

# Introduction à la dérivation fractionnaire

## Théorie et applications

François Dubois <sup>1</sup> \*, Ana-Cristina Galucio <sup>2</sup> et Nelly Point <sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Conservatoire National des Arts et Métiers, Mathématiques, Paris, France.*

\*Auteur Correspondant

<sup>2</sup> *EADS Innovation Works, Suresnes, France.*

francois.dubois@math.u-psud.fr, ana-cristina.galucio@eads.net, nelly.point@cnam.fr

09 avril 2009

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Equation de la chaleur et intégration d'ordre un-demi</b>	<b>3</b>
2.1	Motivation . . . . .	3
2.2	Résolution analytique . . . . .	4
2.3	Intégrateur d'ordre un-demi . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Définitions de la demi-dérivée</b>	<b>8</b>
3.1	Demi-dérivée de Riemann-Liouville . . . . .	8
3.2	Paradoxe et demi-dérivée de Caputo . . . . .	9
3.3	Propriétés de la demi-dérivée . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Diverses approches de la dérivation fractionnaire</b>	<b>11</b>
4.1	Généralisation de la définition usuelle de la dérivation : formule de Grünwald-Letnikov . . . . .	11
4.2	Formule intégrale de Liouville . . . . .	13
4.3	Dérivations d'ordre $\alpha$ . . . . .	14
4.4	Approche spectrale de la dérivation . . . . .	16

4.5	Exemple et variante . . . . .	17
4.6	Concept unifié . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Exponentielle de Mittag-Leffler</b>	<b>19</b>
5.1	Définition . . . . .	19
5.2	Equation $\alpha$ -différentielle fondamentale . . . . .	19
<b>6</b>	<b>Application à la viscoélasticité linéaire</b>	<b>20</b>
6.1	Introduction à la viscoélasticité linéaire . . . . .	20
6.2	Modèles classiques . . . . .	21
6.3	Modèle viscoélastique à dérivées fractionnaires . . . . .	22
6.4	Le rôle des dérivées fractionnaires en viscoélasticité linéaire . . . . .	22
6.5	Modèle fractionnaire de Zener . . . . .	23
<b>7</b>	<b>Phénoménologie des modèles et identification</b>	<b>24</b>
7.1	Propriétés dans le domaine fréquentiel . . . . .	24
7.2	Considérations thermodynamiques . . . . .	25
7.3	Analyse du modèle . . . . .	25
7.4	Fonction de relaxation . . . . .	26
7.5	Identification des paramètres du modèle . . . . .	26
<b>8</b>	<b>Approximation numérique de la dérivée d'ordre fractionnaire</b>	<b>27</b>
8.1	Schéma de Grünwald-Letnikov . . . . .	27
8.2	Le schéma $G^\alpha$ . . . . .	28
<b>9</b>	<b>En guise de conclusion</b>	<b>29</b>
<b>10</b>	<b>Annexe : calcul d'une transformée de Fourier par la méthode des résidus</b>	<b>30</b>

# 1 Introduction

Quand on introduit la notion de dérivée, on se rend vite compte qu'on peut appliquer le concept de dérivée à la fonction dérivée elle-même, et par là -même introduire la dérivée seconde. Puis les dérivées successives d'ordre entier. L'intégration, opération inverse de la dérivée, peut éventuellement être considérée comme une dérivée d'ordre "moins un". On peut aussi se demander si ces dérivées d'ordres successifs ont un équivalent d'ordre fractionnaire. Selon une thèse d'histoire des mathématiques récente [9], la dérivation numérique d'ordre fractionnaire remonte à diverses correspondances entre Gottfried Leibniz, Guillaume de l'Hospital et Johann Bernoulli à la fin du 17ème siècle. Mais ces grands pionniers se heurtent à un paradoxe.

On pourrait penser que cette recherche de dérivation fractionnaire est une question de mathématiques "pures" sans intérêt pour l'ingénieur. Pourtant un exemple simple de mécanique des fluides montre comment l'intégrale d'ordre un-demi apparaît tout naturellement quand on veut expliciter un flux de chaleur sortant latéralement d'un écoulement fluide en fonction de l'évolution temporelle de la source interne. La dérivée d'ordre un-demi étant introduite, on doit être vigilant quant à sa définition précise dans les situations les plus générales. Il en est de même pour la définition de la dérivée d'ordre fractionnaire  $\alpha$ , où  $\alpha$  est typiquement un nombre réel entre zéro et un. Pendant longtemps plusieurs définitions, suite aux travaux de Joseph Liouville et Bernhard Riemann au milieu du 19ème siècle, ont coexisté sans qu'il y ait une parfaite compatibilité entre elles. Nous montrons dans ce mémoire qu'avec la théorie des distributions, toutes les ambiguïtés ont pu être levées.

Un intérêt particulier pour la dérivation fractionnaire est lié à la modélisation mécanique des gommes et des caoutchoucs, en bref toutes sortes de matériaux qui conservent la mémoire des déformations passées et dont le comportement est dit viscoélastique. En effet, la dérivation fractionnaire s'y introduit naturellement. Nous proposons au dernier paragraphe une courte introduction à ce sujet difficile. Bonne lecture !

## 2 Equation de la chaleur et intégration d'ordre un-demi

### 2.1 Motivation

Nous montrons dans ce premier paragraphe que la dérivée d'ordre un-demi s'introduit naturellement quand on cherche à calculer un flux de chaleur à l'aide de la loi de Fourier.

On se donne l'intervalle  $[0, +\infty[$  où vit la variable d'espace  $y$ . Noter que cette variable  $y$  est typiquement une direction orthogonale à une direction principale  $x$  d'un écoulement fluide. On suppose la variable de temps  $t$  positive. On se donne une constante  $\mu$  de diffusivité strictement positive et une fonction  $f(\bullet)$  qui pour cet exemple ne dépend que du temps. On cherche une

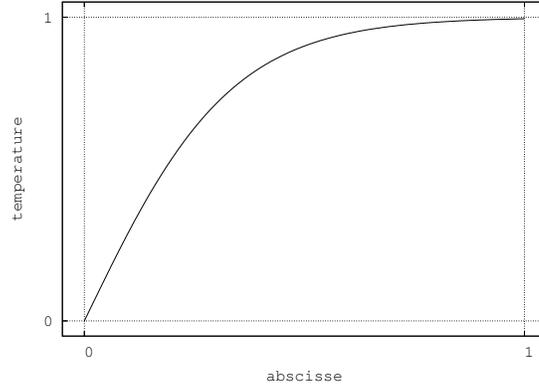
fonction  $u(y, t)$  solution de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(t), \quad t > 0, \quad y \geq 0. \quad (1)$$

La fonction inconnue  $u(y, t)$  satisfait à une contrainte de nullité en  $y = 0$  (la température est imposée) et son gradient  $\frac{\partial u}{\partial y}$  tend vers 0 si  $y$  tend vers  $+\infty$  (la température devient uniforme aux grandes distances) :

$$u(0, t) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(y, t) \longrightarrow 0 \quad \text{si } y \longrightarrow +\infty. \quad (3)$$



**FIG. 1: Profil typique de couche limite thermique.**

Un profil typique  $u(y, t)$  (à  $t$  fixé) est représenté à la Fig. 1. La température est fixée (arbitrairement !) à 0 pour une ordonnée  $y$  nulle. Elle a un gradient qui tend vers 0 si l'ordonnée  $y$  tend vers  $+\infty$ . Ce type de courbe est bien connu chez thermiciens comme *profil de couche limite* (voir [30] par exemple). Les ingénieurs sont directement intéressés par le flux de chaleur  $\Phi(t)$  à la paroi, donné par la loi de Fourier :

$$\Phi(t) = -\mu \frac{\partial u}{\partial y}(0, t), \quad t > 0 \quad (4)$$

et représenté graphiquement par la tangente en  $y = 0$  à la courbe de la Fig. 1.

## 2.2 Résolution analytique

On peut résoudre la problème précédent (1) (2) (3) à l'aide de la transformation de Fourier en temps. Nous introduisons la transformée de Fourier  $\widehat{u}(y, \omega)$  de la fonction  $u$  :

$$\widehat{u}(y, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(y, t) \exp(-i\omega t) dt$$

et on sait qu'alors la fonction  $u$  admet la représentation :

$$u(y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{u}(y, \omega) \exp(i\omega t) d\omega \quad (5)$$

grâce à la formule de réciprocity de Fourier. On peut ensuite dériver par rapport au temps :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} i\omega \widehat{u}(y, \omega) \exp(i\omega t) d\omega.$$

La transformée de Fourier de la dérivée en temps s'obtient en multipliant la transformée de Fourier par l'expression  $i\omega$ , ce qui constitue une proposition bien classique :

$$\widehat{\frac{\partial u}{\partial t}} = i\omega \widehat{u}. \quad (6)$$

Nous notons  $\widehat{f}$  la transformée de Fourier du second membre  $f$ . Alors l'équation (1) s'écrit simplement :

$$i\omega \widehat{u} - \mu \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial y^2} = \widehat{f}. \quad (7)$$

Pour  $z \equiv r \exp(i\theta)$  nombre complexe n'appartenant pas à l'intervalle  $] -\infty, 0]$ , on note  $\sqrt{z}$  la détermination principale de la racine carrée complexe, tel qu'illustré dans l'Annexe :

$$\sqrt{r \exp(i\theta)} \equiv \sqrt{r} \exp\left(i\frac{\theta}{2}\right), \quad r > 0, \quad -\pi < \theta < \pi.$$

On a donc en particulier :

$$\operatorname{Re}(\sqrt{z}) > 0, \quad z \notin ] -\infty, 0]. \quad (8)$$

On peut alors résoudre l'équation (7) :

$$\widehat{u}(y, \omega) = \frac{1}{i\omega} \widehat{f} + \alpha \exp\left(\sqrt{\frac{i\omega}{\mu}} y\right) + \beta \exp\left(-\sqrt{\frac{i\omega}{\mu}} y\right).$$

On tient compte de la condition limite (3) en  $+\infty$  qui impose de ne pas permettre l'existence d'une solution exponentiellement croissante en  $y$ ; donc on a nécessairement  $\alpha = 0$ . Puis on tient compte de la condition limite (2) en  $y = 0$ . On en déduit

$$\widehat{u}(y, \omega) = \frac{1}{i\omega} \widehat{f} \left[ 1 - \exp\left(-\sqrt{\frac{i\omega}{\mu}} y\right) \right]. \quad (9)$$

On peut alors dériver cette expression par rapport à  $y$  :

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial y}(y, \omega) = \frac{1}{\sqrt{i\mu\omega}} \widehat{f} \exp\left(-\sqrt{\frac{i\omega}{\mu}} y\right)$$

puis faire  $y = 0$  :

$$\widehat{\Phi}(\omega) = -\sqrt{\frac{\mu}{i\omega}} \widehat{f}. \quad (10)$$

Comme la transformée de Fourier de la fonction dérivée de  $f$  est obtenue en multipliant  $\widehat{f}$  par  $i\omega$  (voir (6)), la quantité  $\sqrt{\frac{1}{i\omega}} \widehat{f}(\omega)$  semble pouvoir s'interpréter comme la transformée de Fourier d'une intégrale d'ordre un-demi de la fonction  $f$ . De façon plus précise, si nous posons

$$\rho(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{t}} Y(t), \quad (11)$$

avec  $Y(t)$  fonction de Heaviside définie par

$$Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t > 0, \end{cases} \quad (12)$$

nous avons (voir l'Annexe au paragraphe 10)

$$\widehat{\rho} = \sqrt{\frac{\pi}{i\omega}}. \quad (13)$$

### 2.3 Intégrateur d'ordre un-demi

Nous pouvons reprendre la suite de la résolution analytique du problème (1)(2)(3) et préciser l'expression du flux de chaleur (10) sous la forme

$$\widehat{\Phi} = -\sqrt{\frac{\mu}{\pi}} \widehat{\rho} \widehat{f}. \quad (14)$$

Grâce à la convolution  $\rho * f$  des fonctions  $\rho$  et  $f$ , définie par

$$(\rho * f)(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \rho(y) f(x-y) dy,$$

et à la relation classique

$$\widehat{\rho * f} = \widehat{\rho} \widehat{f}, \quad (15)$$

on a finalement

$$\widehat{\Phi}(t) = -\sqrt{\frac{\mu}{\pi}} \rho * f = -\sqrt{\frac{\mu}{\pi}} \int_0^t f(\theta) \frac{d\theta}{\sqrt{t-\theta}}. \quad (16)$$

Nous venons de faire apparaître l'intégrateur d'ordre un demi de la fonction  $f$ .

