{u}_s}{\partial \rho} \mid_{\Gamma_s})(\theta) + (r(\rho))(\theta).$$

Now, to derive the equation satisfed by P and r one has to take the derivative with respect to ρ. This computation is formal as one does not know if these functions are derivable. One has

$$\frac{\partial \hat{u}_s}{\partial \rho} = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} - P\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}P - P\frac{1}{\rho} \right) \frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial \rho} - Pf - P\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial r}{\partial \rho}$$

Considering $\dfrac{\partial \hat{u}_s}{\partial \rho}$ arbitrary, one gets the decoupled system

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial \rho} - \dfrac{1}{\rho^2}P\dfrac{\partial^2}{\partial \theta^2}P - \dfrac{1}{\rho}P - I = 0 & , \ P(a) = 0 \\ -Pf - P\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 r}{\partial \theta^2} + \dfrac{\partial r}{\partial \rho} = 0 & , \ r(a) = 0 \\ P \ \dfrac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial \rho} - \hat{u}_\varepsilon = -r & ; \ \hat{u}_\varepsilon(\varepsilon) = r(\varepsilon) \mid_N \end{cases}$$

where

$$N = \left\{ v \in H^{\frac{1}{2}}_{\rho,p}\left(0, 2\pi\right) : v \text{ is constant} \right\}$$

P and r are to be integrated from ε to a then u backwards from a to ε. We stress that P is an operator satisfying a Riccati equation. The initial conditions for P and r are obtained from (1) written at $\rho = a$.

Let P be the solution of the corresponding Riccati equation:

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2}P\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}P - \frac{1}{\rho}P - I = 0; \quad P(a) = 0. \tag{2}$$

taking $\dfrac{P}{\rho} = Q,$ and using the change of variables $r = \ln \rho$, we get

$$\frac{\partial Q}{\partial r} - Q\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}Q - I = 0, Q\left(\ln a\right) = 0 \tag{3}$$

3. Yosida regularisation

Let A be the unbounded operator $-\dfrac{d^2}{d\theta^2}$ in the Hilbert space $H = L^2\left(0, 2\pi\right)$, with domain $D(A) = H^1_{\rho,P}\left(0, 2\pi\right)$, and let A_n be its Yosida regularized $A_n = nI - n^2R(n, -A) = nI - n^2(nI + A)^{-1}$. We know that

$$\lim_{n\to+\infty} A_n h = Ah, \;\; \forall h \in D(A).$$

Each A_n is a linear, bounded, self adjoint and positive operator in H, and so we can define $A_n^{\frac{1}{2}}$, the positive square root of A_n, which is a linear, bounded, self adjoint and positive operator, which also verifies:

$$\left\| A_n^{\frac{1}{2}} \right\|_{\mathcal{L}(H)} = \left\| A_n \right\|^{\frac{1}{2}}_{\mathcal{L}(H)}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Let Q_n be the solution of the corresponding Riccati equation:

$$\frac{\partial Q_n}{\partial r} + Q_n A_n Q_n - I = 0, Q_n\left(\log a\right) = 0 \qquad (4)$$

and we have:

Theorem 3.1 *The equation (4) admits a solution given by:*

$$Q_n(r) = -A_n^{-\frac{1}{2}}(\exp(2A_n^{\frac{1}{2}}(\ln a - r)) - I)(\exp(2A_n^{\frac{1}{2}}(\ln a - r)) + I)^{-1}. \qquad (5)$$

and For each $\rho \geq \varepsilon$, $P_n(\rho)$ is well defined and $P_n(\rho) \in \mathcal{L}(L^2\left(0, 2\pi\right), H^1_{\rho,P}\left(0, 2\pi\right))$ is a negative and self adjoint operator in $H^1_{\rho,P}\left(0, 2\pi\right)$. Moreover, we have that:

$$P_n \in C^1([\varepsilon, a]; \mathcal{L}(L^2\left(0, 2\pi\right), H^1_{\rho,P}\left(0, 2\pi\right))). \qquad (6)$$

Theorem 3.2 *For each $h \in H$ there exists a constant $c(h) \geq 0$, such that*

$$\|Q_n(r)h\| \leq c(h), \forall r \in [\ln\varepsilon, \ln a], \forall n \in \mathbb{N}.$$

and the following limit: $\lim\limits_{n\to+\infty} Q_n(r)h$ exists strongly in $H^1_{r,P}\left(0, 2\pi\right)$, uniformly in $r \in [\ln\varepsilon, \ln a]$.

4. Passing to the limit

Theorem 4.1 *The operator Q verifies the Riccati equation (2) in the following sense:*

$$\frac{d}{dr}(Q(r)h,\overline{h}) + \left(\frac{d}{d\theta}Qh, \frac{d}{d\theta}Q\bar{h}\right) = (h,\overline{h}), \ \ \forall h,\overline{h} \in H, \tag{7}$$

and it verifies also $Q(a) = 0$.

Theorem 4.2 *The operator $Q(r)$ verifies:*

$$(\frac{dQ}{dr}h, h) \geq 0, \forall h \in L^2(0,\ 2\pi).$$

and

$$\|Q(r)h\|_{\ H^1_{r,P}(0,2\pi)} \ \leq \|h\|_{L^2(0,2\pi)}, \forall h \in L^2\left(0, 2\pi\right), \forall r \in \left[\ln\varepsilon, \ln a\right],$$

and, consequently, it also verifies

$$Q \in L^\infty(\ln\varepsilon, \ln a; \mathcal{L}(L^2\left(0, 2\pi\right),\ H^1_{r,P}\left(0, 2\pi\right))). \tag{8}$$

References

[1] A. Bensoussan, *Filtrage optimal des systèmes linéaires*, Dunod, 1971.

[2] N. Bouarroudj, J. Henry, B. Louro and M. Orey, On a direct study of an operator Riccati equation appearing in boundary value problem factorization. Appl. Math. Sci.(Ruse), Vol. 2, no. 46 (2008), 2247-2257

[3] J. Henry and A. M. Ramos, Factorization of Second Order Elliptic Boundary Value Problems by Dynamic Programming, *Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications*, **59**, (2004) 629-647.

[4] J. Henry, B. Louro and M. C. Soares, A factorization method for elliptic problems in a circular domain, *C. R. Acad. Sci. Paris*,série 1, **339** (2004) 175-180.

[5] L. Tartar, Sur l'étude directe d'équations non linéaires intervenant en théorie du contrôle optimal, *Journal of Functional Analysis*, **6**, (1974), 1-47.

[6] R. Temam, Sur l'équation de Riccati associée à des opérateurs non bornés, en dimension infinie, *Journal of Functional Analysis*, **7** (1971), 85-115.

[7] J. L. Lions, *Contrôle Optimal de Systèmes Gouvernés par des Équations aux Dérivées Partielles*. Dunod, 1968.

TAMTAM, Algérie, Alger 27 — 30 Avril 2013

Elliptic Problems with Robin Boundary Coefficient-operator Conditions In the Framework of UMD Spaces

Mustapha Cheggag[1] — Angelo Favini[2] — Rabah Labbas[3] — Stephane Maingot[3] — Ahmed Medeghri[4]

[1] Département de Mathématiques et Informatique,
ENP d'Oran, B.P 1523 Oran El M'Naouer, Algérie.
cheggag_m@yahoo.fr
[2] Università degli Studi di Bologna,
Dipartimento di Matematica, Piazza di Porta S. Donato, 5, 40126 Bologna, Italia.
favini@dm.unibo.it
[3] Laboratoire de Mathématiques Appliquées,
Université du Havre, B.P 540, 76058 Le Havre, France.
rabah.labbas@univ-lehavre.fr
stephane.maingot@univ-lehavre.fr
[4] Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées
Université de Mostaganem, 27000, Algérie.
medeghri@univ-mosta.dz

ABSTRACT. In this work we prove some new results on complete operational second order differential equations of elliptic type with general Robin boundary Coefficient-operator conditions, in the case of the space $f \in L^p(0,1;X)$, $1 < p < \infty$, X being a UMD Banach space . Existence, uniqueness and maximal regularity of the classical solution are proved when B generates a strongly continuous group on X . This work completes the ones studied by Cheggag, Favini, Labbas, Maingot, Medeghri in [1] and [2].

RÉSUMÉ. Dans ce travail on démontre de nouvaux résultats optimaux pour les équations différentielles abstraites complètes du second ordre de type elliptique avec des conditions aux limites de type Robin à coefficients opérateurs dans le cadre fonctionnel $L^p(0,1;X)$, $1 < p < \infty$, lorsque l'espace de Banach X possède la propriété UMD. On s'intéresse à l'existence, l'unicité et la régularité maximale d'une solution classique de ce problème lorsque B génère un groupe fortement continu. Ce travail complète l'étude faite par Cheggag, Favini, Labbas, Maingot, Medeghri dans [1] et [2].

KEYWORDS : Abstract elliptic differential equations, Robin boundary conditions, Analytic semigroup, Maximal regularity, sum of operators, interpolation theory, PDE.

MOTS-CLÉS : Equations différentielles abstraites de type elliptique, CL de type Robin, semi-groupe analytique, régularité maximale, somme d'opérateurs, théorie d'interpollation, EDP.

1. Introduction

In this work, we study the following operational second order complete elliptic differential Problem

$$\begin{cases} u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x), \quad \text{a.e } x \in (0,1), \\ u'(0) - Hu(0) = d_0, \ u(1) = u_1. \end{cases} \tag{1}$$

where A, B, H are closed linear operators in X (X being a complex Banach space), d_0, u_1 are given elements in X and $f \in L^p(0,1;X), 1 < p < \infty$.

We seek for a classical solution u to (1), i.e. a function u such that:

$$\begin{cases} i) \ u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(A)), \ u' \in L^p(0,1;D(B)), \\ ii) \ u(0) \in D(H), \\ iii) \ u \text{ satisfies (1).} \end{cases} \tag{2}$$

The boundary Robin condition

$$u'(0) - Hu(0) = d_0,$$

arises in many concrete situations and generalizes, for instance, the well known impedance boundary condition in 0.

In order to solve (1), we first study the Problem (1) when $B = 0$. The case when B is not supposed to be equal to 0, by using the operators $B \pm \left(B^2 - A\right)^{1/2}$ and the group assumption, we then give a positive result for our Problem

In order to solve Problems (1) for any $f \in L^p(0,1;X), 1 < p < \infty$, we will assume in all this work that

$$X \text{ is a UMD space.} \tag{3}$$

We recall that a Banach space X is a UMD space if and only if for some $p > 1$ (and thus for all p) the Hilbert transform is continuous from $L^p(\mathbb{R};X)$ into itself.

Our techniques are based upon the Dore-Venni Theorem [4] on the sum of two closed linear operators and the reiteration Theorem in interpolation theory.

Many authors have studied the same equation

$$u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x), \quad \text{a.e } x \in (0,1),$$

with the Dirichlet boundary conditions $u(0) = u_0$, $u(1) = u_1$. When $f \in L^p(0, R; X)$, $1 < p < +\infty$, see for example [6] and [7]; when $f \in C^\theta([0,1]; X)$, $0 < \theta < 1$, see [5] and [8].

Here we deal with the following operational Robin boundary condition in 0,

$$u'(0) - Hu(0) = d_0$$

which contains a general linear closed operator H. Therefore the situation is more complicated because of the different domains for intance. In the particular case $B = 0$, Problem (1) has been considered in [1] when $f \in L^p(0, R; X)$, $1 < p < +\infty$ and in [3] for $f \in C^\theta([0,1]; X)$, $0 < \theta < 1$. We recall also the study [2] where B is supposed generating a group.

2. Concrete application in PDE's: impedance boundary problems

We give here new application for our abstract results developed above. Consider the following boundary value problem

$$(P^\delta)\begin{cases} -\dfrac{1}{b_\delta} div\left(b_\delta \nabla u^\delta\right) = g^\delta \text{ in } \Omega^\delta \\ u^\delta = 0 \quad \text{on } \partial\Omega^\delta \backslash \Gamma^\delta \\ \partial_\xi u^\delta = 0 \text{ on } \Gamma^\delta, \end{cases}$$

where δ is a small parameter given in $]0,1]$, Ω^δ is the cylinder $]-\delta, 1[\times G$ of R^n in variables (ξ, η), G is a regular open domain of R^{n-1}, $\Gamma^\delta = \{-\delta\} \times G$ and b_δ is the function defined by

$$b_\delta(\xi) = \begin{cases} p_+ & \text{if } \xi \in]0,1[, \\ p_- & \text{if } \xi \in]-\delta, 0[, \end{cases}$$

where p_+, p_- are the conductibility positive coefficients of the two bodies $]0,1[\times G$ and $]-\delta, 0[\times G$ depending possibly of δ. This problem models, for instance, the heat propagation between the fixed body $\Omega_+ =]0,1[\times G$, and the thin layer $\Omega_-^\delta =]-\delta, 0[\times G$ (when supposed with infinite conductivity).

If we denote by u_+^δ and g_+ the respective restrictions of u^δ and g^δ to Ω_+, and by u_-^δ and g_-^δ the restrictions of u^δ and g^δ to Ω_-^δ, this problem is equivalent to the following abstract boundary value transmission problem

$$(2P_\delta)\begin{cases} \left(u_+^\delta\right)''(\xi) + Au_+^\delta(\xi) = -g_+(\xi) \quad \text{in }]0,1[\\ \left(u_-^\delta\right)''(\xi) + Au_-^\delta(\xi) = -g_-^\delta(\xi) \quad \text{in }]-\delta,0[\\ u_+^\delta(1) = 0 \\ \left(u_-^\delta\right)'(-\delta) = 0 \\ u_-^\delta(0^-) = u_+^\delta(0^+) \\ p_-\left(u_-^\delta\right)'(0^-) = p_+\left(u_+^\delta\right)'(0^+), \end{cases}$$

where A is the closed linear operator defined by

$$\begin{cases} D(A) = W^{2,p}(G) \cap W_0^{1,p}(G) \\ (A\varphi)(\eta) = \Delta_\eta \varphi(\eta). \end{cases}$$

But, making use of the notion of impedance operators, we can prove that the boundary values and transmission problem $(2P_\delta)$ set on $[-\delta, 1]$ can be written as the following impedance boundary values problem set on the fixed interval $[0,1]$:

$$(IMP)\begin{cases} \left(u_+^\delta\right)''(\xi) + Au_+^\delta(\xi) = -g_+(\xi) \quad \text{on} \quad [0,1] \\ \left(u_+^\delta\right)'(0) = T_\delta^1(u_+^\delta(0)) + T_\delta^2(g_-^\delta), \\ u_+^\delta(1) = 0, \end{cases}$$

where

$$\begin{cases} T_\delta^1(u_+^\delta(0)) = -\dfrac{p_-}{p_+}\left[I + e^{2\delta Q}\right]^{-1}\left[I - e^{2\delta Q}\right] Q u_+^\delta(0) \\ T_\delta^2(g_-^\delta) = -\dfrac{p_-}{p_+}\left[I + e^{2\delta Q}\right]^{-1} \displaystyle\int_0^\delta \left[e^{(2\delta - t)Q} + e^{tQ}\right] g_-^\delta(-t)dt, \end{cases}$$

Notice that Problem (IMP) is exactly Problem (1) with

$$f = -g_+, \;\; d_0 = T_\delta^2(g_-^\delta), \;\; u_1 = 0, \;\; B = 0 \text{ and } H = T_\delta^1.$$

References

[1] M. Cheggag, A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, A. Medeghri., « Sturm-Liouville Problems for an Abstract Differential Equation of Elliptic Type in UMD Spaces », Differential and Integral Equations, Vol. 21, 9-10, (2008), 981-1000.

[2] M. Cheggag, A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, A. Medeghri., « Complete Abstract Differential Equations of Elliptic Type with General Robin Boundary Conditions in UMD Spaces », *DCDS-S*, 4, no. 3 (2011), 1-16.

[3] M. Cheggag, A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, A. Medeghri., « Abstract Differential Equations of Elliptic Type with General Robin Boundary Conditions in Hölder Spaces », Applicable Analysis, Vol. 91, No. 8, (2012), p. 1453-1475.

[4] G. Dore and A. Venni., « On the Closedness of the Sum of two Closed Operators », Mathematische Zeitschrift, 196 (1987), 270-286.

[5] A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe and A. Yagi., « On the Solvability and the Maximal Regularity of Complete Abstract Differential Equations of Elliptic Type », Funkcialaj Ekvacioj, 47 (2004), 423-452.

[6] A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe and A. Yagi., « Complete Abstract Differential Equations of Elliptic Type in UMD Spaces », Funkcialaj Ekvacioj, 49 (2006), 193-214.

[7] A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe and A. Yagi., « A Simplified Approach in the Study Of Elliptic Differential Equations in UMD Spaces and New Applications », Funkcialaj Ekvacioj, 51 (2008), 165-187.

[8] A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe and A. Yagi., « Necessary and Sufficient Conditions in the Study of Maximal Regularity of Elliptic Differential Equations in Hölder Spaces », Discrete and Continuous Dynamical Systems, 22 (2008), 973-987.

TAMTAM, Algérie, Alger 27 — 30 Avril 2013

Sur l'équation de Schrödinger linéaire et non-linéaire avec une non-linéarité compacte

TAS Sâadia[*] — CHERGUI Thiziri[**]

[*] Université de Béjaia
Laboratoire de Mathématiques Appliquées, Département de Mathématiques, Faculté des Sciences Exactes, Béjaia 06000
Algérie
tas_saadia@yahoo.fr
[**] Université de Béjaia
Département de Mathématiques, Faculté des Sciences Exactes, Béjaia 06000
Algérie
meriane89@hotmail.fr

RÉSUMÉ. Ce travail est consacré à l'étude de l'équation de Schrödinger linéaire et non-linéaire. L'étude mathématique de l'équation linéaire concerne l'existence et l'unicité d'une solution ainsi que les propriétés de dispersion et de régularité. Concernant l'équation de Schrödinger non-linéaire

$$i\frac{\partial w}{\partial t} + \Delta w + V(x)\,|w|^{p-1}\,w = 0,\, w = w(t,x) : I \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R},\ N \geq 2 \qquad (NLS)$$

Où $p > 1$, $V : \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ et $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle, la recherche des solutions sous la forme d'ondes stationnaires $\varphi(t,x) = e^{i\lambda t}u(x)$ conduit à l'équation elliptique semi-linéaire

$$\Delta u - \lambda u + V(x)\,|u|^{p-1}\,u = 0,\, u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R},\ N \geq 2 \qquad (E_\lambda)$$

Notre principale objectif est d'établir des résultats d'existence, de régularité et d'unicité pour (E_λ).

ABSTRACT. This work is devoted to the study of linear Schrödinger equation and the nonlinear one. The mathematical study of the linear equation concerns the existence, uniqueness of a solution, dispersion properties and regularity. The nonlinear Schrödinger equation

$$i\frac{\partial w}{\partial t} + \Delta w + V(x)\,|w|^{p-1}\,w = 0,\, w = w(t,x) : I \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R},\ N \geq 2 \qquad (NLS)$$

Where $p > 1$, $V : \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ and $I \subset R$ an interval is considered. Seeking solutions of (NLS) as stationary waves $\varphi(t,x) = e^{i\lambda t}u(x)$ leads naturally to the semilinear elliptic equation

$$\Delta u - \lambda u + V(x)\,|u|^{p-1}\,u = 0,\, u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R},\ N \geq 2 \qquad (E_\lambda)$$

Our principal objective for this equation is to establish results of existence, regularity and unicity for (E_λ) .

