TABLE DES MATIÈRES

Introduction	3
1. Notions de bases	8
1.1 Espace fonctionnels	8
1.1.1 Espaces des fonctions intégrales	8
1.1.2 Espaces des fonctions continues et absolument continues	9
1.1.3 Espaces des fonctions continues avec poids $C_\lambda([a, b])$	10
1.2 Fonctions spéciales	11
1.2.1 La fonction Gamma	11
1.2.2 La fonction Bêta	12
1.3 Outils d'analyse fonctionnelle	14
1.3.1 Notions et définitions	14
1.3.2 Principe de contraction de Banach	15
1.3.3 Théorème d'Arzela-Ascoli	15
2. Étude d'un problème fractionnaire de type Cauchy avec poids	17
2.1 Analyse et calcul fractionnaire	17
2.1.1 intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville	17
2.1.2 La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	23
2.1.3 Propriétés de la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	25
2.1.4 La dérivation fractionnaire au sens de Caputo	27

2.1.5	Relation entre l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo	28
2.2	Problème fractionnaire de type Cauchy avec poids	30
2.2.1	Position du problème	30
2.2.2	Réduction du problème à une équation intégrale de Volterra	31
2.2.3	Théorème d'existence et d'unicité	34
3.	Solutions positives d'une équation différentielle fractionnaire non linéaire	38
3.1	Position du problème	38
3.2	Équation intégrale équivalente	39
3.3	Existence des solutions positives	40
3.3.1	Notations et définitions	40
3.3.2	Théorème d'existence	43
	Bibliographie	47

INTRODUCTION

La dérivation fractionnaire est un concept de généralisation de la dérivation (classique) à un ordre non entier. Si cet ordre est négatif, on parle d'une intégration non entière et s'il est positif, il s'agit d'une dérivation non entière.

La dérivation fractionnaire fournit plusieurs outils potentiellement utiles pour la résolution des équations intégrales. Elle s'introduit aussi naturellement dans la modélisation mécanique des matériaux qui conservent la mémoire des transformations passées (voir [2]). D'où l'intérêt particulier porté sur le calcul et l'analyse fractionnaire pendant ces dernières décennies.

Bien que le calcul différentiel classique fournit des outils puissants pour la modélisation d'un bon nombre de phénomènes étudiés par les sciences appliquées, ces outils ne permettent pas de tenir compte de la dynamique anormale que présentent certains systèmes complexes rencontrés dans la nature ou dans les interactions de la société. Les résultats expérimentaux montrent que plusieurs processus liés aux systèmes complexes ont une dynamique non-locale impliquant des effets à long terme. Les opérateurs de dérivations et d'intégrations fractionnaires présentent des similitudes avec certaines de ces caractéristiques, ce qui en fait un outil plus adapté pour la modélisation de ces phénomènes.

L'histoire de la dérivée d'ordre non entier s'étale de la fin du 17^{ème} siècle jusqu'à nos jours. Les spécialistes s'accordent pour faire remonter son début à la fin de l'année 1695 quand L'Hospital a soulevé une question à Leibniz en s'interrogeant sur la signification de $\frac{d^n y}{dx^n}$ lorsque $n = \frac{1}{2}$. Leibniz, dans sa réponse,

voulut engager une réflexion sur une possible théorie de la dérivation non entière, et à écrit à L'Hospital : "... cela conduirait à un paradoxe à partir duquel, un jour, on aura tiré des conséquences utiles". Il a fallu attendre les années 1990 pour voir apparaître les premières "conséquences utiles". la première tentative sérieuse de donner une définition logique pour la dérivée fractionnaire est dû à Liouville qui a publié neuf documents dans ce sujet entre 1832 et 1837. Indépendamment, Riemann a proposé une approche qui s'est avérée essentiellement celle de Liouville, et c'est depuis qu'elle porte le nom "Approche de Riemann-Liouville". Plus tard, d'autres théories ont fait leur apparition comme celle de Grunwald-Leitnikov, de Weyl et de Caputo (voir [2, 3]). A cette époque il n'y avait presque pas d'applications pratiques de cette théorie, et c'est pour cette raison qu'elle a été considérée comme une abstraite ne contenant que des manipulations mathématiques peu utiles. Le passage des formulations mathématiques pures à des applications, a commencé à voir le jour depuis les années 1990, où les équations différentielles fractionnaires sont apparues dans plusieurs domaines tels que la physique, l'ingénierie, la biologie, la mécanique....

Actuellement dans la littérature mathématique, les études sur l'existence et l'unicité des solutions d'équations différentielles fractionnaires sont très abondantes, entre autres les travaux cités ci-dessous.

C. Yang and C. Zhai ont prouvé dans [6] l'existence et l'unicité des solutions positives pour le problème à valeurs aux limites de l'équation différentielle fractionnaire suivante

$$\begin{cases} D^\alpha u(t) + f(t, u(t)) + g(t, u(t)) = 0; & 0 < t < 1, 1 < \alpha < 2. \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

H. Ye, Y. Ding and T. Gao ont établis dans [7] des conditions suffisantes pour l'existence d'une solution positive de l'équation différentielle fractionnaire à

retard suivante

$$\begin{cases} D^\alpha [x(t) - x(0)] = x(t)f(t, x_t); & 0 \leq t \leq T \\ x(t) = \phi(t) & t \in [-\tau, 0] \end{cases}$$

L. Lin, X. Liu and H. Fang ont montrés dans [8] l'existence et l'unicité des solutions pour le problème à valeurs aux limites de l'équation différentielle fractionnaire au sens de Caputo suivante

$$\begin{cases} D^\alpha u(t) - Mu(t) = f(t, u(t)); & 0 \leq t \leq T, 0 < \alpha < 1. \\ u(0) = ru(t) \end{cases}$$

Lié à ce contexte, on propose dans ce travail, de faire une synthèse de certains travaux sur l'analyse fractionnaire et son application dans la résolution de quelques équations différentielles fractionnaires.