#### Définition. Intégrateur d'ordre un-demi d'une fonction causale

Soit  $u(\bullet)$  une fonction **causale**, c'est à dire telle que

$$u(t) = 0 \quad \text{si } t < 0. \quad (17)$$

On appelle intégrateur d'ordre un-demi et on note  $(I^{1/2}u)(t)$  la fonction causale définie par

$$(I^{1/2}u)(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t u(\theta) \frac{d\theta}{\sqrt{t-\theta}} \quad \text{si } t > 0. \quad (18)$$

**Propriété. Pour les fonctions causales, le carré de l'intégrateur d'ordre un-demi est l'intégration usuelle.**

L'intégrale usuelle d'une fonction causale, notée  $(I^1u)(t)$ , est une fonction causale définie pour  $t > 0$  par :

$$(I^1u)(t) \equiv \int_0^t u(\theta) d\theta. \quad (19)$$

On a alors

$$\left[ I^{1/2}(I^{1/2}u) \right](t) = \int_0^t u(\theta) d\theta, \quad (20)$$

ce qui s'écrit aussi en termes d'opérateurs sous la forme

$$I^{1/2} \circ I^{1/2} = I^1, \quad (21)$$

où le symbole  $\circ$  désigne la composée de l'opérateur  $I^{1/2}$  par lui-même :

$$(I^{1/2} \circ I^{1/2})(t) \equiv I^{1/2}(I^{1/2}(t)), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

• La preuve de cette proposition est un simple calcul d'intégrale double dans le cas  $t > 0$ .

On a en effet :

$$\left[ I^{1/2}(I^{1/2}u) \right](t) = \frac{1}{\pi} \int_0^t \frac{d\theta}{\sqrt{t-\theta}} \int_0^\theta u(\varphi) \frac{d\varphi}{\sqrt{\theta-\varphi}}$$

et on calcule cette intégrale en utilisant le théoème de Fubini :

$$\left[ I^{1/2}(I^{1/2}u) \right](t) = \frac{1}{\pi} \int_0^t d\varphi u(\varphi) \int_\varphi^t \frac{d\theta}{\sqrt{t-\theta} \sqrt{\theta-\varphi}}.$$

Pour calculer l'intégrale en  $\theta$ , on effectue le changement de variable  $\theta = \varphi + x(t - \varphi)$  ( $0 < x < 1$ ). Alors  $\frac{d\theta}{\sqrt{t-\theta} \sqrt{\theta-\varphi}} = \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$  et

$$\int_\varphi^t \frac{d\theta}{\sqrt{t-\theta} \sqrt{\theta-\varphi}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

On paramètre le demi-cercle d'équation  $y = \sqrt{x(1-x)}$  par la pente  $\lambda$  d'une corde issue de l'origine :  $y = \lambda x$ . Alors  $\lambda = \frac{y}{x} = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$ , c'est à dire  $\lambda^2 = \frac{1}{x} - 1$ . Puis on a le calcul

suivant :

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} &= \int_{+\infty}^0 \frac{1}{y} \frac{dx}{d\lambda} d\lambda \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda x} (2\lambda x^2) d\lambda \\
 &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{1+\lambda^2} \\
 &= \pi.
 \end{aligned}$$

Nous retenons que

$$\int_{\varphi}^t \frac{d\theta}{\sqrt{t-\theta}\sqrt{\theta-\varphi}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \pi \quad (22)$$

et la relation (20) est maintenant complètement établie.

### 3 Définitions de la demi-dérivée

#### 3.1 Demi-dérivée de Riemann-Liouville

On a vu au cours du paragraphe précédent comment “intégrer une demi-fois” une fonction causale du temps. Si on dérive maintenant cette “demi-intégrale”, on obtient une “demi-dérivée”, ou une dérivée d’ordre un-demi. C’est ce qu’ont proposé, pour une fonction causale  $u(\bullet)$ , Riemann et Liouville à la fin du XIX<sup>ième</sup> siècle (voir par exemple le traité de Courant et Hilbert [6] [tome 2, page 523 de l’édition de 1989]) :

$$D_{\text{RL}}^{1/2} u(t) \equiv \frac{d}{dt} (I^{1/2} u)(t). \quad (23)$$

De façon précise,  $D_{\text{RL}}^{1/2} u(t)$  est une fonction causale telle que

$$D_{\text{RL}}^{1/2} u(t) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \frac{d}{dt} \left( \int_0^t u(\theta) \frac{d\theta}{\sqrt{t-\theta}} \right), \quad t > 0. \quad (24)$$

#### Décomposition de la dérivée de Riemann et Liouville.

Soit  $u(\bullet)$  une fonction causale dérivable sur  $]0, +\infty[$ . On a

$$D_{\text{RL}}^{1/2} u(t) = \frac{u(0^+)}{\sqrt{\pi t}} + \int_0^t \frac{du}{d\theta}(\theta) \frac{d\theta}{\sqrt{\pi(t-\theta)}}. \quad (25)$$

- La preuve de la relation (25) est élémentaire. On effectue le changement de variable  $\varphi = t - \theta$  au membre de droite de (24) avant de dériver en temps. On a donc

$$\int_0^t u(\theta) \frac{d\theta}{\sqrt{(t-\theta)}} = \int_0^t u(t-\varphi) \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi}}$$

et ensuite on dérive par rapport au temps l'expression obtenue :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \int_0^t u(t-\varphi) \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi}} \right) &= \frac{u(0^+)}{\sqrt{t}} + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} (u(t-\varphi)) \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi}} \\ &= \frac{u(0^+)}{\sqrt{t}} + \int_0^t \frac{du}{d\theta} (t-\varphi) \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi}} \\ &= \frac{u(0^+)}{\sqrt{t}} + \int_0^t \frac{du}{d\theta} (\theta) \frac{d\theta}{\sqrt{t-\theta}} \end{aligned}$$

ce qui établit le résultat.  $\square$

### 3.2 Paradoxe et demi-dérivée de Caputo

Si  $u(0^+) = 0$ , on peut remplacer  $D_{\text{RL}}^{1/2}u(t)$  par le produit de convolution de  $\frac{Y(t)}{\sqrt{\pi t}}$  avec  $Y(t)\frac{du}{dt}$  dès que  $u$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$ . De plus, si  $u(\bullet)$  est causale et constante sur  $]0, +\infty[$ , le produit de convolution  $\frac{Y(t)}{\sqrt{\pi t}} * Y(t)\frac{du}{dt}$  est identiquement nul, propriété qu'on est en droit d'attendre d'une demi-dérivée, ce qui n'est **pas** le cas pour la définition de Riemann et Liouville car on a alors  $D_{\text{RL}}^{1/2}u(t) = \frac{u(0^+)}{\sqrt{\pi t}}$ . On propose donc, avec Caputo [4] (définition reprise entre autres par Lighthill [19]), de définir la demi-dérivée  $D^{1/2}u(t)$  par la convolution  $\frac{Y(t)}{\sqrt{\pi t}} * Y(t)\frac{du}{dt}$ .

#### Définition de Caputo de la dérivation d'ordre un demi.

Soit  $u(\bullet)$  une fonction causale dérivable si  $t > 0$ . On pose

$$D_C^{1/2}u(t) = \int_0^t \frac{du}{d\theta}(\theta) \frac{d\theta}{\sqrt{\pi(t-\theta)}} \quad \text{pour } t > 0. \quad (26)$$

On a aussi la propriété suivante, qui fait le lien avec la transformation de Fourier.

#### Propriété. Transformation de Fourier de la demi-dérivée de Caputo.

Soit  $D_C^{1/2}u(t)$  la demi-dérivée définie en (26). On a alors

$$\widehat{D_C^{1/2}u}(\omega) = \sqrt{i\omega} \widehat{u}(\omega). \quad (27)$$

• La preuve de la relation (27) est une conséquence élémentaire de l'action de la transformée de Fourier sur un produit de convolution et de la proposition précédente. On a  $D_C^{1/2}u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \rho * \frac{du}{dt}$ . Donc

$$\widehat{D_C^{1/2}u} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \widehat{\rho}(i\omega) \widehat{u} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{i\omega}} (i\omega) \widehat{u} = \sqrt{i\omega} \widehat{u},$$

ce qui montre la propriété.  $\square$

### 3.3 Propriétés de la demi-dérivée

Il est ensuite facile de calculer la dérivée d'ordre un demi de quelques fonctions.

Nous ne considérerons que des fonctions  $u(\bullet)$  causales dérivables sur  $]0, +\infty[$  et telles que  $u(0^+) = 0$ , et pour alléger l'écriture nous noterons simplement  $D^{1/2}$  puisque dans ce cas  $D_C^{1/2} = D_{RL}^{1/2}$ .

**Propriété. Quelques dérivées d'ordre un-demi élémentaires.**

$$D^{1/2}(tY(t))(t) = 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}Y(t) \quad (28)$$

$$D^{1/2}(\sqrt{t}Y(t))(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}Y(t). \quad (29)$$

Il s'agit d'un calcul tout à fait élémentaire qui est laissé au lecteur à titre d'exercice.