MOTS-CLÉS : Equation de Schrödinger linéaire, Equation de Schrödinger non-linéaire, Equations elliptiques semi-linéaires.

KEYWORDS : Linear Schrödinger equation, Nonlinear Schrödinger equation, Semilinear elliptic equations.

1. Introduction

L'équation de Schrödinger est l'équation de base de la mécanique quantique décrivant l'évolution dans le temps du vecteur d'état (ψ) d'un système quantique arbitraire. Nous nous intéressons, dans un premier temps, à la résolution de l'équation de Schrödinger linéaire, et plus particulièrement à la propriété de dispersion. Celle-ci est caractérisée par le fait que si l'on n'impose aucune condition au bord, alors les solutions de l'équation ont tendance à s'étaler dans le temps.

Pour l'équation de Schrödinger non-linéaire, nous étudions quelques aspects de l'équation stationnaire avec une non-linéarité compacte :

$$i\frac{\partial w}{\partial t} + \Delta w + V(x)\,|w|^{p-1}\,w = 0, w = w(t,x) : I \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R},\ N \geq 2 \qquad (NLS)$$

Où $p > 1$, $V : \mathbb{R}^N \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ et $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle. Δ désigne le Laplacien par rapport à la variable d'espace $x \in \mathbb{R}^N$.

Pour assurer l'existence de solutions, nous supposons que p est borné supérieurement par une quantité qui dépend de V. On suppose de plus que $V(x) \to 0$ lorsque $|x| \to \infty$, hypothèse justifiant le vocable "non linéarité compacte". L'étude de (NLS) se ramène à l'existence de solutions pour une équation elliptique semi-linéaire

$$\Delta u - \lambda u + V(x)\,|u|^{p-1}\,u = 0, u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R},\ N \geq 2 \qquad (E_\lambda)$$

Nous prouvons, sous certaines hypothèses, l'existence d'un état fondamental de (E_λ), pour tout $\lambda > 0$, par une méthode de minimisation sous contrainte dans l'espace de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N)$. Un état fondamental est une solution faible non triviale de (E_λ) qui minimise la fonctionnelle dont (E_λ) est l'équation d'Euler-Lagrange sur un certain sous-ensemble de $H^1(\mathbb{R}^N)$ qui contient toutes les solutions faibles non-triviales de (E_λ). Nous établissons aussi des propriétés de régularité des états fondamentaux qui ne sont vérifiés que par une seule solution de (E_λ) pour $N \geq 3$ et $\lambda > 0$.

2. L'équation de Schrödinger linéaire

Considérons l'opérateur de Schrödinger $P = \frac{\partial}{\partial t} - i\Delta_x$, l'équation d'évolution associée est

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - i\Delta u = 0, \text{ dans } D^{'}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N) \\ u\,(0,x) = g\,(x) \end{cases} \tag{1.1}$$

L'inconnu étant une fonction $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$.

2.1. Le problème de Cauchy

Nous étudions le problème de Cauchy avec des données dans l'espace des distributions tempérées $S^{'}(\mathbb{R}^N)$.

Théorème 2.1 *Soit $g \in S^{'}(\mathbb{R}^N)$. Alors, il existe une unique solution $u \in C^\infty(\mathbb{R}, S^{'}(\mathbb{R}^N))$ telle que (1.1) soit vérifié.*

2.2. Propriétés des solutions

Théorème 2.2 *Si $g \in S^{'}\left(\mathbb{R}^N\right)$ alors pour tout $t \neq 0$, la solution du problème (1.1) s'écrit $u_t\,(x) = \frac{1}{(4\pi|t|)^{\frac{N}{2}}} e^{-iN\frac{\pi}{4} sgn\, t} e^{i\frac{|x|^2}{4t}} \left[F\left(e^{i\frac{|x|^2}{4t}} g\right)\right]\left(\frac{x}{2t}\right)$ où $sgn\ t$ désigne le signe de t.*

Théorème 2.3 *(Dispersion) Pour tout $t \neq 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^N$, si $g \in L^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ alors la solution u du problème (1.1) vérifie $\|u_t\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq (4\pi\,|t|)^{\frac{-N}{2}}\,\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$*

Proposition 2.1 *(Vitesse infinie de propagation)*

(i) *Soit u solution du problème (1.1). Si $g \in \xi^{'}\left(\mathbb{R}^N\right)$ alors $u_t \in C^\infty\left(\mathbb{R}^N\right), \forall t \neq 0$*

(ii) *Soient $\lambda > 0$ et $g\,(x) = e^{-i\lambda|x|^2}$, alors $u_{\frac{1}{4\lambda}} = (4\pi\lambda)^{\frac{N}{2}}\, e^{i\lambda|\cdot|^2} e^{-iN\frac{\pi}{4}}\delta_0$*

---

3. L'équation de Schrödinger non-linéaire

Nous supposons que

(H_0) $V \in C\left(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}\right)$

(H_1) $V \in C^1\left(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}\right)$

(H_2) $\exists\, k \in (0,2)$ tel que $|x|^k\, V(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. De plus $1 < p < 1 + \frac{4-2k}{N-2}$

(H_3) $V(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ et V est à symétrie sphérique, radialement strictement décroissante.

Si (H_1) est vérifiée, la fonction $\tilde{V}(r) : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ telle que $\tilde{V}(r) = V(x)$ pour $r = |x|$ satisfait $\tilde{V}'(r) < 0$ pour tout $r > 0$.

(H_4) La fonction $\frac{r\tilde{V}'(r)}{\tilde{V}(r)}$ est décroissante sur $(0,\infty)$.

3.1. Existence

Nous cherchons des solutions sous la forme $\varphi(t,x) = e^{i\lambda t}u(x)$, où u définie sur $\mathbb{R}^N$, est à valeurs réelles. On se ramène à l'étude de l'équation elliptique semi-linéaire

$$\Delta u - \lambda u + V(x)\,|u|^{p-1}\, u = 0,\; u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R},\; N \geq 2 \qquad (E_\lambda)$$

Soit $S_\lambda : H^1\left(\mathbb{R}^N\right) \to \mathbb{R}$ la fonctionnelle définie par $S_\lambda\,(u) = \frac{1}{2}\,\|u\|_\lambda^2 - \frac{1}{(p+1)}\phi(u)$ avec $\phi\,(u) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} V\,(x)\,|u|^{p+1}\,dx$.

Soit la fonctionnelle $J_\lambda \in C^2\left(H^1\left(\mathbb{R}^N\right), \mathbb{R}\right)$ définie par $J_\lambda\,(u) = \frac{1}{2}\,\|u\|_\lambda^2 - \frac{1}{2}\phi(u)$

On considère la variété de $Nehari$ $N_\lambda \subset H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ par $N_\lambda = \left\{u \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right) \setminus \{0\} : J_\lambda\,(u) = 0\right\}$

Nous étudions le problème de minimisation $m_\lambda = \inf\left\{S_\lambda\,(u) : u \in N_\lambda\right\}$

Définition 3.1 *Une fonction $u \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ est une solution faible de (E_λ) si u est un point critique de S_λ c.à.d*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \nabla u.\nabla v + \lambda u\; v\; dx - \int\limits_{\mathbb{R}^N} V\,(x)\,|u|^{p-1}\, u\; v\; dx = 0, \forall v \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$$

Théorème 3.2 *Sous les hypothèses (H_0), (H_2) et (H_3), pour tout $\lambda > 0$, il existe une fonction $\psi_\lambda \in N_\lambda$ telle que $S_\lambda(\psi_\lambda) = m_\lambda$. De plus, ψ_λ est positive, à symétrie sphérique et radialement décroissante.*

3.2. Régularité

Nous montrons que l'état fondamental est en fait une solution classique de (E_λ) et nous étudions ses propriétés asymptotiques.

Proposition 3.1 *Supposons que la fonction V soit radiale et soit $\tilde{V} : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ telle que $V\,(x) = \tilde{V}\,(r)$ pour $|x| = r > 0$. Soit $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ une fonction radiale et*

$v : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *tel que* $u(x) = v(r)$ *. Si* $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ *est une solution faible de* (E_λ) *alors* v *est une solution au sens des distributions de*

$$v'' + \frac{N-1}{r} v' - \lambda v + \tilde{V}(r) \ |v|^{p-1} v = 0, \ r > 0 \tag{2.1}$$

Définition 3.3 *Soit* $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *où* Ω *est un ouvert non-borné de* $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$.

On dit que f *tend vers zéro exponentiellement (vite) à l'infini s'il existe* $\epsilon > 0$ *tel que* $\lim_{x \in \Omega, |x| \to \infty} e^{\epsilon|x|} f(x) = 0$*. On écrit alors* $f(x) \to 0$ *exponentiellement (vite) lorsque* $|x| \to \infty$ *ou simplement* $f(x) \to 0$ *exponentiellement (vite) à l'infini.*

Théorème 3.4 *Soit* $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ *une solution non-triviale de* (E_λ)*, positive, à symétrie sphérique et radialement décroissante. Alors* u *possède les propriétés suivantes.*

(i) $u \in C(\mathbb{R}^N) \cap C^2(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ *et* u *est une solution classique de* (E_λ)*. De plus, si* V *satisfait* (H_1) *alors* $u \in C^3(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$.

(ii) u *est strictement positive et radialement strictement décroissante sur* $\mathbb{R}^N$.

(iii) $u(x) \to 0$ *et* $|\nabla u(x)| \to 0$ *exponentiellement lorsque* $|x| \to \infty$.

3.3. Unicité

Grâce au théorème de Yanagida, un résultat d'unicité des états fondamentaux de (E_λ), valable en dimension $N \geq 3$, est établi.

Proposition 3.2 *Supposons que les hypothèses* (H_1) *à* (H_4) *soient vérifiées et que* $\mathbb{N} \geq 3$*. Alors il existe au plus une solution non-triviale de* (E_λ) *qui soit positive, à symétrie sphérique et radialement décroissante.*

Bibliographie

[1] F.Genoud, « Théorie de bifurcation et de stabilité pour une équation de Schrödinger avec une non-linéarité compacte », École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2008.

[2] C.Zuily, « Eléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles », Dunod : Paris, 2002.

[3] E.Yanagida, « Uniqueness of positive radial solutions of $\Delta u + g(r)u + h(r)u^p = 0$ in $\mathbb{R}^N$ », Arch. Ration. Mech. Anal, 1991.

Spectral Discretization of the Heat Equation

Y. Daikh * — C. Bernardi ** — W. Chikouche *

* Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées
Université de Jijel, B.P. 98, Ouled Aissa, 18000 Jijel
Algérie
yasmina-daikh@univ-jijel.dz
wided-chikouche@univ-jijel.dz
** Laboratoire Jacques-Louis Lions
C.N.R.S. et Université Pierre et Marie Curie
B.C. 187, 4 Place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05
France
bernardi@ann.jussieu.fr

ABSTRACT. We are interested in the spectral discretization of the heat equation by an implicit Euler scheme with respect to the time variable and spectral method with respect to the space variables.

RÉSUMÉ. Nous considérons la discrétisation de l'équation de la chaleur, par un schéma d'Euler implicite en temps ; la famille de problèmes ainsi obtenue est discrétisée en espace par la méthode spectrale dans des espaces de polynômes de degrés différents.

KEYWORDS : heat equation, spectral method.

MOTS-CLÉS : équation de la chaleur, méthode spectrale.

1. Introduction

Let Ω be a connected and bounded open set in $\mathbb{R}^d$ $(d = 1, 2,$ or $3)$ with a Lipschitz-continuous boundary. Also let T be a fixed positif integer. We consider the heat equation

$$\left\{\begin{array}{rcll} \partial_t u - \Delta u & = & f & \text{in } \Omega\times]0,T[\\ u & = & 0 & \text{on } \partial\Omega\times]0,T[\\ u|_{t=0} & = & u_0 & \text{in } \Omega, \end{array}\right. \tag{1}$$

The data are the distribution f and the function u_0; the unknown is the function u.
The problem (1) admits the equivalent variational formulation:

Find u in $C^0(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ satisfying

$$u|_{t=0} = u_0 \quad \text{in } \Omega \tag{2}$$

and such that, for a.e. t in $]0,T[$,

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), (\partial_t u(t), v) + (\nabla u(t), \nabla v) = (f(t), v). \tag{3}$$

It is well known ([[4], Ch. 3, ***S*** 4]) that, for any f in $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ and u_0 in $L^2(\Omega)$, problem (2)-(3) admits a unique solution.

2. The time semi-discrete problem

We introduce a partition of the interval $[0,T]$ into subintervals $[t_{k-1}, t_k]$, $1 \leq k \leq K$, such that $0 = t_0 < t_1 < ... < t_K = T$. We denote by $\tau_k := t_k - t_{k-1}$, by τ the $K-$ tuple $(\tau_1, ..., \tau_K)$ and by $|\tau|$ the maximum of the τ_k, $1 \leq k \leq K$. For simplicity, we introduce the notation $f^k = f(t_k)$.
The semi-discrete problem issued from Euler's implicit scheme is written as

$$\left\{\begin{array}{rcll} \frac{u^k - u^{k-1}}{\tau_k} - \Delta u^k & = & f^k & \text{in } \Omega,\ 1 \leq k \leq K, \\ u^k & = & 0 & \text{on } \partial\Omega,\ 1 \leq k \leq K, \\ u^0 & = & u_0 & \text{in } \Omega. \end{array}\right. \tag{4}$$

Equivalently, it admits the variational formulation:
Find $(u^k)_{0 \leq k \leq K}$ in $L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)^K$ satisfying

$$u^0 = u_0 \text{ in } \Omega, \tag{5}$$

and such that, for $1 \leq k \leq K$,

$$\forall v \in H_0^1(\Omega),\ (u^k, v) + \tau_k(\nabla u^k, \nabla v) = (u^{k-1}, v) + \tau_k(f^k, v). \tag{6}$$

The existence and uniqueness of a solution $(u^k)_{0 \le k \le K}$ for any data f in $\mathcal{C}^0(0, T; H^{-1}(\Omega))$ and u_0 in $L^2(\Omega)$ is a simple consequence of the Lax-Milgram lemma.

3. The time and space discrete problem

From now on, we assume that Ω is the segment, square or cube $\Omega =]-1, 1[^d$ $(d = 1, 2$ or $3)$. Denoting by $\mathbb{P}_N(\Omega)$ the space of restrictions to Ω of polynomials with degree $\le N$ with respect to each variable on Ω and by $P_N^0(\Omega)$ the subspace of $P_N(\Omega)$ constituted of polynomials which vanish on $\partial\Omega$.
Setting $\xi_0 = -1$ and $\xi_N = 1$, we introduce the $N-1$ nodes ξ_j, $1 \le j \le N-1$, and the $N+1$ weights $\rho_j, 0 \le j \le N$, of the Gauss-Lobatto quadrature formula on $[-1, 1]$. We recall that the following equality holds

$$\forall \Phi \in P_{2N-1}([-1,1]),\ \int_{-1}^{1} \Phi(\xi)d\xi = \sum_{j=0}^{N} \Phi(\xi_j)\rho_j. \tag{7}$$

We define for any continuous functions u and v on $\bar{\Omega}$,

$$(u, v)_N = \begin{cases} \sum_{i=0}^N u(\xi_i)v(\xi_i)\rho_i & \text{if} \quad d = 1, \\ \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N u(\xi_i, \xi_j)v(\xi_i, \xi_j)\rho_i\rho_j & \text{if} \quad d = 2, \\ \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{p=0}^N u(\xi_i, \xi_j, \xi_p)v(\xi_i, \xi_j, \xi_p)\rho_i\rho_j\rho_p & \text{if} \quad d = 3. \end{cases}$$

The discrete problem is constructed from (6) by using the Galerkin method combined with numerical integration. It reads:

Find $\left(u_{N_k}^k\right)_{0 \le k \le K}$ in $P_{N_0}(\Omega) \times \Pi_{k=1}^K P_{N_k}^0(\Omega)$, satisfying

$$u_{N_0}^0 = i_{N_0} u_0 \quad \text{ in } \Omega, \tag{8}$$

and such that, for $1 \le k \le K$,

$$\forall v \in P_{N_k}^0(\Omega), \quad (u_{N_k}^k, v)_{N_k} + \tau_k(\nabla u_{N_k}^k, \nabla v)_{N_k} = (u_{N_{k-1}}^{k-1}, v)_{N_k} + \tau_k(f^k, v), \tag{9}$$

We define the norm on whole sequences v^ℓ, $1 \le \ell \le k$ by

$$[[(v^\ell)]]_k = \left(\|v^k\|^2 + \sum_{\ell=1}^{k} \tau_\ell |v^\ell|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{10}$$

The following theorem gives the error estimate between the solution $(u^k)_{1\leq k\leq K}$ of problem (6) and the solution $(u^k_{N_k})_{1\leq k\leq K}$ of problem (9).

Theorem 3.1 *Assume that the data f is continuous on $[0,T]$ with values in $H^\sigma(\Omega)$, $\sigma > \frac{d}{2}$, and that the solution $(u^k)_{0\leq k\leq K}$ of problem (5)-(6) belongs to $H^{m+1}(\Omega)^{K+1}$ for an integer $m \geq 0$. Then, the following error estimate holds between this solution and the solution $(u^k_{N_k})_{1\leq k\leq K}$ of problem (8)-(9).*

$$[[(u^\ell - u^\ell_{N_\ell})]]_k \leq C\Bigg(N_0^{-m}\|u^0\|_{m+1,\Omega} + N_0^{-m}\|u^0\|_{m+1,\Omega} + N_k^{-m}\|u^k\|_{m+1,\Omega} + \sum_{\ell=1}^{k}\sqrt{\tau_\ell}\Big((N_{\ell-1}^{-m} + N_\ell^{-m})\|u^\ell\|_{m+1,\Omega} + N_{\ell-1}^{-\sigma}\|f^\ell\|_{\sigma,\Omega}\Big) + \sum_{\ell=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{\tau_\ell}}(1-\delta_\ell)\Big(N_{\ell-1}^{-m}\|u^\ell\|_{m+1,\Omega} + N_\ell^{-m}\|u^\ell\|_{m+1,\Omega}\Big)\Bigg).$$

References

[1] A. Bergam, C. Bernardi, Z. Mghazli,« A posteriori analysis of the finite element discretization of some parabolic equations », *Mathematics of Computation,* **74**,(2004), 1117-1138.

[2] C. Bernardi, Y. Maday, « Spectral Methods », Handbook of numerical analysis, P. G. Ciarlet and J.-L. Lions. Eds., North-Holland, 1997.

[3] C. Bernardi, Y. Maday, F. Rapetti, « Discrétisations Variationnelles de Problèmes aux Limites Elliptiques », Springer-Verlag: Berlin, 2004.

[4] J.-L. Lions, E. Magenes, « Problèmes aux Limites non Homogènes et Applications », Dunod: Paris, 1968.

Energy decay for a linear damped porous thermoelastic system of type III

Case of equal speed

Abdelfeteh Fareh * — **Salim Messaoudi****

* Mathematics department Faculty of sciences and technology University of El Oued
P.O.B.789,El Oued,39000
ALGERIA
farehabdelf@gmail.com
** Department of mathematics and statistics FKUPM
Dhahran,31261
Saudi Arabia
messaoud@kfupm.edu.sa

ABSTRACT. In this work we consider a linear thermoelastic porous system of type III. We show that the heat dissipation together with a linear dissipation in the equation of the volume fraction will drive the system to rest in an exponential rate in the case of equal speeds.