Le premier chapitre de ce mémoire est destiné aux différents outils et techniques mathématiques utilisés par la suite : espaces de fonctions (intégrables, continues, absolument continues et continues avec poids), fonctions spéciales (la fonction Gamma et la fonction Bêta) et quelques notions et résultats de la théorie de l'analyse fonctionnelles (principe de contraction de Banach, équi-continuité, théorème d'Arzela-Ascoli,...)

Dans la première partie du deuxième chapitre, on introduira les deux plus importantes approches de dérivation fractionnaire, celle de Riemann-Liouville et celle de Caputo. On présentera quelques unes de leurs propriétés et on précisera aussi la relation entre ces deux approches. Dans la seconde partie de ce chapitre, on abordera la question d'existence et d'unicité de la solution pour le problème fractionnaire de type Cauchy avec poids suivant :

$$\begin{cases} D^\alpha u(x) = f(x, u(x)); & 0 < x \leq T. \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1-\alpha} u(x) = u_0 \end{cases}$$

où f est une fonction donnée et D^α est l'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in]0, 1[$ défini par :

$$D^\alpha u(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right) \int_0^x (x-t)^{-\alpha} u(t) dt$$

Γ étant la fonction gamma.

L'existence et l'unicité d'une solution continue est établit par la transformation de ce problème à une équation intégrale équivalente, dont la solution est identifiée à un point fixe d'un opérateur contractant (sous certaines hypothèses suffisantes sur la fonction f) dans un espace fonctionnel convenablement choisi.

Plusieurs variantes de ce genre de résultats, dans un cadre plus générale et dans des espaces différents (de fonctions absolument continues, de fonctions intégrables, d'espaces avec poids...) peuvent être trouvés dans [3]

A travers le troisième chapitre, on présentera, l'une des approches utilisées pour aborder la question d'existence et d'unicité des solutions des équations différentielles fractionnaires dans le cas où le théorème du point fixe de Banach (classique) ne s'applique pas. Pour cela on va considérer un problème étudiée par S. Zhang dans [5], c'est l'équation différentielle fractionnaire de type Riemann-Liouville suivante :

$$D^\alpha u(x) = f(x, u(x)); \quad 0 \leq x \leq 1.$$

où $\alpha \in]0, 1[$ et $f : [0, 1] \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction continue donnée.

Pour établir l'existence des solutions positives sous certaines conditions suffisantes sur la fonction f , On présentera une idée basée sur le concept de

la sur et sous-solution fondé sur la théorie des points fixes dans des espaces ordonnés (voir [11]).

1. NOTIONS DE BASES

Ce chapitre constitue une partie préliminaire dans la quelle on rappelle des notions et des résultats fondamentaux de la théorie de l'analyse fonctionnelle qui représentent un outils indispensable dans notre étude.

1.1 Espace fonctionnels

1.1.1 Espaces des fonctions intégrales

Définition 1.1. Soient $\Omega = (a, b)$ ($-\infty \leq a < b \leq +\infty$) un intervalle fini ou infini de $\mathbb{R}$ et $1 \leq p \leq \infty$.

1. Pour $1 \leq p < \infty$, L'espace $L^p(\Omega)$ est l'espace des (classes de) fonctions f réelles sur Ω telles que f est mesurable et

$$\int_a^b |f(x)| dx < +\infty$$

2. Pour $p = \infty$, l'espace $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des (classes de) fonctions mesurables f bornées presque partout (p.p) sur Ω

Théorème 1.1. Soit $\Omega = (a, b)$ un intervalle fini ou infini de $\mathbb{R}$.

1. Pour $1 \leq p < +\infty$, L'espace $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme :

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

2. L'espace $L^\infty(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme :

$$\|f\|_\infty = \inf\{M \geq 0 : |f(x)| \leq M \text{ p.p sur } \Omega\}$$

1.1.2 Espaces des fonctions continues et absolument continues

Définition 1.2. (voir [2])

Soit $\Omega = [a, b]$ ($-\infty \leq a < b \leq \infty$) et $n \in \mathbb{N} = 0, 1, \dots$

On désigne par $C^n(\Omega)$ l'espace des fonctions f qui ont leurs dérivées d'ordre inférieur ou égale à n continues sur Ω , muni de la norme :

$$\|f\|_{C^n} := \sum_{k=0}^n \|f^{(k)}\|_C := \sum_{k=0}^n \max_{x \in \Omega} |f^{(k)}(x)|, n \in \mathbb{N}$$

En particulier si $n = 0$, $C^0(\Omega) \equiv C(\Omega)$ l'espace des fonctions f continues sur Ω muni de la norme :

$$\|f\|_C := \max_{x \in \Omega} |f(x)|$$

Définition 1.3. (voir [2])

Soit $\Omega = [a, b]$ ($-\infty < a < b < \infty$) un intervalle fini.

On désigne par $AC([a, b])$ l'espace des fonctions primitives des fonctions intégrables, c'est à dire :

$$AC([a, b]) = \{f / \exists \varphi \in L([a, b]) : f(x) = c + \int_a^x \varphi(t) dt\}$$

et on appelle $AC([a, b])$ l'espace des fonctions absolument continues sur $[a, b]$

Définition 1.4. (voir [2])

Pour $n \in \mathbb{N} = 0, 1, \dots$, on désigne par $AC^n([a, b])$ l'espace des fonctions f ayant des dérivées jusqu'à l'ordre $(n - 1)$ continues sur $[a, b]$ telles que $f^{(n-1)} \in AC([a, b])$ c'est à dire

$$AC^n([a, b]) = \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{et} \quad f^{(n-1)} \in AC([a, b])\}$$

En particulier $AC^1([a, b]) = AC([a, b])$

1.1.3 Espaces des fonctions continues avec poids

$$C_\lambda([a, b])$$

Définition 1.5. (voir [2])

Soient $\Omega = [a, b]$ un intervalle fini et $\lambda \in \mathbb{C}$ ($0 \leq \Re(\lambda) < 1$).