**Propriété. La dérivation d'ordre un-demi est un inverse de l'intégration d'ordre un-demi.**

$$\left[ (I^{1/2} \circ D^{1/2})u \right](t) = u(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (30)$$

$$\left[ (D^{1/2} \circ I^{1/2})u \right](t) = u(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (31)$$

- On a en effet le calcul élémentaire suivant :

$$\begin{aligned} \left[ I^{1/2} (D^{1/2})u \right](t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{d\theta}{\sqrt{t-\theta}} \int_0^\theta \frac{du}{d\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\pi(\theta-\varphi)}} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^t d\varphi \frac{du}{d\varphi} \int_\varphi^t \frac{d\theta}{\sqrt{(t-\theta)(\theta-\varphi)}} \\ &= \int_0^t d\varphi \frac{du}{d\varphi} \quad \text{compte tenu de (22)} \\ &= u(t) \quad \text{car } u(\bullet) \text{ est causale et } u(0) = 0. \end{aligned}$$

Nous laissons au lecteur la preuve de la relation (31). □

**Propriété. La dérivée d'ordre un-demi est une racine carrée de la dérivée usuelle.**

$$\left[ (D^{1/2} \circ D^{1/2})u \right](t) = \frac{du}{dt}(t), \quad t \in \mathbb{R} \quad (32)$$

- On calcule le produit  $(I^{1/2} \circ I^{1/2} \circ D^{1/2} \circ D^{1/2})u(t)$  de deux façons. On a d'une part

$$\begin{aligned} (I^{1/2} \circ I^{1/2} \circ D^{1/2} \circ D^{1/2})u(t) &= \left[ I^{1/2} \circ (I^{1/2} \circ D^{1/2}) \circ D^{1/2} \right]u(t) \\ &= \left[ I^{1/2} \circ D^{1/2} \right]u(t) \\ &= u(t) \end{aligned}$$

compte tenu de (30). D'autre part,

$$\begin{aligned} (I^{1/2} \circ I^{1/2} \circ D^{1/2} \circ D^{1/2})u(t) &= (I^{1/2} \circ I^{1/2}) \left[ (D^{1/2} \circ D^{1/2}) \right] u(t) \\ &= \int_0^t (D^{1/2} \circ D^{1/2})u(\theta) d\theta \end{aligned}$$

compte tenu de (20). On dérive par rapport à  $t$  l'expression précédente. La relation (32) s'en déduit de manière élémentaire.  $\square$

## 4 Diverses approches de la dérivation fractionnaire

La question des dérivées fractionnaires est abordée dès 1695 par Leibniz dans une lettre à de l'Hospital, mais lorsque celui-ci lui demande quelle pourrait être la dérivée d'ordre un demi de la fonction  $x$ , Leibniz répond que cela mène à un paradoxe dont on tirera un jour d'utiles conséquences. Plus de 300 ans après, on commence seulement à venir à bout des difficultés. De nombreux mathématiciens se sont penchés sur cette question, en particulier Euler (1730), Fourier (1822), Abel (1823), Liouville (1832), Riemann (1847), etc... Différentes approches ont été utilisées pour généraliser la notion de dérivation aux ordres non-entiers.

- La limite du taux d'accroissement d'une fonction se généralise sous la forme de la formule de Grünwald-Letnikov, très utile numériquement,

- L'intégration, opération inverse de la dérivation, mène, via la formule intégrale de Liouville, aux formules de Riemann-Liouville et de Caputo,

- Enfin les transformations de Fourier et de Laplace associent la dérivation fractionnaire à une multiplication par  $(i\omega)^\alpha$  ou  $p^\alpha$  avec  $\alpha$  non entier.

Mais ces différentes définitions ne sont pas toujours équivalentes. Cette incohérence apparente a pu être dissipée dans le cadre nouveau proposé par la théorie des distributions de Laurent Schwartz [31].

### 4.1 Généralisation de la définition usuelle de la dérivation : formule de Grünwald-Letnikov

Une définition élémentaire de la dérivée en  $x$  d'une fonction peut être formalisée de la façon suivante. Pour  $f$  fonction de la variable réelle  $x$  et  $h$  appartenant à  $\mathbb{R}$ , on introduit l'opérateur  $\tau_h$  de translation à gauche :

$$(\tau_h f(x)) = f(x - h) \tag{33}$$

et l'opérateur de taux d'accroissement d'Euler rétrograde  $E_h$  selon

$$E_h \equiv \frac{1}{h} (I - \tau_h) . \tag{34}$$

On a la définition classique :

$$Df(x) = \frac{df}{dx}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(x) - f(x-h)) = \lim_{h \rightarrow 0} E_h f \quad (35)$$

et on en déduit la dérivée seconde

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (E_h)^2 f = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} (f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)) \quad (36)$$

et plus généralement en élevant à la puissance  $n$  l'opérateur  $E_h$  et en utilisant la formule de Newton

$$\begin{aligned} D^n f(x) &= \frac{d^n f}{dx^n}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (E_h)^n f \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^k n(n-1)\dots(n-k+1)}{(k)!} f(x-kh). \end{aligned} \quad (37)$$

Or la fonction Gamma définie pour  $z$  réel strictement positif par l'intégrale généralisée

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{z-1} du \quad (38)$$

est telle que  $\Gamma(n+1) = n!$  pour  $n$  entier naturel. C'est une fonction analytique de  $z$  qui peut être prolongée de façon unique au plan complexe  $\mathbb{C}$  privé de zéro et des entiers négatifs. Sachant que  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ , on démontre que

$$\forall z \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}, \forall m \in \mathbb{N}, \quad \Gamma(z+m) = z(z+1)\dots(z+m-1)\Gamma(z) \quad (39)$$

En remarquant tout d'abord que la somme dans (37) peut être étendue à tous les  $k$  entiers non négatifs puisque les termes sont nuls pour  $k \geq n$ , une généralisation naturelle consiste à définir la dérivée d'ordre  $\alpha$ , pour  $\alpha > 0$  par

$$D_{GL}^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} f(x-kh).$$

Mais comme

$$(-1)^k \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1) = (-\alpha)(-\alpha+1)\dots(-\alpha+k-1)$$

et que pour  $\alpha > 0$  non entier  $\Gamma(-\alpha)$  est bien défini et que grâce à (39)

$$\frac{\Gamma(-\alpha+k)}{\Gamma(-\alpha)} = (-\alpha)(-\alpha+1)\dots(-\alpha+k-1)$$

on obtient la formule de **Grünwald-Letnikov** pour  $\alpha > 0$  non entier :

$$D_{GL}^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-\alpha+k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-\alpha)} f(x-kh). \quad (40)$$

Il est à noter que dans la relation (40), les nombres  $\Gamma(-\alpha + k)$  ne sont pas nuls. La dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha$  pour  $0 < \alpha < 1$  dépend de tout le passé, contrairement à la dérivée usuelle (d'ordre  $\alpha = 1$ ) qui ne dépend que de ce qui se passe au voisinage immédiat du point de calcul. La relation (40), due à Liouville (1832), puis Grünwald (1863) et Letnikov (1868), est très utilisée pour calculer numériquement une dérivée fractionnaire connaissant  $f$  avant la valeur  $x$ . Nous verrons plus loin que cette formule, basée sur l'opérateur d'Euler, peut être remplacée par des formules numériquement plus performantes.

## 4.2 Formule intégrale de Liouville

Pour les fonctions causales nulles en 0, l'inverse de l'opérateur de dérivation  $D = \frac{d}{dx}$  est l'opérateur d'intégration  $I$  :

$$Df(x) = \frac{df}{dx}(x) = g(x) \text{ avec } f(0) = 0 \Leftrightarrow f(x) = Ig(x) = \int_0^x g(y) dy \quad (41)$$

De même, toujours pour des fonctions causales avec des conditions initiales nulles, l'inverse de la dérivation  $n^{\text{ième}}$  est définie par le  $n^{\text{ième}}$  itéré de l'opérateur  $I$  précédent. Ainsi la fonction  $f_2$  telle que  $f_2(0) = f_2'(0) = 0$  avec  $f_2'' = g$  est définie par

$$f_2(x) = I^2g(x) = \int_0^x \left( \int_0^z g(y) dy \right) dz. \quad (42)$$

En permutant l'ordre d'intégration, on obtient :

$$I^2g(x) = \int_0^x g(y) \left( \int_y^x dz \right) dy = \int_0^x (x-y) g(y) dy$$

Plus généralement on montre que le  $n^{\text{ième}}$  itéré de l'opérateur  $I$  peut s'écrire à l'aide de la formule intégrale de Liouville

$$I^n g(x) = \int_0^x \frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!} g(y) dy. \quad (43)$$

Ainsi la fonction  $f_n$  telle que  $f_n(0) = f_n'(0) = \dots = f_n^{(n-1)}(0) = 0$  avec  $f_n^{(n)} = g$  est définie par

$$f_n(x) = I^n g(x) \quad (44)$$

Cette formule peut être interprétée comme le produit de convolution de la fonction causale  $g$  avec la fonction causale  $Y_n(x) = \frac{x^{n-1}}{n!}$ . Pour  $n = 1$ ,  $Y_1$  n'est autre que la fonction échelon ou de Heaviside notée aussi  $Y$ . En utilisant la fonction Gamma on a

$$Y_n(x) = \frac{x^{n-1}}{\Gamma(n)} \text{ pour } x > 0 \quad (45)$$

et

$$I^n g = Y_n * g$$

Comme la fonction Gamma peut être prolongée à l'ensemble du plan complexe privé des nombres entiers négatifs, on peut définir une fonction causale  $Y_\alpha$  par

$$Y_\alpha(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \quad \text{pour } x > 0 \quad \text{et } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}. \quad (46)$$

Il est alors naturel de définir une intégrale d'ordre  $\alpha$  de  $g$ .

**Définition. Intégrale d'ordre  $\alpha > 0$  d'une fonction causale.**

Soit  $g(\bullet)$  une fonction causale et  $\alpha > 0$  un réel strictement positif. On appelle intégrale d'ordre  $\alpha$  et on note  $I^\alpha g$  la fonction définie par

$$I^\alpha g = Y_\alpha * g. \quad (47)$$

- En utilisant les propriétés des fonctions spéciales, on peut déduire que :

$$I^\alpha(I^\beta g) = I^{\alpha+\beta} g \quad \text{car } Y_\alpha * Y_\beta = Y_{\alpha+\beta} \quad (48)$$

En effet on peut montrer à l'aide du calcul d'une intégrale double *via* le théorème de Fubini qu'on a (voir aussi par exemple le livre de Oldham et Spanier [26]) :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = B(\alpha, \beta)\Gamma(\alpha + \beta), \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

où la fonction Beta  $B(\bullet, \bullet)$  est définie par :

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt, \quad \alpha > 0, \beta > 0. \quad (49)$$

Ce qui permet de déduire (48).

### 4.3 Dérivations d'ordre $\alpha$

On aimerait pouvoir dire que les dérivées d'ordre  $\alpha$  sont obtenues par une convolution avec  $Y_{-\alpha}$ . Mais au voisinage  $x = 0$ , la fonction  $Y_{-\alpha} = \frac{x^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}$  n'est pas intégrable quand  $\alpha \geq 0$ .

