

# Mathématiques et Applications

Directeurs de la collection:  
J. Garnier et V. Perrier

72

For further volumes:  
<http://www.springer.com/series/2966>

# MATHÉMATIQUES & APPLICATIONS

Comité de Lecture 2012–2015/Editorial Board 2012–2015

Rémi ABGRALL  
Inst. Math., Inst. Polytechnique de Bordeaux, FR  
remi.abgrall@inria.fr

Grégoire ALLAIRE  
CMAP, École Polytechnique, Palaiseau, FR  
gregoire.allaire@polytechnique.fr

Michel BENAÏM  
Inst. Math., Univ. de Neuchâtel, CH  
michel.benaim@unine.ch

Maitine BERGOUNIOUX  
MAPMO, Université d'Orléans, FR  
maitine.bergounioux@univ-orleans.fr

Thierry COLIN  
Inst. Math., Université Bordeaux 1, FR  
colin@math.u-bordeaux1.fr

Marie-Christine COSTA  
UMA, ENSTA, Paris, FR  
marie-christine.costa@ensta.fr

Arnaud DEBUSSCHE  
ENS Cachan, Bruz, FR  
arnaud.debussche@bretagne.ens-cachan.fr

Isabelle GALLAGHER  
Inst. Math. Jussieu, Univ. Paris 7, FR  
gallagher@math.jussieu.fr

Josselin GARNIER  
Lab. Proba. et Mod. Aléatoires, Univ. Paris 7, FR  
garnier@math.univ-paris-diderot.fr

Stéphane GAUBERT  
INRIA, Saclay - Île-de-France, Orsay, FR  
stephane.gaubert@inria.fr

Emmanuel GOBET  
CMAP, École Polytechnique, Palaiseau, FR  
emmanuel.gobet@polytechnique.edu

Raphaele HERBIN  
CMI LATP, Université d'Aix-Marseille, FR  
raphaele.herbin@latp.univ-mrs.fr

Marc HOFFMANN  
CEREMADE, Université Paris-Dauphine, FR  
hoffmann@ceremade.dauphine.fr

Claude LE BRIS  
CERMICS, ENPC, Marne la Vallée, FR  
lebris@cermics.enpc.fr

Sylvie MÉLÉARD  
CMAP, École Polytechnique, Palaiseau, FR  
sylvie.meleard@polytechnique.edu

Felix OTTO  
Institute of Applied Math., Bonn, GE  
otto@iam.uni-bonn.de

Valérie PERRIER  
Lab. Jean-Kunztmann, ENSIMAG, Grenoble, FR  
valerie.perrier@imag.fr

Philippe ROBERT  
INRIA Rocquencourt, Le Chesnay, FR  
philippe.robert@inria.fr

Pierre ROUCHON  
Automatique et Systèmes, École Mines, Paris, FR  
pierre.rouchon@ensmp.fr

Bruno SALVY  
INRIA, LIP - ENS Lyon, FR  
bruno.salvy@inria.fr

Annick SARTENAER  
Dépt. Mathématiques, Univ. Namur, Namur, BE  
annick.sartenaer@fundp.ac.be

Eric SONNENDRÜCKER  
IRMA, Strasbourg, FR  
sonnen@math.u-strasbg.fr

Alain TROUVÉ  
CMLA, ENS Cachan, FR  
trouve@cmla.ens-cachan.fr

Cédric VILLANI  
IHP, Paris, FR  
villani@math.univ-lyon1.fr

Enrique ZUAZUA  
BCAM, Bilbao, ES  
enrique.zuazua@uam.es

Directeurs de la collection:

J. GARNIER et V. PERRIER

Hervé Le Dret

Équations aux dérivées  
partielles elliptiques  
non linéaires

Hervé Le Dret  
Laboratoire Jacques-Louis Lions  
Université Pierre et Marie Curie  
Paris  
France

ISSN 1154-483X  
ISBN 978-3-642-36174-6                      ISBN 978-3-642-36175-3 (eBook)  
DOI 10.1007/978-3-642-36175-3  
Springer Heidelberg New York Dordrecht London