On désigne par $C_\lambda([a, b])$ l'espace des fonctions f définies sur $]a, b]$ telles que la fonction $(x - a)^\lambda f(x) \in C([a, b])$ c'est à dire

$$C_\lambda([a, b]) = \{f :]a, b] \longrightarrow \mathbb{C}, (x - a)^\lambda f(x) \in C([a, b])\} \quad (1.1)$$

muni de la norme :

$$\|f\|_{C_\lambda} = \|(x - a)^\lambda f(x)\|_C = \max_{x \in \Omega} |(x - a)^\lambda f(x)| \quad (1.2)$$

L'espace $C_\lambda([a, b])$ est appelé l'espace des fonctions continues avec poids.

En particulier, $C_0([a, b]) = C([a, b])$

1.2 Fonctions spéciales

1.2.1 La fonction Gamma

L'un des outils de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma qui prolonge naturellement la factorielle aux nombres réels positifs (et même aux nombres complexe à parties réelles positives).

Définition 1.6. (voir [10])

Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$, la fonction Gamma est donnée par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (1.3)$$

(cette intégrale est convergente pour tout $x > 0$).

Propriétés 1.2. (voir [10])

Pour tout $x > 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \quad (1.4)$$

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (1.5)$$

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)} \quad (1.6)$$

Cas Particuliers

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{1-1} dx = 1 \quad (1.7)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (1.8)$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!} \sqrt{\pi} \quad (1.9)$$

1.2.2 La fonction Bêta

Définition 1.7. (voir [10])

Soient $x, y > 0$, la fonction Bêta est la fonction définie par :

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \quad (1.10)$$

Proposition 1.3. (voir [10])

La fonction Bêta est reliée aux fonctions Gamma par la relation suivante

$$\forall x, y > 0, \text{ on a : } B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (1.11)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} t_1^{x-1} t_2^{y-2} e^{-t_1} e^{-t_2} dt_1 dt_2 \\ &= \int_0^{+\infty} t_1^{x-1} \left(\int_0^{+\infty} t_2^{y-1} e^{-|t_1+t_2|} dt_2 \right) \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable

$$t'_2 = t_2 + t_1.$$

on trouve

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{+\infty} t_1^{x-1} dt_1 \int_{t_1}^{+\infty} (t'_2 - t_1)^{y-1} e^{-t'_2} dt'_2 \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t'_2} dt'_2 \int_0^{t_1} (t'_2 - t_1)^{y-1} t^{x-1} dt_1 \end{aligned}$$

Si on pose $t'_1 = \frac{t_1}{t'_2}$, on arrive à

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{+\infty} e^{-t'_2} dt'_2 \left(\int_0^1 (t'_1 t'_2)^{t_1} (t'_2 - t'_1 t'_2)^{y-1} t'_2 dt'_1 \right) \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{-t'_2} dt'_2 \left((t'_2)^{x+y-1} B(x, y) \right) \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{-t'_2} (t'_2)^{x+y-1} dt'_2 B(x, y) \\
 &= \Gamma(x+y) B(x, y)
 \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat désiré. □

Propriétés 1.4. (voir [10])

1.

$$B(a, b) = B(b, a)$$

2.

$$aB(a, b+1) = B(a+1, b)$$

3. Si $n = b+1$ est un entier, cela donne une relation de récurrence

$$B(a, b) = \frac{b-1}{a} B(a+1, b-1)$$

4.

$$B(a, 1) = \frac{1}{a}$$

5. Si $a = m$ et $b = n$, on obtient

$$B(m, n) = \frac{(m-1)(n-1)!}{(m+n-1)!}$$

1.3 Outils d'analyse fonctionnelle

1.3.1 Notions et définitions

On considère dans tous ce paragraphe E et F des espaces de Banach munis des normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ respectivement, $C(E, F)$ l'espace des fonctions continues de E dans F muni de la norme uniforme :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in E} \|f(x)\|_F$$

Définition 1.8. (voir [9])

Soit M un sous ensemble de $C(E, F)$.

1. On dit que M est *équicontinue* en $x \in E$ si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\|f(u) - f(v)\|_F < \epsilon$$

et ceci pour tout $f \in M$ et pour tout $v \in E$ vérifiant :

$$\|u - v\|_E < \eta$$

2. On dit que M est *équicontinue sur E* , si M est *équicontinue* en tout $u \in E$.

Cas particulier

Dans le cas où $E = [a, b]$ et $F = \mathbb{R}$ muni de la norme usuelle, une partie M de $C(E, F)$ est dite *équicontinue* si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall f \in M, \forall x_1, x_2 \in [a, b] : |x_1 - x_2| < \eta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$$

Définition 1.9. (voir [9])

Soit M un sous ensemble de $C(E, F)$.

On dit que M est uniformément borné, s'il existe une constante $C > 0$ tel que

$$\|f\|_\infty \leq C \quad \forall f \in M$$

Définition 1.10. (voir [9])

Soit $A : E \rightarrow F$ un opérateur.

On dit que A est compact s'il est continu et l'image de tout borné de E est relativement compact (c'est à dire son adhérence est compact) dans F

1.3.2 Principe de contraction de Banach

Définition 1.11. Soit $A : E \rightarrow E$. On dit que $x \in E$ est un point fixe de A si : $A(x) = x$.

Théorème 1.5. Soit $A : E \rightarrow E$, s'il existe $0 < k < 1$ tel que :

$$\forall x, y \in E : \|A(x) - A(y)\|_E \leq k \|x - y\|_E$$

(On dit que A est un opérateur contractant)

alors l'opérateur A admet un point fixe unique $x \in E$.

De plus, si $x_0 \in E$ et $x_n = Ax_{n-1}$ ($n \geq 1$), alors :

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

1.3.3 Théorème d'Arzela-Ascoli

Ce théorème est connu pour son nombre considérable d'applications entre autre la compacité de certains opérateurs (nous allons utilisé cette application dans le troisième chapitre). Il caractérise les parties relativement compactes de l'espace des fonctions continues d'un espace compact dans un espace quelconque.