- Cas  $0 < \alpha < 1$

Pour  $0 < \alpha < 1$ , on peut s'inspirer de ce qui a été fait pour la dérivée d'ordre 1/2 en définissant la **dérivée de Riemann-Liouville** d'ordre  $\alpha$  par une intégration d'ordre  $1 - \alpha$  suivie d'une dérivation :

$$\begin{aligned} D_{RL}^\alpha g(x) &= D^1 I^{1-\alpha} g(x) = D^1 (Y_{1-\alpha} * g)(x) \\ D_{RL}^\alpha g(x) &= \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{(x-y)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} g(y) dy \quad \text{pour } 0 < \alpha < 1. \end{aligned} \quad (50)$$

La **dérivée d'ordre  $\alpha$  au sens de Caputo** est obtenue en dérivant d'abord  $g$  sur  $]0, +\infty[$  puis en intégrant à l'ordre  $1 - \alpha$  :

$$\begin{aligned} D_C^\alpha g(x) &= (Y_{1-\alpha} * D^1 g)(x) \\ D_C^\alpha g(x) &= \int_0^x \frac{(x-y)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{dg}{dx}(y) dy \quad \text{pour } 0 < \alpha < 1. \end{aligned} \quad (51)$$

Encore une fois, il faut noter que pour  $\alpha$  non entier, la dérivée d'ordre  $\alpha$  au point  $x$  dépend du comportement de la fonction sur tout l'intervalle  $[0, x]$ . On parle pour cette raison d'*effet mémoire*. En utilisant la commutativité du produit de convolution et en dérivant sous le signe intégral on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{(x-y)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} g(y) dy &= \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{y^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} g(x-y) dy \\ &= \int_0^x \frac{y^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{dg}{dx}(x-y) dy + \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} g(0^+) \end{aligned}$$

Les définitions de Riemann-Liouville et de Caputo sont équivalentes pour des fonctions  $g$  telles que  $g(0^+) = 0$ . Sinon on a :

$$D^1 I^{1-\alpha} g = I^{1-\alpha} D^1 g + g(0^+) Y_{1-\alpha}$$

et on trouve une relation qui généralise la relation (25) établie en dans le cas des demi-dérivées :

$$D_{RL}^\alpha g = D_C^\alpha g + g(0^+) Y_{1-\alpha}. \quad (52)$$

Si  $g$  est une fonction causale constante, la dérivée d'ordre  $\alpha$  au sens de Caputo est nulle mais ce n'est pas le cas de celle au sens de Riemann-Liouville si  $g(0^+) \neq 0$  car celle-ci fait intervenir une fonction  $Y_{1-\alpha}$  qui tend vers l'infini en  $x = 0$ . Par contre pour  $g$  à dérivée continue au voisinage de 0, la dérivée au sens de Caputo d'ordre strictement inférieur à 1 est continue en 0 et tend vers 0 en  $x = 0$ . Elle se prête donc mieux au calcul numérique.

- Cas  $0 < n - 1 < \alpha < n$ ,  $n$  entier  $\geq 2$

Plus généralement pour dériver à l'ordre  $\alpha$  pour  $\alpha$  tel que  $0 < n - 1 < \alpha < n$ , on peut contourner la difficulté liée au comportement de  $Y_{-\alpha}$  en 0, en intégrant à l'ordre  $n - \alpha$  et en dérivant à l'ordre  $n$ . Selon l'ordre utilisé on obtient la dérivée au sens de Riemann-Liouville ou au sens de Caputo.

**Définition. Dérivée d'ordre  $\alpha$  avec  $0 < n - 1 < \alpha < n$  au sens de Riemann-Liouville**

$$D_{RL}^\alpha g(x) = D^n I^{n-\alpha} g(x) = \frac{d^n}{dx^n} (Y_{n-\alpha} * g)(x) \quad (53)$$

$$= \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x \frac{(x-y)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} g(y) dy \quad (54)$$

**Définition. Dérivée d'ordre  $\alpha$  avec  $0 < n - 1 < \alpha < n$  au sens de Caputo**

$$D_C^\alpha g(x) = I^{n-\alpha} D^n g(x) = \left( Y_{n-\alpha} * \frac{d^n g}{dx^n} \right) (x) \quad (55)$$

$$= \int_0^x \frac{(x-y)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n g}{dx^n}(y) dy \quad (56)$$

Si  $g$  est une fonction causale sur  $\mathbb{R}^+$  la dérivée d'ordre  $\alpha$  avec  $0 < \alpha < 1$  au sens de Caputo est nulle mais ce n'est pas le cas pour celle au sens de Riemann-Liouville si  $g(0^+) \neq 0$ . Plus généralement, on obtient la relation suivante entre les deux définitions pour  $\alpha$  non entier :

$$D_{RL}^\alpha g = D_C^\alpha g + \sum_{k=0}^{k=n-1} g^{(k)}(0^+) Y_{k+1-\alpha} \quad \text{pour} \quad 0 \leq n-1 < \alpha < n. \quad (57)$$

en supposant bien sur que  $g$  soit continument dérivable jusqu'à l'ordre  $n-1$  sur  $]0, +\infty[$ .

#### 4.4 Approche spectrale de la dérivation

Une autre façon d'aborder la notion de dérivation est de passer par la transformation de Fourier et d'utiliser la relation :

$$\widehat{\frac{df}{dx}}(\omega) = i\omega \widehat{f}(\omega) \quad \text{avec} \quad \widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \quad (58)$$

L'opération dérivation correspond à une multiplication par  $i\omega$  et la dérivation à l'ordre  $n$  à une multiplication par  $(i\omega)^n$ . Il est alors tout naturel de vouloir définir la dérivation d'ordre  $\alpha$  par une multiplication par  $(i\omega)^\alpha$  dans l'espace de Fourier. Or on peut montrer pour  $0 < \alpha < 1$  par un calcul d'intégration dans le plan complexe analogue à celui mené à l'Annexe (paragraphe 10) pour  $\alpha = 1/2$  que :

$$\widehat{Y_{1-\alpha}}(\omega) = \frac{1}{(i\omega)^{1-\alpha}} \quad \text{avec} \quad Y_{1-\alpha}(t) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} Y(t) \quad (59)$$

Comme  $D_C^\alpha g = Y_{1-\alpha} * D^1$  on vérifie que

$$\widehat{D_C^\alpha g}(\omega) = \frac{i\omega}{(i\omega)^{1-\alpha}} \widehat{g}(\omega) = (i\omega)^\alpha \widehat{g}(\omega). \quad (60)$$

Dans le cadre des fonctions, la transformée de Fourier est utilisable pour les fonctions sommables ou de carré sommables sur  $\mathbb{R}$ . Pour des fonctions causales on peut utiliser aussi la transformation de Laplace et la dérivation d'ordre  $\alpha$  correspond alors à une multiplication par  $p^\alpha$ .

## 4.5 Exemple et variante

L'effet de la formule de Caputo (55) sur la fonction causale  $f(x) = x^m Y(x)$  est explicité dans les ouvrages de référence de Oldham et Spanier [26] et de Podlubny [28]. On obtient :

$$D_C^\alpha(x^m Y(x)) = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-\alpha)} x^{m-\alpha} Y(x) \quad (61)$$

Pour  $0 < m < \alpha$  le résultat identique à celui obtenu avec la formule de Riemann-Liouville.

En raison de son rôle de fonction propre pour l'opérateur de dérivation, il est intéressant de calculer la dérivée d'ordre  $\alpha$  de la fonction exponentielle  $f(x) = e^{\lambda x}$ .

En utilisant le résultat ci-dessus et la décomposition en série entière de  $e^{\lambda x}$  on obtient :

$$D_C^\alpha(e^{\lambda x}) = \frac{1}{x^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{\Gamma(k+1-\alpha)} \quad (62)$$

On peut être surpris de ne pas trouver comme résultat  $\lambda^\alpha e^{\lambda x}$  dans la relation (62) mais en fait dans la formule (51) on a considéré seulement les fonctions causales et l'intégrale porte de ce fait sur  $\mathbb{R}_+$ .

Pour les fonctions dont le support n'est pas réduit à  $\mathbb{R}_+$ , il est intéressant de modifier la définition de Caputo selon ce support, en modifiant la borne inférieure dans la définition de l'opérateur de convolution (51). Pour  $a$  nombre réel ou égal à  $-\infty$ , on définit la dérivation de Caputo d'ordre  $\alpha$  avec borne inférieure en  $a$  par :

$${}_a D_C^\alpha g(x) \equiv \int_a^x \frac{(x-y)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{dg}{dx}(y) dy, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (63)$$

Si on applique cette définition avec  $a = -\infty$  à  $g(x) = e^{\lambda x}$  pour  $\lambda > 0$ , on peut montrer que l'on obtient bien alors le résultat attendu (c.f. [26] p.94) :

$${}_{-\infty} D_C^\alpha(e^{\lambda x}) = \lambda^\alpha e^{\lambda x}$$

Après avoir étendu cette formule à  $\lambda$  complexe et en utilisant la détermination principale de la puissance d'ordre  $\alpha$  d'un nombre complexe  $z = r \exp(i\theta)$  définie pour  $r > 0$  et  $-\pi < \theta < \pi$  par  $z^\alpha = r^\alpha \exp(i\alpha\theta)$  on peut démontrer que :

$${}_{-\infty} D_C^\alpha(\sin(x)) = \sin(x + \alpha \frac{\pi}{2})$$

## 4.6 Concept unifié

En pratique la dérivation fractionnaire est le plus souvent utilisée pour des fonctions causales. On a vu que que la convolution avec la fonction  $Y_\alpha(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} Y(x)$  pour  $\alpha > 0$  correspond à

une intégration d'ordre  $\alpha$ . On aimerait pouvoir écrire tout simplement que la dérivation d'ordre  $\alpha$  avec  $\alpha$  positif n'est autre que :

$$D^\alpha g = Y_{-\alpha} * g.$$

Mais la fonction  $Y_{-\alpha}(x) = \frac{x^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}Y(x)$  n'est pas définie pour les  $\alpha$  entiers positifs à cause de la fonction Gamma et pour les  $\alpha$  non entiers positifs cette fonction n'est pas sommable au voisinage de 0. Donc le produit de convolution n'est pas défini au sens des fonctions. Cependant, dans le cadre plus général des distributions (souvent désignées en anglais par "generalized functions"),  $Y_{-\alpha}$  désigne une distribution singulière, et dans ce cadre on peut définir la dérivation à l'ordre  $\alpha$  par une convolution au sens des distributions par  $Y_{-\alpha}$ . Pour  $\alpha$  tendant vers  $n$ , entier positif, on montre que la distribution  $Y_{-\alpha}(x)$  tend vers  $Y_{-n} = \delta^{(n)}$  où  $\delta^{(n)}$  est la dérivée  $n^{\text{ième}}$  de la distribution de Dirac en 0. Et comme  $\delta^{(n)} * g = g^{(n)}$ , pour  $Y_{-n} * g$  on retrouve la dérivation à l'ordre entier  $n$ .

Si  $\alpha$  tend vers un entier  $n$  positif dans la formule (57) explicitant la relation entre Riemann-Liouville et Caputo

$$D_{RL}^\alpha g = D_C^\alpha g + \sum_{k=0}^{k=n-1} g^{(k)}(0^+) Y_{k+1-\alpha} \quad \text{pour} \quad 0 \leq n-1 < \alpha \leq n.$$

on voit que le premier terme du second membre tend vers  $\frac{d^n g}{dx^n}$ , dérivée  $n^{\text{ième}}$  de  $g$  au sens des fonctions sur  $]0, +\infty[$  et les autres termes vers  $g^{(k)}(0^+) \delta^{(n-k-1)}$ . On retrouve la formule de dérivation au sens des distributions d'une fonction causale,  $n$  fois dérivable sur  $]0, \infty[$  :

$$D^n g = \frac{d^n g}{dx^n} + \sum_{k=0}^{k=n-1} g^{(k)}(0^+) \delta^{(n-k)}.$$

Ce développement signifie que pour les fonctions causales régulières sur  $]0, +\infty[$ , la dérivation de Riemann-Liouville est une généralisation de la dérivation au sens des distributions tandis que la dérivation de Caputo est plutôt une généralisation de la dérivation ordinaire (cf. [28], [23]).

