Juillet 2003

La fonction Gamma

(par A. Joyal pour le camp mathématique)

La fonction Gamma est l'un des joyaux des mathématiques. On la retrouve en analyse, en théorie des nombres, en théorie des probabilités et en théorie des représentations des groupes. Depuis Legendre, on dit que les intégrales

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt \qquad \text{et} \quad B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\, dt$$

sont *eulériennes*. La première définit la fonction *Gamma* et la seconde la fonction *Bêta*.

§ 0 Un peu d'histoire

L'origine de la fonction Bêta remonte au début du calcul différentiel et intégral. Elle fait sa première apparition dans l'*Arithmetica Infinitorum* publié par Wallis en 1665. L'ouvrage contient la célèbre *formule de Wallis*:

$$\frac{\pi}{2} = \left(\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\right)\left(\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\right)\left(\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\right)\cdots.$$

La méthode qu'utilise Wallis pour obtenir sa formule est particulièrement originale. Il se propose de calculer l'aire d'un cercle en calculant l'intégrale

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx. \tag{2}$$

Comme il sait calculer les intégrales

$$\int_0^1 x^a\, dx = \frac{1}{a+1} \tag{1}$$

pour un exposant fractionnaire a, il peut aussi calculer les intégrales

$$I(p,q) = \int_0^1 (1-x^{1/p})^q\, dx.$$

pour q un entier positif. Il dresse alors un tableau de $A(p,q) = I(p,q)^{-1}$ pour tous les entiers $p, q \leq 10$.

	$q=0$	$q=1$	$q=2$	$q=3$	$q=4$	$q=5$	$q=6$	$q=7$	$q=8$	$q=9$	$q=10$
$p=0$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$p=1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$p=2$	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
$p=3$	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286
$p=4$	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001
$p=5$	1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003
$p=6$	1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008
$p=7$	1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	19448
$p=8$	1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	43758
$p=9$	1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620	92378
$p=10$	1	11	66	286	1001	3003	8008	19448	43758	92378	184756

Wallis reconnait le triangle de Pascal avec

$$A(p,q) = \frac{(p+q)!}{p!q!}.$$

Il observe aussi la symétrie $A(p,q) = A(q,p)$ et les relations

$$A(p,q) = \frac{p+q}{q} A(p,q-1) \quad \text{et} \quad A(p,q) = \frac{p+q}{p} A(p-1,q) \qquad (3) \qquad .$$

Wallis fait alors l'hypothède que ces relations sont vraies même pour des valeurs fractionnaires de p et q. Par exemple, posons $b_n = A(1/2, n/2)$. On a $b_2 = 3/2$ et on obtient que

$$b_{2n} = A(\frac{1}{2}, n) = \frac{n+\frac{1}{2}}{n} A(\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}) = \frac{2n+1}{2n} b_{2n-2} = \frac{(2n+1)\cdots 5\cdot 3}{(2n)\cdot\cdots\cdots 4\cdot 2}.$$

De même,

$$b_{2n+1} = \frac{2n+2}{2n+1} b_{2n-1} = \frac{(2n+2)\cdots 4\cdot 2}{(2n+1)\cdots 5\cdot 3} \cdot b_1.$$

Wallis observe que la suite $b_1, b_2, \ldots$ est croissante car la suite

$$\frac{1}{b_n} = I(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}) = \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{n}{2}}\, dx.$$

est décroissante. Les inégalités $b_{2n-2} < b_{2n-1} < b_{2n}$, impliquent que l'on a

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n-2} < b_1 \cdot \frac{4}{3}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot < \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{2n+1}{2n}.$$

On sait que $b_1 = A(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{4}{\pi}$. On obtient par suite que

$$\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdots\frac{2n\cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)} < \frac{\pi}{2} < \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdots\frac{2n\cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)}\cdot\Big(1+\frac{1}{2n}\Big).$$

Ce qui prouve que

$$\frac{\pi}{2} = \Big(\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\Big)\Big(\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\Big)\Big(\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\Big)\cdots.$$

Le raisonnement de Wallis a été critiquée par ses contemporains. Wallis admet que son raisonnement n'est pas entièrement rigoureux mais il réplique que sa méthode est valable, au même titre que celle des sciences expérimentales. Mais une explication purement mathématique restait à trouver. C'est pourquoi Newton, et ensuite Euler ont étudié attentivement les travaux de Wallis. Newton y découvrit la formule du binôme

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!}.$$

Euler y découvrit la fonction Bêta. Revenons à l'intégrale de Wallis. Si on pose $t = x^{\frac{1}{p}}$, on obtient que

$$I(p,q) = p\int_0^1 t^{p-1}\,(1-t)^q\, dt.$$

Euler étudiera ces intégrales sous la forme

$$\int_0^1 t^a (1-t)^b\, dt.$$

Depuis Legendre, on les étudie sous une forme légèrement modifiée

$$B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt.$$

§ 1 Les fonctions Bêta et Gamma

La *fonction Bêta* est définie par l'intégrale

$$B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt.$$

La relation $B(a,b) = B(b,a)$ se démontre en effectuant le changement de variables $t \mapsto 1-t$. La relation

$$aB(a,b+1) = bB(a+1,b)$$

se démontre en intégrant par partie:

$$a\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^b\,dt = t^a(1-t)^b\ |_0^1 + b\int_0^1 t^a(1-t)^{b-1}\,dt \qquad ?.4$$

Si $n = b+1$ est un entier, cela donne une relation de récurrence

$$B(a,n) = \frac{n-1}{a}B(a+1,n-1).$$

Comme $B(a,1) = \frac{1}{a}$, on obtient de proche en proche que

$$B(a,n) = \frac{1\cdot 2\cdots(n-1)}{a(a+1)\cdots(a+n-1)}$$

Si $a = m$ est un entier, on obtient que

$$B(m,n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!} \qquad * \qquad .$$

Euler a généralisé la formule $*$ pour des valeurs quelconques de $a, b > 0$. Pour tout $a > 0$ posons