RÉSUMÉ. Dans ce travail on considère un problème en poureuse-thermo-élasticité de type III dans le cas où les vitèsses de propagation sont égles et on montre que le présence d'une dissipation thèrmique et une amortissement linéaire dans l'équation de fraction volumique suffisent pour conduire le système à une décroissence exponentielle.

KEYWORDS : Porous thermoelasticity, linear damping, exponential decay.

MOTS-CLÉS : poreuse thémo-élasticité, amortissement linéaire, décroissence exponentialle .

1. Introduction

In classical thermoelasticity, Fourier's law of heat conduction predicts that thermal signals propagate with infinite speed. To overcome this paradox Green and Naghdi [1]-[3] proposed three new theories based on an entropy equality rather than an entropy inequality, this theories called thermoelasticity of type I, II and III respectively. In thermoelasticity of type III, we quote the contributions of Quintanilla and Racke [8] and Zhuang ana Zuazua [9] in which several exponential and polynomial decay results were established for different boundary conditions for the first and under suitable conditions on the domain for the second.

Messaoudi and Said-Houari [6] considered the system

$$\left\{\begin{array}{l} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x+\psi)_x = 0, \quad \text{in } (0,1)\times\mathbb{R}_+ \\ \rho_2\psi_{tt} - \alpha\psi_{xx} + k(\varphi_x+\psi) - \beta\theta_x = 0, \quad \text{in } (0,1)\times\mathbb{R}_+ \\ \rho_3\theta_{tt} - \delta\theta_{xx} + \gamma\psi_{ttx} - k\theta_{txx} = 0, \quad \text{in } (0,1)\times\mathbb{R}_+ \\ \varphi(x,0) = \varphi_0(x), \quad \psi(x,0) = \psi_0(x), \quad \theta(x,0) = \theta_0(x), \quad 0\le x\le 1 \\ \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x), \quad \psi_t(x,0) = \psi_1(x), \quad \theta_t(x,0) = \theta_1(x), \quad 0\le x\le 1 \\ \varphi(x,t) = \psi(x,t) = \theta_x(x,t) = 0, \quad x = 0,1, \quad t>0. \end{array}\right. \tag{1}$$

where, φ is the displacement, ψ is the difference volume fraction and θ is the temperature difference. They considered the case of equal speed and established an exponential decay result. Also, Messaoudi and Said-Houari [7] added a delay term $\int_0^{infty} g(s)\psi_{xx}(x,t-s)\,ds$ to the second equation of (1) and proved that the above system decays exponentially (respectively polynomially) if g decays exponentially (respectively polynomially) in the case of equal speed $(\frac{\rho_1}{k} = \frac{\rho_2}{\alpha})$. However, the decay is of polynomial type otherwise $\left(\frac{\rho_1}{k} \neq \frac{\rho_2}{\alpha}\right)$.

In this paper we consider a linear damped one-dimensional porous thermoelastic system of type III of the form

$$\left\{\begin{array}{l} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x+\psi)_x + \theta_x = 0, \quad \text{in } (0,1)\times\mathbb{R}_+ \\ \rho_2\psi_{tt} - \alpha\psi_{xx} + k(\varphi_x+\psi) - \theta + a\psi_t = 0, \quad \text{in } (0,1)\times\mathbb{R}_+ \\ \rho_3\theta_{tt} - \kappa\theta_{xx} + \varphi_{xtt} + \psi_{tt} - k\theta_{txx} = 0, \quad \text{in } (0,1)\times\mathbb{R}_+ \\ \varphi(x,0) = \varphi_0(x), \quad \psi(x,0) = \psi_0(x), \quad \theta(x,0) = \theta_0(x), \quad 0\le x\le 1 \\ \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x), \quad \psi_t(x,0) = \psi_1(x), \quad \theta_t(x,0) = \theta_1(x), \quad 0\le x\le 1 \\ \varphi(x,t) = \psi(x,t) = \theta(x,t) = 0, \quad x = 0,1, \quad t\ge 0 \end{array}\right. \tag{2}$$

and establish an exponential decay result for the solution of (2) similar to the one obtained by Messaoudi and Said-Houari in [7].

In the aim of exhibiting the dissipative nature of (2), we differentiate the first and the second equations of (2) with respect to t and introduce new dependent variables $\phi = \varphi_t$ and $\Psi = \psi_t$. So the above system takes the form

$$\begin{cases} \rho_1\phi_{tt} - k(\phi_x + \Psi)_x + \theta_{tx} = 0, \quad \text{in } (0,1) \times \mathbb{R}_+ \\ \rho_2\Psi_{tt} - \alpha\Psi_{xx} + k(\phi_x + \Psi) - \theta_t + a\Psi_t = 0, \quad \text{in } (0,1) \times \mathbb{R}_+ \\ \rho_3\theta_{tt} - \kappa\theta_{xx} + \phi_{xt} + \Psi_t - k\theta_{txx} = 0, \quad \text{in } (0,1) \times \mathbb{R}_+ \\ \phi(x,0) = \phi_0(x), \quad \Psi(x,0) = \Psi_0(x), \quad \theta(x,0) = \theta_0(x), \quad 0 \le x \le 1, \\ \phi_t(x,0) = \phi_1(x), \quad \Psi_t(x,0) = \Psi_1(x), \quad \theta_t(x,0) = \theta_1(x), \quad 0 \le x \le 1 \\ \phi(x,t) = \Psi(x,t) = \theta(x,t) = 0, \quad x = 0,1, \quad t \ge 0. \end{cases} \tag{3}$$

The first energy associated to (1) is given by

$$E_1(t) = E(\phi, \Psi, \theta) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\rho_1\phi_t^2 + \rho_2\Psi_t^2 + k(\phi_x + \Psi)^2 + \alpha\Psi_x^2 + \rho_3\theta_t^2 + \kappa\theta_x^2\right) dx.$$

2. Uniform decay

In this section, we state and prove our main result.

Theorem 2.1 *Let* $((\phi_0, \phi_1), (\Psi_0, \Psi_1), (\theta_0, \theta_1)) \in (H_0^1(0,1) \times L^2(0,1))^3$ *be given and suppose that*

$$\frac{\rho_1}{k} = \frac{\rho_2}{\alpha} \tag{4}$$

holds. Then, there exist two positive constants ω *and* λ*, independent of the initial data and* t*, for which the solution of* (1) *satisfies*

$$E_1(t) \le \lambda e^{-\omega t}, \quad t > 0. \tag{5}$$

The proof of our result will be established through several lemmas.

Lemma 2.2 *The energy* $E_1(t)$*satisfies*

$$E_1'(t) = -a\int_0^1 \Psi_t^2 dx - k\int_0^1 \theta_{xt}^2 dx \le 0. \tag{6}$$

Proof. Multiplying the equations (2) by ϕ_t, Ψ_t and θ_t respectively, integrating over $(0,1)$ and summing up we obtain (6).

Lemma 2.3 *The functional*

$$I(t) := \int_0^1 \left(\rho_1 \phi_t \omega + \rho_2 \Psi \Psi_t + \frac{a}{2}\Psi^2\right) dx \tag{7}$$

satisfies, for all $\varepsilon > 0$, *the estimate*

$$I'(t) \leq -\frac{\alpha}{2}\int_0^1 \Psi_x^2 dx + \frac{1}{\alpha}\int_0^1 \theta_{tx}^2 dx + \left(\rho_2 + \frac{\rho_1}{4\varepsilon}\right)\int_0^1 \Psi_t^2 + \varepsilon\rho_1 \int_0^1 \phi_t^2 dx. \tag{8}$$

Lemma 2.4 *Under Condition* (4), *the functional*

$$J(t) := \rho_2 \int_0^1 \Psi_t (\phi_x + \Psi) dx + \rho_2 \int_0^1 \Psi_x \phi_t dx + \frac{a}{2}\int_0^1 \Psi^2$$

satisfies

$$\begin{aligned} J'(t) \leq{}& [\alpha \phi_x \Psi_x]_{x=0}^{x=1} - \frac{k}{2}\int_0^1 (\phi_x + \Psi)^2 + \left(\rho_2 + \frac{2a^2}{k}\right)\int_0^1 \Psi_t^2 \\ &+ \left(\varepsilon_1 + \frac{k}{4}\right)\int_0^1 \Psi_x^2 + \left(\frac{1}{k} + \frac{\rho_2^2}{4\varepsilon_1 \rho_1^2}\right)\int_0^1 \theta_{tx}^2, \end{aligned} \tag{9}$$

for all $\varepsilon_1 > 0$.

To handle the boundary term in (9) we introduce the function $m(x) = 2 - 4x$.

Lemma 2.5 *Let* (ϕ, Ψ, θ) *be a solution of* (1). *Then, we have, for all* $\varepsilon_1 > 0$,

$$J'(t) + \frac{\varepsilon_1}{k}\frac{d}{dt}\int_0^1 \rho_1 m \phi_t \phi_x + \frac{\alpha\rho_2}{4\varepsilon_1}\frac{d}{dt}\int_0^1 m \Psi_t \Psi_x$$

$$\begin{aligned} \leq{}& -\left(\frac{k}{2} - \frac{\varepsilon_1 k^2}{4} - 8\varepsilon_1\right)\int_0^1 (\phi_x + \Psi)^2 + \left(\frac{3\alpha^2}{4\varepsilon_1} + \frac{\alpha^2}{4\varepsilon_1^3} + 10\varepsilon_1 + \frac{k}{4}\right)\int_0^1 \Psi_x^2 \\ &+ \frac{2\varepsilon_1\rho_1}{k}\int_0^1 \phi_t^2 + \left(\rho_2 + \frac{2a^2}{k} + \frac{\alpha\rho_2}{2\varepsilon_1} + \frac{a^2}{2\varepsilon_1}\right)\int_0^1 \Psi_t^2 \\ &+ \left(\frac{1}{k} + \frac{\rho_2^2}{4\varepsilon_1\rho_1^2} + \frac{1}{2\varepsilon_1} + \frac{\varepsilon_1}{k^2}\right)\int_0^1 \theta_{tx}^2. \end{aligned} \tag{10}$$

Lemma 2.6 *The functional*

$$K_1(t) := -\rho_1 \int_0^1 \phi_t \phi dx - \rho_2 \int_0^1 \Psi_t \Psi dx - \frac{a}{2}\int_0^1 \Psi^2 dx$$

satisfies, along the solution of (1), *the estimate*

$$K_1'(t) \leq -\rho_1 \int_0^1 \phi_t^2 dx - \rho_2 \int_0^1 \Psi_t^2 dx + \left(k + \frac{1}{4}\right) \int_0^1 (\phi_x + \Psi)^2 \tag{11}$$
$$+ \left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \int_0^1 \Psi_x^2 + 3 \int_0^1 \theta_{tx}^2.$$

Lemma 2.7 *Along the solution of* (1), *the functional*

$$K_2(t) := \int_0^1 \left(\rho_3 \theta_t \theta + \frac{k}{2} \theta_x^2 + (\phi_x + \Psi)\theta\right) dx.$$

satisfies, for all $\varepsilon_2 > 0$, *the estimate*

$$K_2'(t) \leq -\kappa \int_0^1 \theta_x^2 + \left(\rho_3 + \frac{1}{4\varepsilon_2}\right) \int_0^1 \theta_{tx}^2 + \varepsilon_2 \int_0^1 (\phi_x + \Psi)^2. \tag{12}$$

Proof of Theorem 2.1. To finalize the proof of Theorem 1.1, we define the Lyapunov functional by

$$F(t) := NE_1(t) + N_1 I(t) + \delta K_1(t) + K_2(t) +$$
$$\left[J(t) + \frac{\varepsilon_1}{k} \frac{d}{dt} \int_0^1 \rho_1 m \phi_t \phi_x + \frac{\alpha \rho_2}{4\varepsilon_1} \frac{d}{dt} \int_0^1 m \Psi_t \Psi_x\right].$$

A combination of (6), (8), (10), (11) and (12) gives

$$\begin{aligned} F'(t) \leq &- \left[Nk - \frac{N_1}{\alpha} - \left(\frac{\rho_2^2 + 2\rho_1^2}{4\varepsilon_1 \rho_1^2} + \frac{k + \varepsilon_1}{k^2}\right) - 3\delta - \rho_3 - \frac{1}{4\varepsilon_2}\right] \int_0^1 \theta_{tx}^2 \\ &- \left[\frac{N_1 \alpha}{2} - \left(\frac{3\alpha^2}{4\varepsilon_1} + \frac{\alpha^2}{4\varepsilon_1^3} + 10\varepsilon_1 + \frac{k}{4}\right) - \delta\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\right] \int_0^1 \Psi_x^2 \\ &- \rho_1 \left[\delta - \varepsilon N_1 - \frac{2\varepsilon_1}{k}\right] \int_0^1 \phi_t^2 - \kappa \int_0^1 \theta_x^2 \\ &- \left[\frac{k}{2} - \varepsilon_2 - \delta\left(k + \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{k^2}{4} + 8\right)\varepsilon_1\right] \int_0^1 (\phi_x + \Psi)^2 \\ &- \left[Na - N_1\left(\rho_2 + \frac{\rho_1}{4\varepsilon}\right) - (1 - \delta)\rho_2 - \frac{2a^2}{k} - \frac{\alpha \rho_2}{2\varepsilon_1} - \frac{a^2}{2\varepsilon_1}\right] \int_0^1 \Psi_t^2. \end{aligned} \tag{13}$$

Now we have to choose our constants carefully. First we take

$$\delta = \frac{k}{8\left(k + \frac{1}{4}\right)}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{k}{4}$$

and then ε_1 so small that

$$\frac{k}{2}-\varepsilon_2-\delta\left(k+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{k^2}{4}+8\right)\varepsilon_1=\frac{k}{8}-\left(\frac{k^2}{4}+8\right)\varepsilon_1>0$$

$$\delta-\frac{2\varepsilon_1}{k}>\frac{\delta}{2}.$$

Next, we choose N_1 large enough such that

$$\frac{N_1\alpha}{2}-\left(\frac{3\alpha^2}{4\varepsilon_1}+\frac{\alpha^2}{4\varepsilon_1^3}+10\varepsilon_1+\frac{k}{4}\right)-\delta\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)>0$$

and ε so small that

$$\delta-\varepsilon N_1-\frac{2\varepsilon_1}{k}>0.$$

Finally, we pick N large enough such that

$$Nk-\frac{N_1}{\alpha}-\left(\frac{\rho_2^2+2\rho_1^2}{4\varepsilon_1\rho_1^2}+\frac{k+\varepsilon_1}{k^2}\right)-3\delta-\rho_3-\frac{1}{4\varepsilon_2}>0$$

and

$$Na-N_1\left(\rho_2+\frac{\rho_1}{4\varepsilon}\right)-(1-\delta)\,\rho_2-\frac{2a^2}{k}-\frac{\alpha\rho_2}{2\varepsilon_1}-\frac{a^2}{2\varepsilon_1}>0.$$

Consequently, there exist two positive constants η and C such that

$$\begin{aligned} F'(t) &\leq -\eta\left(\int_0^1\phi_t^2+\int_0^1\Psi_t^2+\int_0^1(\phi_x+\Psi)^2+\int_0^1\Psi_x^2+\int_0^1\theta_{tx}^2+\int_0^1\theta_x^2\right)\\ &\leq -CE_1(t)\,. \end{aligned} \tag{14}$$

where we have used $\int_0^1\theta_t^2\leq\int_0^1\theta_{tx}^2$. Moreover, we may choose N even large (if needed) so that

$$F(t)\sim E_1(t)\,. \tag{15}$$

A combination of (14) and (15) gives

$$F'(t)\leq-\omega F(t)\,,\quad t\geq 0, \tag{16}$$

for a positive constant ω.

A simple integration of (16) leads to

$$F(t)\leq F(0)\,e^{-\omega t},\quad t\geq 0. \tag{17}$$

Again, a use of (15) and (17) yield (5). □

References

[1] A.E. Green, P.M. Naghdi, A re-examination of the basic postulates of thermomecanics, Proc. Royal Society London A, **432** (1991), 171-194.

[2] A.E. Green, P.M. Naghdi, A demonstration of consistency of an entropy balance with balance of energy, J. Appl. Mech. Phys. (ZAMP) **42** (1991) 159?168.

[3] A.E. Green, P.M. Naghdi, Thermoelasticity without energy dissipation, J. Elasticity, **15** (1993), 189-208.

[4] A. Guesmia and S.A. Messaoudi, *On the control of solutions of a viscoelastic equation*, Applied Math and Computations Vol. 206 # 2 (2008), 589-597.

[5] A. Megaña and R. Quintanilla, *On the time decay of solutions in one-dimensional theories of porous materials*, Internat. J. Solids Struct. **43** (2006), 3414-3427.

[6] S.A. Messaoudi and B. Said-Houari, *Energy decay in Timoshenko-type system of thermoelasticity of type III*, J. Math. Anal. Appl. **384** (2008) 298-307.

[7] S.A. Messaoudi and B. Said-Houari, Energy decay in Timoshenko-type system with history in thermoelasticity of type III, Adv. Diff. Equa. **14** (2009), 375-400.

[8] R. Quintanilla, R. Racke, Stability in thermoelasticity of type III, Discrete and Continous Dynamical Systems B, **3** (2003), 383-400.

[9] X. Zhang, E. Zuazua, Decay of solutions of the system of thermoelasticity of type III, Commun. Contemp. Math. **5** (1) (2003), 25-83.

Nonlinear problems involving a perturbation with natural growth in the gradient and a non coercive zeroth order term

B.Hamour* — F.Murat**

* Department of Mathematics
Ecole Normale Supérieure, P.O. Box 92, Vieux Kouba, 16050 Algiers
Algeria
E-mail: hamour_b2000@yahoo.f
** Laboratoire Jacques-Louis Lions
Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), Boîte courrier 187, 75252 Paris Cedex 05
France
E-mail: murat@ann.jussieu.fr

ABSTRACT. In this paper we consider the problem:

$$\begin{cases} -\text{div}\,(a(x,u,Du) = H(x,u,Du) + a_0(x)|u|^{p-2}u + f(x) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where Ω is an open bounded set of $\mathbb{R}^N$, $1 < p < N$, $-\text{div}(a(x,u,Du))$ is a Leray-Lions operator defined on $W_0^{1,p}(\Omega)$, $a_0 \in L^q(\Omega)$, $q > N/p$, $a_0 > 0$, $f \in L^{N/p}(\Omega)$ and $H(x,s,\xi)$ is a Carathéodory function which satisfies:

$$-c_0\, a(x,s,\xi)\xi \le H(x,s,\xi)\,\text{sign}(s) \le \gamma\, a(x,s,\xi)\xi \quad \text{a.e. } x \in \Omega, \forall s \in \mathbb{R}\ , \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

For $\|a_0\|_q$ and $\|f\|_{N/p}$ sufficiently small, we prove the existence of at least one solution u of this problem which is moreover such that the function $\big(\exp(\gamma|u|) - 1\big)$ belongs to $W_0^{1,p}(\Omega)$.