Bien entendu selon le problème, il peut être utile comme on l'a vu au paragraphe précédent de travailler avec des fonctions à support dans  $\mathbb{R}$ , dans ce cas la fonction  $g$  n'est plus supposée causale et dans les produits de convolution il faut tenir compte de ce changement et intégrer à partir la borne de  $-\infty$  dans les intégrales.

## 5 Exponentielle de Mittag-Leffler

### 5.1 Définition

Pour  $\theta \in \mathbb{C}$  et  $0 < \alpha < 1$ , on appelle exponentielle de Mittag-Leffler (ou fonction de Mittag-Leffler à un paramètre) et on note  $E_\alpha(\bullet)$  la fonction suivante

$$E_\alpha(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k}{\Gamma(1 + \alpha k)}. \quad (64)$$

On remarque bien sûr que  $E_1$  est l'exponentielle usuelle :

$$E_1(\theta) \equiv \exp(\theta). \quad (65)$$

Nous allons surtout vérifier que cette fonction permet d'exprimer facilement "la" solution de l'équation " $\alpha$ -différentielle" suivante :

$$D^\alpha u + \lambda^\alpha u = 0, \quad t > 0 \quad (66)$$

avec la condition initiale

$$u(0) = 1. \quad (67)$$

Dans le paragraphe qui suit, nous supposons admis que le modèle (66) (67) a une unique solution (voir par exemple [14] pour une étude mathématique complète)  $u(\bullet)$  telle que  $u(t) \equiv 1$  pour  $t \leq 0$ , ce qui signifie que la fonction  $u - 1$  est causale. Nous dérivons sans ambage à l'ordre  $\alpha$  sous le signe de sommation des séries. Ce qui compte ici, c'est l'idée du calcul !

### 5.2 Equation $\alpha$ -différentielle fondamentale

La fonction  $u(t)$  définie pour  $t > 0$  par

$$u(t) = E_\alpha(-(\lambda t)^\alpha) \quad (68)$$

est une solution de l'équation  $\alpha$ -différentielle (66) avec la condition initiale (67). Cette fonction est pour  $\alpha > 0$  lentement décroissante.

- Nous avons vu à la relation (61) le calcul de la dérivée d'ordre  $\alpha$  d'une fonction puissance. On en déduit le calcul de la dérivée d'ordre  $\alpha$  d'un terme courant de la série du membre de droite de (68) :

$$\begin{aligned} D^\alpha \left( \frac{1}{\Gamma(1+\alpha k)} (-\lambda t)^\alpha{}^k Y(t) \right) &= \frac{(-1)^k \lambda^{\alpha k}}{\Gamma(1 + \alpha k)} D^\alpha (t^{\alpha k} Y(t)) \\ &= \frac{(-1)^k \lambda^{\alpha k}}{\Gamma(1 + \alpha k)} \frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{\Gamma(\alpha k + 1 - \alpha)} t^{\alpha k - \alpha} Y(t) \\ &= -\lambda^\alpha \frac{(-1)^{k-1} \lambda^{\alpha(k-1)}}{\Gamma(1 + \alpha(k-1))} t^{\alpha(k-1)} Y(t) \end{aligned}$$

et on retrouve, à un décalage d'indice près et à un facteur multiplicatif près, le terme général de la série (64) qui permet de calculer  $E_\alpha(-(\lambda t)^\alpha)$ . On somme donc pour  $k$  allant de 1 à l'infini la relation précédente ; on trouve

$$D^\alpha \left( E_\alpha(-(\lambda t)^\alpha) - 1 \right) + \lambda^\alpha E_\alpha(-(\lambda t)^\alpha) = 0,$$

ce qui donne le résultat escompté car  $D^\alpha(1) = 0$  et  $E_\alpha(0) = 1$ .  $\square$

## 6 Application à la viscoélasticité linéaire

### 6.1 Introduction à la viscoélasticité linéaire

Pour un système mécanique comme une masse liée à un ressort, la force appliquée (la contrainte dans le cadre d'une description *via* un milieu continu) est proportionnelle au déplacement. De plus, la dissipation visqueuse classique est proportionnelle à la dérivée temporelle du déplacement.

L'hypothèse de base faite pour les matériaux viscoélastiques linéaires est que la contrainte à l'instant actuel est une fonction linéaire de toute l'histoire des déformations. Deux essais statiques sont les plus souvent employés pour définir, pour des temps longs, les coefficients des lois de comportement : l'essai de fluage et l'essai de relaxation. L'essai de fluage consiste à imposer de façon instantanée une contrainte constante à une éprouvette et à suivre ses déformations en fonction du temps. Dans l'essai de relaxation, on impose une déformation instantanée, on la maintient constante et l'on mesure les variations de la contrainte en fonction du temps.

Basée sur le principe de superposition de Boltzmann, la loi de comportement d'un matériau viscoélastique linéaire quelconque peut s'écrire sous forme intégrale par

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t \mathcal{G}(t-s) \frac{d\varepsilon}{ds}(s) ds,$$

où  $\sigma$  représente la contrainte,  $\varepsilon$  la déformation,  $\mathcal{G}$  la fonction de relaxation et  $s$  la variable d'intégration temporelle. Si le matériau est initialement au repos ( $\varepsilon(t) = 0$  pour  $t < 0$ ), l'équation précédente s'écrit

$$\sigma(t) = \mathcal{G}(t) \varepsilon(0) + \int_0^t \mathcal{G}(t-s) \frac{d\varepsilon}{ds}(s) ds.$$

Dans sa forme classique, la loi de comportement sous forme d'équation différentielle contient des dérivées temporelles d'ordre entier

$$\sigma + b \frac{d\sigma}{dt} = a_o \varepsilon + a \frac{d\varepsilon}{dt}$$

où les quantités  $a$ ,  $a_o$  et  $b$  sont des paramètres matériaux. Le modèle de Maxwell (voir par exemple [5]) entre typiquement dans ce cadre.

## 6.2 Modèles classiques

Nous pouvons citer l'approche par module complexe, la méthode des énergies modales et les modèles à variables internes. Quelqu'uns de ces modèles sont exposés ci-après. Il est commode, pour étudier un matériau viscoélastique linéaire, de lui imposer une déformation (ou une contrainte) sinusoïdale à une certaine fréquence et amplitude. La contrainte et la déformation peuvent être exprimées sous forme complexe par

$$\sigma^*(\omega) = G^*(\omega) \varepsilon^*(\omega)$$

où  $G^*(\omega)$  est le module complexe défini à l'aide de sa partie réelle  $G'(\omega)$  et de sa partie imaginaire  $G''(\omega)$  par

$$G^*(\omega) = G'(\omega) + i G''(\omega).$$

Ainsi, le module qui lie la contrainte et la déformation peut être exprimé en termes des parties réelle et imaginaire. Ce module est classiquement dénommé *module complexe*.

La *méthode des énergies modales (Modal Strain Energy ou MSE)* a été présentée par Rogers et al (voir [15]). Pour un mode propre donné, le rapport entre les facteurs de perte de la structure et du matériau viscoélastique est égal au rapport entre les énergies de déformation élastique du matériau viscoélastique et de la structure lorsqu'elle se déforme dans le mode considéré.

Cette méthode permet d'estimer l'amortissement à moindre coût à partir du calcul des modes propres réels. Cependant, elle ne se montre efficace que pour des structures faiblement amorties.

La troisième classe de loi de comportement est celle des modèles à variables internes. Les variables internes sont utilisées afin que les équations dans le domaine fréquentiel puissent être transformées dans le domaine temporel. Citons, par exemple, les modèles GHM, ADF et les séries de Prony.

La *méthode GHM (Golla-Hughes-McTavish)* [24] permet une écriture matricielle classique dans un cadre éléments finis des équations de mouvement. Les propriétés viscoélastiques sont introduites dans les matrices de masse et de rigidité. Des coordonnées supplémentaires (coordonnées de dissipation), associées à chaque élément fini, permettent une description de la dépendance en fréquence du comportement des matériaux viscoélastiques. Cette méthode permet de caractériser les propriétés viscoélastiques à partir d'une série de mini-oscillateurs.

La *méthode Anelastic Displacement Fields (ADF)* a été largement utilisée pour modéliser le comportement des matériaux viscoélastiques. Un de ses principaux avantages réside dans sa capacité à prendre en compte des états tridimensionnels de contraintes. Le modèle ADF permet d'écrire le module complexe du matériau viscoélastique par une série de  $n$  termes [18].

On peut aussi construire un modèle de comportement en connectant plusieurs éléments de Maxwell en parallèle à un ressort (modèle de Maxwell généralisé). Cette somme d'exponentielles est connue sous le nom de *série de Prony* [32].

### 6.3 Modèle viscoélastique à dérivées fractionnaires

En général, les modèles rhéologiques utilisés en viscoélasticité linéaire sont constitués de ressorts et d'amortisseurs. Les lois de comportement de ces éléments rhéologiques peuvent être généralisées à partir de l'utilisation des dérivées fractionnaires.

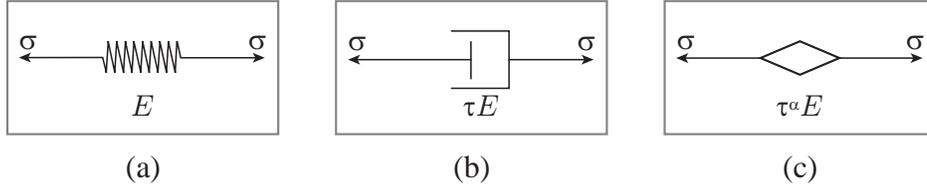


FIG. 2: Éléments rhéologiques de la viscoélasticité.

La loi de comportement associée à la réponse d'un élément élastique est décrite simplement par  $\sigma = \tau^0 E \mathcal{D}^0 \varepsilon = E \varepsilon$ , où  $\tau$  est le temps de relaxation,  $E$  le module élastique et  $\mathcal{D}^0$  l'opérateur différentiel temporel d'ordre zéro. Cela caractérise le comportement d'un ressort (voir Fig. 2 (a)). La loi de comportement associée à la réponse d'un élément visqueux est donnée par  $\sigma = \tau^1 E \mathcal{D}^1 \varepsilon = \tau E \dot{\varepsilon}$ , où  $\tau E$  correspond à la viscosité du matériau et  $\mathcal{D}^1$  à l'opérateur différentiel temporel d'ordre un. Cela caractérise le comportement d'un amortisseur (voir Fig. 2 (b)). Afin de généraliser les deux cas précédents, la loi de comportement linéaire peut s'écrire sous la forme

$$\sigma = \tau^\alpha E \mathcal{D}^\alpha \varepsilon \quad (69)$$

où  $\mathcal{D}^\alpha$  est l'opérateur différentiel temporel d'ordre fractionnaire, avec  $0 \leq \alpha \leq 1$ . L'élément rhéologique associé à l'équation (69) présente des caractéristiques intermédiaires entre celles du ressort (*spring*) et de l'amortisseur (*dashpot*), d'où la désignation de *spring-pot* (voir Fig. 2 (c)). Autrement dit, lorsque  $\alpha = 0$ , le comportement ne dépend que des caractéristiques des paramètres au temps présent tandis que pour  $\alpha = 1$ , il dépend des instants infiniment voisins. Pour  $\alpha$  strictement compris entre 0 et 1, on a vu que la dérivée fractionnaire  $\mathcal{D}^\alpha \varepsilon$  d'ordre  $\alpha$  dépend de toute l'évolution de la fonction  $\varepsilon(t)$  dans le passé et on dit que dans ce cas, il y a un effet de mémoire de paramètre  $\alpha$ .