Library of Congress Control Number: 2013931944

Mathematics Subject Classification (2010): 35J15, 35J20, 35J25, 35J47, 35J50, 35J57, 35J60, 35J61, 35J62, 35J66, 35J87, 35J88, 35J92, 49J35, 49J40, 49J45, 49J50

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2013

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

La loi du 11 mars 1957 interdit les copies ou les reproductions destinées à une utilisation collective. Toute représentation, reproduction intégrale ou partielle faite par quelque procédé que ce soit, sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants cause, est illicite et constitue une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

Imprimé sur papier non acide

Springer est membre du groupe Springer Science+Business Media ([www.springer.com](http://www.springer.com))

# Préface

Cet ouvrage est issu d'un cours de Master 2 enseigné à l'UPMC entre 2004 et 2007, à partir de notes substantiellement réécrites et augmentées. Nous y présentons une sélection de techniques mathématiques orientées vers la résolution des équations aux dérivées partielles elliptiques semi-linéaires et quasi-linéaires, agrémentée d'exemples et d'exercices. Cette sélection ne tend pas à l'exhaustivité ni à établir un état de l'art en la matière. Nous ne revenons pas sur les démonstrations des résultats de cours standards en analyse réelle pour les équations aux dérivées partielles de niveau Master 1.

Le premier chapitre est justement consacré à des rappels d'analyse réelle et d'analyse fonctionnelle, principalement intégration, distributions, espaces de Sobolev, topologies faibles, donnés le plus souvent sans démonstration. Il est conçu comme une sorte de vade-mecum. Nous y démontrons également quelques résultats d'intérêt général réutilisés plusieurs fois dans les chapitres suivants. Une annexe, dont la lecture n'est pas requise pour la suite, permettra néanmoins de satisfaire la curiosité du lecteur pour ce qui concerne les espaces vectoriels topologiques parfois un peu exotiques que l'on est amenés à manipuler dans la pratique.

Le deuxième chapitre est consacré à la démonstration des grands théorèmes de point fixe : points fixes de Brouwer et de Schauder, suivie par des applications à la résolution d'équations aux dérivées partielles semi-linéaires.

Déjà rencontrés au [chapitre 2](#), les opérateurs de superpositions sont étudiés plus en détail au [chapitre 3](#) où l'on s'intéresse à leurs propriétés de continuité ou de non continuité pour diverses topologies dans divers espaces. On introduit en particulier la notion de mesures de Young.

Le [chapitre 4](#) revient à la résolution d'équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires avec la présentation de la méthode de Galerkin, c'est-à-dire la réduction d'une formulation variationnelle à la dimension finie suivi d'un passage à la limite quand cette dimension tend vers l'infini, sur deux exemples. Le premier exemple est l'exemple semi-linéaire déjà traité par point fixe au [chapitre 2](#) et le deuxième exemple, bien que très académique, présente du point de vue de sa non linéarité des similarités avec les équations de Navier-Stokes stationnaires de la mécanique des fluides.

Le [chapitre 5](#) est divisé en trois parties. Dans une première partie, on démontre plusieurs versions du principe du maximum. La deuxième partie est un catalogue de résultats de régularité elliptique. La troisième partie utilise une combinaison de principe du maximum et de régularité elliptique pour montrer sur un exemple l'existence pour des problèmes semi-linéaires par la méthode des sur- et sous-solutions.

Changement de décor au [chapitre 6](#), où l'on s'intéresse au calcul des variations pour la minimisation de fonctionnelles. Celui-ci permet de résoudre cette fois des problèmes d'équations elliptiques quasi-linéaires. Nous traitons le cas scalaire, où la notion cruciale est la convexité, et le cas vectoriel, c'est-à-dire adapté à des systèmes d'équations, où des notions plus subtiles de convexité entrent en jeu, quasi-convexité, polyconvexité, rang-1-convexité.

Le [chapitre 7](#) offre une autre perspective sur le calcul des variations avec la recherche des points critiques des fonctionnelles. Cette approche est plus adaptée aux problèmes semi-linéaires, dont on donne plusieurs exemples.

Le [chapitre 8](#) se replace dans le contexte des problèmes quasi-linéaires qui ne sont pas nécessairement associés à une fonctionnelle du calcul des variations. On y introduit les opérateurs monotones et pseudo-monotones et l'on y résout les problèmes d'inéquations variationnelles qui leur sont associés. On donne enfin l'exemple des opérateurs de Leray-Lions.