RÉSUMÉ. Dans cet article nous étudions le problème :

$$\begin{cases} -\text{div}\,(a(x,u,Du) = H(x,u,Du) + a_0(x)|u|^{p-2}u + f(x) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $1 < p < N$, $-\text{div}(a(x,u,Du))$ est un opérateur Leray-Lions défini sur $W_0^{1,p}(\Omega)$, $a_0 \in L^q(\Omega)$, $q > N/p$, $a_0 > 0$, $f \in L^{N/p}(\Omega)$ et $H(x,s,\xi)$ est une fonction de Carathéodory qui satisfait :

$$-c_0\, a(x,s,\xi)\xi \le H(x,s,\xi)\,\text{sign}(s) \le \gamma\, a(x,s,\xi)\xi \quad \text{a.e. } x \in \Omega, \forall s \in \mathbb{R}\ , \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Pour $\|a_0\|_q$ et $\|f\|_{N/p}$ suffisamment petits, nous démontrons qu'il existe au moins une solution u de ce problème qui est de plus telle que $\big(\exp(\gamma|u|)-1\big)$ appartienne à $W_0^{1,p}(\Omega)$.

KEYWORDS : Nonlinear, non coercive zeroth order term.

MOTS-CLÉS : Non linéaire, terme non coercive d'ordre zéro.

1. Introduction

Let $1 < p < N$ and Ω be an open bounded subset of $\mathbb{R}^N$. In this paper, we prove an existence result for the problem:

$$\begin{cases} u \in W_0^{1,p}(\Omega), \\ -\text{div}\,(a(x,u,Du) = H(x,u,Du) + a_0(x)|u|^{p-2}u + f(x) \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega), \end{cases} \tag{1}$$

where $a_0 \in L^q(\Omega)$, $q > \dfrac{N}{p}$, $a_0 > 0$, $f \in L^{N/p}(\Omega)$, $-\text{div}\, a(x,u,Du)$ is a Leray-Lions operator defined on $W_0^{1,p}(\Omega)$ and $H(x,u,Du)$ is nonlinear function which grows like $|Du|^p$, and more precisely satisfies:

$$-c_0\, a(x,s,\xi)\xi \ \le H(x,s,\xi)\,\text{sign}(s) \le \gamma\, a(x,s,\xi)\xi \quad \text{a.e. } x \in \Omega, \forall s \in \mathbb{R}\ , \forall \xi \in \mathbb{R}^N. \tag{2}$$

for two given constants $\gamma \ge 0$ and $c_0 \ge 0$.

Assuming that $\|f\|_{N/p}$ and $\|a_0\|_q$ are sufficiently small, we prove (see Section 2) the existence of at least one solution u of (1) which is moreover such that the function $v = \mu^{-1}\big(\exp(\mu|u|) - 1\big)\,\text{sign}(u)$ belongs to $W_0^{1,p}(\Omega)$ for every μ in an interval $(0, \mu_0)$, which depends on the norms of a_0 and f, the bound of H and the coercivity of a.

A similar result has been proved in the quasilinear case where $p = 2$ and where the function $a(x,s,\xi)$ is assumed to have the form $a(x,s,\xi) = A(x)\xi$, with $A(x)$ is a matrix bounded entries and coercive. In the present case the change of unknown function $v = \mu^{-1}\big(\exp(\mu|u|) - 1\big)\,\text{sign}(u)$ transforms the equation (1) into a quasilinear equation with a quadratic term in Dv which satisfies a "sign condition, with the good sign", and a nonlinear term of zeroth-order "bad sign" which is superlinear and coercive.

The proof of our existence results follows the classical direct method of the calculus of variations. We use Schauder's theorem on an approximate problem to prove the existence of a fixed point which is a solution of the approximate problem and which belongs to a "small" fixed ball (this ball is "small" because the data f and a_0 are supposed to be small). We obtain an a priori estimate of the solution of the approximate problem, which does not

depend on the approximation.
We then pass to the limit thanks to the a priori estimate.

2. Existence result and comments

Suppose that the function $a : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ is a Carathéodory function which satisfies, for a.e. $x \in \Omega$, any $s \in \mathbb{R}$ and any $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^N$, with $\xi \neq \xi'$:

$$\begin{cases} \big(a(x,s,\xi) - a(x,s,\xi')\big)(\xi - \xi') > 0, \\ a(x,s,\xi)\xi \geq \alpha|\xi|^p, \\ |a(x,s,\xi)| \leq \beta\big(b(x) + |s|^{p-1} + |\xi|^{p-1}\big), \end{cases} \tag{3}$$

for a given constant $\alpha > 0$, some constant $\beta > 0$, and some nonnegative function $b \in L^{N/(p-1)}(\Omega)$

$$f \in L^{N/p}(\Omega), \tag{4}$$

$$a_0 \in L^q(\Omega) \qquad \text{for some } q > \frac{N}{p}, \qquad a_0 > 0, \tag{5}$$

$$\begin{cases} H : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^N \text{ is a Carathéodory function which satisfies} \\ -c_0\, a(x,u,Du)\xi \leq H(x,s,\xi)\,\mathrm{sign}(s) \leq \gamma\, a(x,u,Du)\xi, \quad \text{a.e. } x \in \Omega, \forall s \in \mathbb{R},\ \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \\ \text{where } \gamma > 0 \text{ and } c_0 \geq 0, \end{cases} \tag{6}$$

Now, let p^* be the Sobolev exponent defined by

$$\frac{1}{p^\star} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N},$$

and $C_{N,p}$ be the Sobolev constant defined as the best constant such that:

$$\|\varphi\|_{p^\star} \leq C_{N,p}\|D\varphi\|_p, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{7}$$

Define:

$$\theta = \frac{p^\star}{q'} - p. \tag{8}$$

By simple computations show that:

$$0 < \theta < 1. \tag{9}$$

We assume that $\|a_0\|_{N/p}$ and $\|f\|_{W^{-1,p}(\Omega)}$ are sufficiently small, and more precisely that

$$F(\mu) := \alpha - C^p_{N,p}\|a_0\|_{N/p} - \mu^{p-1}C^p_{N,p}\|f\|_{N/p} > 0, \tag{10}$$

$$C_{N,p}\|f\|_{N/p}|\Omega|^{(p-1)/p^\star} < \theta\frac{(p-1)^{(p-1)/p^\star}}{(p-1+\theta)^{(p-1+\theta)/\theta}}\frac{(\alpha - C^p_{N,p}\|a_0\|_{N/p} - \mu^{p-1}C^p_{N,p}\|f\|_{N/p})^{1+(p-1)/\theta}}{(GC^{p+\theta}_N\|a_0\|_q)^{(p-1)/\theta}}, \tag{11}$$

Our main result is the following.

Theorem 2.1 *Assume that* (3), (4), (5) and (6). Assume moreover that (10) and (11) hold true. Then there exists a constant δ_0 with $\gamma < \delta_0$, and a constant Z_{δ_0}, which are defined in (15) and (17) below, such that there exists at least one solution of (1), which further satisfies that:

$$(e^{\delta_0|u|} - 1) \in W^{1,p}_0(\Omega), \tag{12}$$

with

$$\left\|\frac{e^{\delta_0|u|} - 1}{\delta_0}\right\|_{W^{1,p}_0(\Omega)} \leq Z_{\delta_0}. \tag{13}$$

2.1. Definition of δ_0 and Z_{δ_0}

Consider the function

$$\Phi_\mu(X) = GC^{p+\theta}_{N,p}\|a_0\|_q X^{p-1+\theta} - F(\mu)X^{p-1} + C^p_{N,p}|\Omega|^{(p-1)/p^\star}\|f\|_{N/p} \quad \forall X > 0. \tag{14}$$

The function Φ_μ looks like a parabola. Let $X = Z_\delta$ be the point where Φ_δ reaches its minimum. When $0 \leq \mu \leq \mu_1$, one has $F(\mu) \geq 0$, and a simple computation shows that Z_μ is given by

$$Z_\mu = \left(\frac{(p-1)F(\mu)}{(p-1+\theta)GC^{p+\theta}_{N,p}\|a_0\|_q}\right)^{1/\theta}, \tag{15}$$

and that the minimum value $\Phi_\delta(Z_\delta)$ of Φ_δ is given by

$$\Phi_\delta(Z_\delta) = C^p_{N,p}|\Omega|^{(p-1)/p^\star}\|f\|_{N/p} - \frac{\theta}{p-1+\theta}\left(\frac{(p-1)F(\mu)^{1+\theta/(p-1)}}{(p-1+\theta)GC^{p+\theta}_{N,p}\|a_0\|_q}\right)^{(p-1)/\theta}. \tag{16}$$

Therefore there exists a unique δ_0 with

$$\Phi_{\delta_0}(Z_{\delta_0}) = 0. \tag{17}$$

References

[1] A. Bensoussan, L. Boccardo, F. Murat, *On a nonlinear partial differential equation having natural growth terms and unbounded solution*, Ann. Inst. H. Poincaré Analyse non linéaire, 5 (1988) 347-364.

[2] L. Boccardo, F. Murat, J-P. Puel, *Existence de solutions faibles pour des équations elliptiques quasi-linéaires à croissance quadratique*, in: Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications, Collège de France Seminar, Vol. IV (J.L. Lions and H. Brezis Eds.), Research Notes in Math., 84, Pitman, London, 1983, 19-73.

[3] L. Boccardo, F. Murat, J-P . Puel, *Existence de solutions non bornées pour certaines équations quasi-linéaires*, Portugaliæ Math. 41 (1982), 507-534.

[4] L. Boccardo, F. Murat, J-P. Puel, *Résultats d'existence pour certains problèmes elliptiques quasi-linéaires*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 11 (1984), 213-235.

[5] H. Brezis, F.E. Browder, *A property of Sobolev spaces*, Comm. in P.D.E., 4 (1979), 1077-1083.

[6] H. Brezis, L. Oswald, *Remarks on sublinear elliptic equations*, Nonlinear Anal. 10 (1983), 55-64.

[7] V. Ferone, F. Murat, *Quasilinear problems having quadratic growth in the gradient: an existence result when the source term is small*, in: Équations aux dérivées partielles et applications, Articles dédiés à Jacques-Louis Lions, Gauthiers-Villars, Paris, 1988, 497-515.

[8] V. Ferone, F. Murat, *Nonlinear problems having natural growth in the gradient: An existence result when the source terms are small*. Nonlinear Anal. 42 (2000), 1309-1326.

[9] N. Grenon-Isselkou, J. Mossino, *Existence de solutions bornées pour certaines équations elliptiques quasilinéaires* C. R. Acad. Sci. Paris 321 (1995), 51-56.

[10] J. Leray, J.-L. Lions, *Quelques résultats de Visik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder*, Bull. Soc. Math. France 93 (1965), 97-107.

A posteriori error estimation for an anisotropic elliptic problem

B. Achchab[*] — A. Agouzal[**] — A. Majdoubi[***] — D. Meskine [****] — A. Souissi[***]

[*] LM2CE, FSJES et LAMSAD, ESTB
Université Hassan 1^{er}
B.P. 218 Berrechid
Maroc
achchab@yahoo.fr
[**] U.M.R. 5585 - Laboratoire d'Analyse Numérique
Université de Lyon 1
Bat. 101, 69 622 Villeurbanne Cedex
France
agouzal@univ-lyon1.fr
[***] GAN, LMA, FSR et LERMA, EMI
Université Mohammed V-Agdal
BP 1014, Rabat
Maroc
souissi@fsr.ac.ma, majd1504@yahoo.fr
[****] EST Essaouira
Université Cadi Ayyad
BP 383, Essaouira
Maroc
dr.meskine@uca.ma

ABSTRACT. We develop in this paper a new a posteriori error estimate for the P_1 nonconforming finite element approximation, of a diffusion-reaction equation. We adopt the error in a constitutive law approach in two and three dimension space, for not necessary constant data of problems.

RÉSUMÉ. En utilisant l'approche de l'erreur en loi de comportement, on établit un estimateur d'erreur a posteriori pour une approximation en éléments finis P_1 non conformes, d'une équation de diffusion-réaction en dimension deux et trois. les données du problème ne sont pas nécessairement constantes.

KEYWORDS : nonconforming finite elements, a posteriori error estimates, constitutive law.

MOTS-CLÉS : éléments finis non conformes, estimateur d'erreur a posteriori, loi de comportement.

1. Introduction

Over the last three decades adaptive finite element methods have been very useful for efficient numerical solutions. Their usefulness is especially apparent when the exact solution has strong variations or singularities. As to these methods, the key features are a posteriori error estimation and the strategy of mesh refinement. The a posteriori analysis for a nonconforming approximation by finite elements of the Poisson problem is developed in the first by Agouzal [3]. Dari and al [5] suggest an explicit estimation of the error of local residual type. The approach via constitutive law [9, 10] in the nonconforming case is adapted by Achchab and al. [1, 2], Destuynder and Métivet [6] and Agouzal [4] in the elliptic case. In this work we give an explicit a posteriori error estimations for anisotropic elliptic problem and generalize the result of [2] to the 3 dimensions case, and nonconstant data.

2. Basic notations and definitions

Let Ω be a polyhedric open domain of $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, with a lipschitzian boundary. We consider the diffusion-reaction problem:

$$(P) \begin{cases} -\operatorname{div}(K\nabla u) + \sigma u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

where K is a symmetric positive definite matrix, whose coefficients are not constant. $\sigma \in L^\infty(\Omega)$ with $\sigma \geq 0$ and $f \in L^2(\Omega)$, we also assume that neither σ, nor the given f are constant. Let $\mathcal{T}_h$ be a triangulation in d-simplex of Ω, conforming and regular in the sense of Ciarlet. For every d-simplex $\Delta \in \mathcal{T}_h$, we will denote by n_Δ the external unitary normal to Δ. If F is a face of $\mathcal{T}_h$, the notation $F \subset \partial\Delta$ means that F is a face of Δ, an element of $\mathcal{T}_h$. We denote $\langle ., . \rangle$ the inner product in L^2 and $\|.\|_0$ the norm L^2. We introduce the norms $\|.\|_\sigma$ and $\|.\|_K$ defined by:

$$\forall u \in L^2(\Omega), \qquad \|u\|_\sigma^2 = \int_\Omega \sigma\, u^2\, dx, \quad \text{and}$$
$$\forall\, \mathbf{p} \in (L^2(\Omega))^d : \qquad \|\,\mathbf{p}\|_K^2 = \int_\Omega (K.\,\mathbf{p})\ \mathbf{p}\, dx.$$

The analogous expressions for subsets of Ω are given with the subset added to the index. Let V_h be the lowest order nonconforming finite element space:

$$V_h = \{v \in L^2(\Omega)/\forall K \in \mathcal{T}_h, v|_K \in P_1(K), \forall F \in E_h^I, \int_F [v]\, ds = 0; \forall F \in E_h^F, \int_F v\, ds = 0\},$$

where E_h^I denotes the set of interior edges (faces), E_h^F denotes the set of all edges (faces) included in $\partial\Omega$ and $[.]_F$ denotes the jump across F. We consider the following nonconforming problem : find $u_h \in V_h$ such that:

$$\sum_{\Delta \in \mathcal{T}_h} \int_\Delta (K\nabla u_h.\nabla v_h + \sigma u_h v_h)\, dx = \sum_{\Delta \in \mathcal{T}_h} \int_\Delta f v_h\, dx.$$

3. Abstract framework

In this section, we present a posteriori estimators for our problem. We get two important results. We set $\mathbf{p} = K\,\nabla u$, where u is a solution to problem (P). Denote by $\widetilde{u}_h$ and $\mathbf{p}_h$, a conforming approximation respectively to u and $\mathbf{p}$. Taking into account of the physical interest of the flux, we give in this section a posteriori errors estimation for $\mathbf{p} - \mathbf{p}_h$ and $u - \widetilde{u}_h$. We have $\sigma \in L^\infty(\Omega)$ with $\sigma \geq 0$, when $\sigma > 0$, we obtain the following result:

Theorem 3.1 *For all $\widetilde{u}_h \in H_0^1(\Omega)$ and $\mathbf{p}_h \in H(\mathrm{div};\Omega)$, we have:*

$$\begin{aligned} \|\widetilde{u}_h - \sigma^{-1}(\mathrm{div}\ \mathbf{p}_h + f)\|_\sigma^2 + \|\,\mathbf{p}_h - K\,\nabla\widetilde{u}_h\|_{K^{-1}}^2 \quad &= \quad \|u - \widetilde{u}_h\|_\sigma^2 + \|\nabla(u - \widetilde{u}_h)\|_K^2 \\ &+ \|\sigma^{-1}(\mathrm{div}\ \mathbf{p}_h - \mathrm{div}\ \mathbf{p})\|_\sigma^2 + \|\,\mathbf{p}_h - \mathbf{p}\|_{K^{-1}}^2. \end{aligned}$$

In the general case where $\sigma \geq 0$, we have the following theorem:

Theorem 3.2 *For all $\widetilde{u}_h \in H_0^1(\Omega)$ and $\mathbf{p}_h \in H(\mathrm{div};\Omega)$ such that*

$$\forall \Delta \in \mathcal{T}_h; \ \ -\mathrm{div}\ \mathbf{p}_h = \frac{1}{meas_d(\Delta)} \int_\Delta (f - \sigma u_h)\, dx, \quad \text{on } \Delta,$$

with u_h a nonconforming approximation of u, we have

$$\begin{aligned} \|\,\mathbf{p}_h - \mathbf{p}\|_{K^{-1}}^2 + \frac{1}{2}(\|\nabla(u - \widetilde{u}_h)\|_K^2 + \|u - \widetilde{u}_h\|_\sigma^2) \quad &\leq \quad \|\,\mathbf{p}_h - K\,\nabla\widetilde{u}_h\|_{K^{-1}}^2 + \|u_h - \widetilde{u}_h\|_\sigma^2 \\ &+ 4 \sum_{\Delta \in \mathcal{T}_h} \min\{\frac{1}{\sqrt{\underline{\sigma}_\Delta}}, \mu h_{K,\Delta}\}^2 \|\sigma u_h - \mathrm{div}\ \mathbf{p}_h - f\|_{0,\Delta}^2 \end{aligned}$$

and $\forall \Delta \in \mathcal{T}_h$ we get: $\quad \|\,\mathbf{p}_h - K\,\nabla\widetilde{u}_h\|_{K^{-1},\Delta} \leq \|\,\mathbf{p}_h - \mathbf{p}\|_{K^{-1},\Delta} + \|\nabla u - \nabla\widetilde{u}_h\|_{K,\Delta}$
and

$$\begin{aligned} \min\{\frac{1}{\sqrt{\underline{\sigma}_\Delta}}, \mu h_{K,\Delta}\}\|\sigma u_h - \mathrm{div}\ \mathbf{p}_h - f\|_{0,\Delta} \quad &\leq \quad \min\{\frac{1}{\sqrt{\underline{\sigma}_\Delta}}, \mu h_{K,\Delta}\}\|\,\mathrm{div}\ \mathbf{p}_h - \mathrm{div}\ \mathbf{p}\|_{0,\Delta} \\ &+ \min\{\sqrt{\frac{\overline{\sigma}_\Delta}{\underline{\sigma}_\Delta}}, \sqrt{\overline{\sigma}_\Delta}\mu h_{K,\Delta}\}(2\|u - \widetilde{u}_h\|_{\sigma,\Delta} + \|u - u_h\|_{\sigma,\Delta}) \end{aligned}$$

with: $\overline{\sigma}_\Delta = |\sigma|_{\infty,\Delta}$, $\underline{\sigma}_\Delta = \min_{x\in\Delta}(\sigma(x))$ *with the convention* $\frac{1}{0} = +\infty$,

$$h_{K,\Delta} = (\sup_{x,y\in\Delta}(K^{-1}(x-y)).(x-y))^{1/2} \text{ and } \mu = \inf_{0\leq\varepsilon\leq 1/2} \frac{(\int_0^1 (1-t)^{2\varepsilon}\min(t^{-d},(1-t)^{-d})\,dt)^{1/2}}{(1-2\varepsilon)^{1/2}}.$$

4. Numerical Experiments

In this section, we shall present a numerical example to support our theoretical results. We consider the domain $\Omega = [0,1]^2$, the reaction coefficient $\sigma = 1$, and a rotating anisotropic tensor:

$$K = \frac{1}{(x^2+y^2)}\begin{pmatrix} \epsilon x^2 + y^2 & (\epsilon-1)xy \\ (\epsilon-1)xy & x^2+\epsilon y^2 \end{pmatrix},$$

with $\epsilon = 10^{-1}$. The source term f is chosen so that the exact solution with homogenous Dirichlet boundary conditions is

$$u(x,y) = xy(x-1)(y-1)\exp(-100(x-1/2)^2 - 100(y-117/1000)^2).$$

We denote the different error components by

$$e_{u,K} := \sum_{\Delta\in\mathcal{T}_h} \|\nabla(u-u_h)\|_{K,\Delta}, \quad e_{u,\sigma} := \sum_{\Delta\in\mathcal{T}_h} \|u-u_h\|_{\sigma,\Delta},$$

$$e_{\mathbf{p}} := \|\mathbf{p}_h - \mathbf{p}\|_{K^{-1}}, \quad \eta := \left(\sum_{\Delta\in\mathcal{T}_h} \eta_\Delta^2\right)^{1/2}, \quad I_{ef} := \frac{\eta}{e_{u,K}+e_{u,\sigma}+e_{\mathbf{p}}}.$$

where η is a local error indicator obtained from the last theorem.