### 6.4 Le rôle des dérivées fractionnaires en viscoélasticité linéaire

Nous avons vu au début du chapitre une liste non exhaustive de modèles de comportement pour l'amortissement viscoélastique en dynamique de structures. Dans ce travail, nous avons choisi de travailler avec le modèle fractionnaire de Zener. Ce choix est dû aux nombreux avantages que présentent les modèles à dérivées fractionnaires. Par exemple, l'écriture mathématique du modèle à base de dérivées fractionnaires est établie sur les théories moléculaires qui décrivent le comportement mécanique d'un milieu viscoélastique [29]. De plus, le modèle vérifie le

deuxième principe de la thermodynamique et est capable de prédire des courbes elliptiques d'hystérésis de type contrainte-déformation pour les matériaux viscoélastiques [1]. Le principal atout des modèles viscoélastiques fractionnaires est certainement le nombre réduit de paramètres matériaux nécessaires à sa caractérisation, notamment pour le lissage des courbes maîtresses. De nombreux matériaux viscoélastiques ont ainsi été caractérisés avec très peu de paramètres sur une plage de fréquence d'une dizaine de décades. Ces propriétés caractéristiques font de l'approche par calcul fractionnaire un outil très attractif parmi les méthodes existantes.

## 6.5 Modèle fractionnaire de Zener

En remplaçant les amortisseurs des modèles rhéologiques classiques par des *spring-pots*, on aboutit à un modèle rhéologique d'ordre fractionnaire. Dans le cas du solide standard ou modèle de Zener, nous arrivons au modèle fractionnaire de Zener à quatre paramètres (voir Fig. 3)

$$\sigma(t) + \tau^\alpha \mathcal{D}^\alpha \sigma(t) = E_o \varepsilon(t) + \tau^\alpha E_\infty \mathcal{D}^\alpha \varepsilon(t) \quad (70)$$

où  $E_o$  et  $E_\infty$  sont les modules élastiques relaxé et non relaxé,  $\alpha$  l'ordre de la dérivée fractionnaire ( $0 < \alpha < 1$ ) et  $\tau$  le temps de relaxation. Conformément à la figure 3, on peut réécrire la

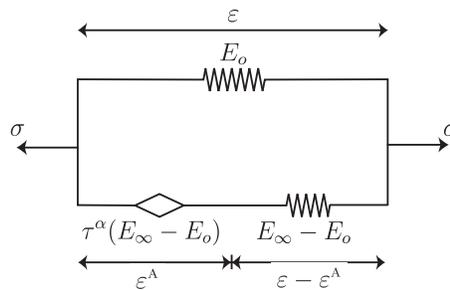


FIG. 3: Modèle fractionnaire de Zener.

loi de comportement (70) sous la forme suivante

$$\sigma = E_o \varepsilon + (E_\infty - E_o)(\varepsilon - \varepsilon^A)$$

où  $\varepsilon^A$  est une déformation anélastique dont la loi d'évolution temporelle est donnée par

$$\varepsilon^A + \tau^\alpha \mathcal{D}^\alpha \varepsilon^A = \varepsilon.$$

## 7 Phénoménologie des modèles et identification

### 7.1 Propriétés dans le domaine fréquentiel

La transformée de Fourier de l'équation (70) fournit la relation contrainte-déformation dans le domaine fréquentiel entre les modules complexes :

$$\sigma^*(\omega) = E^*(\omega) \varepsilon^*(\omega)$$

où  $\sigma^*(\omega)$  et  $\varepsilon^*(\omega)$  sont respectivement les transformées de Fourier de  $\sigma(t)$  et  $\varepsilon(t)$ . Compte tenu de la relation (60) pour une dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha$  au sens de Caputo, on a la relation suivante pour le module complexe d'élasticité  $E^*(\omega)$  :

$$E^*(\omega) = \frac{E_o + E_\infty (i\omega\tau)^\alpha}{1 + (i\omega\tau)^\alpha}. \quad (71)$$

Ce module est composé d'une partie réelle et d'une partie imaginaire

$$E^*(\omega) = E'(\omega) + iE''(\omega) = E'(\omega)[1 + i\eta(\omega)]$$

où  $E'(\omega)$  correspond à la rigidité élastique, tandis que  $E''(\omega)$  représente la dissipation du matériau. Le rapport entre ces modules définit le facteur de perte

$$\eta(\omega) = \frac{E''(\omega)}{E'(\omega)}$$

qui caractérise l'amortissement du matériau. À partir de l'équation (71), on peut extraire la partie réelle et la partie imaginaire du module complexe. On a alors le module élastique (partie réelle)

$$E'(\omega) = \frac{E_o + (E_\infty + E_o)(\omega\tau)^\alpha \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) + E_\infty(\omega\tau)^{2\alpha}}{1 + 2(\omega\tau)^\alpha \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) + (\omega\tau)^{2\alpha}} \quad (72)$$

et le module de perte du matériau viscoélastique (partie imaginaire)

$$E''(\omega) = \frac{(E_\infty - E_o)(\omega\tau)^\alpha \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}{1 + 2(\omega\tau)^\alpha \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) + (\omega\tau)^{2\alpha}}. \quad (73)$$

Le comportement du module complexe dans le domaine fréquentiel peut être décrit entre deux valeurs asymptotiques : le module statique  $E_o = E^*(\omega \rightarrow 0)$  et le module dynamique  $E_\infty = E^*(\omega \rightarrow \infty)$ . Cela signifie que les limites du module complexe à haute et à basse fréquence sont purement élastiques. Par conséquent, l'amortissement du matériau ne se présente que sur une bande moyenne de fréquence. L'expression (71), qui est utilisée dans l'identification des paramètres du modèle, permet de décrire la dépendance en fréquence intrinsèque aux matériaux viscoélastiques sur une large bande de fréquence [1].

## 7.2 Considérations thermodynamiques

Ce modèle vérifie le deuxième principe de la thermodynamique. Le critère de vérification est basé sur l'inégalité de Clausius-Duhem. Cette démonstration est réalisée par Lion [20] suivant une approche discrète et une approche continue. Le premier cas consiste à approcher l'élément *spring-pot* du modèle fractionnaire par une somme discrète d'éléments de Maxwell en parallèle et le deuxième par une somme continue. Pour ce faire, on considère que l'énergie libre isotherme comme étant l'énergie totale de déformation stockée dans les ressorts.

- **Chargement harmonique**

Dans le cas d'un chargement harmonique  $\varepsilon(t) = \sin \omega_o t$ , quelques hypothèses peuvent être faites concernant les paramètres du modèle. On rappelle que le taux d'énergie mécanique, ainsi que le taux d'énergie dissipée des solides réels doivent être non-négatifs. Ces conditions sont vérifiées si les modules élastique et de perte sont positifs pour n'importe quelle fréquence, c'est-à-dire si les parties réelles et imaginaires du module complexe sont positives

$$E'(\omega) \geq 0 \quad \text{et} \quad E''(\omega) \geq 0$$

dans l'intervalle  $0 < \omega < \infty$ . Basées sur les relations ci-dessus, certaines conditions sur les paramètres du modèle peuvent être établies. On note dans les équations (72) et (73) que les modules élastique et de perte du modèle à quatre paramètres sont positifs quelles que soient la fréquence et la valeur de  $\alpha$ , si les conditions suivantes sont vérifiées

$$E_o \geq 0, \quad E_\infty > 0, \quad \tau > 0, \quad \frac{E_\infty}{E_o} \gg 1.$$

L'analyse détaillée des propriétés thermodynamiques du modèle fractionnaire de Zener dans le cas d'un chargement harmonique est réalisée dans l'article de Bagley et Torvik [2].

## 7.3 Analyse du modèle

Dans le contexte de la viscoélasticité linéaire isotherme, il existe de nombreux moyens d'exprimer les propriétés mécaniques qui interviennent dans la loi de comportement des matériaux viscoélastiques. Les descriptions des propriétés mécaniques les plus souvent utilisées sont probablement celles fournies par les fonctions de fluage et relaxation et par le module complexe. Ces méthodes, qui sont équivalentes, peuvent être déterminées à partir de l'observation directe d'essais expérimentaux [5].

Dans la suite, une brève analyse du modèle à quatre paramètres est présentée. Cette analyse consiste simplement à étudier l'influence de l'ordre de la dérivée fractionnaire sur le comportement du matériau viscoélastique. D'abord avec une approche temporelle à travers la fonction de relaxation et ensuite avec une approche fréquentielle à travers le module complexe. Enfin, les grandes lignes sur l'identification des paramètres du modèle à quatre paramètres d'un matériau viscoélastique sont présentées.

## 7.4 Fonction de relaxation

Les tests de fluage et de relaxation sont des moyens simples et directs pour obtenir les propriétés mécaniques liées à la théorie linéaire de viscoélasticité. Dans l'essai de relaxation, on impose une déformation instantanée qui est maintenue constante pendant que l'on mesure la contrainte en fonction du temps. Dans [17], Koeller présente les fonctions de relaxation et de fluage pour plusieurs modèles rhéologiques munis d'un *spring-pot*. Pour cela, il utilise le concept d'intégrale de Volterra et explicite les fonctions de relaxation et de fluage avec la fonction de Mittag-Leffler. Une étude plus récente réalisée par Enelund et Olsson dans [10], propose l'application d'une méthode intégrale pour résoudre un système viscoélastique à un degré de liberté. Pour cela ils travaillent avec la fonction de Mittag-Leffler.

## 7.5 Identification des paramètres du modèle

Le comportement des matériaux viscoélastiques est classiquement décrit par leurs courbes maîtresses dans le domaine fréquentiel. Ces courbes maîtresses présentent respectivement la partie réelle du module complexe  $E'$  et le facteur de perte  $\eta$  en fonction de la fréquence.

L'identification des quatre paramètres du modèle  $E_o$ ,  $E_\infty$ ,  $\tau$  et  $\alpha$  peut être réalisée à partir de différents essais dynamiques (en régime transitoire ou harmonique). Pour les matériaux viscoélastiques isotropes, des essais harmoniques de traction-compression permettent, par exemple, d'identifier le module d'Young et des essais harmoniques de torsion le module de cisaillement.