Je remercie François Murat pour ses notes de cours de DEA qui ont formé l'ossature initiale du cours d'où est issu le présent ouvrage.

Paris, le 25 juin 2012

Hervé Le Dret

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Rappels d'analyse réelle et fonctionnelle</b> . . . . .	1
1.1	Intégration et théorèmes de convergence de Lebesgue . . . . .	1
1.2	La convolution . . . . .	4
1.3	Les distributions . . . . .	8
1.4	Les espaces de Sobolev . . . . .	10
1.5	Dualité et convergences faibles . . . . .	15
1.6	Topologies faible et faible-étoile . . . . .	18
1.7	Formulations variationnelles et leur interprétation . . . . .	22
1.8	Un peu de théorie spectrale . . . . .	26
1.9	Appendice : topologies de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ . . . . .	28
<b>2</b>	<b>Théorèmes de point fixe et applications</b> . . . . .	41
2.1	Le théorème de point fixe de Brouwer. . . . .	41
2.2	Les théorèmes de point fixe de Schauder . . . . .	48
2.3	Résolution d'un problème modèle par une méthode de point fixe . . . . .	54
2.4	Exercices du chapitre 2 . . . . .	59
<b>3</b>	<b>Les opérateurs de superposition</b> . . . . .	61
3.1	Les opérateurs de superposition dans $L^p(\Omega)$ . . . . .	61
3.2	Les mesures de Young. . . . .	64
3.3	Les opérateurs de superposition dans $W^{1,p}(\Omega)$ . . . . .	69
3.4	Opérateurs de superposition et trace au bord. . . . .	79
3.5	Exercices du chapitre 3 . . . . .	80
<b>4</b>	<b>La méthode de Galerkin</b> . . . . .	83
4.1	Résolution du problème modèle par la méthode de Galerkin. . . . .	83
4.2	Un problème voisin de la mécanique des fluides. . . . .	86
4.3	Exercices du chapitre 4 . . . . .	97

<b>5 Principe du maximum, régularité elliptique et applications . . . . .</b>	<b>99</b>
5.1 Le principe du maximum fort . . . . .	99
5.2 Le principe du maximum faible . . . . .	107
5.3 Résultats de régularité elliptique . . . . .	109
5.4 La méthode des sur- et sous-solutions . . . . .	117
5.5 Exercices du chapitre 5 . . . . .	121
<b>6 Calcul des variations et problèmes quasi-linéaires . . . . .</b>	<b>125</b>
6.1 Rappels d'analyse convexe . . . . .	125
6.2 Application aux problèmes aux limites scalaires quasi-linéaires . . . . .	128
6.3 Calcul des variations dans le cas vectoriel, quasi-convexité . . . .	132
6.4 Condition nécessaire et condition suffisante de quasi-convexité . . . . .	137
6.5 Annexe: démonstrations des résultats de semi-continuité inférieure . . . . .	142
6.6 Exercices du chapitre 6 . . . . .	154
<b>7 Calcul des variations et points critiques . . . . .</b>	<b>161</b>
7.1 Pourquoi rechercher des points critiques ? . . . . .	161
7.2 La condition de Palais-Smale . . . . .	164
7.3 Le lemme d'Ekeland . . . . .	168
7.4 Le lemme de déformation . . . . .	175
7.5 Principe du min-max et théorème du col . . . . .	181
7.6 Exercices du chapitre 7 . . . . .	191
<b>8 Opérateurs monotones et inéquations variationnelles . . . . .</b>	<b>195</b>
8.1 Opérateurs monotones, définitions et premières propriétés . . . . .	195
8.2 Exemples d'opérateurs monotones . . . . .	197
8.3 Inéquations variationnelles . . . . .	199
8.4 Exemples d'inéquations variationnelles . . . . .	204
8.5 Opérateurs pseudo-monotones . . . . .	206
8.6 Exemples, les opérateurs de Leray-Lions . . . . .	210
8.7 Exercices du chapitre 8 . . . . .	213
<b>Bibliographie . . . . .</b>	<b>217</b>
<b>Index . . . . .</b>	<b>221</b>