The Numerical Experiments are performed with FreeFem++ 3.17. We consider the uniform triangulation obtained from the square 10×10. In Table 6 we show triangulations data with number of triangles as NbTri and number of vertices as NbV. Various components of the errors are presented and the true error $e_{u,K}$ bounded by the estimator. Figures 35 and 36 presents respectively the meshes, corresponding isovalues and surface plots of the approached solution u_h. The exact solution has a large gradient around the point (1/2, 117/1000). Therefore a refinement of the mesh near this point can be expected. This is confirmed by figures 36.

Table 6: Different errors and triangulation data

i	DOF	NbTri	NbV	$e_{u,K}$	$e_{u,\sigma}$	e_p	η	I_{ef}
1	520	334	187	0.32104	0.0240657	0.606208	1.412	1.48427
2	872	563	310	0.223131	0.0112183	0.538788	1.15759	1.49726
3	1489	971	519	0.18933	0.00885848	0.473554	1.01549	1.51173
4	2488	1631	858	0.137338	0.00423474	0.420648	0.876477	1.55896
5	3861	2541	1321	0.122588	0.00364892	0.367399	0.767175	1.55413
6	5867	3869	1999	0.0930203	0.00197612	0.323392	0.667607	1.59566
7	8963	5926	3038	0.0824955	0.00167334	0.283076	0.58394	1.59006
8	13860	9179	4682	0.0643645	0.000989287	0.244636	0.501681	1.61838
9	21940	14553	7388	0.0548224	0.000746173	0.211188	0.432799	1.62245
10	36202	24042	12161	0.0425967	0.000442005	0.175871	0.359206	1.64089

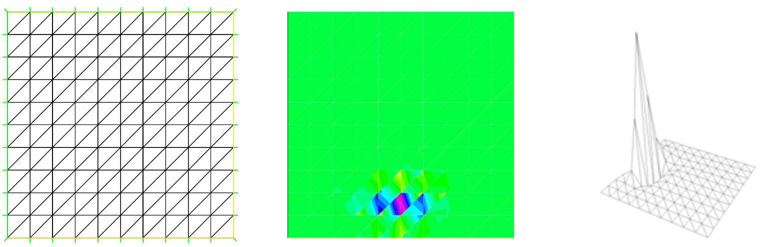


Figure 35: Initial mesh(200 triangles; 121 vertices), isovalues of u_h and approached solution .

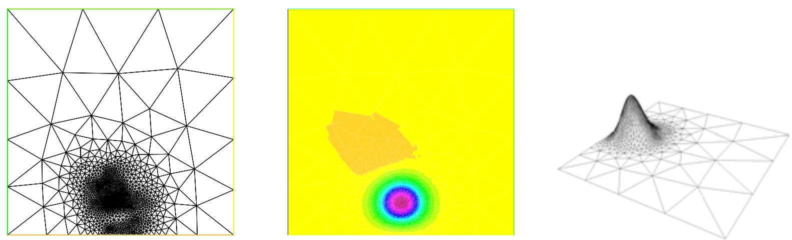


Figure 36: adapted mesh(24042 triangles; 12161 vertices), isovalues of u_h and approached solution .

Acknowledgment. This work was partly supported by the French-Moroccan Project A.I number M.A/05/115 and International Laboratories Associated to CNRST: LIRIMA and LEM2I.

References

[1] B. Achchab, A. Agouzal, J. Baranger et F. Oudin, « Estimations d'erreurs en lois de comportement », *C. R. Acad. Sci. Paris Sr. I Math.*, **326(8)**(1998), 1007-1010.

[2] B. Achchab, A. Majdoubi, D. Meskine, and A. Souissi. , « A posteriori error analysis using constitutive law for the Crouzeix-Raviart element », *Appl. Math Lett.*, **Vol. 22, Issue 8** (2009), 1145-1314.

[3] A. Agouzal, « A posteriori error estimator for nonconforming finite element methods », *Appl. Math. Lett.*,**7(5)**(1994), 1017-1033.

[4] A. Agouzal, « A posteriori error estimators for nonconforming approximation », *Int. J. Numer. Anal. Modelng*, **5(1)**(2008), 77-85.

[5] E. Dari, R. Duran, C. Padra and V. Vampa, « A posteriori error estimators for nonconforming finite element methods »,*R.A.I.R.O. Modl. Math. Anal. Numer.*,**30(4)**(1996), 395-400.

[6] P. Destuynder and B. Métivet, « Explicit error bounds for a nonconforming finite element methods », *SIAM J. Numer. Anal*,**35(5)**(1998), 2099-2115.

[7] A. Ern, A. F. Stephansen, , and M. Vohralík, « Guaranteed and robust discontinuous Galerkin a posteriori error estimates for convection-diffusion-reaction problems »,*J. Comput. Appl. Math.*,**234, 1** (2010), 114-130.

[8] O. A. Karakashian and F. Pascal, « A posteriori error estimates for a discontinuous Galerkin approximation of second-order elliptic problems »,*SIAM J. Numer. Anal.*,**41**(2003), pp. 2374-2399.

[9] P. Ladevèze, J.P. Pelle, « Mastering Calculations in Linear and Nonlinear Mechanics », Mechanical Engineering Series, Springer (2005).

[10] P. Ladevèze, D. Leguillon, « Error estimate procedure in the finite element method and application », *SIAM J. Numer. Anal.*,**20(30)**(1983), 485-509.

[11] R. Luce, and B. I. Wohlmuth, « A local a posteriori error estimator based on equilibrated fluxes »,*SIAM J. Numer. Anal.*,**42(4)**(2004), 1394-1414.

[12] S.K. Tomar, S.I. Repin, « Efficient computable error bounds for discontinuous Galerkin approximations of elliptic problems »,*J. Comput. Appl. Math. 226* , **no. 2** (2009), 358–369.

Contribution à l'étude de l'écoulement de Jeffery-Hamel pour un nanofluide Al2O3-eau

KEZZAR Mohamed[1] — SARI Mohamed Rafik[1,2]

[1] Département de Mécanique, Université 20 Août 1955 de Skikda BP 26, 21000 Algérie
kezzar_m@yahoo.com
[2] Laboratoire de Mécanique Industrielle, Université Baji Mokhtar d'Annaba BP 12, 23000 Algérie
sari_rafik10@yahoo.fr

RÉSUMÉ. Dans cette étude, l' écoulement de Jeffery-Hamel pour un nanofluide Al2O3-eau a été étudié. En effet, l'effet des nanoparticules d'alumine sur la distribution des vitesses a été traité numériquement par les techniques de Runge Kutta d'ordre 4 et de Tir. Les résultats obtenus montrent que l'accroissement de la concentration des nanoparticules élimine le phénomène de retour d'écoulement dans le divergent.

ABSTRACT. In this study the Jeffery-Hamel flow of Al2O3-water nanofluid has been studied. Indeed the effect of alumina nanoparticles on velocity profiles has been treated numerically by fourth order Runge Kutta and shooting techniques. Obtained results show that the increasing of nanoparticles concentration leads to reduction of backflow in diverging channels.

MOTS-CLÉS : Écoulement-Nanofluide-Convergent-Divergent-Vitesse.

KEYWORDS : Flow-Nanofluid-Convergent-Divergent-Velocity.

1. Introduction

Dans ces dernières années, l'étude des nanofluides a été le centre d'intérêt de nombreuses recherches [1, 2, 3, 4]. En effet, ce domaine d'étude est actuelle voire très intéressant. Par défininition, les nanofluides sont des fluides contenant des particules dont la taille est inférieure à 50 nm. Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à l'étude dynamique (distribution des vitesses) de l'écoulement d'un nanofluide Al2O3-eau entre deux parois planes non parallèles. Ce type d'écoulement connu sous le nom de Jeffery-Hamel, a été introduit premièrement par Jeffery [5] en 1915, et indépendamment par Hamel [6] en 1916. Ensuite, il a fait l'objet de nombreuses contributions [7, 8, 9, 10]. En effet, la résolution des équations différentielles qui régissent la distribution des vitesses de l'écoulement de Jeffery-Hamel pour les nanofluides, a été traitée numériquement par les méthodes de Runge-Kutta d'ordre 4 et de Tir.

2. Formulation mathématique de l'écoulement étudié

Considérons l'écoulement d'un fluide contenant des nanoparticules Al2O3. Cet écoulement radial est engendré par un puits ou une source à l'intersection de deux parois planes formant un angle entre elles (Fig. 1).

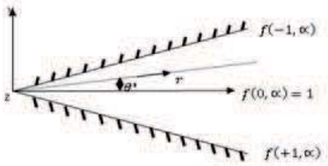


Figure 37 – Géométrie de l'écoulement de Jeffery-Hamel

La formulation mathématique de l'écoulement étudié, nous conduits à une équation différentielle du troisième ordre de la forme :

$$F^{'''} + 2Re\alpha[\frac{\rho_{nf}}{\mu_{nf}}]F.F' + 4\alpha^2 F' = 0 \qquad (1)$$

ρ_{nf} et μ_{nf} représente la masse volumique et la viscosité dynamique du nanofluide respectivement. Elles sont exprimées selon Pak et Cho [11] par :

$$\rho_{nf} = (1-\phi)\rho_f + \phi\rho_p \qquad (2)$$

$$\mu_{nf} = \mu_f(1 + 39.1\phi + 533.9\phi^2) \qquad (3)$$

Avec : ϕ : Concentration en volume des nanoparticules.
ρ_f : Masse volumique du fluide de base (eau).
ρ_p : Masse volumique des nanoparticules.

Avec les conditions aux limites :
$F(0)$=1, sur l'axe du canal pour $\eta = 0$.
$F(\pm 1) = 0$, sur les parois fixes solides pour $\eta = \pm 1$. (4)
Le nombre de Reynolds dans l'équation (1) s'exprime par :

$$Re = \frac{f(0)\alpha\rho_f}{\mu_f} \qquad (5)$$

3. Traitement numérique

Le problème non linéaire de l'écoulement du nanofluide (Al2O3-eau) dans un convergent-divergent a été traité numériquement par utilisation des méthodes de Runge-Kutta d'ordre 4 et de tir. En effet, l'équation différentielle linéaire du mouvement (1), et après intégration devient du second ordre. Par la suite, on introduit trois nouvelles variables T, Q et Z de sorte á obtenir un système d'équations différentielles régulières du premier ordre.

1- Choix initial de la constante C.
2- Intégration du système d'équations différentielles du premier ordre :

$$\begin{cases} F' = T \\ T' = -4\alpha^2 F - Re\alpha K F^2 + 2\alpha^2 + \frac{Re\alpha}{3} K \\ Q' = Z \\ Z' = -4\alpha^2 Q - 2Re\alpha K F Q \end{cases}$$

$$K = \frac{1-\phi+\frac{\rho_p}{\rho_f}.\phi}{1+39{,}1\phi+533{,}9\phi^2}$$

Avec les conditions aux limites :

$$F(-1)=0,\ T(-1)=0,\ Q(-1)=0 \ et \ Z(-1)=0$$

3- Détermination de la nouvelle valeur de C :

$$C_{i+1} = C_i + \frac{\left(1 - F_0^{(i)}\right)\frac{\partial F_0^{(i)}}{\partial C} - T_0^{(i)}\frac{\partial T_0^{(i)}}{\partial C}}{\left(\frac{\partial F_0^{(i)}}{\partial C}\right)^2 + \left(\frac{\partial T_0^{(i)}}{\partial C}\right)^2}$$

4- Si $|C_{i+1} - C_i| > \varepsilon$, retour en 2.
Si $|C_{i+1} - C_i| < \varepsilon$, le problème est résolu.

Tableau 1 Algorithme de résolution

Une fois le système d'équations différentielles régulières, qui modélise le problème nonlinéaire étudié est adopté, il reste á choisir les valeurs de la constante C, qui caractérise le frottement fluide-paroi, en utilisant la méthode de Tir. Les étapes de résolution numérique sont présentées dans le tableau 1.

4. Résultats et discussions :

- Le problème non linéaire de l'écoulement de Jeffery-Hamel pour un nanofluide Al2O3-eau, a été résolu numériquement par les techniques de Runge Kutta d'ordre 4 et de Tir. Les masses volumiques du fluide de base (eau) et des nanoparticules Al2O3 sont $977, 1Kg/m^3$ et $3970Kg/m^3$ respectivement.
D'après les résultats obtenus, nous constatons que pour l'écoulement dans un convergent (Fig 2.a) pour un angle($\alpha = 3^{\circ}$) et une concentration ($\phi = 0.7$), la vitesse étant partout négative et variant d'une manière monotone de 0 pour ($\eta = \pm 1$) à la valeur ($-f(0)$) ($f(0) < 0$) pour ($\eta = 0$). Le mouvement dans le convergent est partout symétrique pour tout nombre de Reynolds Re et pour toute ouverture ($2\alpha < \pi$).
-Dans le cas de divergent (Fig 2.b) et pour les mêmes valeurs de l'angle (α) et de la concentration

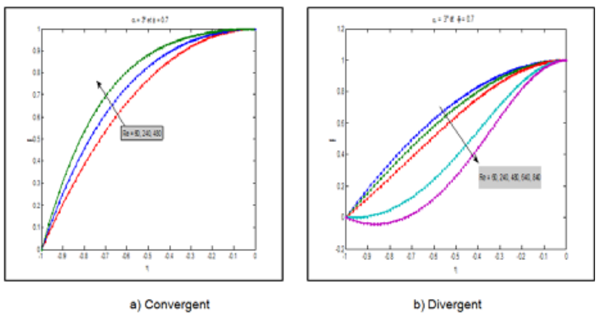


Figure 38 – Effet du nombre de Reynolds sur la distribution des vitesses

($\alpha = 3^{\circ} et \phi = 0.7$) des nanoparticules, la vitesse étant positive et varie d'une manière monotone de 0 pour ($\eta = \pm 1$) à la valeur ($+f(0)$) ($f(0) > 0$) pour ($\eta = 0$). Le mouvement dans le divergent partout symétrique par rapport à ($\eta = 0$) n'est plus possible pour un angle (α) donné, que pour des nombres de Reynolds Re n'excédant pas une certaine limite qu'on appelle point de retour ou point de séparation (Fig 3).
-L'effet de la concentration des nanoparticules d'Alumine Al2O3 sur le profil des vitesses pour un nombre de Reynolds, ($Re = 160$) et un angle ($\alpha = 5^{\circ}$) est visualisé par la (Fig 4). En effet, on constate d'après les résultats obtenus pour le cas du convergent (Fig 4.a), que la vitesse décroit avec l'accroissement de la quantité (ϕ). Par contre dans un divergent (Fig 4.b), l'augmentation de la concentration des nanoparticules d'Alumine, fait croitre la vitesse de l'écoulement. Dans cette situation, l'accroissement de la concentration (ϕ) élimine le phénomène de retour d'écoulement, ce qui permet d'avoir une solution symétrique pour de larges nombres de Reynolds.

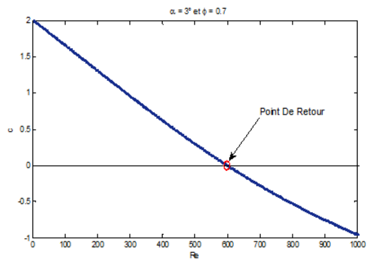


Figure 39 – Evolution du coefficient de frottement dans le divergent

5. Conclusion :

Dans ce papier, le problème non linéaire de l'écoulement de Jeffery-Hamel pour un nanofluide Al2O3-eau, a été traité numériquement par les méthodes de Runge Kutta d'ordre 4 et de Tir. D'après l'étude menée, on peut tirer les conclusions suivantes :
-L'écoulement convergent symétrique et possible pour tout nombre de Reynolds, et pour toute ouverture ($2\alpha < \pi$). Pour cet écoulement le phénomène de retour ne se manifeste pas.
-L'écoulement divergent partout symétrique n'est possible que pour des nombres de Reynolds ne dépassant pas une valeur critique. Au de la de cette valeur, le retour d'écoulement se manifeste, ce qui se traduit par des coefficients de frottement négatifs.
-L'augmentation de la concentration des nanoparticules pour l'écoulement dans un divergent élimine le phénomène de retour d'écoulement, ce qui permet d'avoir des solutions symétrique pour une gamme étendue des nombres de Reynolds.

Bibliographie

[1] Yu W., France D. M., Routbort J. L. & Choi U.S., Review and comparison of nanofluid thermal conductivity and heat transfer enhancements, Heat Transfer Engineering, 29 (5), pp. 432-460, 2008.

[2] Yazdi M. H., Abdullah S., Hashim I. & Sopian K., Slip MHD liquid flow and heat transfer over non-linear permeable stretching surface with chemical reaction, Int. J. Heat Mass Transfer, 54, pp. 3214-3225, 2011.

[3] Choi S., Nanofluids : from vision to reality through research, J. of Heat Transfer, 131, pp. 1-9, 2009.

[4] Hamad M. A. A., Uddin M. J. & Ismail A. I. M., Radiation effects on heat and mass transfer in MHD stagnation-point flow over a permeable flat plate with thermal convective surface boundary condition, temperature dependent viscosity and thermal conductivity, Nuclear Eng Res and Des, 242, pp. 194-200, 2012.