Théorème 1.6. *Soient E un espace de Banach compact et F un espace de Banach quelconque.*

Une partie M de $C(E, F)$ est relativement compact si et seulement si :

- 1- *M est équicontinue.*
- 2- *Pour tout $x \in E$, l'espace $M(x)$ défini par :*

$$M(x) = \{f(x), f \in M\}$$

est relativement compact dans F .

Théorème 1.7. *Soit M une partie de $C([a, b])$ muni de la norme uniforme. M est relativement compact dans $C([a, b])$ si et seulement si M est équicontinue et uniformément borné.*

2. ÉTUDE D'UN PROBLÈME FRACTIONNAIRE DE TYPE CAUCHY AVEC POIDS

On va commencer par introduire les deux plus importantes approches de calcul fractionnaire : au sens de Riemann-Liouville et au sens de Caputo, y compris, quelques unes de leurs propriétés ainsi que la relation entre ces deux approches. On abordera ensuite, la question d'existence et d'unicité de la solution pour une équation différentiel d'ordre fractionnaire de type Cauchy avec poids.

2.1 Analyse et calcul fractionnaire

2.1.1 intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

La notion d'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha) > 0$), selon l'approche de Riemann-Liouville, généralise la célèbre formule (attribuée à Cauchy) d'intégrale répétée n-fois :

$$\begin{aligned}(I_a^n f)(x) &= \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \dots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt \quad (n \in \mathbb{N}^*)\end{aligned}$$

Définition 2.1. [2, 3]

Soit $f \in L^1([a, b])$. L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville de la fonction f d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\text{Re}(\alpha) > 0$) notée $I_a^\alpha f$ est définie par :

$$(I_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \quad x > a \quad (2.1)$$

où $\Gamma(\alpha)$ est la fonction gamma donnée par (1.3)

Théorème 2.1. [2, 3]

Si $f \in L^1([a, b])$, alors $I_a^\alpha f$ existe pour presque tout $x \in [a, b]$ et de plus $I_a^\alpha f \in L^1([a, b])$

Démonstration. En introduisant la définition (2.1) puis en utilisant le théorème de Fubini, on trouve :

$$\begin{aligned} \int_a^b |(I_a^\alpha f)(x)| dx &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} |f(t)| dt dx \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b |f(t)| \int_t^b (x-t)^{\alpha-1} dx dt \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b |f(t)| (b-t)^\alpha dt \\ &\leq \frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b |f(t)| dt \end{aligned}$$

Puisque $f \in L^1([a, b])$, la dernière quantité est fini, ce qui établit le résultat désiré. $\square$

2. Étude d'un problème fractionnaire de type Cauchy avec poids 19

Exemple 2.1. Soient $\alpha > 0$, $\beta > -1$ et $f(x) = (x - a)^\beta$, alors :

$$(I_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha-1} (t - a)^\beta dt \quad (2.2)$$

En effectuant le changement de variable

$$t = a + (x - a)y \quad (0 \leq y \leq 1)$$

alors

(2.2) devient

$$\begin{aligned} (I_a^\alpha f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha-1} (t - a)^\beta dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x - a - (x - a)y)^{\alpha-1} [x + (x - a)y - x]^\beta (x - a) dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 [(x - a)(1 - y)]^{\alpha-1} (x - a)^{\beta+1} y^\beta dy \\ &= \frac{(x - a)^{\beta+1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1 - y)^{\alpha-1} y^\beta dy \\ &= \frac{(x - a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1 - y)^{\alpha-1} y^{(\beta+1)-1} dy \end{aligned}$$

En tenant compte de la fonction Bêta (1.10) puis de la relation (1.11) on

arrive à :

$$\begin{aligned}
 (I_a^\alpha f)(x) &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta+1) \\
 &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\
 &= \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (x-a)^{\alpha+\beta}
 \end{aligned}$$

Ainsi on obtient

$$(I_a^\alpha (t-a)^\beta)(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (x-a)^{\alpha+\beta} \quad (2.3)$$

Exemple 2.2. Soit $f(x) = x^\beta$ avec $\beta > -1$ On a

$$(I_0^\alpha f)(x) := I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x t^\beta (x-t)^{\alpha-1} dt \quad (2.4)$$

En posant : $t = xu$, (2.4) devient

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (xu)^\beta (1-u)^{\alpha-1} x du$$

En utilisant la fonction Bêta (1.10) puis de la relation (1.11) on arrive à :

$$\begin{aligned}
 I^\alpha f(x) &= \frac{x^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 u^\beta (1-u)^{\alpha-1} du \\
 &= \frac{x^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} B(\beta+1, \alpha) \\
 &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} x^{\alpha+\beta}
 \end{aligned}$$

Proposition 2.2. [2, 3]

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $\Re(\alpha), \Re(\beta) > 0$, pour toute fonction $f \in L^1([a, b])$, on a :

$$I_a^\alpha(I_a^\beta f) = I_a^{\alpha+\beta} f = I_a^\beta(I_a^\alpha f)$$

pour presque tout $x \in [a, b]$. Si de plus $f \in C([a, b])$, alors cette identité est vraie pour tout $x \in [a, b]$

Démonstration. Supposons d'abord que $f \in L^1([a, b])$, on a :

$$\begin{aligned} [I_a^\alpha(I_a^\beta f)](x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} (I_a^\beta f)(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} \int_a^s (s-t)^{\beta-1} f(t) dt ds \end{aligned}$$

En vertu du théorème (2.1), les intégrales figurant dans l'égalité précédente existent pour presque tout $x \in [a, b]$, et le théorème de Fubini permet donc d'écrire :

$$[I_a^\alpha(I_a^\beta f)](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t) \left[\int_t^x (x-s)^{\alpha-1} (s-t)^{\beta-1} ds \right] dt$$