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-t}t^{a-1}\,dt.$$

La relation fondamentale

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$$

se démontre en intègrant par parties

$$\Gamma(a+1) = \int_0^\infty e^{-t}t^a\,dt = -e^{-t}t^a\ |_0^1 + a\int_0^\infty e^{-t}t^{a-1}\,dt.$$

Si n est un entier, on obtient de proche en proche que

$$\Gamma(a+n) = a(a+1)\cdots(a+n-1)\Gamma(a).$$

Comme $\Gamma(1) = 1$, cela prouve que $\Gamma(n+1) = n!$. Démontrons maintenant la formule

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

On a évidemment

$$\begin{aligned}\Gamma(a)\Gamma(b) &= \left(\int_0^\infty e^{-x} x^{a-1}\,dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-x} x^{a-1}\,dx\right)\\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x-y} x^{a-1}\,y^{b-1}\,dxdy.\end{aligned}$$

Dans cette intégrale double, effectuons le changement de variables $y = u - x$ pour $0 \leq x \leq u$, et conservons la variable x. Comme $\frac{\partial y}{\partial u} = 1$, on a $dxdy = dxdu$. On obtient que

$$\begin{aligned}\Gamma(a)\Gamma(b) &= \int_0^\infty \int_0^u e^{-u} x^{a-1}\,(u-x)^{b-1}\,dxdu\\ &= \int_0^\infty e^{-u}\left(\int_0^u x^{a-1}\,(u-x)^{b-1}\,dx\right)du.\end{aligned}$$

Pour évaluer l'intégrale relative à dx, effectuons le changement de variable $x = tu$. On obtient que

$$\begin{aligned}\int_0^u x^{a-1}\,(u-x)^{b-1}\,dx &= \int_0^1 (tu)^{a-1}\,(u-tu)^{b-1}\,u\,dt\\ &= u^{a+b-1}\int_0^1 t^{a-1}\,(1-t)^{b-1}\,dt\\ &= u^{a+b-1}B(a,b).\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\Gamma(a)\Gamma(b) &= B(a,b)\int_0^\infty e^{-u}u^{a+b-1}du\\ &= B(a,b)\Gamma(a+b)\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat désiré.

La fonction Bêta possède un grand nombre d'expressions intégrales obtenues par changement de variables. Si on pose

$$t = \sin^2\theta, \quad 1 - t = \cos^2\theta, \qquad dt = 2\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

on obtient que

$$B(a,b) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2a-1}(\cos\theta)^{2b-1}\,d\theta.$$

En particulier, $B(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \pi$. Par suite, $\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}) = \Gamma(1)\pi$ et on obtient que

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

Les valeurs centrales

$$B(a,a) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(a)}{\Gamma(2a)}$$

sont particulièrement intéressantes. Si on utilise la relation $\sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta$, on obtient

$$B(a,a) = \frac{1}{2^{2a-2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2\theta)^{2a-1}d\theta.$$

Si on pose $\psi = 2\theta$ on obtient ensuite que

$$B(a,a) = \frac{1}{2^{2a-1}} \int_0^{\pi} (\sin\psi)^{2a-1} d\psi = \frac{1}{2^{2a-2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\psi)^{2a-1} d\psi = \frac{1}{2^{2a-1}} B\Big(a, \frac{1}{2}\Big).$$

Cela donne la *formule de duplication de Legendre*

$$\Gamma(a)\Gamma\Big(a+\frac{1}{2}\Big) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\Gamma(2a).$$

Si on change a en $\frac{a}{2}$, on obtient la formule équivalente:

$$\Gamma(a) = \frac{2^{a-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\Big(\frac{a}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{a+1}{2}\Big).$$

Si on pose

$$t = \frac{x}{1+x}, \qquad 1-t = \frac{1}{1+x}, \qquad dt = \frac{1}{(1+x)^2}$$

on obtient que

$$B(a,b) = \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}\, dx \qquad ?$$

Une expression plus symétrique s'obtient en séparant cette intégrale en deux parties:

$$B(a,b) = \int_0^1 \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}\, dx + \int_1^{\infty} \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}\, dx.$$

Si remplace x par $\frac{1}{x}$ dans la seconde, on obtient que

$$\int_1^{\infty} \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}\, dx = \int_0^1 \frac{x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}}\, dx.$$

Par suite,

$$B(a,b) = \int_0^1 \frac{x^{a-1}+x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}}\, dx. \qquad ?$$

Si $0 < a < 1$, on obtient en particulier que

$$B(a, 1-a) = \Gamma(a)\Gamma(1-a) = \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}\, dx}{1+x} = \int_0^1 \frac{x^{a-1}+x^{-a}\, dx}{1+x}.$$

Démontrons maintenant la *formule des complements*:

$$B(a, 1-a) = \frac{\pi}{\sin \pi a} \quad \text{pour} \qquad 0 < a < 1.$$

Si on multiplie la série géométrique

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots.$$

par x^{a-1} et si on intègre terme à terme, on obtient la série

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}\, dx}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a+n}.$$

Si on multiplie la série géométrique par x^{-a} et si on intègre terme à terme, on obtient la série

$$\int_0^1 \frac{x^{-a}\,dx}{1+x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a-n}.$$

Par suite,

$$B(a, 1-a) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{(-1)^n}{a-n}$$

Pour évaluer cette somme, nous utiliserons le produit d'Euler:

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{x^2}{n^2}\Big).$$

En prenant la dérivé logarithmique de chaque membre, on obtient

$$\pi \cot(\pi x) - \frac{1}{x} = \frac{2x}{x^2 - 1^2} + \frac{2x}{x^2 - 2^2} + \frac{2x}{x^2 - 3^2} + \cdots.$$

On peut transformer cette expression en utilisant la décomposition

$$\frac{2x}{x^2 - n^2} = \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}.$$

À la condition de sommer symétriquement, cela donne

$$\pi \cot(\pi x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{1}{x-n}.$$

Si on utilise ensuite l'identité

$$\operatorname{cosec}(x) = \cot\Big(\frac{x}{2}\Big) - \cot(x),$$

on obtient facilement que

$$\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{(-1)^n}{x-n}.$$

La formule des compléments est démontrée.