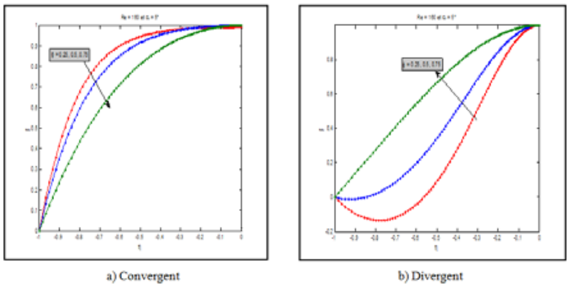


Figure 40 – Effet de la concentration des nanoparticules sur la vitesse

[5] G. Hamel. Spiralformige Bewegungen zaher Flussigkeiten. Jahresbericht der deutshen Math. Vereiniguug, 25, 34-60, 1916.

[6] Fraenkel L. E., Laminar flow in symmetrical channels with slightly curved walls. I. On the Jeffery-Hamel solutions for flow between plane walls, Proc. R. Soc. Lond., A267, pp. 119-138, 1962.

[7] Fraenkel L. E., Laminar flow in symmetrical channels with slightly curved walls. II. Asymptotic seriesfor the stream function, Proc. R. Soc. Lond., A272, pp. 406-428, 1963.

[8] Sobey L. J. & Drazin P. G., Bifurcation of two dimensionnal channel flows, J. Fluid Mech., 171, pp. 263-287, 1986.

[9] Domairry G., Mohsenzadeh A. & Famouri M., The application of homotopy analysis method to solve nonlinear differential equation governing Jeffery-Hamel flow, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 14(1), pp. 85-95, 2009.

[10] Esmaili Q., Ramiar A., Alizadeh E. & Ganji D. D., An approximation of the analytical solution of the jeffery-hamel flow by decomposition method, Physics Letters, A372, pp. 3434-3439, 2008.

[11] Pak B. C. & Cho Y. I., Hydrodynamic and heat transfer study of dispersed fluids with sunmicron metallic oxide particles, Experimental Heat Transfer, 11(2), pp. 151-170, 1998.

Modèle d'inpainting basé sur Les équations de Navier-Stockes avec une p-Laplace diffusion

D. Mezhoud* — F.Z. Nouri

Laboratoire de Modélisation Mathématiques et Simulation Numérique
Faculté des Sciences, Université Badji Mokhtar
BP 12, Annaba 23000, Algérie
* Djaafermezhoud@gmail.com

RÉSUMÉ. L'inpainting est l'un des processus fondamentaux dans le traitement d'image, qui possède plusieurs applications : restauration d'image en reconstruisant les parties endommagées, la suppression des objets indésirables sur l'image [1] ect.. L'objectif est de produire une image révisée ou les parties traitées sont parfaitement fusionnées dans l'image. Dans ce travail nous proposons une approche qui implique la résolution directe d'un système d'équations de Navier-Stokes pour un fluide newtonien non compressible. L'idée principale est de penser à l'intensité d'image comme une fonction du flux d'un écoulement, l'algorithme de résolution transporte automatiquement les informations de correction vers la partie détériorée de l'image, un traitement qui ne nécessite pas l'utilisateur de spécifier l'endroit de traitement, ce qui permet de remplir simultanément plusieurs régions endommagées. L'analyse mathématique des équations de Navier-Stokes (NS) étant assez développée [4], on essaie donc d'établir des analogies entre ces équations (NS) et l'inpainting qui permettent d'introduire des idées de la mécanique des fluides dans les problèmes de traitement d'image.

ABSTRACT. The inpainting is a fundamental process in image processing, which has several applications: image restoration reconstructing damaged parts, the removal of unwanted objects on the image[1] etc.. The goal is to produce a revised image or treated parts are perfectly fused in Image. In this paper we propose an approach which involves the direct solution of a system of Navier-Stokes equations for an incompressible Newtonian fluid. The main idea is to think of the image intensity as a function of the stream flow, the resolution algorithm automatically transports the information correction to the damaged part of the image, a process that does not require the user to specify a location treatment, which can simultaneously fulfill several damaged regions. The mathematical analysis of the Navier-Stokes (NS) equations is sufficiently developed [4], so we try to draw analogies between these equations and inpainting which may introduce ideas of fluid mechanics in problems of image processing.

MOTS-CLÉS : Inpainting, Traitement d'Image, Diffusion, Dynamique des Fluides

KEYWORDS : Inpainting, Image Processing, Diffusion, Fluid Dynamics .

1. Introduction

L'utilisation des équations aux dérivées partielles (EDPs) et l'analyse multi-échelle ont pris une importante place dans le traitement d'image. Soit $I_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ représente le niveau de gris d'une image, où $I_0'(x, y)$ est la valeur du niveau de gris au pixel (x,y) de l'image, En introduisant un temps artificiel t, l'image se déforme en obeiant à une EDP évolutive, selon :

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \mathcal{F}[I(x, y, t)]$$

avec $I(x, y, t) : \mathbb{R}^2 \times [0, \tau) \to \mathbb{R}$ est l'image à l'échelle t, $\mathcal{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un opérateur caractérisant la manière ou l'algorithme selon lequel l'image évoluera dans le temps, généralement $\mathcal{F}$ dépend de l'image ainssi que de ses dérivées spatiales jusqu'à l'ordre 4, et l'image I_0 est la condition initiale. La résolution de l'EDP donne l'image restaurée $I(x, y, t)$ à l'échelle t,

Dans ce travail, en s'inspirant de [1] et [2], nous proposons une nouvelle EDP pour l'inpainting basée sur un modèle mathématique décrivant l'écoulement d'un fluide newtonien non compressible, et impliquant les équations de Navier-Stokes, sachant qu'un fluide newtonien incompressible, obéit au système d'équations

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial t} + (u.\nabla)u + \frac{1}{\rho}\nabla p = \nu \Delta u + f \\ \nabla . u = 0 \end{array} \right. \tag{1}$$

où u est la vitesse de l'écoulement, p la pression, f un terme source et ν le coefficient de viscosité.Dans l'absence d'une source interne et par passage au rotationnel de la vitesse u

$$\omega = \nabla \times u$$

le système (1) devient :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u.\nabla \omega = \nu \Delta \omega \tag{2}$$

Si on suppose que le champ de vitesse vérifie : $u = \nabla^{\perp}\psi$ où ψ est la fonction scalaire de courant, et si on se met dans le cas d'un fluide à faible viscosité, alors l'équation (2), dans le régime stationnaire donne :

$$\nabla^{\perp}\psi.\nabla\Delta\psi = 0 \tag{3}$$

et si on pense à la fonction du courant ψ comme une intensité I d'une image, l'équation (3) n'est d'autre que :

$$\nabla^{\perp} I.\nabla \Delta I = 0$$

qui représente l'état stationnaire d'une équation évolutionnaire d'un modéle d'inpainting proposé par Bertalmio dans [1]. le rotationnel de la vitesse et la fonction courant sont liés par la relation suivante :

$$\omega = \Delta\psi$$

ce qui nous permet, de conclure l'ensemble des relations suivantes entre l'écoulement d'un fluide incompressible (2D) et le problème d'inpainting :

Dynamique d'un fluide	Traitement d'image
Fonction de courant	Intensité d'image
Champs de vitesse	Direction des isophotes
Rotationnel	La réguralité
Viscosité	Coefficient de diffusion

Donc, le but est de faire évoluer l'équation (2) à son état stationnaire et résoudre simultanément l'équation de poisson

$$\omega = \Delta I \tag{4}$$

avec les conditions :

$$I \mid_{\partial\Omega} = I_0,$$

comme une variante de l'équation (2), **Wilson Au et al [3]** , ont proposé de remplacer la diffusion isotrope par une diffusion anisotropique selon le modèle suivant :

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + u.\nabla\omega = \nu\nabla.(g(|\nabla\omega|)\nabla\omega) \tag{5}$$

où g est une fonction assurant la diffusion anisotropique dans le processus (une diffusion qui préserve les contours).

Le présent travail propose un nouveau modèle mathématique, inspéré des travaux de Maouni et al [3] et celui de ZHANG et al [5], faisant intervenir l'opérateur *p-laplacien* dans (2).

2. Propriété du *p-laplacien*

Dans le modèle de restauration d'image proposé par Rudin et al [3], basé essentiellement sur le principe de la variation totale (VT), la partie controlante la diffusion est donnée par :

$$\Delta u = \mathit{div}(\mid \nabla u \mid^{-1} \nabla u) \tag{6}$$

et le p-laplacien est défini voir [1] et [5] par :

$$\Delta_p u = \mathit{div}(\mid \nabla u \mid^{p-2} \nabla u), 1 < p < \infty \tag{7}$$

Nous constatons que la **VT** de la diffusion est la limite du *p-laplacien* lorsque $p \to 1$. Pour mieux voir les performances de l'opérateur p-laplacien, nous commencons par l'exprimer dans des coordonées locales. A ce effet, nous choisissons le système du coordonnées intrinséques (ξ, η) telque l'axe ξ est perpendiculaire aux directions du gradient et l'axe (η) est parallèle, c-à-d

$$\xi = \frac{\nabla^{\perp} u}{\mid \nabla u \mid}, \eta = \frac{\nabla u}{\mid \nabla u \mid} \tag{8}$$

dans ce système de coordonnées, l'expression du p-laplacien peut être reformulée comme suit :

$$\Delta_p u = \mid \nabla u \mid^{p-2} \nabla u_{\xi\xi} + (p-1) \mid \nabla u \mid^{p-2} \nabla u_{\eta\eta} \tag{9}$$

l'équation (9) montre que $\partial u/\partial t = \Delta_p u$ est une équation de diffusion anisotrope nonlineaire (voir [4]) où la diffusion est controlée par les coefficients de diffusion $\mid \nabla u \mid^{p-2}$ et $(p-1) \mid \nabla u \mid^{p-2}$.

3. Modèle et discrétisation

Dans cette section, on propose un modèle faisant intervenir un p-Laplacien qu'on le discrétise par une méthode de différence finies.

3.1. Description du modèle

On considère le modèle

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + u.\nabla\omega = \nu\Delta_p\omega \tag{10}$$

et son état stationnaire et on procède à la résolution simultanément de l'équation :

$$\omega = \Delta I \tag{11}$$

avec les conditions initiales et aux bords qui seront présciser dans l'implémentation numérique.

3.2. Discrétisation

Nous supposons que la région d'inpainting Ω est rectangulaire, et on adopte deux approches de diférences finies **FTCS** (forward time centred space) et **FTUp** (forward time upwind) avec un pas d'espace : $\Delta x = \Delta y = 1$ et un pas de temps : Δt, et si on discrétise le terme de diffusion dans l'équation (10) séparément, on obtient :

$$w_{i,j}^{n+1} = w_{i,j}^n + \Delta t(-\mid u_x^n \mid \frac{w_{i+sign(u_x^n),j} - w_{i,j}^n}{\Delta x} - \mid u_y^n \mid \frac{w_{i,j+sign(u_y^n)} - w_{i,j}^n}{\Delta y})$$

$$+\nu\{\texttt{discrétisation du terme de diffusion}\}$$

[1] Et pour discrétiser l'équation (11), qui devient :

$$\Delta I^n = \omega^n$$

nous reformulons I^n et ω^n en vecteurs colonnes $\overrightarrow{I^n}$ et $\overrightarrow{\omega^n}$ ce qui nous ramène à résoudre le système linéaire suivant :

$$A\overrightarrow{I^n} = \overrightarrow{\omega^n} \tag{12}$$

où A est une matrice déduite à partir de la discrétisation du Laplacien suivante :

$$\Delta y^2(I_{i+1,j}^n + I_{i-1,j}^n) + \Delta x^2(I_{i,j+1}^n + I_{i,j-1}^n) - 2(\Delta x^2 + \Delta y^2)I_{i,j}^n = \Delta x^2\Delta y^2\omega_{i,j}^n$$

1. u_x et u_y sont les deux composantes du vecteur vitesse u

3.3. Discrétisation du terme source

On commence par remarquer que :

$$\Delta_p = \partial_x(\mid \nabla\omega \mid^{p-2} \omega_x) + \partial_y(\mid \nabla\omega \mid^{p-2} \omega_y) \tag{13}$$

donc discrétiser le terme source revient à discrétiser le second membre de l'égalité (11), pour le faire, on procéde comme suit :

– On applique des différences finis centrée pour évaluer les dérivées premières ω_x et ω_y à l'interieur du domaine d'inpainting en chaque point de la grille.
– On évalue $\mid \nabla\omega \mid = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}$.
– On applique encore une fois des différences finies centrées pour :$\partial_x(\mid \nabla\omega \mid^{p-2} \omega_x)$ et $\partial_y(\mid \nabla\omega \mid^{p-2} \omega_y)$ en chaque point de la grille puis on les additionne.

4. Conclusion et Commentaires

Nous examinons deux cas limites pour l'équation (9) :

1) Pour *p* proche de 1, $\triangle_1 u = \mid \nabla u \mid^{-1} u_{\xi\xi}$, de cette expresssion , on constate que dans la **VT**, le processus diffuse uniquement le long de la tangente aux contours et non dans la direction perpenduculaire, et le processus va préserver les contours au cours des itérations. Toutefois un tel schéma présente un inconvénient : il ne permet qu'une diffusion directionnelle ne s'exerçant pas dans les régions sans gradients forts bruitées, alors qu'il est souhaitables dans telles régions de lisser dans toutes les direcions afin d'éviter l'effet "straircase".

2) Pour *p* proche de 2, $\Delta_p u = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}$, dans ce cas les deux coefficients de diffusion sont égaux, et le procesus s'opère d'une manière isotrope ; une telle diffusion présente des inconvénients. En effet, dans des régions d'intensité homogène, ce processus permettra de réduire effectivement l'effet du bruit, mais dans des régions présentant des discontinuités au niveau de l'intensité en niveau de gris, celles-ci seront aussi lissées et le contraste visuel de ces parties seront sensiblement réduits, ce qui génère une image flou.

Choisir une valeur de *p* entre 1 et 2, dans le modèle permet une préservation des discontinuités intéressantes dans l'image, en évitant la génération des blocs d'images constante "staircase effect".

Bibliographie

[1] M. Bertalmio, G. Sapiro ,V.Caselles, « Image inpainting », *SIGGRAPH*, (2000),417–424

[2] M. Maouni and F.Z. Nouri, « Inpainting by a tixotrope Model », Information Visualisation (IV) IEEE Transactions on Image. Processing 1550-6037/10 (2010), pp. 559-563

[3] L. Rudin, S. Osher and El.Fatmi, « Nolinear total variationbased noise removal algorithm », *Physica de Nolinear Phenomena* ,**No.60** (1992),1072–1076

[4] R. Temam, « Navier-Stokes Equations », North-Holland Publishing Company : England,1977 .

[5] Z. Hong-Ying, P. Qi-Cong et WU. Zhang-Dong, « Wavelet Inpainting Based on p-Laplace Operator », *Acta Automatica Sinica*, **vol.33, No.5** (May, 2007).

TAMTAM, Algérie, Alger 27 — 30 Avril 2013

On elliptic equation with singular terms

Yasmina NASRI* — Mohammed bouchekif**

Université de Tlemcen, faculté des sciences, département de mathématiques, BP 119 Tlemcen (13000), ALGERIE
* y_nasri@hotmail.com
** m_bouchekif@mail.univ-tlemcen.dz

ABSTRACT. In this work, we prove the existence of nontrivial solution to an elliptic equation involving critical nonlinearities and singular coefficients.

RÉSUMÉ. Dans ce travail, on s'interesse à l'étude d'une équation elliptique contenant des exposants critiques et des termes singuliers. Des résultats d'existence et de non existence sont établit.

KEYWORDS : Singular elliptic equation, Hardy potential, critical exponents.

MOTS-CLÉS : équation elliptique singulière, potentiel de Hardy, exposants critiques.

1. Introduction

In this work, we seek for positive solutions to an elliptic equation with double critical exponents. This equation is of the following form

$$(P_{\mu,s})\begin{cases} -\triangle u-\mu_1\frac{u}{|x|^2}-\mu_2\frac{u}{|x-a|^2}=|u|^{2^*-2}u+\frac{|u|^{p-2}u}{|x-a|^s} & \text{in } \Omega\backslash\{0,\ a\} \\ u=0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where Ω is an open bounded domain in $\mathbb{R}^N$ $(N\geq 3)$ with smooth boundary $\partial\Omega$ such that 0 and a belong to Ω, $a\neq 0$; $0<s<2$; $p:=2^*(s)=\frac{2(N-s)}{N-2}$ is the critical Sobolev-Hardy exponents, $2^*=2^*(0)$ is the critical Sobolev exponent, $\mu=(\mu_1,\mu_2)$, μ_1,μ_2 are real parameters.

The problem $(P_{\mu,s})$ is related to the following well known Caffarelli-kohn-Nirenberg inequality [2]

The associated energy functional to problem $(P_{\mu,s})$, defined on $H_0^1(\Omega)$ by

$$J(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2dx-\frac{1}{2}\int_\Omega\left(\mu_1\frac{|u|^2}{|x|^2}+\mu_2\frac{|u|^2}{|x-a|^2}\right)dx-\frac{1}{2^*}\int_\Omega|u|^{2^*}dx-\frac{1}{p}\int_\Omega\frac{|u|^p}{|x-a|^s}dx.$$

We see that J is well defined in $H_0^1(\Omega)$ and belong to $C^1\left(H_0^1(\Omega),\mathbb{R}\right)$.

A function $u\in H_0^1(\Omega)$ is said to be a weak solution to the problem $(P_{\mu,s})$ if it satisfies

$$\int_\Omega\left(\nabla u\nabla v-\mu_1\frac{uv}{|x|^2}+\mu_2\frac{uv}{|x-a|^2}-|u|^{2^*-2}uv-\frac{|u|^{p-2}uv}{|x-a|^s}\right)dx=0$$

for all $v\in H_0^1(\Omega)$.

The study of this type of problems is motivated by its various applications, for example: in quantum mechanics, chemistry, physics and differential geometry etc. We refer the reader to the papers [4, 6].

The mathematical interest lies in the fact that these problems are double critical due to the presence of critical Sobolev or/ and Sobolev-Hardy exponents of the nonlinearities and multiple Hardy type terms.

Many problems with singularities have been the object of a wide recent mathematical research see e.g. [3, 5].

The presence of singular potentials and critical nonlinearities in problem $(P_{\mu,s})$ produces some difficulties due to a lack of compactness.

A natural and interesting question: what happens for the existence of solutions to the problem $(P_{\mu,s})$ when it contains two Hardy terms and double critical nonlinearities ?

There is an asymptotic competition between the energy carried by the two critical nonlinearities. If one dominates the other, then there is vashing of the weakest one.

2. Main results

Our main results are the following:

Theorem 2.1 *Let* $0 < \mu_1 \leq \mu_2 < \overline{\mu} := \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$ *and* $0 < s < 2$. *If* $\mu_1 + \mu_2 < \overline{\mu}$ *, then* $(P_{\mu,s})$ *has at least one positive solution.*

Theorem 2.2 *Assume* $\mu_2 = 0$, Ω *is a strictly starshaped domain with respect to the origin*. *If* $(x - a, a) > 0$ *for all* $x \in \Omega$, *then there exists no nontrivial solution.*

The proofs of our results are obtained with the critical point theory, however standard variational arguments do not apply because of a lack of compactness. By a fine analysis and using the concentration principle [7] we recover the Palais-Smale condition (PS) under some level energy.

3. Proof of results

We define

$$S_{\lambda,s} := \inf_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda \frac{|u|^2}{|x-a|^2}\right) dx}{\left(\int_\Omega \frac{|u|^p}{|x-a|^s} dx\right)^{\frac{2}{p}}}.$$

$S_{\lambda,s}$ is independent of Ω and is achieved by $U_{\lambda,a}^s$ in $H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$.