En effectuant le changement de variable

$$s = t + (x-t)y \quad (0 \leq y \leq 1)$$

on obtient

$$[I_a^\alpha(I_a^\beta f)](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t) (x-t)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^{\beta-1} dy dt$$

2. Étude d'un problème fractionnaire de type Cauchy avec poids 22

Enfin, en tenant de la définition (1.10) puis de la relation (1.11) on obtient :

$$\left[I_a^\alpha (I_a^\beta f) \right] (x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t)(x - t)^{\alpha + \beta - 1} dt = \left(I_a^{\alpha + \beta} f \right) (x)$$

Supposons maintenant que $f \in C([a, b])$, alors (d'après les théorèmes sur les intégrales dépendant de paramètres) $I_a^\beta f \in C([a, b])$, et par suite

$$I_a^{\alpha + \beta} f, I_a^\alpha I_a^\beta f \in C([a, b])$$

Ainsi, d'après ce qui précède, les deux fonctions continues $I_a^{\alpha + \beta} f, I_a^\alpha I_a^\beta f$ coïncident presque partout sur $[a, b]$, elles doivent donc coïncider partout sur $[a, b]$. $\square$

Le théorème suivant fournit un résultat concernant l'inversion de la limite et de l'intégrale fractionnaire.

Théorème 2.3. *Soient $\alpha > 0$, et $(f_k)_{k=1}^{+\infty}$ est une suite de fonctions continues et simplement convergentes sur $[a, b]$. Alors on peut invertir l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et le signe limite comme suit :*

$$\left[I_a^\alpha \left(\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k \right) \right] (x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (I_a^\alpha f_k)(x)$$

Démonstration. Soit $f_k \rightarrow f$ simplement convergente et

$$\begin{aligned} |I_a^\alpha f_k(x) - I_a^\alpha f(x)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x |f_k(t) - f(t)|(x - t)^{\alpha - 1} dt \right| \\ &\leq \frac{\|f_k - f\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha - 1} dt \\ &\leq \frac{\|f_k - f\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\alpha} (x - a)^\alpha \\ &\leq \frac{(x - a)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \|f_k - f\|_\infty \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \|f_k - f\|_\infty (b - a)^\alpha \quad \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

□

2.1.2 La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 2.2. [2, 3]

Soit $f \in L^1([a, b])$ une fonction intégrable sur $[a, b]$, la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction f d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha) > 0$) notée $D_a^\alpha f$ est définie par :

$$(D_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x (x - t)^{n-\alpha-1} f(t) dt \quad (2.5)$$

où $n - 1 < [\Re(\alpha)] < n$ et $x > a$.

En particulier, pour $\alpha = m \in \mathbb{N}$, on a

$$(D_a^0 f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1)} \left(\frac{d}{dx} \right) \int_a^x f(t) dt = f(x) \quad (2.6)$$

$$(D_a^m f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1)} \left(\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} \right) \int_a^x f(t) dt = \frac{d^m}{dx^m} f(x) \quad (2.7)$$

Par suite la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville coïncide avec la dérivée classique pour $\alpha \in \mathbb{N}$

Remarque 2.4.

$$(D_a^\alpha f)(x) = \left(\frac{d}{dx} \right)^n (I_a^{n-\alpha} f)(x)$$

tel que : $n = [\Re(\alpha)] + 1, x > a$

Exemple 2.3.

1. Soit $f(x) = (x - a)^\beta$ avec $\beta > -1$.

Pour $\alpha \geq 0$ tel que $n - 1 \leq \alpha \leq n$, on a d'après la remarque (2.4) puis l'exemple (2.3) :

$$D_a^\alpha f(x) = D^n I^{n-\alpha} f(x) = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + n - \alpha + 1)} D^n (x - a)^{n-\alpha+\beta}$$

Alors, pour $(\alpha - \beta) \in \{1, 2, \dots, n\}$ on a :

$$D_a^\alpha f(x) = D_a^\alpha (x - a)^{\alpha-j} = 0 \quad j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (2.8)$$

Par ailleurs si $(\alpha - \beta) \notin \{1, 2, \dots, n\}$ on trouve

$$D_a^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (x - a)^{\beta-\alpha} \quad (2.9)$$

2. En particulier, si $\beta = 0$ et $\alpha > 0$, la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une fonction constante $f(x) = C$ est non nulle, sa valeur est :

$$D_a^\alpha C = \frac{C(x - a)^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)}$$

La proposition suivante établit une condition suffisante d'existence de la dérivée fractionnaire.

Proposition 2.5. [2, 3]

Soient $\alpha \geq 0$ et $n = [\alpha] + 1$. Si $f \in AC^n([a, b])$, alors la dérivée fractionnaire

$D_a^\alpha f$ existe presque partout sur $[a, b]$ et de plus, elle est donnée par

$$D_a^\alpha f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j - \alpha + 1)} (x - a)^{j-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^x (x - t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt$$

2.1.3 Propriétés de la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Par analogie avec la dérivation usuelle, et comme conséquence directe de la relation (2.1), l'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est linéaire.