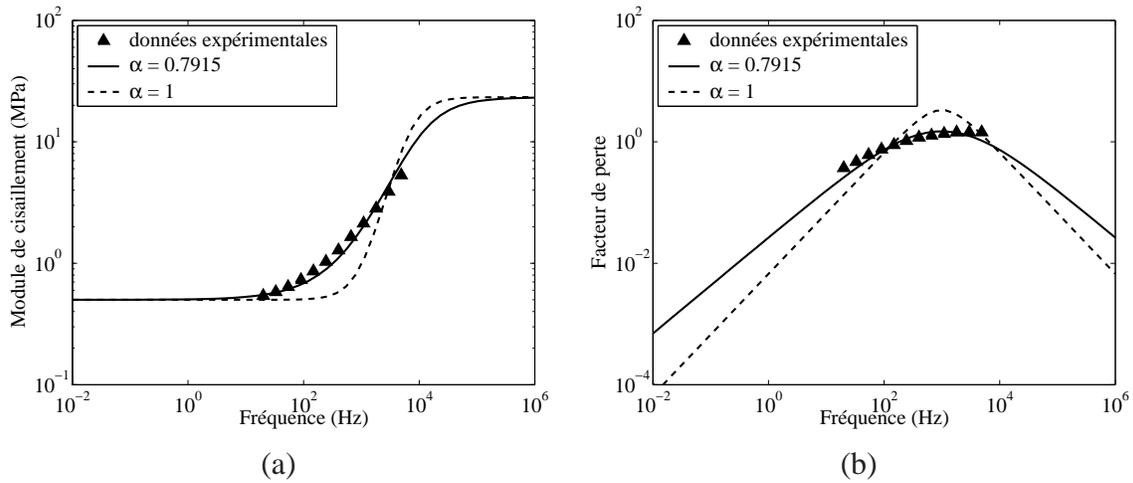
Les données expérimentales utilisées pour tracer les courbes maîtresses du matériau viscoélastique ISD112 à 27°C ont été fournies par le fabricant dans un intervalle de fréquence de 20 Hz à 5000 Hz. Ces courbes maîtresses (voir Fig. 4) présentent respectivement la partie réelle  $G'$  du module de cisaillement complexe et le facteur de perte  $\eta = G''/G'$  en fonction de la fréquence.

En supposant que les valeurs asymptotiques de la partie réelle du module élastique ( $E_o$  et  $E_\infty$ ) et la valeur maximale du facteur de perte  $\eta_{\max}$  sont connues, l'ordre de la dérivée fractionnaire  $\alpha$  peut être calculé analytiquement à partir de

$$\alpha = \frac{2}{\pi} \arcsin \left[ \eta_{\max} (E_\infty - E_o) \frac{2\sqrt{E_o E_\infty} + (E_\infty + E_o)\sqrt{1 + \eta_{\max}^2}}{\eta_{\max}^2 (E_\infty + E_o)^2 + (E_\infty - E_o)^2} \right]. \quad (74)$$

On note que l'équation (74) est indépendante de  $\tau$ . Le temps de relaxation peut, quant à lui, être obtenu par minimisation de l'écart entre les valeurs théorique et expérimentale du module complexe, par exemple par une méthode des moindres carrés.

À titre de comparaison, les courbes maîtresses du modèle classique de Zener (ou solide standard) et du modèle à dérivées fractionnaires sont tracées sur la Fig. 4 (extraite de [13]) pour



**FIG. 4: Courbes maîtresses du matériau viscoélastique ISD112 à 27°C : (a) partie réelle du module de cisaillement  $G'(\omega)$  et (b) facteur de perte  $\eta(\omega)$ .**

des valeurs fixées de  $E_o$  et  $E_\infty$ . On observe que le modèle à dérivées fractionnaires (trait plein) s'approche beaucoup mieux des données expérimentales que le modèle du solide standard (trait interrompu), avec seulement un paramètre supplémentaire.

## 8 Approximation numérique de la dérivée d'ordre fractionnaire

Les grandes lignes de deux méthodes d'approximation aux différences finies sont présentées ici. La première technique d'approximation est liée à la définition de Grünwald. Elle consiste à approcher la dérivée fractionnaire par un schéma aux différences finies décentré amont précis au premier ordre. La deuxième méthode consiste à utiliser un schéma décentré vers le passé précis au deuxième ordre. C'est le schéma  $G^\alpha$  développé par Galucio et al [12].

### 8.1 Schéma de Grünwald-Letnikov

Soit  $u$  une fonction du temps connue par des valeurs discrètes  $u^n$  aux instants  $t^n$ , où  $n$  est un entier positif. La fonction  $u^n$  peut être approchée par  $u(t^n)$  avec  $t^n = n\Delta t$ , où  $\Delta t$  supposé constant, est l'incrément de temps. La dérivée d'ordre  $\alpha$  d'une fonction  $u$  calculée à l'instant  $t^n$  par le schéma (approché !) de Grünwald-Letnikov est donnée par [26] :

$$(GLu)^n = \frac{1}{\Delta t^\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} A_{j+1}^\alpha u^{n-j} \quad (75)$$

En utilisant la propriété de la fonction gamma  $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ , on obtient la relation de récurrence suivante

$$A_{j+1}^\alpha = \frac{j - \alpha - 1}{j} A_j^\alpha, \quad (76)$$

avec  $A_0^\alpha = 1$  qui permet un calcul effectif de ces coefficients. Pour  $0 < \alpha < j$ , la valeur absolue du coefficient rationnel de l'équation (76) est inférieure à 1, donc  $|A_{j+1}^\alpha| < |A_j^\alpha|$ . Cela signifie que la série formée par les coefficients  $|A_{j+1}^\alpha|$  est strictement décroissante lorsque  $j$  devient supérieur à l'ordre de la dérivée  $\alpha$ . Cette propriété caractérise le phénomène de mémoire évanescence et motive donc la troncature de la série en (75). Dans le cas particulier où  $\alpha$  est un entier positif, seuls les  $\alpha + 1$  premiers coefficients de Grünwald sont non-nuls. En revanche, pour tout ordre non-entier positif, tous les coefficients  $A_{j+1}^\alpha$  sont non-nuls. Cela signifie que les dérivées fractionnaires agissent comme des opérateurs non-locaux.

Il est important de signaler que le calcul des coefficients  $A_{j+1}^\alpha$  est une tâche délicate. Il faut éviter de les calculer en utilisant la définition formelle. Il est préférable d'utiliser la relation de récurrence (76) pour ne pas cumuler trop d'erreurs numériques.

## 8.2 Le schéma $G^\alpha$

Soit  $G$  l'opérateur de Gear défini par :

$$G = \frac{1}{\Delta t} \left[ \frac{3}{2}I - 2\delta^- + \frac{1}{2}(\delta^-)^2 \right], \quad (77)$$

où l'opérateur de retard  $\delta$  est défini par :

$$(\delta^- u)^n = u^{n-1}.$$

Nous avons donc formellement

$$G^\alpha = \frac{1}{\Delta t^\alpha} \left( \frac{3}{2} \right)^\alpha \left[ I - \frac{4}{3}\delta^- + \frac{1}{3}(\delta^-)^2 \right]^\alpha. \quad (78)$$

Cet opérateur est obtenu directement à partir de la puissance  $\alpha$  de l'équation (77). Ainsi, à l'aide de la formule binomiale de Newton, l'équation (78) devient :

$$G^\alpha = \frac{1}{\Delta t^\alpha} \left( \frac{3}{2} \right)^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^j \left( \frac{4}{3} \right)^j \left( \frac{1}{4} \right)^\ell (-1)^j C_\alpha^j (-1)^\ell C_j^\ell (\delta^-)^{j+\ell}$$

et la dérivée d'ordre  $\alpha$  d'une fonction  $u$  calculée à l'instant  $t^n$  :

$$(G^\alpha u)^n = \frac{1}{\Delta t^\alpha} \left( \frac{3}{2} \right)^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^j \left( \frac{4}{3} \right)^j \left( \frac{1}{4} \right)^\ell A_{j+1}^\alpha B_{\ell+1}^j u^{n-j-\ell} \quad (79)$$

où les coefficients  $A_{j+1}^\alpha$  sont définis par (76) et les  $B_{\ell+1}^j$  par :

$$B_{\ell+1}^j = \frac{\ell - j - 1}{\ell} B_\ell^j$$

avec  $B_1^j = 1$  pour tout  $j$ . À titre illustratif, les cinq premiers coefficients de l'équation (79) sont présentés dans le Tableau 1. Ces coefficients sont liés à l'équation (79) par l'expression :

$$(G^\alpha u)^n = \frac{1}{\Delta t^\alpha} \left(\frac{3}{2}\right)^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} g_{j+1} u^{n-j}$$

où  $g_{j+1}$  est un nombre rationnel.

**TAB. 1: Premiers coefficients  $g_{j+1}$  du schéma  $G^\alpha$  pour  $\alpha = 1/3$ ,  $\alpha = 1/2$  et  $\alpha = 3/4$**

$j$	$\alpha = 1/3$	$\alpha = 1/2$	$\alpha = 3/4$
0	1	1	1
1	$-\frac{4}{9}$	$-\frac{2}{3}$	-1
2	$-\frac{7}{81}$	$-\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$
3	$-\frac{104}{2187}$	$-\frac{1}{27}$	$-\frac{1}{108}$
4	$-\frac{643}{19683}$	$-\frac{17}{648}$	$-\frac{1}{96}$
5	$-\frac{4348}{177147}$	$-\frac{19}{972}$	$-\frac{7}{864}$

## 9 En guise de conclusion

Nous avons, dans les pages qui précèdent, tenté d'introduire grâce à quelques exemples les notions fondamentales de dérivation d'ordre fractionnaire. Nous avons présenté ses différentes définitions avec les approches de Caputo et de Riemann-Liouville, la définition de la dérivée d'ordre  $\alpha$  à l'aide de différences finies *via* une généralisation de la formule de Taylor par Grünwald et Letnikov, la fonction de Mittag-Leffler pour la généralisation de la fonction exponentielle aux décroissances très lentes dans le temps.

Nous avons insisté sur les applications en mécanique des structures. Toutefois, les mêmes causes produisant les mêmes effets, les couches limites acoustiques (qui sont aussi régies par l'équation de la chaleur (1)) présentent également des effets de dérivation d'ordre fractionnaire. Nous proposons au lecteur de revenir aux sources originales comme Blackstock [3], Sugimoto [33] ou Makarov et Ochmann [21]. En électromagnétisme, des effets de peau et les effets de pointe induisent également l'utilisation de dérivées d'ordre fractionnaire (voir par exemple

Engheta [11]). La combustion donne lieu aussi à des modèles comportant des dérivées d'ordre un-demi (voir par exemple Joulin [16] et notre travail avec S. Mengué [8]).

Sans aller chercher les travaux *en cours* des spécialistes, nous recommandons la lecture de l'ouvrage classique (en Anglais) de Oldham et Spanier [26]. Par ailleurs, les ouvrages en Français sont rares. Nous invitons le lecteur à poursuivre sa découverte de la dérivation d'ordre fractionnaire *via* les ouvrages d'A. Oustaloup [27] et de G. Montseny [25] ou les travaux récents de D. Matignon, qui a écrit un chapitre d'introduction au calcul fractionnaire en Français (voir [22]).