Démontrons maintenant une autre formule d'Euler

$$\Gamma(a) = \lim_{n \to \infty} \frac{n!\, n^a}{a(a+1)\cdots(a+n)}.$$

Pour cela nous utiliserons la limite classique

$$e^{-x} = \lim_{n \to \infty} \Big(1 - \frac{x}{n}\Big)^n.$$

Nous admettrons la validité de la limite

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{a-1}\,dx = \lim_{n \to \infty} \int_0^n \Big(1 - \frac{x}{n}\Big)^n x^{a-1}\,dx.$$

(pour une démonstration, voir l'appendice). Le changement de variable $x = nt$ nous donne

$$\int_0^n \Big(1 - \frac{x}{n}\Big)^n x^{a-1}\,dx = n^a \int_0^1 (1-t)^n t^{a-1}\,dt = n^a B(n+1, a).$$

C'est le résultat cherché puisque

$$B(n+1,a)=\frac{1\cdot 2\cdots n}{a(a+1)\cdots(a+n)}.$$

Démontrons maintenant la formule de Weierstrass

$$\frac{1}{\Gamma(x)}=e^{\gamma x}x\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1+\frac{x}{n}\Big)e^{-\frac{x}{n}},$$

dans laquelle figure la *constante d'Euler*

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n.$$

Disons auparavant quelques mots sur cette constante. Pour tout entier $n\geq 1$ on a

$$\frac{1}{n+1}\leq\int_n^{n+1}\frac{dx}{x}\leq\frac{1}{n}$$

puisque n^{-1} est la valeur maximum, et $(n+1)^{-1}$ la valeur minimum, de la fonction x^{-1} dans l'intervalle $[n,n+1]$. Les inégalités

$$0\leq\left(\frac{1}{n}-\int_n^{n+1}\frac{dx}{x}\right)\leq\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

entraînent que la série à terme positifs

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}\right)$$

converge car elle est majoré par la série à terme positifs

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

La suite des sommes partielles

$$s_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log(n+1)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}\right)$$

converge donc vers une limite $\gamma\leq 1$. Disons maintenant quelques mots sur la convergence d'un produit. On dit qu'un produit infinie

$$\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1+a_n\Big)$$

converge absolument si on a $1+a_n\neq 0$ pour $n>N$ assez grand et si la somme

$$\sum_{n>N}^{\infty}\log(1+a_n)$$

converge absolument pour N grand. On montre que le produit converge absolument ssi la somme

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mid a_n\mid$$

converge. Ceci dit, le produit

$$\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1+\frac{x}{n}\Big)$$

ne converge pas (absolument) car la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mid x\mid}{n}$$

ne converge pas. La convergence du produit de Weierstrass provient de l'association des facteurs $\big(1+\frac{x}{n}\big)$ et $e^{-\frac{x}{n}}$. En effet, on a

$$\Big(1+\frac{x}{n}\Big)e^{-\frac{x}{n}}=\Big(1+\frac{x}{n}\Big)\Big(1-\frac{x}{n}+\cdots\Big)=\Big(1-\frac{x^2}{n^2}+\cdots\Big)$$

et la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{n^2}$$

converge. Nous pouvons maintenant établir la formule de Weierstrass. D'après la formule d'Euler, on a

$$\frac{1}{\Gamma(x)}=\lim_{n\to\infty}x\Big(1+x\Big)\cdots\Big(1+\frac{x}{n}\Big)\,n^{-x}$$

Nous allons transformer le facteur $n^x=e^{x\log n}$ de ce produit. Remarquer que l'on a

$$\log n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\gamma+o(1)$$

dans laquelle $o(1)$ désigne une quantité qui tend vers 0 si $n\to\infty$. Par suite,

$$n^x=e^{x\log n}=e^{x(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})}e^{-\gamma x}e^{o(1)}.$$

Donc

$$x\Big(1+x\Big)\Big(1+\frac{x}{2}\Big)\cdots\Big(1+\frac{x}{n}\Big)n^{-x}=e^{-o(1)}e^{\gamma x}x\Big(1+x\Big)e^{-x}\Big(1+\frac{x}{2}\Big)e^{-\frac{x}{2}}\cdots\Big(1+\frac{x}{n}\Big)e^{-\frac{x}{n}}.$$

Si on fait tendre n vers l'infini, on obtient la formule cherchée:

$$\frac{1}{\Gamma(x)}=e^{\gamma x}x\cdot\Big(1+x\Big)e^{-x}\Big(1+\frac{x}{2}\Big)e^{-\frac{x}{2}}\cdots.$$

3 Exercices

Exercice : Si n est un entier ≥ 0 montrer que

$$\Gamma\Big(n+\frac{1}{2}\Big)=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}\qquad\text{et}\qquad\Gamma\Big(-n+\frac{1}{2}\Big)=\frac{(-1)^n2^n}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}\sqrt{\pi}.$$

Posons $a!=\Gamma(a+1)$ et

$$\binom{a}{b}=\frac{a!}{b!(a-b)!}=\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(b+1)\Gamma(a-b+1)}.$$

Exercice : Montrer que
$$\binom{a+1}{b} = \binom{a}{b} + \binom{a}{b-1}.$$

Exercice : Si $p, q \geq 0$, montrer que
$$\frac{p!q!}{(p+q)!} = \int_0^1 (1 - x^{1/p})^q \, dx.$$

Exercice : Montrer que
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2n} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2n} d\theta = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n},$$
$$\text{et que } \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2n+1} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2n+1} d\theta = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}.$$

Exercice : Montrer que
$$\int_0^1 t^{a-1}(1-t^s)^{b-1} dt = \frac{1}{s} B(\frac{a}{s}, b)$$
Suggestion: Effectuer le changement de variables $u = t^s$.

Exercice : Montrer que l'on a
$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\sqrt{32\pi}} \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^3}{\sqrt{3}\pi(16)^{\frac{1}{3}}}.$$
Suggestion: Par l'exercice précédent, on a
$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\sqrt{\pi}}{4\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}$$
et par la formule des compléments, on a
$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \pi\sqrt{2}.$$
De même, par l'exercice précédent, on a
$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\sqrt{\pi}}{3\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)},$$
par la formule de duplication de Legendre, on a
$$\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, 2^{\frac{1}{3}}} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right),$$
et par la formule des compléments, on a
$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Exercice : Montrer que

$$\frac{(a+b)!}{a!b!} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(n+a)(n+b)}{n(n+a+b)}.$$

Suggestion: Utiliser le développement de Weierstrass de la fonction Γ.