Théorème 2.6. [2, 3]

Soient f et g deux fonctions dont les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville d'ordre α existent. Alors pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $D_a^\alpha(\lambda f + \mu g)$ existe et on a :

$$D_a^\alpha(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda(D_a^\alpha f)(x) + \mu(D_a^\alpha g)(x)$$

Lemme 2.7. Soit $\alpha \in]n - 1, n[$ et f une fonction vérifiant $D_a^\alpha f = 0$ alors :

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \frac{\Gamma(j + 1)}{\Gamma(j + 1 + \alpha - n)} (x - a)^{j+\alpha-n}$$

Démonstration. Soit

$$(D_a^\alpha f)(x) = 0$$

En tenant compte de la remarque (2.4) on a :

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^m [I_a^{m-\alpha} f](x) = 0$$

et par suite

$$[I_a^{m-\alpha} f](x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j (x - a)^j$$

2. Étude d'un problème fractionnaire de type Cauchy avec poids 26

Maintenant, l'application de l'opérateur I_a^α à l'équation précédente donne

$$(I_a^m f)(x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j I_a^\alpha ((x-a)^j)$$

En utilisant la relation (2.3) on obtient ainsi

$$(I_a^m f)(x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha)} (x-a)^{j+\alpha}$$

Enfin, la dérivation classique et l'utilisation de la formule

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^m \cdot (x-a)^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-m+1)} \cdot (x-a)^{\alpha-m}$$

établit le résultat désiré. □

L'opérateur de dérivation au sens de Riemann-Liouville possède les propriétés résumées dans la proposition suivante

Proposition 2.8. [2, 3]

Soient $\alpha, \beta > 0$ tels que $n-1 \leq \alpha \leq n$, $m-1 \leq \beta < m$.

1. Pour $f \in L^1([a, b])$, légalité :

$$D_a^\alpha (I_a^\alpha f(t)) = f(t)$$

est vrai pour presque tout $x \in [a, b]$

2. Si $\alpha > \beta > 0$, alors pour $f \in L^1([a, b])$, la relation :

$$D_a^\beta (D_a^\alpha f)(x) = (I_a^{\alpha-\beta} f)(x)$$

est vrai presque partout sur $[a, b]$

3. Si $\beta \geq \alpha > 0$ et la dérivée fractionnaire $D_a^{\beta-\alpha} f$ existe, alors on a :

$$D_{\alpha}^{\beta}(I^{\alpha} f)(x) = (D_a^{\beta-\alpha} f)(x)$$

4. Si $f \in L^1([a, b])$ et $I^{n-\alpha} f \in AC^n([a, b])$ avec $n = [\Re(\alpha) + 1]$, alors :

$$[I_a^{\alpha}(D_a^{\alpha} f)](x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{j-n+\alpha}}{\Gamma(j-n+\alpha+1)} \lim_{x \rightarrow a^+} \left[\left(\frac{d}{dx} \right)^j I_a^{n-\alpha} f \right](x)$$

2.1.4 La dérivation fractionnaire au sens de Caputo

Bien que la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville a jouée un rôle important dans le développement du calcul fractionnaire, plusieurs auteurs y compris Caputo (1967-1969) ont rendu compte que cette définition doit être révisé, car les problèmes appliqués en visco-élasticité, mécanique des solides et en rhéologie, exigent des conditions initiales physiquement interprétables par des dérivées classiques, ce qui n'est pas le cas dans la modélisation par l'approche de Riemann-Liouville qui exige la connaissance des conditions initiales des dérivées fractionnaires.

Définition 2.3. [2, 3]

Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $\Re(\alpha) > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n - 1 < \Re(\alpha) < n$ et $f \in C^n([a, b])$.

La dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo de la fonction f notée ${}^c D_a^{\alpha} f$ est définie par :

$$\begin{aligned} {}^c D_a^{\alpha} f(x) &:= I^{(n-\alpha)} D^{(n)} f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x f^{(n)}(t) (x-t)^{n-\alpha-1} dt \end{aligned}$$

Remarque 2.9. *La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in]m - 1, m[$ s'obtient par une application de l'opérateur d'intégration fractionnaire d'ordre $m - \alpha$ suivit d'une dérivation classique d'ordre m , alors que La dérivée fractionnaire au sens de Caputo est le résultat de la permutation de ces deux opérations.*

Exemple 2.4. Pour $f(x) = (x - a)^\beta$ avec $\beta \geq 0$, on a

$${}^c D_a^\alpha f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \beta \in \{0, 1, 2, \dots, m - 1\} \\ \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} (x - \alpha)^{\beta-\alpha} & \text{si } \beta > n - 1 \end{cases} \quad (2.10)$$

En particulier, si f est constante sur $[a, b]$, alors :

$${}^c D_a^\alpha f = 0$$

2.1.5 Relation entre l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo

Le théorème suivants établit le lien entre la dérivée fractionnaire au sens de caputo et celle au sens de Riemann-Liouville.

Théorème 2.10. [2, 3]

Soient $\alpha \geq 0$, $n = [\alpha] + 1$. Si f possède $(n - 1)$ dérivée en a et si $D_a^\alpha f$ existe, alors :

$$({}^c D_a^\alpha f)(x) = D_a^\alpha [f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)}{k!} (x - a)^k]$$

2. Étude d'un problème fractionnaire de type Cauchy avec poids 29

presque partout sur $[a, b]$.

Remarque 2.11. *Le résultat du théorème (2.10) signifie que la dérivation au sens de Caputo d'une fonction f est une dérivation fractionnaire du reste dans le développement de Taylor de f .*

2.2 Problème fractionnaire de type Cauchy avec poids

2.2.1 Position du problème

On considère le problème fractionnaire de type Cauchy suivant :

$$D^\alpha u(x) = f(x, u(x)); \quad 0 < x \leq T \quad (2.11)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1-\alpha} u(x) = u_0 \quad (2.12)$$

où f est une fonction continue sur $G =]0, T] \times]u_0 - \delta, u_0 + \delta[$ pour $(\delta > 0)$ et D^α est l'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in]0, 1[$ défini par :

$$D^\alpha u(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right) \int_0^x (x-t)^{-\alpha} u(t) dt \quad (2.13)$$

on s'intéresse ici des solutions continues. Pour cela, et en tenant compte aussi de la condition aux limites (2.12), on va chercher à résoudre le problème dans l'espace

$$X = \left\{ f :]0, T] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue et } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1-\alpha} f(x) \text{ existe} \right\} \quad (2.14)$$

Il est clair que pour toute fonction $f \in X$, la fonction $(\cdot)^{1-\alpha} f(\cdot)$ est prolongeable par continuité sur $[0, T]$, de plus f est définie sur $]0, T]$, d'où l'espace X est identifié à l'espace $C_{1-\alpha}([0, T])$ défini par (1.1) (l'espace des fonctions continues avec poids) et on a donc

Théorème 2.12. *L'espace X défini par (2.14), muni de la norme :*

$$\|f\|_X = \sup_{x \in [0, T]} |x^{1-\alpha} f(x)| \quad (2.15)$$

est un espace de Banach.