Now we verify the geometrical conditions.

Lemma 3.1 *Assume that* $0 < \mu_1 + \mu_2 < \overline{\mu}$, *then*
i/ There exists $\alpha > 0$ *and* $\rho > 0$ *such that* $J(u) \geq \alpha$ *for all* $u \in H_0^1(\Omega)$ *with* $\|u\| = \rho$.
ii/ There exists $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ *with* $\|u_0\| > \rho$ *such that* $J(u_0) < 0$.

Define

$$c := \inf_{\Phi \in \Gamma} \left(\max_{t\in[0,1]} J[\Phi(t)]\right)$$

with

$$\Gamma := \left\{\Phi \in \mathcal{C}\left([0,1], H_0^1(\Omega)\right); \Phi(0) = 0, J(\Phi(1)) < 0\right\}.$$

Lemma 3.2 *The functional* J *satisfies* $(PS)_c$ *condition for all*

$$c < c^* = \min\left\{\frac{2-s}{2(N-s)} \left(S_{\mu_2,s}\right)^{\frac{N-s}{2-s}}, \ \frac{1}{N} S_{\mu_1,0}^{\frac{N}{2}}, \frac{1}{N} S_{\mu_2,0}^{\frac{N}{2}}, \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}\right\}.$$

Proof. The proof is based on concentration-compactness method [7]. $\square$

Lemma 3.3 *We have*

$$\sup_{t\geq 0} J\left(tu_{\varepsilon}\right) < c^{*} = \min\left\{\frac{2-s}{2\left(N-s\right)}\left(S_{\mu_2,s}\right)^{\frac{N-s}{2-s}}\ ,\ \frac{1}{N}S_{\mu_2,0}^{\frac{N}{2}}\right\}$$

3.1. Proof

Proof of Theorem 1. From Lemmas 3.1, 3.2 and 3.3, J satisfies all assumptions of mountain pass Theorem [1], then there exists $u \in H_0^1\left(\Omega\right)$ such that $J\left(u\right) = c$ and $J'\left(u\right) = 0$. Since $J\left(u\right) = J\left(\left|u\right|\right) = c$, the maximum principle in $\Omega\backslash\left\{0,\ a\right\}$ implies that $u > 0$ in $\Omega\backslash\left\{0,\ a\right\}$. □

Proof of Theorem 2. The proof is based on Pohozaev type identity. □

References

[1] A. Ambrosetti and P. H. Rabinowitz, "Dual variational methods in critical point theory and applications", *J. Funct. Anal*. 14 (1973), 349-381.

[2] L. Caffarelli., R. Kohn and L. Nirenberg, "First order interpolation inequality with weights", *Compos. Math*. **53**(1984), 259-275.

[3] D. Cao and P. Han, "Solutions to critical elliptic equations with multi-singular inverse square potentials", *J. Differential Equations* **224** (2006), 332-372.

[4] W. M. Frank., D. J. Land and R. M. Spector, "Singular potentials", *Rev. Modern Physics*, **43**(1971), 36-98.

[5] V. Felli and S. Terracini, "Elliptic equations with multi-singular inverse-square potentials and critical nonlinearity", *Comm. Partial Differential Equations* **31** (2006), 469-495.

[6] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, "Quantum mechanics", Pergamon Press Ltd : London-Paris, 1965.

[7] P. L. Lions, "The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case1,2", *Rev. Matemática Iberoaamericana*, **1** (1985), 145-201 and 45-121.

Etude de la stabilté d'une tige élastique.

Mohamed Rahmeni*— Mourad Chamekh **

* LAMSIN-ENIT, B.P.37, 1002 Tunis-Belvedere, Tunis, Tunisia
mohamed_rahmeni@yahoo.fr
** LAMSIN-ENIT, B.P.37, 1002 Tunis-Belvedere, Tunis, Tunisia
mourad.chamekh@enit.rnu.tn

RÉSUMÉ. Dans cet article, nous avons présenté une analyse mathématique et numérique des configurations d'une tige élastique en grands déplacements. Nous avons fondé notre développement sur la théorie de Cosserat. Elle permet la prise en compte à la fois de la flexion, de l'allongement, de la torsion et du cisaillement.

La résolution numérique de ce problème est basée sur la méthode de Newton-Raphson suivie d'une discrétisation par éléments finis. L'absence d'unicité de la solution constitue un problème majeur en théorie, elle peut induire des points de bifurcations ou des points limites ce qui provoque la singularité de la matrice tangente de rigidité. Une analyse de la stabilité s'impose, cette analyse de stabilité est basée sur l'étude du signe de déterminant de la matrice de rigidité.

ABSTRACT. In this paper, we presented a mathematical and numerical analysis of configurations of an elastic rod with large displacements. We based our development on Cosserat theory. It allows to take into account both the bending,elongation, torsion and shear. The numerical solution of this problem is based on the Newton-Raphson method followed by a finite element discretization. The lack of uniqueness of the solution is a major problem in the theory; it can induce bifurcation or limit points which causes the singularity of the tangent matrix of rigidity. An analysis of the stability is required; it is based on the study of the determinant sign of the rigidity matrix.

MOTS-CLÉS : Tiges élastiques, Éléments finis, la théorie de Cosserat, Méthode de Newton, Éléments finis géodésiques.

KEYWORDS : Elastic rods, Finit element, Cosserat theory, Newton method, Geodesic finite elements.

1. Introduction

À cause de ses applications industrielles et biomécaniques diverses, le problème de modélisation d'une tige élastique soumise à des efforts extérieurs terminaux est récemment étudié par une large variété de domaine de recherche. Nous pouvons mentionner comme exemples les poutres dans le domaine de construction, les câbles dans le domaine marin et industriel, les pipelines dans le domaine pétrolier et les fragments de la molécule d'ADN dans le domaine du vivant. L'analyse de ce problème conduit à plusieurs difficultés dont deux sont essentielles qui sont les problèmes de la stabilité et de la symétrie. Le premier problème est du à la non unicité de la solution, tant que le deuxième est rencontré dans l'étude de la stabilité.

2. Tige de Cosserat

Soit $\mathcal{T}$ une tige ayant deux dimensions, celles de sa section transversale sont petites par rapport à la troisième (sa longueur L), [3].
La configuration déformée d'une tige est donnée par :

$$\mathcal{T} = \{\mathbf{M} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{OM} \equiv \mathbf{p}(\mathbf{X}) = \mathbf{r}(s) + x_1\mathbf{d}_1(s) + x_2\mathbf{d}_2(s), \mathbf{X} = (x_1, x_2, s) \in \Omega\},$$

où $(\mathbf{r}(s))_{s\in[0,L]}$ est une courbe qui décrit la déformation de l'axe centrale de $\mathcal{T}$ et les vecteurs d_1 et d_2 appartiennent à la section, [2].

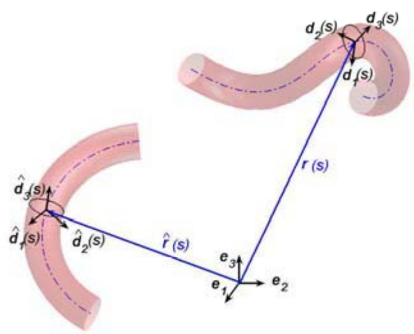


Figure 41 – Configuration de référence et configuration déformée.

3. Cinématique et mesure des déformations

On étudie l'équilibre d'une tige de longueur L soumise à des forces et moments extérieurs. Les équations d'équilibre sont données par :

$$\mathbf{n}'(s) + \mathbf{f}(s) = 0, \qquad \mathbf{m}'(s) + \mathbf{r}'(s) \times \mathbf{n}(s) = 0.$$

Les lois de comportement sont données par :

$$\mathbf{n} = \mathbf{R}\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \mathbf{v}}(s, \mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}), \qquad \mathbf{m} = \mathbf{R}\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \mathbf{u}}(s, \mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}).$$

avec $\hat{\mathbf{u}}$ et $\hat{\mathbf{v}}$ sont les mesures des déformations dans la configuration de référence et $\mathcal{W}$ une fonctionnelle d'énergie.
L'espace des configurations admissibles est donc donné par :

$$\mathcal{C} = \{\varphi = (\mathbf{r}, \mathbf{R}) : [0, L] \to \mathbb{R}^3 \times SO(3),\ (\mathbf{r}, \mathbf{R})\, vérifie\ C.L.\},$$

où C.L sont les conditions aux limites.
A l'équilibre l'énergie totale du système est minimale. Notre problème d'équilibre est donc transformé en un problème de minimisation donné par :

$$\begin{cases} trouver\ (\mathbf{r}, \mathbf{R}) \in \mathcal{C} \\ \mathcal{J}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \leq \mathcal{J}(\mathbf{q}, \mathbf{Q})\ \forall\, (\mathbf{q}, \mathbf{Q}) \in \mathcal{C} \end{cases} \tag{1}$$

avec

$$\mathcal{J}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \mathcal{J}_{int}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) - \mathcal{J}_{ext}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \int_0^L (\mathcal{W}(s, \mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}, \mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) - \mathbf{f} \cdot \mathbf{r})\, ds$$

La condition nécessaire de minimisation de l'énergie totale dans l'espace $\mathcal{C}$ des configurations admissibles, aboutit au problème suivant :

$$\begin{cases} \quad trouver\ (\mathbf{r}, \mathbf{R}) \in \mathcal{C}\ \ tel\ que \\ \delta\mathcal{J}(\mathbf{r}, \mathbf{R})(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \delta\mathcal{J}_{int}(\mathbf{r}, \mathbf{R}; \mathbf{p}, \mathbf{q}) - \delta\mathcal{J}_{ext}(\mathbf{r}, \mathbf{R}; \mathbf{p}, \mathbf{q}) \\ \qquad\qquad = \int_0^L \{(\mathbf{p}' - \mathbf{q} \times \mathbf{r}') \cdot \mathbf{n} + \mathbf{q}' \cdot \mathbf{m} - \mathbf{f} \cdot \mathbf{p}\}\, ds = 0 \\ \quad \forall (\mathbf{p}, \mathbf{q})\ \in T_\varphi \mathcal{C} \end{cases}$$

4. Mise en œuvre et résultats numériques

4.1. Méthode de Newton

Cette méthode approche la solution exacte par une suite de solutions approchées. Partant d'une configuration $(\mathbf{r}_n, \mathbf{R}_n)$ à une itération n, on commence par chercher les variations admissibles (η, θ) en résolvant le problème linéarisé suivant :

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}^n, \mathbf{R}^n; \mathbf{p}, \mathbf{q}) + \Delta\mathcal{G}(\mathbf{r}^n, \mathbf{R}^n; \mathbf{p}, \mathbf{q}; \eta, \theta) = 0, \qquad \forall\, (\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in T_{(\mathbf{r}^n, \mathbf{R}^n)}\, \mathcal{C}$$

avec $\quad \mathcal{G}(\mathbf{r}^n, \mathbf{R}^n; \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \delta\mathcal{J}(\mathbf{r}^n, \mathbf{R}^n; \mathbf{p}, \mathbf{q})$

4.2. Stabilité

Pour analyser la stabilité d'une tige élastique, nous allons utiliser le critère d'énergie [5, 6].

$$\delta[\mathfrak{F}(\mathbf{r},\mathbf{R};\mathbf{p},\mathbf{q};\lambda)](\mathbf{p},\mathbf{q}) = (\mathbf{p},\mathbf{q})^T\mathbb{K}(\mathbf{r},\mathbf{R})(\mathbf{p},\mathbf{q}) > 0, \forall(\mathbf{p},\mathbf{q})$$

o$\grave{u}$ $\mathbb{K} = \mathbf{Q}_m + \mathbf{Q}_g$ est l'opérateur tangent,
et $\mathfrak{F}(\mathbf{r},\mathbf{R};\mathbf{p},\mathbf{q};\lambda) = \delta\mathcal{J}_{int}(\mathbf{r},\mathbf{R};\mathbf{p},\mathbf{q}) - \lambda\mathcal{J}_{ext}(\mathbf{r},\mathbf{R};\mathbf{p},\mathbf{q})$.

Selon ce critère, un état d'équilibre est stable si l'opérateur tangent est défini positif, ainsi la matrice $\mathbb{K}$ est symétrique, l'équation $det(\mathbb{K}) = 0$ est un état de transition entre la stabilité et l'instabilité. On introduit alors le système élargi suivant :

$$\tilde{\mathfrak{F}}(\mathbf{r},\mathbf{R};\mathbf{p},\mathbf{q};\lambda) = \begin{pmatrix} \mathfrak{F}(\mathbf{r},\mathbf{R};\mathbf{p},\mathbf{q};\lambda) \\ det\mathbb{K}(\mathbf{r},\mathbf{R};\mathbf{p},\mathbf{q};\lambda) \end{pmatrix} = 0.$$

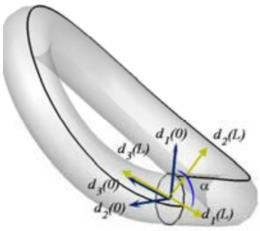
Une approche alternative pour construire un système élargi pour le calcul de la stabilité peut $\hat{e}$tre basée sur un problème aux valeurs propres. la contrainte $det\mathbb{K} = 0$ implique que $\mathbb{K}$ admet une valeur propre nulle. Ceci conduit à l'existance d'un vecteur φ tel que $\mathbb{K}\varphi = 0$. Ainsi nous pouvons écrire le système élargi sous la forme

$$\tilde{\mathfrak{F}}(\mathbf{r},\mathbf{R};\mathbf{p},\mathbf{q};\lambda) = \begin{pmatrix} \mathfrak{F}(\mathbf{r},\mathbf{R};\mathbf{p},\mathbf{q};\lambda) \\ \mathbb{K}(\mathbf{r},\mathbf{R};\mathbf{p},\mathbf{q};\lambda)\varphi \\ f(\varphi) \end{pmatrix} = 0.$$

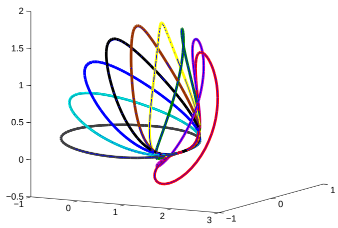
o$\grave{u}$ $f(\varphi) = \|\varphi\| - 1$ si on veut chercher un point limite et $f(\varphi) = \varphi^T\delta\mathcal{J}_{ext}$ si on veut chercher un point de bifurcation.

4.3. Exemples numériques

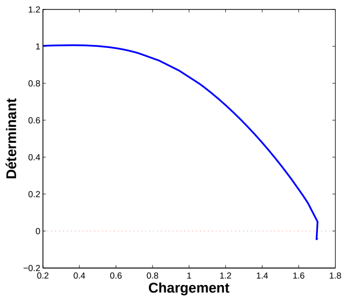
Concernant les tests numériques, nous nous sommes basées sur les travaux développés dans [4]. L'essai consiste à prendre une tige fermée et planaire.



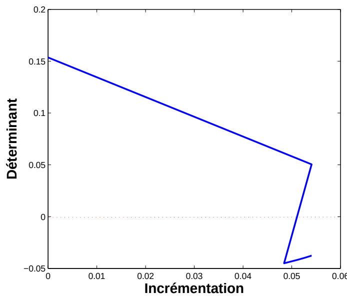
Tige fermée.



L'ensemble des configuration possible pour plusieurs valeurs de chargements.



La variation du déterminant en fonction du chargement.



variation du déterminant en fonction de l'incrémentation de la charge.

Bibliographie

[1] M.Chamekh. « Modélisation et traitement numérique de l'auto-contact dans une tige élastique. », PhD thèse, ENIT , Tunis, 2011.

[2] S.S.Antman, « Nolinear Problems of Elasticity Applied Mathematical Sciences », Springer Verlag : New York,1995.

[3] E.Cosserat, F.Cosserat, « théorie des corps irréformables », Hermann : Paris, 1909.

[4] M.Chamekh, S.M.Aouadi, M.Moakher « Modeling and numerical treatment of elastic rods with frictinless self -contact », *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, **198** (2009), 3751-3764.

[5] M.Al.Mikdad, A.Ibrahimbegovic, « Quadratically convergent direct calculation of critical points for 3D structures undergoing finite rotations. », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* , **189** (2000), 107-120.

[6] A.Ibrahimbegovic, « On finite element implementation of geometrically non- linear Reissner's beam theory : A three-dimensional curved beam elements, », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* , **122** (1995), 11-26.

Existence of solutions to singular

Elliptic Equations

Kamel Tahri[*] — Mohammed Benalili[**]

[*] Preparatory School of Economics Sciences, Gestion and Management. Tlemcen
Algeria
tahri_kamel@yahoo.fr
[**] Department of Mathematics, Faculty of Sciences University Abou Berk Belkaid Tlemcen
Algeria
m_benalili@yahoo.fr

ABSTRACT. Let (M, g) be an $n-$dimensional compact Riemannian manifold with $n \geq 5$, we consider the following semi-linear elliptic equation :

$$P_g(u) = f(x)\,|u|^{N-2}\,u + \lambda h(x)\,|u|^{q-2}\,u$$

where $2 < q < N$ and $\lambda > 0$ a real parameter and under some conditions putting on the two functions f, h and the operator P_g. The main goal of this work is to prove the existence of a weak solution in $H_2^2(M)$.

RÉSUMÉ. Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $n \geq 5$, On considère l'équation suivante :

$$P_g(u) = f(x)\,|u|^{N-2}\,u + \lambda h(x)\,|u|^{q-2}\,u.$$

Où $2 < q < N$ et $\lambda > 0$ un paramètre réel et sous quelques conditions posées sur les fonctions f, h et l'opérateur P_g. Notre but principal est de démontrer l'existence d'une solution faible dans $H_2^2(M)$.

KEYWORDS : Variational methods, critical Sobolev exponent, Fourth order equations, Palais-Smale condition and Hary-Sobolev inequality.

MOTS-CLÉS : Méthodes variationnelles, l'exposant critique de Sobolev, la condition de Palais Smale et l'inégalité de Hardy.

