Mathématiques
et
Applications

Directeurs de la collection:
J. Garnier et V. Perrier

72

For further volumes:
http://www.springer.com/series/2966

Hervé Le Dret

Équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires

Springer

Hervé Le Dret
Laboratoire Jacques-Louis Lions
Université Pierre et Marie Curie
Paris
France

ISSN 1154-483X
ISBN 978-3-642-36174-6 ISBN 978-3-642-36175-3 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-642-36175-3
Springer Heidelberg New York Dordrecht London

Library of Congress Control Number: 2013931944

Mathematics Subject Classification (2010): 35J15, 35J20, 35J25, 35J47, 35J50, 35J57, 35J60, 35J61, 35J62, 35J66, 35J87, 35J88, 35J92, 49J35, 49J40, 49J45, 49J50

Imprimé sur papier non acide

Springer est membre du groupe Springer Science+Business Media (www.springer.com)

Préface

Cet ouvrage est issu d'un cours de Master 2 enseigné à l'UPMC entre 2004 et 2007, à partir de notes substantiellement réécrites et augmentées. Nous y présentons une sélection de techniques mathématiques orientées vers la résolution des équations aux dérivées partielles elliptiques semi-linéaires et quasi-linéaires, agrémentée d'exemples et d'exercices. Cette sélection ne tend pas à l'exhaustivité ni à établir un état de l'art en la matière. Nous ne revenons pas sur les démonstrations des résultats de cours standards en analyse réelle pour les équations aux dérivées partielles de niveau Master 1.

Le premier chapitre est justement consacré à des rappels d'analyse réelle et d'analyse fonctionnelle, principalement intégration, distributions, espaces de Sobolev, topologies faibles, donnés le plus souvent sans démonstration. Il est conçu comme une sorte de vade-mecum. Nous y démontrons également quelques résultats d'intérêt général réutilisés plusieurs fois dans les chapitres suivants. Une annexe, dont la lecture n'est pas requise pour la suite, permettra néanmoins de satisfaire la curiosité du lecteur pour ce qui concerne les espaces vectoriels topologiques parfois un peu exotiques que l'on est amenés à manipuler dans la pratique.

Le deuxième chapitre est consacré à la démonstration des grands théorèmes de point fixe : points fixes de Brouwer et de Schauder, suivie par des applications à la résolution d'équations aux dérivées partielles semi-linéaires.

Déjà rencontrés au chapitre 2, les opérateurs de superpositions sont étudiés plus en détail au chapitre 3 où l'on s'intéresse à leurs propriétés de continuité ou de non continuité pour diverses topologies dans divers espaces. On introduit en particulier la notion de mesures de Young.

Le chapitre 4 revient à la résolution d'équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires avec la présentation de la méthode de Galerkin, c'est-à-dire la réduction d'une formulation variationnelle à la dimension finie suivi d'un passage à la limite quand cette dimension tend vers l'infini, sur deux exemples. Le premier exemple est l'exemple semi-linéaire déjà traité par point fixe au chapitre 2 et le deuxième exemple, bien que très académique, présente du point de vue de sa non linéarité des similarités avec les équations de Navier-Stokes stationnaires de la mécanique des fluides.

Le chapitre 5 est divisé en trois parties. Dans une première partie, on démontre plusieurs versions du principe du maximum. La deuxième partie est un catalogue de résultats de régularité elliptique. La troisième partie utilise une combinaison de principe du maximum et de régularité elliptique pour montrer sur un exemple l'existence pour des problèmes semi-linéaires par la méthode des sur- et sous-solutions.

Changement de décor au chapitre 6, où l'on s'intéresse au calcul des variations pour la minimisation de fonctionnelles. Celui-ci permet de résoudre cette fois des problèmes d'équations elliptiques quasi-linéaires. Nous traitons le cas scalaire, où la notion cruciale est la convexité, et le cas vectoriel, c'est-à-dire adapté à des systèmes d'équations, où des notions plus subtiles de convexité entrent en jeu, quasi-convexité, polyconvexité, rang-1-convexité.

Le chapitre 7 offre une autre perspective sur le calcul des variations avec la recherche des points critiques des fonctionnelles. Cette approche est plus adaptée aux problèmes semi-linéaires, dont on donne plusieurs exemples.

Le chapitre 8 se replace dans le contexte des problèmes quasi-linéaires qui ne sont pas nécessairement associés à une fonctionnelle du calcul des variations. On y introduit les opérateurs monotones et pseudo-monotones et l'on y résout les problèmes d'inéquations variationnelles qui leur sont associés. On donne enfin l'exemple des opérateurs de Leray-Lions.

Je remercie François Murat pour ses notes de cours de DEA qui ont formé l'ossature initiale du cours d'où est issu le présent ouvrage.

Paris, le 25 juin 2012 Hervé Le Dret

Table des matières