2.2.2 Réduction du problème à une équation intégrale de Volterra

Le point de départ pour la transformation du problème à une équation intégrale sera la proposition suivante

Proposition 2.13. *Soient f une fonction continue sur $]a, b]$ et $\alpha \in]0, 1[$. Si*

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{1-\alpha} f(x) = c$$

alors :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (I^{1-\alpha} f)(x) = c\Gamma(\alpha).$$

Démonstration. Puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1-\alpha} f(x) = c$, on a

$$\forall \varepsilon' > 0; \exists \delta(\varepsilon') \text{ tel que pour } 0 < t < \delta : |t^{1-\alpha} f(t) - c| < \varepsilon' \quad (2.16)$$

D'après la relation (2.3) on a

$$\Gamma(\alpha) = (I^{1-\alpha}(t)^{\alpha-1})(x) \quad (2.17)$$

En introduisant la définition de l'opérateur d'intégration fractionnaire de Riemann-

2. Étude d'un problème fractionnaire de type Cauchy avec poids 32

Liouville donnée par (2.1), ainsi que la relation (2.17), on obtient

$$\begin{aligned}
 |(I^{1-\alpha}f)(x) - c\Gamma(\alpha)| &= |(I^{1-\alpha}f)(x) - c(I^{1-\alpha}t^{\alpha-1})(x)| \\
 &= |I^{\alpha-1}(f(x) - c.t^{\alpha-1})(x)| \\
 &= \left| \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (t-s)^{-\alpha} \cdot (f(s) - cs^{\alpha-1}) ds \right| \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \int_0^x (t-s)^{-\alpha} |f(s) - cs^{\alpha-1}| ds \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \int_0^x (t-s)^{-\alpha} \cdot s^{\alpha-1} |s^{1-\alpha}f(s) - c| ds
 \end{aligned}$$

Maintenant si on prend $0 < x < \delta$ alors $0 < t < x < \delta$, et donc d'après (2.16) on arrive à

$$\begin{aligned}
 |(I^{1-\alpha}f)(x) - c\Gamma(\alpha)| &\leq \frac{\epsilon'}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \int_0^x (t-s)^{-\alpha} \cdot s^{\alpha-1} \cdot ds \\
 &= \epsilon' \cdot (I^{1-\alpha}s^{\alpha-1})(x)
 \end{aligned}$$

Ainsi d'après (2.17) on trouve

$$|(I^{1-\alpha}f)(x) - c\Gamma(\alpha)| < \epsilon' \cdot \Gamma(\alpha) \quad (2.18)$$

Il suffit alors de choisir $\epsilon' = \frac{\epsilon}{\Gamma(\alpha)}$ pour aboutir au résultat désiré. □

Théorème 2.14. *Si $u \in C([0, T])$, alors u satisfait (2.11)-(2.12) si et seulement si u satisfait l'équation intégrale suivante :*

$$u(x) = u_0 \cdot x^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, u(t)) dt \quad (2.19)$$

2. Étude d'un problème fractionnaire de type Cauchy avec poids 33

Démonstration.

On a pour $x \in]0, T]$

$$D^\alpha u(x) = f(x, u(x))$$

En composant par l'opérateur d'intégration d'ordre α dans les deux côtés de l'équation précédente, on obtient :

$$I^\alpha(D^\alpha u)(x) = I^\alpha(f(., u(.)))(x) \quad (2.20)$$

D'autre part, notons que la propriété (4) de la proposition (2.8) devient pour $0 < \alpha < 1$:

$$(I_a^\alpha(D_a^\alpha f))(x) = f(x) - \frac{(x-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \lim_{x \rightarrow a^+} (I_a^{1-\alpha} f)(x) \quad (2.21)$$

Donc en appliquant (2.21) à u pour $a = 0$ et en tenant compte de la proposition (2.13) et la condition (2.12), on obtient

$$I^\alpha(D^\alpha u(x)) = u(x) - u_0 \quad (2.22)$$

D'autre part, d'après la définition (2.1), on a :

$$I^\alpha f(x, u(x)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x f(t, u(t))(x-t)^{\alpha-1} dt \quad (2.23)$$

Enfin, avec (2.22) et (2.23), l'équation (2.20) devient

$$u(x) = u_0 \cdot x^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, u(t)) dt \quad (2.24)$$

D'où le résultat. □

2.2.3 Théorème d'existence et d'unicité

Après avoir transformé le problème (2.11)-(2.12) à l'équation intégrale de type Volterra (2.19) dont la solution est identifiée à un point fixe d'un opérateur, qui sera défini par la suite, on va donner des conditions suffisantes sur f qui conduisent à l'existence et l'unicité d'une solution continue du problème (2.11)-(2.12) par le principe de contraction de Banach.

Plusieurs variantes de ce genre de résultats, dans un cadre plus générale et dans des espaces différents (de fonctions absolument continues, de fonctions intégrables, d'espaces avec poids...) peuvent être trouvés dans [2]-[3]

On définit l'opérateur A sur X par :

$$(Au)(x) = x^{\alpha-1}u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, u(t)) dt \quad (2.25)$$

On suppose que les hypothèses suivantes sont satisfaites :

$$\forall y \in]u_0 - \delta, u_0 + \delta[: f(., y) \in X \quad (2.26)$$

$$\exists L > 0 : |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2| \forall (x, y_1), (x, y_2) \in G \quad (2.27)$$

c'est à dire que f est uniformément lipschitzienne par rapport à la deuxième variable.

avec

$$L < \frac{\Gamma(2\alpha)}{T^\alpha \Gamma(\alpha)} \quad (2.28)$$

Commençons d'abord par voir que l'opérateur A envoie X à X .