Exercice : Vérifier directement que

$$\binom{2}{1} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n(n+1)}.$$

Exercice : Obtenir la formule de Wallis

$$\binom{1}{\frac{1}{2}} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^2}{2n(2n+2)}.$$

Exercice : Si $a_1 + \cdots + a_k = b_1 + \cdots + b_r$, montrer que

$$\frac{\Gamma(1+a_1)\cdots\Gamma(1+a_k)}{\Gamma(1+b_1)\cdots\Gamma(1+b_r)} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(n+b_1)\cdots(n+b_r)}{(n+a_1)\cdots(n+a_k)}.$$

§ 2 Applications

Soient f et g deux fonctions définies pour $x \geq 0$ et intégrables. On définit la *convolution* $f \star g$ de f et g en posant

$$(f \star g)(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt \quad \text{pour} \quad x \geq 0.$$

On montre que l'opération de convolution est commutative et associative:

$$f \star g = g \star f \quad \text{et} \quad (f \star g) \star h = f \star (g \star h).$$

Remarquer $1 \star f$ est l'intégrale de f:

$$(1 \star f)(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

On définit l'*intégrale itérée* $I^n(f)$ par récurrence sur l'entier n en posant

$$I^0(f) = f \quad \text{et} \quad I^{n+1}(f) = 1 \star I_n(f).$$

On voit facilement que

$$I^n(1)(x) = \frac{x^n}{n!}.$$

Par suite,

$$I^n(f) = \overbrace{1 \star \cdots \star 1}^{n \text{ fois}} \star f = I^{n-1}(1) \star f.$$

Nous avons montré que
$$I^n(f)(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)\,dt.$$
Pour tout $a > 0$, posons
$$\gamma_a(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} x^{a-1}.$$
On définit l'*intégrale fractionnaire* $I^a(f)$ pour $a > 0$ en posant
$$I^a(f)(x) = f \star \gamma_a = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^x (x-t)^{a-1} f(t)\,dt.$$
On peut montrer que si $a \to 0$ alors $I^a(f) \to f = I^0(f)$. Montrons que l'on a $I^a(I^b(f)) = I^{a+b}(f)$ pour tout $a, b > 0$. Il revient au même de montrer que l'on a
$$\gamma_a \star \gamma_b = \gamma_{a+b}.$$
On trouve
$$\begin{aligned}(\gamma_a \star \gamma_b)(x) &= \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int_0^x t^{a-1}(x-t)^{b-1}dt = \frac{x^{a+b-1}}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt \\ &= \frac{x^{a+b-1}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} B(a,b) = \frac{x^{a+b-1}}{\Gamma(a+b)} = \gamma_{a+b}(x).\end{aligned}$$

Appliquons ces résultats à l'évaluation de certaines intégrales. Remarquons d'abord que si $g = g_1 \star \cdots \star g_n$, alors
$$\int_0^\infty f(t)g(t)dt = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty f(t_1 + \cdots + t_n) g_1(t_1)\cdots g_n(t_n) dt_1 \cdots dt_n$$
En particulier, si $a = a_1 + \cdots + a_n$, on obtient que
$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty f(t_1 + \cdots + t_n) t_1^{a_1-1} \cdots t_n^{a_n-1} dt_1 \, \cdots dt_n = \frac{\Gamma(a_1)\cdots\Gamma(a_n)}{\Gamma(a_1 + \cdots + a_n)}\int_0^\infty f(t) t^{a-1} dt.$$
On dit souvent qu'une intégrale de la forme
$$I_n = \int \cdots \int f(t_1 + \cdots + t_n) t_1^{a_1-1} \cdots t_n^{a_n-1} dt_1 \, \cdots dt_n.$$
avec $t_i \geq 0$ et $\sum t_i \leq 1$ est une *intégrale de Dirichlet*. Elle se ramène aux intégrales précédentes en prenant $f(t) = 0$ pour $t > 1$. On obtient alors que
$$I_n = \frac{\Gamma(a_1)\cdots\Gamma(a_n)}{\Gamma(a_1 + \cdots + a_n)}\int_0^1 f(t) t^{a-1} dt.$$
Appliquons ces résultat à l'évaluation des *intégrales polaires*:
$$I = \int_{-\infty}^\infty \cdots \int_{-\infty}^\infty f(x_1^2 + \cdots + x_n^2) dx_1 \cdots dx_n$$
On a évidemment
$$I = 2^n \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty f(x_1^2 + \cdots + x_n^2) dx_1 \cdots dx_n.$$
Le changement de variable $x_i = \sqrt{t_i}$, donne
$$I = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty f(t_1 + \cdots + t_n) t_1^{-\frac{1}{2}} \cdots t_n^{-\frac{1}{2}} dt_1 \cdots dt_n.$$

Par suite
$$I = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^\infty f(t) t^{\frac{n}{2}-1} dt.$$
En particulier, le volume b_n d'une boule de rayon 1 dans l'espace euclidien de dimension n est donné par
$$b_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^1 t^{\frac{n}{2}-1} dt = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{(\frac{n}{2})!}.$$
Le volume d'une boule de rayon r est $b_n r^n$ et d'une sphère $\frac{d}{dr}(b_n r^n) = n b_n r^{n-1}$.