## 10 Annexe : calcul d'une transformée de Fourier par la méthode des résidus

Nous effectuons dans ce paragraphe une transformée de Fourier particulière qui demande un calcul dans le plan complexe. Nous notons  $Y(t)$  la fonction de Heaviside et nous avons introduit en (11) la fonction

$$\rho(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{t}} Y(t).$$

Nous allons calculer la transformée de  $\rho(\bullet)$  en prenant garde au fait que cette fonction n'est pas intégrable. On a cependant

$$\tilde{\rho}(\omega) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^{R^2} \exp(-i\omega t) \frac{dt}{\sqrt{t}}. \quad (80)$$

Nous commençons par le cas  $\omega > 0$ . On fait d'abord le changement de variable  $t = u^2$  dans l'intégrale (80). On a alors

$$\int_0^{R^2} \exp(-i\omega t) \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2 \int_0^R \exp(-i\omega u^2) \frac{u du}{u} = 2 \int_0^R \exp(-i\omega u^2) du.$$

Puis pour  $\omega > 0$ , on pose  $z = u\sqrt{\omega}$ . Alors

$$\int_0^{R^2} \exp(-i\omega t) \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \int_0^{R/\omega} \exp(-i z^2) dz.$$

Pour calculer l'intégrale oscillante  $\int_0^R \exp(-i z^2) dz$ , on intègre dans le plan complexe le long du contour  $\Gamma_R$  défini à la Fig. 5 la fonction holomorphe  $z \mapsto \exp(-z^2)$ .

On a

$$\int_{\Gamma_R} \exp(-z^2) dz = 0.$$

Le contour  $\Gamma_R$  se compose de trois branches : l'une réelle, la seconde pour  $|z| = R$  et la troisième pour  $\arg z = \frac{\pi}{4}$ . Nous notons  $\Gamma_R^i$  ( $1 \leq i \leq 3$ ) ces trois branches. Tout d'abord,

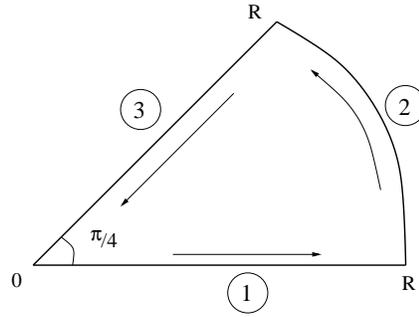


FIG. 5: Contour d'intégration.

$\int_{\Gamma_R^1} \exp(-z^2) dz$  tend vers  $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$  si  $R$  tend vers l'infini ; c'est classique (voir par exemple Dieu-donné [7]). Pour  $z \in \Gamma_R^2$ , on a  $z = R \exp(i\theta)$ ,  $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ . Donc

$$\int_{\Gamma_R^2} \exp(-z^2) dz = \int_0^{\pi/4} \exp(-R^2(\cos(2\theta) + i \sin(2\theta))) i R \exp(i\theta) d\theta.$$

Donc

$$\left| \int_{\Gamma_R^2} e^{-z^2} dz \right| \leq \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \cos(2\theta)} R d\theta = \frac{R}{2} \int_0^{\pi/2} \exp(-R^2 \cos \theta) d\theta.$$

Pour  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $\cos \theta \geq 1 - \frac{2\theta}{\pi}$ . On en déduit

$$\left| \int_{\Gamma_R^2} e^{-z^2} dz \right| \leq \frac{R}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-R^2(1-\frac{2\theta}{\pi})} d\theta = \frac{R}{4} e^{-R^2} \frac{\pi}{R^2} \left[ e^{2R^2 \frac{\theta}{\pi}} \right]_0^{\pi/2}$$

d'où

$$\left| \int_{\Gamma_R^2} e^{-z^2} dz \right| \leq \frac{\pi}{4R} e^{-R^2} (e^{R^2} - 1)$$

et ce terme peut être négligé dans la limite où  $R$  tend vers l'infini. Enfin,  $z \in \Gamma_R^3$  peut s'écrire sous la forme  $z = t \exp(i\frac{\pi}{4}) = t\sqrt{i}$  avec  $t \geq 0$ . On en tire

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_R^3} e^{-z^2} dz &= - \int_0^R e^{-(t\sqrt{i})^2} \sqrt{i} dt \\ &= -\sqrt{i} \int_0^R e^{-it^2} dt. \end{aligned}$$

Après sommation des trois contributions de l'intégrale, on a

$$\frac{1}{2} \sqrt{\pi} - \sqrt{i} \int_0^\infty e^{-it^2} dt = 0,$$

ce qui permet d'écrire

$$\int_0^\infty e^{-it^2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{i}}. \quad (81)$$

La transformée de Fourier  $\widehat{\rho}(\omega)$  s'en déduit alors facilement dans ce cas :

$$\widehat{\rho}(\omega) = \frac{2}{\sqrt{\omega}} \int_0^{\infty} e^{-it^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{i\omega}}. \quad (82)$$

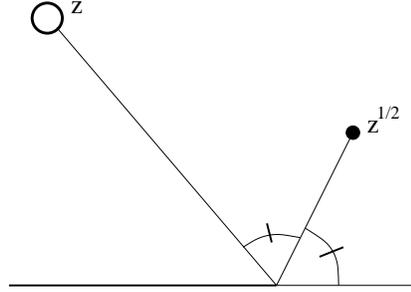


FIG. 6: Racine carrée dans le plan complexe.

Pour  $\omega < 0$ , on remarque que  $\widehat{\rho}(\omega) = \overline{\widehat{\rho}(-\omega)}$  et on sait que pour  $z$  complexe n'appartenant pas à l'intervalle  $] -\infty, 0]$ , on a

$$\sqrt{z} = \sqrt{\bar{z}}, \quad z \notin ] -\infty, 0]. \quad (83)$$

Pour  $\omega < 0$ , on a donc le calcul suivant :

$$\widehat{\rho}(\omega) = \overline{\widehat{\rho}(-\omega)} = \overline{\sqrt{\frac{\pi}{i(-\omega)}}} = \sqrt{\frac{\pi}{\overline{i(-\omega)}}} = \sqrt{\frac{\pi}{-i\omega}} = \sqrt{\frac{\pi}{i\omega}}$$

qui permet d'établir que la relation (82) est vraie dans tous les cas de figure pour  $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

## Références

- [1] R.L. BAGLEY, P.J. TORVIK. Fractional calculus – a different approach to the analysis of viscoelastically damped structures, *AIAA Journal*, vol. **21**, p. 741–748, 1983.
- [2] R.L. BAGLEY, P.J. TORVIK. On the fractional calculus model of viscoelastic behavior, *Journal of Rheology*, vol. **30**, p. 133–155, 1986.
- [3] D.T. BLACKSTOCK. Generalized Burgers equation for plane waves, *Journal Acoust. Soc. Am.*, vol. **77**, p 2050–2053, 1985.
- [4] M. CAPUTO. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent, Part 2, *Geophys. J. R. Astr. Soc.* vol. **13**, p. 529–539, 1967.
- [5] R.M. CHRISTENSEN *Theory of viscoelasticity*, Dover Publications, 1982.

- [6] R. COURANT, D. HILBERT. *Methods of Mathematical Physics*, John Wiley & Sons Inc, New York, 1989, première édition en Allemand, 1924.
- [7] J. DIEUDONNÉ. *Calcul infinitésimal*, Hermann, Paris, 1968.
- [8] F. DUBOIS, S. MENGUÉ. Mixed Collocation for Fractional Differential Equations, *Numerical Algorithms*, vol. **34**, p. 303-311, 2003.
- [9] S. DUGOWSON. *Les différentielles métaphysiques : histoire et philosophie de la généralisation de l'ordre de dérivation*, Université Paris 13, Villetaneuse, France, 1994.
- [10] M. ENELUND, P. OLSSON. Damping described by fading memory – analysis and application to fractional derivative models, *International Journal of Solids and Structures*, vol. **36**, p 939–970, 1999.
- [11] N. ENGHETA. On the role of fractional calculus in electromagnetic theory, *IEEE antennas & propagation magazine*, vol. **77**, p 35–46, 1997.
- [12] A.C. GALUCIO, J.-F. DEÜ, S. MENGUÉ, F. DUBOIS. An adaptation of the Gear scheme for fractional derivatives, *Comp. Methods in Applied Mech. Engineering*, vol. **195**, p. 6073–6085, 2006.
- [13] A.C. GALUCIO, J.-F. DEÜ, R. OHAYON. Finite element formulation of viscoelastic sandwich beams using fractional derivative operators, *Computational Mechanics*, vol. **33**, p. 282-291, 2004.
- [14] R. GORENFLO, S. VESSELLA. *Abel Integral Equations : Analysis and Applications*, Lecture Notes in Mathematics, vol. **1461**, Springer, New York, 1991.
- [15] C.D. JOHNSON, D.A. KIENHOLZ. Finite element prediction of damping in structures with constrained viscoelastic layers, *AIAA Journal*, vol. **20**, p. 1284–1290, 1982.
- [16] G. JOULIN. Point source initiation of lean spherical flames of light reactants : an asymptotic theory, *Combustion Science and Technology*, vol. **43**, p. 99-113, 1985.
- [17] R.C. KOELLER. Applications of fractional calculus to the theory of viscoelasticity, *Journal of Applied Mechanics*, vol. **51**, p. 299–307, 1984.
- [18] G.A. LESIEUTRE, E. BIANCHINI. Time domain modeling of linear viscoelasticity using anelastic displacement field, *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. **4**, p. 424–430, 1985.
- [19] J. LIGHTHILL. *Waves in fluids*, Cambridge University Press, London, 1978.
- [20] A. LION. On the thermodynamics of fractional damping elements, *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, vol. **9**, p. 83–96, 1997.
- [21] S. MAKAROV, M. OCHMANN. Nonlinear and Thermoviscous Phenomena in Acoustics, *Acta Acustica*, vol. **83**, p. 197–222, 1997.
- [22] D. MATIGNON. Introduction au calcul fractionnaire, *Lois d'échelle, fractales et ondelettes*, sous la direction de P. Abry, P. Gonçalves, J. Lévy Véhel, p. 143–183, Hermes, Paris, 2002.

- [23] D. MATIGNON, G. MONTSÉNY (Editeurs). *Fractional differential Systems : models, methods and applications*, ESAIM Proceedings, vol. **5**, SMAI, Paris, 1998.
- [24] D.J. MCTAVISH, P.C. HUGHES. Modeling of linear viscoelastic space structures, *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. **115**, p. 103–110, 1993.
- [25] G. MONTSÉNY. *Représentation diffusive*, Hermes Science Publications, 2005.
- [26] K.B. OLDHAM, J. SPANIER. *The fractional calculus*, Academic Press, 1974.
- [27] A. OUSTALOUP. *Systèmes asservis linéaires d'ordre fractionnaire*, Masson, Paris, 1983.
- [28] I. PODLUBNY. *Fractional differential equations*, Academic Press, 1999.
- [29] P.E. ROUSE. The theory of the linear viscoelastic properties of dilute solutions of coiling polymers, *The Journal of Chemical Physics*, vol. **21**, p. 1272–1280, 1953.
- [30] H. SCHLICHTING. *Boundary-Layer Theory*, McGraw-Hill Company, New York, 1955.
- [31] L. SCHWARTZ. *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1966.
- [32] J.C. SIMO, T.J.R. HUGHES. *Computational inelasticity*, Springer, New York, 1998.
- [33] N. SUGIMOTO. Burgers equation with fractional derivative ; hereditary effects on nonlinear acoustic waves, *Journal of Fluid Mechanics*, vol. **225**, p. 631–653, 1991.