1. Introduction

In 1983, Paneitz in [8], discovered a particularaly conformally fourth order operator defined on $4-$dimensional smooth Riemannian manifolds. In 1987, Branson in [7] generalized the definition to higher dimension as follows. Given (M, g) a smooth, compact $n-$dimensional Riemannian manifold with $n \geq 5$ and denote by S_g and Ric_g the scalar and Ricci curvature of g. Let $u \in C^4(M)$, the Paneitz-Branson operator P_g^n is given by:

$$P_g^n(u) = \Delta_g^2 u - div_g\left(a(x)du\right) + Q_g^n u$$

Where $\Delta_g u$: is the Laplace-Beltrami operator.
with

$$a(x) = \frac{(n-2)^2+4}{2(n-2)(n-1)} S_g.g - \frac{4}{n-2} Ric_g$$

and

$$Q_g^n = \frac{1}{(n-1)\,(n-4)}\Delta_g S_g + \frac{n^3-4n^2+16n-16}{4(n-1)^2(n-2)^2\,(n-4)} S_g^2 - \frac{4}{(n-4)\,(n-2)^2}\left|Ric_g\right|^2$$

If $\tilde{g} = \varphi^{\frac{4}{n-4}} g$ is a conformal metric to g, then for all $u \in C^\infty(M)$,

$$P_g^n(u\varphi) = \varphi^{\frac{n+4}{n-4}} P_{\tilde{g}}^n(u)$$

In particular, we have :

$$P_g^n(\varphi) = Q_{\tilde{g}}^n \varphi^{\frac{n+4}{n-4}}$$

The Paneitz-Branson operator enjoys an interesting conformal properties that are very simular to ones of conformal Laplacian operator.
Many intersting results on Paneitz-Branson operator and related topics have been recently obtained by several authors, we refer the reader to [1], [2], [3] [4], [5], [6] and [9].
Let (M, g) is an $n-$dimensional compact, smooth and orientable Riemannian manifold with $n \geq 5$, we denote by $H_2^2(M)$ is the standart Sobolev space consisting of function in $L^2(M)$ whose derivatives up to the second order in $L^2(M)$ and N is the critical exponent given by $N = \frac{2n}{n-4}$.
Now, we define the best constent $K_\circ$ of the embeding $H_2^2(\mathbb{R}^n) \subset L^N(\mathbb{R}^n)$ such that

$$\frac{1}{K_\circ} = \frac{n(n^2-4)(n-4)w_n^{\frac{4}{n}}}{16}$$

where w_n the volume of the unit $n-$sphere (S^n, h).
In 2002, F.Robert and P.Esposito in [9] considered the equation :

$$\Delta_g^2 u + div_g\left(a(x)\nabla_g u\right) + b(x)u = f(x)\left|u\right|^{N-2} u + h(x)\left|u\right|^{q-2} u$$

Where $a \in \Lambda_{(2,0)}^{+\infty}(M)$ a smooth symmetric $(2,0)-$tensor field and $b \in C^\infty(M)$ and h, f two smooth functions in M with f is positive in M such that $2 < q < N$.
They established the following result :

Theorem 1.1 *Let (M, g) be an $n-$dimensional compact Einsteinian manifold with $n \geq 8$ and we assume that P_g^n is coercive. Let $f \in C^\infty(M)$, $f > 0$ and we suppose that there exists $x_\circ \in M$ such that* : $f(x_\circ) = \max_{x\in M} f(x)$, $\Delta f(x_\circ) = 0$ *and*

$$\frac{4(n^2-4n-4)}{3(n+2)}\left|Weyl_g(x_\circ)\right|^2 + (n-6)(n-8)\frac{\Delta_g^2 f(x_\circ)}{f(x_\circ)} + 2(n-6)(n-8)\frac{\langle \nabla_g f(x_\circ), Ric_g(x_\circ)\rangle}{f(x_\circ)} > 0$$

Then, there exists $\tilde{g}$ conformal to g such that $Q_{\tilde{g}}^n(x) = f(x)$.

2. Some results

Lemma 2.1 $\|u\| = \left(\int_M \left((\Delta_g u)^2 - a(x)\left|\nabla_g u\right|^2 + b(x)u^2\right) dv(g)\right)^{\frac{1}{2}}$ *is an equivalent norm of the usual one of $H_2^2(M)$ if only if the operator P_g est coercive.*

Proof. The proof of this lemma is the same as in[5]. □

In this setion the main tool is the Mountain-Pass lemma of Ambrossetti-Rabinowitz :

Lemma 2.2 *let $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ where $(E, \|.\|)$ is a Banach space. We assume that:*
(i) $J(0) = 0$.
(ii) $\exists r, R > 0$ suh that $J(u) \geq R > 0$ for all $u \in E$ suh that $\|u\| = r$.
(iii) $\exists v \in E$ suh that $lim\ sup_{t\longrightarrow+\infty} J(tv) < 0$.
Let

$$c = \min_{\eta\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} \left(J\left(\eta(t)\right)\right)$$

Where

$$\Gamma = \left\{\eta \in C^1\left([0;1]\,;\ E\right) :\ \eta\left(0\right) = 0,\ \eta\left(1\right) = v\right\}$$

Then there exists a sequene $(u_n)_n$ in E suh that :

$$J\left(u_n\right) \longrightarrow c \text{ and } \nabla J\left(u_n\right) \longrightarrow 0 \text{ in } E^*$$

Morever, we have that

$$c \leq \sup_{t\geq 0} J(tv)$$

Lemma 2.3 *Suppose either or that. Then J_λ verifies the following conditions:*

1) There exist constants $r, R > 0$ suh that $J_\lambda(u) \geq R > 0$, $\|u\| = r$.

2) There exists $v \in H_2^2(M)$, with $\|v\| > r$, such that $J_\lambda(v) < 0$.

Theorem 2.4 *Let (M, g) is an $n-$dimensional compact, smooth and orientable Riemannian manifold with $n \geq 5$. Let be $(u_m)_m$ a Palais-Smale sequence at level c_λ and we suppose the conditions (h^1), (h^2) and (h^3) are satisfying.*
Then there is a subsequence of $(u_m)_m$ converging strongly in $H_2^2(M)$.

References

[1] M. Benalili, Existence and multiplicity of solutions to elliptic equations of fourth order on compact manifolds. Dynamics of PDE, vol.6, 3 (2009), 203-225.

[2] M.Benalili, Existence and multiplicity of solutions to fourth order elliptic equations with critical exponent on compact manifolds, Bull. Belg.Math. Soc. Simon Stevin 17 (2010).

[3] M. Benalili, On the singular Q-curvature type equation (preprint, Tlemcen 2011).

[4] M.Benalili, T.Kamel, Nonlinear elliptic fourth order equations existence and multiplicity results, Nonlinear Differ.Equ.Appl.18(2011),539-556.

[5] M.Benalili, T.Kamel, Elliptic singular fourth order equations, arXiv:1209.3409v2 [math.DG] 24 Sep 2012

[6] M.Benalili, T.Kamel, Multiple solutions to singular fourth order elliptic equations, arXiv:1209.3764v1 [math.DG] 16 Sep 2012

[7] T.P.Branson, Group representation arising from Lorentz conformal geometry. J. Funct.Anal. 74, 1987, 199-291.

[8] S. Paneitz, A quatric conformally covariant differential operator for arbitrary peudo Riemannian manifolds, SIGMA, 4, (2008).

[9] F. Robert and P.Esposito, and Mountain-Pass critical points for Paneitz-Branson operators, Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 15, (2002), 493-517.14

TAMTAM, Algérie, Alger 27 — 30 Avril 2013

Analysis of a Mathematical Model of Cancer Invasion

N. AISSA* — H. Tsamda**

USTHB Laboratoire AMNEDP, Faculté de Mathématiques BP 32 Alger, Algérie
* aissa.naima@gmail.com
** tsamdatsamda@gmail.com

ABSTRACT. This paper is dealing with a cancer invasion model proposed by [1]. Using a fixed point procedure, we prove existence of a local nonnegative solution while uniqueness is deduced from Gronwall inequality.
Next combining interpolation and entropy inequalities, we prove that the previous local solution is global in time provided that the initial data are small enough.

RÉSUMÉ. On se propose de montrer un résultat d'existence e d'unicité d'une solution pour un modèle d'invasion du cancer proposé par [1].
En utilisant le théorème du point fixe de Schauder, on montre l'existence d'une solution locale en temps, l'unicité découle d'une inégalité de type Gronwall.
En combinant des inégalités d'interpolation et d'entropie, on montre que la solution précédemment construite est globale en temps pour des données initiales petites.

KEYWORDS : Nonlinear parabolic systems, cancer invasion, reaction-diffusion systems

MOTS-CLÉS : Systèms paraboliques non-linéaires, invasion du cancer, systèmes de réaction-diffusion.

1. The model equation and main result

The model is described by the following system

$$\begin{cases} \partial_t n = D\Delta n - \rho\nabla\cdot(n\nabla f), (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ \partial_t f = -\gamma m f, (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ \partial_t m = \varepsilon\Delta m + \alpha n - \nu m, (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ n(0) = n_0,\ f(0) = f_0,\ m(0) = m_0, \\ \partial_\nu n = \partial_\nu m = 0, \ \text{ on } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

where n is the cancer cell density, m is the concentration of the matrix degrading enzyme, f is the extracellular matrix density, $D, \rho, \gamma, \varepsilon, \nu$ are nonnegative constant and Ω is a bounded regular domain of $\mathbb{R}^2$.
One can summarize briefly the invasion-degradation process as follow. The extracellular matrix is invaded by the migration of cancer cells following the haptotactic gradient $\nabla\cdot(n\nabla f)$. The migrated cells produce degrading matrix enzyme m which degrades the surrounded extracellular matrix leading to the cancer growth. Our main result is the following

Theorem 1.1 *Let $\gamma_2 > 0$ be a fixed constant. Assume that*

$$n_0 \in H^2(\Omega), f_0 \in W^{3,\infty}(\Omega), m_0 \in H^2(\Omega), \tag{2}$$

$$n_0 \geq 0, f_0 \geq 0, m_0 \geq \gamma_2 > 0. \tag{3}$$

Then, there exists a unique local nonnegative strong solution $(n, f, m) \in L^2(0, T^\star, H^2(\Omega)) \times L^2(0, T^\star, H^3(\Omega)) \times L^2(0, T^\star, H^2(\Omega))$ satisfying $m \geq \gamma_2$.

Proof. For fixed $T > 0$, $R > 0$ and $R_0 > 0$, define V_T by

$$V_T = \left\{ \begin{array}{l} n \in L^2(0,T;L^2(\Omega)),\ n \geq 0, \ \ n(0,x) = n_0 \\ \|n\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq R, \ \ \|\partial_t n\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq R_0 \end{array} \right\} \tag{4}$$

Next, for given $\gamma_2 > 0$ we define the operator $\mathcal{L}$ on V_T as follows:
For $n \in V_T$, let $m \in L^2(0,T;H^2(\Omega))$ be the solution to the modified third equation of (1) with no-flux boundary condition

$$\begin{cases} \partial_t m = \varepsilon\Delta m + \alpha n - \nu m 1_{\{m \geq \gamma_2\}}, (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega. \\ m(0,.) = m_0 \end{cases} \tag{5}$$

and let f be the corresponding solution to the second equation of (1) and finally $\mathcal{L}(n)$ is defined as the solution to the linear parabolic problem

$$\begin{cases} \partial_t n^\star = D\Delta n^\star - \rho\nabla\cdot(n^\star\nabla f), (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ n(0,.) = n_0. \end{cases} \tag{6}$$

supplemented by the no-flux boundary condition, where f is defined previously from m and n.
We considered the modified problem for m to get a solution satisfying $m \geq \gamma_2$ which will play a crucial role for the global existence of a solution. It is clear that V_T is convex and closed in $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Moreover, from Aubin's compactness theorem V_T is a relatively compact subset of $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Then V_T is a convex and compact subset of $L^2(0,T;L^2(\Omega))$.
Next, we prove that $\mathcal{L}(V_T) \subset V_T$ for suitable values of $T > 0, R > 0, R_0 > 0$. Moreover, we check that there exists $C > 0$ depending on $T > 0, R > 0, R_0 > 0$ chosen previously, such that for all $u_1, u_2 \in V_T$

$$\|\mathcal{L}(u_1) - \mathcal{L}(u_2)\|^2_{L^2(\Omega)}(t) \leq C \int_0^T \|u_1 - u_2\|^2_{L^2(\Omega)}(s)ds, \; ; \; 0 \leq t \leq T. \tag{7}$$

Consequently, $\mathcal{L}$ is Lipschitz continuous on V_T induced with the $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ norm.
Existence of a nonnegative local solution follows from Schauder's fixed point theorem while uniqueneness is a consequence of (7) and Gronwall's inequality. □

Next, we prove that the previous local solution is global by adapting some ideas of [4].

Theorem 1.2 *Denoting by C_Ω the constant appearing in the interpolation inequality*

$$\|a\|_{L^8(\Omega)} \leq C_\Omega \|a\|^{\frac{1}{4}}_{L^2(\Omega)} \|a\|^{\frac{3}{4}}_{H^1(\Omega)}, \;\; \forall a \in L^8(\Omega) \cap H^1(\Omega), \tag{8}$$

and by $p(x) = C_\Omega x^2(x+1)$. Assuming that the initial data n_0, f_0 satisfy

$$4D - \frac{1}{2}(1 + \frac{C_{f_0}}{\gamma^2\gamma_2^2} p^2(\|n_0\|^{\frac{1}{6}}_{L^1(\Omega)})) > 0 \tag{9}$$

where D is the diffusion coefficient of cancer cells and

$$C_{f_0} = \|\Delta f_0\|^2_{L^\infty(\Omega)} + 2\gamma\|\nabla f_0\|^2_{L^\infty(\Omega)} + \gamma\|f_0\|^2_{L^\infty(\Omega)}. \tag{10}$$

Then there exists $C > 0$ which is independent of T, depending only on the inital data such that

$$\|n\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} + \|m\|_{L^2(0,T,H^2(\Omega))} + \|f\|_{L^2(0,T,H^2(\Omega))} \leq C(1+T), \;\; \forall T > 0 \tag{11}$$

which leads to the global solution to (1).

Proof. The proof relies on interpolation inequalities leading to

$$\begin{aligned} &\|n\|_{L^2(\Omega)}(t) \leq \\ &p(\|n_0\|^{\frac{1}{6}}_{L^1(\Omega)})\|\nabla\sqrt{(n+1)}\|(t) + (\|n_0\|_{L^1(\Omega)} + 1)^{\frac{1}{2}} p(\|n_0\|^{\frac{1}{6}}_{L^1(\Omega)}), \end{aligned} \tag{12}$$

for $0 \leq t \leq T$ and the following entropy inequality obtained by multiplying the first equation of (1) by the entropy term $ln(n+1)$ and integrating by parts

$$\begin{aligned} &\varphi(t) + (4D - \tfrac{1}{2}(1 + \tfrac{C_{f_0}}{(\gamma\gamma_2)^2})p^2(\|n_0\|^{\frac{1}{6}}_{L^1(\Omega)}))\|\nabla\sqrt{(n+1)}\|^2_{L^2((0,T)\times\Omega)} \leq \\ &C + \varphi(0), \end{aligned} \tag{13}$$

where $\varphi(t) = \displaystyle\int_\Omega (n+1)ln(n+1) - ndx$ and C is a positive constant which is independent of T, depending only on the initial data and γ, γ_2.
Finally, using (13) and (9) we deduce that $\|\nabla\sqrt{(n+1)}\|^2_{L^2((0,T)\times\Omega)}$ is bounded by a constant which is independent of T then (11) follows from (12). □
REMARK. — W
e proved existence and uniqueness of a global strong solution to (1) for small data in the two dimensional case. In the papers of [2] and [3], we can find existence and uniqueness of a global classical solution without restriction on the initial data, to a similar model with a logistic source term $n(1-n-f)$ in the cancer cell equation, which is known to prevent blow up.
Comparing to those papers, blow up is not excluded in our case, so condition (9) is justified.

References

[1] M.A.J. CHAPLAIN ET AL Mathematical Modeling of Dynamic Adaptative Tumor Angiogenesis *Journal of Theoretical Biology*, 241, (2006), 564-589.

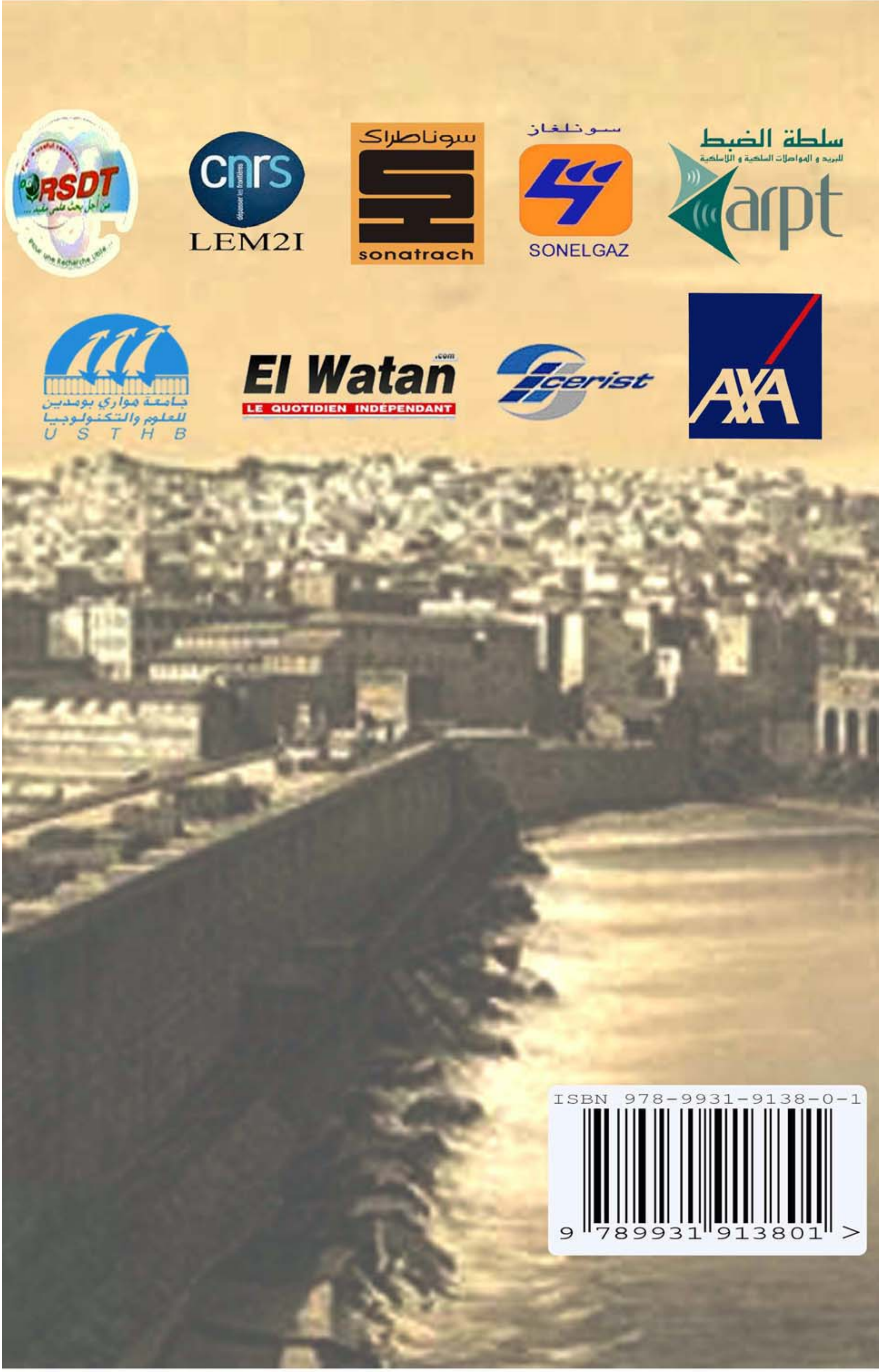
[2] Y. TAO Global existence for a haptotactic model of cancer invasion with tissue remodeling, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 12, (2011), 418-435.

[3] J.I. TELLO, M. WINKLER, Chemotaxis System With Logistic source *Communications in Partial Differential Equations* 32, (2007) , 849-877 .

[4] A. YAGI Abstract Parabolic Evolution Equations *Springer* (2000).

Indice des auteurs / *Author index*

Dépôt légal : 2258 Avril 2013
ISBN : 978-9931-0-1
Achevé d'imprimer à Alger
par
دار كوكب العلوم
للنشروالتوزيع والإشهار



ISBN 978-9931-9138-0-1