§ 4 Prolongement

La formule de Weierstrass permet de définir une fonction
$$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{\gamma z} z \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 + \frac{z}{n}\Big) e^{-\frac{z}{n}}.$$
pour tout nombre complexe z. On montre facilement que cette fonction possède de Taylor
$$\frac{1}{\Gamma(z)} = g_1 z + g_2 \frac{z^2}{2!} + g_3 \frac{z^3}{3!} + \cdots$$
qui converge pour tout nombre complexe z. On dit pour cela c'est une *fonction entière* (tout comme les fonctions e^z, $\sin z$ et $\cos z$). Cette fonction s'annule si et seulement si $z = -n$ pour un entier $n \geq 0$, car un produit convergent ne s'annule que si l'un des facteurs est nul. On peut définir le prolongement analytique de la fonction Γ en posant
$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{z}{n}}}{1 + \frac{z}{n}}$$
pour tout nombre complexe $z \neq -n$. Les identités satisfaites par la fonction Gamma usuelle sont encore satisfaites par son prolongement analytique $\Gamma(z)$. C'est une conséquence du *principe de prolongeent analytique*. Toutefois, il est intéressant de les démontrer directement. Par exemple, démontrons que la fonction $\Gamma(z)$ satisfait l'équation fonctionelle $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Pour cela, il faut montrer que le produit
$$\frac{z}{\Gamma(z+1)} = e^{\gamma(1+z)} z(1+z) \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 + \frac{1+z}{n}\Big) e^{-\frac{1+z}{n}}$$
est égal à $\frac{1}{\Gamma(z)}$. Remarquer que
$$1 + \frac{1+z}{n} = \Big(1 + \frac{z}{n+1}\Big)\Big(1 + \frac{1}{n}\Big).$$
Par suite,
$$\begin{aligned} \frac{z}{\Gamma(z+1)} &= e^{\gamma} e^{\gamma z} z(1+z) \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 + \frac{z}{n+1}\Big) e^{-\frac{z}{n}} \Big(1 + \frac{1}{n}\Big) e^{-\frac{1}{n}} \\ &= \Big[e^{\gamma} \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 + \frac{1}{n}\Big) e^{-\frac{1}{n}} \Big] \times \Big[e^{\gamma z} z(z+1) \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 + \frac{z}{n+1}\Big) e^{-\frac{z}{n}} \Big]. \end{aligned}$$
Le premier facteur vaut 1 car le logarithme
$$\log\Big(e^{\gamma} \prod_{k=1}^{n} \Big(1 + \frac{1}{k}\Big) e^{-\frac{1}{k}} \Big) = \gamma + \log(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

tend vers 0 lorsque $n \to \infty$. Le second facteur vaut

$$\begin{aligned}
&e^{\gamma z} z(1+z)\Big(1+\frac{z}{2}\Big)e^{-z}\Big(1+\frac{z}{3}\Big)e^{-\frac{z}{2}}\Big(1+\frac{z}{4}\Big)e^{-\frac{z}{3}}\Big(1+\frac{z}{5}\Big)e^{-\frac{z}{4}}\cdots \\
=&e^{\gamma z} z\Big(1+z\Big)e^{-z}\Big(1+\frac{z}{2}\Big)e^{-\frac{z}{2}}\Big(1+\frac{z}{3}\Big)e^{-\frac{z}{3}}\Big(1+\frac{z}{4}\Big)e^{-\frac{z}{4}}\Big(1+\frac{z}{5}\Big)\cdots. \\
=&\frac{1}{\Gamma(z)}
\end{aligned}$$

Nous avons démontré l'équation fonctionelle $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Ceci fait, Il est facile de démontrer la formule des compléments:

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \frac{\sin \pi z}{\pi}.$$

Pour cela il suffit d'utiliser l'identité $\Gamma(1-z) = -z\Gamma(-z)$. En effet,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \frac{1}{\Gamma(z)(-z)\Gamma(-z)} &= ze^{\gamma z}e^{-\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1+\frac{z}{n}\Big)e^{-\frac{z}{n}}\Big(1-\frac{z}{n}\Big)e^{\frac{z}{n}} \\
&= z\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{z^2}{n^2}\Big) = \frac{\sin \pi z}{\pi}.
\end{aligned}$$

La formule des compléments est démontrée. Il est plus difficile de démontrer la formule de duplication de Legendre

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\Big(z+\frac{1}{2}\Big).$$

Pour cela on on procéde indirectement en utilisant la dérivée logarithmique du produit de Weierstrass

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{z+n}\right).$$

On dit que $\psi(z)$ est la fonction *Digamma*. Le développement de $\psi(z)$ est absolument convergent si z n'est pas un entier ≤ 0 car son terme général

$$\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{z+n}\right) = \frac{z}{n(n+z)}$$

est inférieur en valeur absolu à Cn^{-2} pour une constante C convenable (qui dépend de z). Il est même uniformément convergent si $\mid z+n \mid \geq \epsilon > 0$ pour tout $n \geq 0$. Il est souvent commode d'écrire le développement de $\psi(z)$ sous la forme

$$\psi(z) = -\gamma - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+z} - \frac{1}{n+1}\right).$$

La dérivée de $\psi(z)$ est la fonction *Trigamma*:

$$\psi'(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2}.$$

Plus généralement, si $k > 0$ on dit que la dérivé k-ième de $\psi(z)$ est une fonction *polygamma*

$$\psi^{(k)}(z) = (-1)^{k-1}(k-1)!\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^{k+1}}.$$

Remarquons au passage que $\psi(x)$ est croissante pour $x > 0$ car la fonction $\psi'(x)$ est continue et positive pour $x > 0$. La fonction $\log \Gamma(x)$ est donc convexe pour $x > 0$. Remarquons de plus que $\psi(1) = -\gamma < 0$ et que $\psi(2) = 1 - \gamma > 0$ (car $\gamma = 0,577 < 1$). La fonction $\psi(x)$ s'annule donc pour un élement x_0 de l'intervalle $(1, 2)$. $\Gamma(x_0)$ est la valeur minimum de $\Gamma(x)$ pour $x > 0$. Numériquement, on trouve $x_0 = 1,462$ et $\Gamma(x_0) = 0,886$.

On peut fonder toute la théorie de la fonction $\Gamma(z)$ sur celle de la fonction trigamma $\psi'(z)$. On voit aisément que cette fonction satisfait à l'équation fonctionelle

$$\psi'(z) = \frac{1}{z^2} + \psi'(z+1).$$

On en déduit l'équation fonctionelle de la fonction Gamma. En effet en intégrant l'équation fonctionelle de $\psi'(z)$ on obtient une équation fonctionelle pour $\psi(z)$:

$$\psi(z) = C - \frac{1}{z} + \psi(z+1)$$

Pour déterminer la constance C il suffit de substituer dans léquation une valeur particulière de z. Si on met $z = 1$, on obtient que $-\gamma = C - 1 + (1 - \gamma)$ et par suite que $C = 0$. Si on intègre ensuite l'équation fonctionelle pour $\psi(z)$, on obtient une équation fonctionelle

$$\log \Gamma(z+1) = C + \log z + \log \Gamma(z)$$

avec C une constante inconnue. Si on substitue cette équation dans l'exponentielle on obtient que

$$\Gamma(z+1) = K \cdot z\Gamma(z)$$

pour une constante $K = e^C$ inconnue. Si on pose $z = 0$ on obtient que $K = 1$ à la condtion de savoir que

$$e^{-\gamma} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{1 + \frac{1}{n}} = 1.$$

Utilisons maintenant cette méthode pour démontrer la formule de duplication de Legendre. Vérifions d'abord que $\psi'(z)$ satisfait la formule de duplication

$$4\psi'(2z) = \psi'(z) + \psi'\Big(z + \frac{1}{2}\Big).$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\psi'(z) + \psi'\Big(z + \frac{1}{2}\Big) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z + \frac{1}{2} + n)^2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2z+2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2z+2n+1)^2} \\
&= 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2z+n)^2} = 4\psi'(2z).
\end{aligned}$$

Si on intègre la formule de duplication pour $\psi'(z)$, on obtient une formule de duplication pour $\psi(z)$:

$$2\psi(2z) = C + \psi(z) + \psi\Big(z + \frac{1}{2}\Big)$$

Pour déterminer la constante C on peut poser $z = \frac{1}{2}$. On a

$$\psi\Big(\frac{1}{2}\Big) = -\gamma - \sum_{n=0}^{\infty}\bigg(\frac{1}{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{n+1}\bigg) = -\gamma - 2\sum_{n=0}^{\infty}\bigg(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\bigg) = -\gamma - 2\log 2.$$

Par suite, $C = 2\log 2$. Nous avons obtenue la formule de duplication pour $\psi(z)$:

$$2\psi(2z) = 2\log 2 + \psi(z) + \psi\Big(z + \frac{1}{2}\Big).$$

Si on intègre cette formule pour ensuite substituer le résultat dans la fonction exponentielle on obtient que

$$\Gamma(2z) = K \cdot 2^{2z}\Gamma(z)\Gamma\Big(z + \frac{1}{2}\Big)$$

pour une constante inconnue K. Pour déterminer K il suffit de substituer de $z = \frac{1}{2}$. On sait par la formule des compléments que l'on a

$$\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)^2 = \pi.$$

Par suite,

$$K = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}.$$

Nous avons démontré la formule de duplication de Legendre

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\Big(z + \frac{1}{2}\Big).$$

Gauss a généralisé cette formule au cas d'un entier quelconque $q \geq 1$:

$$\Gamma(qz) = (2\pi)^{\frac{1}{2}(1-q)} q^{qz-\frac{1}{2}} \prod_{k=0}^{q-1} \Gamma\Big(z + \frac{k}{q}\Big).$$

Sa démonstration fera l'object de quelques exercices.

Il est intéressant de développer $\psi(z)$ en série de Taylor autour de $z = 1$. On obtient

$$\begin{aligned}\psi(1+z) + \gamma = \gamma + \frac{1}{z} + \psi(z) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{z+n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z}{n(z+n)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z}{n^2}\frac{1}{1+\frac{z}{n}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{k-1}}{n^k} = \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{n^k}z^{k-1} = \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\zeta(k)z^{k-1}.\end{aligned}$$

En intégrant terme à terme ce développement on obtient que

$$\ln\Gamma(1+z) = -\gamma z + \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\zeta(k)\frac{z^k}{k}.$$

(la constante d'intégration est nulle car $\log\Gamma(1) = 0$). Si on substitue $z = 1$ dans cette formule, on obtient une formule d'Euler

$$\gamma = \frac{\zeta(2)}{2} - \frac{\zeta(3)}{3} + \frac{\zeta(4)}{3} - \frac{\zeta(5)}{5} + \cdots.$$

On démontre facilement que pour tout nombre complexe z on a

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to\infty}\frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n!\, n^z}.$$

C'est la *représentation de Gauss.* Il est facile de passer ensuite à la représentation intégrale

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}\, dt,$$

valide lorsque la partie réelle de $z = x + iy$ est > 0.

On peut donner à la fonction $\Gamma(z)$ plusieurs expressions intégrales. Si $t > 0$ et $z = x + iy$ alors

$$t^z = e^{z \log t} = e^{x \log t} e^{iy \log t} = t^x \big[\cos(y \log t) + i \sin(y \log t)\big].$$

On voit que $\mid t^z \mid = t^x$. On peut montrer que l'on a

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} \; dt \quad \text{pour} \quad x > 0.$$

Cette intégrale diverge toutefois lorsque $x \mapsto 0$. Suivant Cauchy, on peut obtenir une expression convergente en lui retranchant une partie divergeante. Pour cela on peut séparer l'intégrale en deux parties

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} \; dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} \; dt.$$

La seconde intégrale

$$\Gamma(z, 1) = \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} \; dt$$

converge quelque soit z. Pour la première, on trouve que

$$\int_0^1 e^{-t} t^{z-1} \; dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{t^{n+z-1}}{n!} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(z+n)n!}.$$

Par suite,

$$\Gamma(z) = \Gamma(z, 1) + \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(z+n)n!}.$$

Nous avons exprimé la fonction Gamma comme la somme d'une fonction entière et d'une partie fractionnaire. La décomposition montre que

$$\lim_{z \longrightarrow -n} (z+n)\Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Si on remplace t par at dans l'intégrale définissant la fonction Gamma on obtient que

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-at} (at)^{s-1} a dt = a^s \int_0^\infty e^{-at} t^{s-1} dt.$$

Par suite,

$$\frac{1}{a^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty e^{-at} t^{s-1} dt.$$

Cette identité joue un rôle important dans un grand nombre d'applications. Par exemple, considérons la la *fonction zeta* de Riemann

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$$

Montrons que l'on a

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt.$$

En effet, pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty e^{-nt} t^{s-1} dt.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} &= \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-nt}\, t^{s-1}\, dt = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-nt}\, t^{s-1}\, dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\, t^{s-1}\, dt = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}\, dt \end{aligned}.$$

§ 5 Exercices

Exercice : Si n est un entier ≥ 1, montrer que

$$\psi(z+n) = \psi(z) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+z}.$$

Exercice : Si n est un entier ≥ 1, montrer que

$$\psi(n) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Exercice : Si $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = 0$, montrer que

$$a_1\psi(z_1) + \cdots + a_k\psi(z_k) = -\sum_{n=0}^\infty \left(\frac{a_1}{z_1+n} + \cdots + \frac{a_k}{z_k+n} \right).$$

Suggestion: Utiliser le développement en fractions partielles de $\psi(z)$.

Les 10 exercices qui suivent ont pour but de d'établir la formule de Gauss

$$\psi\Big(\frac{k}{q}\Big) = -\gamma - \log(2q) - \frac{\pi}{2} \cot\Big(\frac{k\pi}{q}\Big) + \sum_{r=1}^{q-1} \cos\Big(\frac{2rk\pi}{q}\Big) \log\Big(\sin\frac{r\pi}{q}\Big).$$

La formule permet de calculer la valeur de la fonction $\psi(x)$ pour $x = k/p$ un nombre rationnel positif < 1.

Exercice : Si $1 \leq k \leq q$ sont des entiers, montrer que l'on a

$$\psi(1) - \psi\Big(\frac{k}{p}\Big) = q \sum_{n=0}^{\infty} \bigg(\frac{1}{nq+k} - \frac{1}{nq+q} \bigg).$$

En particulier, montrer que $\psi\big(\frac{1}{2}\big) = -\gamma - 2\log 2$.

Exercice : Si $1 \leq k \leq q$ sont des entiers, montrer que l'on a

$$\pi \cot\Big(\frac{k\pi}{q}\Big) = \psi\Big(\frac{q-k}{q}\Big) - \psi\Big(\frac{k}{q}\Big) = q \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \bigg(\frac{1}{nq+k} - \frac{1}{nq+q-k} \bigg).$$

Suggestion: Utiliser la formule des compléments $\psi(1-z) = \psi(z) + \pi \cot \pi z$.

Exercice : Utiliser l'exercice précédent pour montrer que l'on a

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{3\sqrt{3}} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots \\
\frac{\pi}{4} &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots \\
\frac{\pi}{2\sqrt{3}} &= 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \cdots \\
\frac{\pi}{8}(1+\sqrt{2}) &= 1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{23} + \frac{1}{25} \cdots .
\end{aligned}$$

Exercice : Montrer que l'on a

$$\psi(a) - \psi(1) = \int_0^1 \frac{1 - x^{a-1}}{1-x}\, dx \quad \text{pour} \quad a \geq 0.$$

Suggestion: Utiliser la série géométrique pour développer l'intégrant. Intégrer terme à terme.

Exercice : Montrer que si q est un entier ≥ 1, alors

$$q \log q = q\psi(1) - \sum_{k=1}^{q} \psi\Big(\frac{k}{q}\Big).$$

Suggestion: Évaluer l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{1 + x + \cdots + x^{q-1} - qx^{q-1}}{1 - x^q} dx.$$

Exercice : Montrer que

$$\begin{aligned}
\log 2 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \cdots \\
\log 3 &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{2}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{2}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} - \frac{2}{15} + \cdots \\
\log 4 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{3}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{3}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} - \cdots \\
\log 5 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{4}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{4}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} - \frac{4}{15} + \cdots \\
&\cdots
\end{aligned}$$

Si ω est une racine q-ième de l'unité $\neq 1$, alors ω est racine du polynôme

$$\frac{X^q - 1}{X - 1} = 1 + X + X^2 + \cdots + X^{q-1}.$$

Par suite,

$$\omega + \omega^2 + \omega^3 + \cdots + \omega^q = 0.$$

Exercice: Montrer que si ω est une racine q-ième de l'unité $\neq 1$, alors

$$\frac{1}{q}\sum_{k=1}^{q} \psi\Big(\frac{k}{q}\Big)\omega^k = \log(1-\omega).$$

Suggestion: Utiliser l'exercice ? pour montrer que

$$\sum_{k=1}^{q} \psi\Big(\frac{k}{q}\Big)\omega^k = -q\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\frac{\omega}{qn+1} + \cdots + \frac{\omega^q}{qn+q}\Big] = -q\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\omega^r}{r}.$$

Exercice: Si $p(x) = a_1 x + \cdots + a_q x^q$, montrer que

$$a_k = \frac{1}{q}\sum_{\omega^q=1} w^{-k} p(\omega).$$

Suggestion: Utiliser le fait que

$$\sum_{\omega^q=1}\omega^r = \begin{cases} q & \text{si } r = 0 \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Exercice: Montrer que

$$\psi\Big(\frac{k}{q}\Big) = -\gamma - \log q + \sum_{\omega^q=1,\omega\neq 1}\omega^{-k}\log(1-\omega).$$

Suggestion: Utiliser l'exercice précédent. Prendre

$$p(x) = \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{q}\psi\Big(\frac{k}{q}\Big)x^k.$$

Utiliser le fait que $p(1) = -\gamma - \log q$ et que $p(\omega) = \log(1-\omega)$ si $\omega^n = 1$ et $\omega \neq 1$.

Exercice: (Gauss) Si $1 \leq k < q$, montrer que l'on a

$$\psi\Big(\frac{k}{q}\Big) = -\gamma - \log(2q) - \frac{\pi}{2}\cot\Big(\frac{k\pi}{q}\Big) + \sum_{r=1}^{q-1}\cos\Big(\frac{2rk\pi}{q}\Big)\log\Big(\sin\frac{r\pi}{q}\Big).$$

Suggestion: Utiliser l'exercice précédent pour montrer d'abord que l'on a

$$\psi\Big(\frac{k}{q}\Big) + \psi\Big(\frac{q-k}{q}\Big) = -2\gamma - 2\log q + 2\sum_{\omega^q=1,\omega\neq 1}\frac{\omega^k + \omega^{-k}}{2}\log(1-\omega).$$

Si $\omega = \cos\theta + i\sin\theta$, alors la partie réelle de $\log(1-\omega)$ vaut $\log\big(2\sin\frac{\theta}{2}\big)$. En prenant les parties réelles montrer que

$$\psi\Big(\frac{k}{q}\Big) + \psi\Big(\frac{q-k}{q}\Big) = -2\gamma - 2\log q + 2\sum_{r=1}^{q-1}\cos\Big(\frac{2rk\pi}{q}\Big)\log\Big(2\sin\frac{r\pi}{q}\Big).$$

Utiliser ensuite la formule des compléments

$$\psi\Big(\frac{k}{q}\Big) - \psi\Big(\frac{q-k}{q}\Big) = \pi\cot\Big(\frac{k\pi}{q}\Big)$$

pour isoler $\psi\big(\frac{k}{q}\big)$. Finalement, utiliser l'identité

$$-1 = \sum_{r=1}^{q-1}\cos\Big(\frac{2rk\pi}{q}\Big).$$

Exercice: Montrer que

$$\begin{aligned}
\psi(\frac{1}{2}) &= -\gamma - 2\log 2\\
\psi(\frac{1}{3}) &= -\gamma - \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{3}{2}\log 3\\
\psi(\frac{1}{4}) &= -\gamma - \frac{\pi}{2} - 3\log 2\\
\psi(\frac{1}{6}) &= -\gamma - \frac{\sqrt{3}}{2}\pi - 2\log 2 - \frac{3}{2}\log 3.
\end{aligned}$$

Les exercices qui suivent ont pour but d'établir la formule de multiplication de Gauss

$$\Gamma(qz) = (2\pi)^{\frac{1}{2}(1-q)} q^{qz-\frac{1}{2}} \prod_{k=0}^{q-1}\Gamma\bigg(z+\frac{k}{q}\bigg).$$

La méthode consiste à établir d'abord les formules de multiplication pour les fonctions $\psi(z)$ et $\psi'(z)$.

Exercice : Établir la formule de multiplication

$$\psi'(qz) = \frac{1}{q^2}\sum_{k=0}^{q-1}\psi'\Big(z+\frac{k}{q}\Big).$$

Suggestion: Utiliser le développement en fractions partielles de $\psi'(z)$.

Exercice : Établir la formule de multiplication

$$\psi(qz) = \log q + \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1}\psi\Big(z+\frac{k}{q}\Big).$$

Suggestion: Intégrer la formule de multiplication pour $\psi'(z)$. Déterminer la constante d'intégration en substituant $z = \frac{1}{q}$.

Si on intègre la formule de multiplication pour $\psi(z)$ on obtient que

$$\log \Gamma(nz) = C + z \log n + \sum_{k=0}^{n-1} \log \Gamma\Big(z + \frac{k}{n}\Big)$$

pour une constante C. En substituant dans la fonction exponentielle on obtient ensuite que

$$\Gamma(nz) = K n^z \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\Big(z + \frac{k}{n}\Big)$$

avec $K = e^C$. Les deux exercices qui suivent ont pour but de déterminer la constante K.

Exercice : (Euler) Montrer que

$$\sin\Big(\frac{\pi}{n}\Big) \sin\Big(\frac{2\pi}{n}\Big) \cdots \sin\Big(\frac{n-1}{n}\pi\Big) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Suggestion: Utiliser les identités

$$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{i\theta}}{2i} = \frac{e^{i\theta}}{2i}(1 - e^{-2i\theta}) \qquad \text{et} \qquad X^n - 1 = (X-1) \prod_{k=1}^{n-1} (X - e^{-\frac{2k\pi i}{n}}).$$

Exercice : (Euler) Montrer que

$$\Gamma\Big(\frac{1}{n}\Big)\Gamma\Big(\frac{2}{n}\Big) \cdots \Gamma\Big(\frac{n-1}{n}\Big) = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}.$$

Suggestion: Utiliser l'exercice précédent et la formule de duplication de Legendre pour calculer le produit

$$\Big[\Gamma\Big(\frac{1}{n}\Big) \cdots \Gamma\Big(\frac{n-1}{n}\Big)\Big]^2 = \Gamma\Big(\frac{1}{n}\Big)\Gamma\Big(\frac{n-1}{n}\Big) \cdots \Gamma\Big(\frac{1}{n}\Big)\Gamma\Big(\frac{n-1}{n}\Big).$$

Exercice : Établir la formule de multiplication de Gauss:

$$\Gamma(nz) = (2\pi)^{\frac{1}{2}(1-n)} n^{nz - \frac{1}{2}} \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\Big(z + \frac{k}{n}\Big).$$

Suggestion: Intégrer la formule de multiplication de $\psi(z)$. Substituer dans la fonction l'exponentielle. Déterminer la constante d'intégration en évaluant en $z = \frac{1}{n}$.

Exercice : Montrer que

$$\int_0^1 \log \sin \pi x \; dx = -\log 2.$$

Suggestion: Calculer la somme

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \log \sin\Big(\frac{k\pi}{n}\Big)$$

en utilisant l'exercice ?. Faire croitre ensuite $n \to \infty$.

Exercice : Montrer que

$$\int_0^1 \log \Gamma(x)\ dx = \frac{1}{2} \log(2\pi).$$

Exercice: Etablir la *formule de Raabe*

$$\int_0^1 \log \Gamma(a+x)\ dx = \frac{1}{2} \log(2\pi) + a \log a - a \qquad \text{pour} \quad a > 0.$$

Suggestion: Commencer par montrer que

$$\int_0^1 \psi(a+x)\ dx = \log a.$$

Intégrer ensuite cette formule par rapport à la variable a. Déterminer la constante d'intégration en substituant $a = 0$.