Proposition 2.15. *Sous les hypothèse (2.26)-(2.27), l'opérateur A envoie X à X c'est à dire si $u \in X$ alors $Au \in X$.*

Démonstration. Il est clair que Au est continue sur $]0, T]$.

De plus, on a :

$$\begin{aligned} |x^{1-\alpha}(Au)(x) - u_0| &\leq \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} |f(t, u(t))| dt \\ &\leq \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} [|f(t, u(t)) - f(t, u_0)| + |f(t, u_0)|] dt \end{aligned}$$

Vue l'hypothèse (2.27) on a :

$$\begin{aligned} |x^{1-\alpha}(Au)(x) - u_0| &\leq \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} [L|u(t) - u_0| + |f(t, u_0)|] dt \\ &\leq \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} [L|u(t)| + L|u_0| + |f(t, u_0)|] dt \\ &\leq \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} L|u_0| \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} dt + \\ &\quad + \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} . t^{\alpha-1} \times [L.t^{1-\alpha} |u(t)| + t^{1-\alpha} |f(t, u_0)|] dt \end{aligned}$$

Puisque $u \in X$ et d'après l'hypothèse (2.26), il existe M tel que :

$$\sup_{[0, T]} [L.t^{1-\alpha} |u(t)| + t^{1-\alpha} |f(t, u_0)|] = M$$

2. Étude d'un problème fractionnaire de type Cauchy avec poids 36

d'où :

$$\left| x^{1-\alpha}(Au)(x) - u_0 \right| \leq \frac{x}{\Gamma(\alpha+1)} L |u_0| + \frac{M \cdot \Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} \cdot x^\alpha \quad (2.29)$$

En faisant tendre x vers 0 dans l'inégalité (2.29), on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1-\alpha}(Au)(x) = u_0$$

par suite $Au \in X$.

□

Théorème 2.16. *Sous les hypothèses (2.26)-(2.27) et (2.28), il existe une unique solution de l'équation intégrale (2.19) dans l'espace X .*

Démonstration. En tenant compte de la proposition (2.15), il suffit de prouver que A est un opérateur contractant.

soient $u, v \in X$

On a :

$$\left| x^{1-\alpha}((Au)(x) - (Av)(x)) \right| \leq \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} |f(t, u(t)) - f(t, v(t))| dt$$

D'après (2.27), on trouve alors

$$\begin{aligned} \left| x^{1-\alpha}((Au)(x) - (Av)(x)) \right| &\leq \frac{L}{\Gamma(\alpha)} x^{1-\alpha} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} |u(t) - v(t)| dt \\ &= \frac{L}{\Gamma(\alpha)} x^{1-\alpha} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \cdot t^{\alpha-1} \cdot t^{1-\alpha} |u(t) - v(t)| dt \\ &\leq \frac{L}{\Gamma(\alpha)} x^{1-\alpha} \cdot \sup_{[0, T]} t^{1-\alpha} |u(t) - v(t)| \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^{\alpha-1} dt \end{aligned}$$

2. Étude d'un problème fractionnaire de type Cauchy avec poids 37

En tenant compte de la norme de X définie par (2.15) et de la définition (2.1) de l'intégrale fractionnaire, on a

$$\left| x^{1-\alpha}((Au)(x) - (Av)(x)) \right| \leq \frac{L \|u - v\|_X}{\Gamma(\alpha)} x^{1-\alpha} \Gamma(\alpha) I^\alpha x^{\alpha-1} \quad (2.30)$$

Ainsi d'après le résultat (2.3), l'inégalité (2.30) devient

$$\left| x^{1-\alpha}((Au)(x) - (Av)(x)) \right| \leq \frac{L\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} x^\alpha \|u - v\|_X$$

Puisque $x \in]0, T]$, alors

$$\left| x^{1-\alpha}((Au)(x) - (Av)(x)) \right| \leq \frac{L\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} T^\alpha \|u - v\|_X$$

Par suite

$$\|Au - Av\|_X \leq \frac{L\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} T^\alpha \|u - v\|_X$$

Donc d'après l'hypothèse (2.28), l'opérateur A est contractant et le résultat découle alors du théorème (1.5). $\square$

Maintenant, comme conséquence directe des théorèmes (2.14) et (2.16) on a le résultat suivant :

Théorème 2.17. *Sous les hypothèses (2.26)-(2.27) et (2.28), il existe une unique solution continue du problème fractionnaire (2.11)-(2.12).*

3. SOLUTIONS POSITIVES D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE FRACTIONNAIRE NON LINÉAIRE

3.1 Position du problème

On considère dans ce chapitre l'équation différentiel fractionnaire non linéaire étudié par S.Zhang dans [5]

$$D^\alpha u = f(t, u); 0 \leq t \leq 1 \quad (3.1)$$

où $0 < \alpha < 1$ et D^α est l'opérateur de dérivation fractionnaire d'ordre α défini par (2.1) et $f : [0, 1] \times [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ est une fonction continue.

L'existence des solutions positives du problème (3.1) est basé sur la méthode de sur et sous-solutions, fondée sur l'un des théorèmes des points fixes dans les espaces ordonné (le théorème (3.5) cité ci-dessous et qu'on peut trouver dans [11])

3.2 Équation intégrale équivalente

Lemme 3.1. *Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ et $\alpha > 0$, alors :*

$$\lim_{x \rightarrow a^+} (I^\alpha f)(x) = 0$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} |(I^\alpha f)(x)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} |f(t)| dt \\ &\leq \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} dt \\ &= \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} (x-a)^\alpha \end{aligned}$$

En faisant tendre x vers zéro ($\alpha > 0$), on obtient le résultat. $\square$

Théorème 3.2. *$u \in X$ est une solution de (3.1) si et seulement si u est solution de l'équation intégrale :*

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, u(s)) ds \quad (3.2)$$

Démonstration. On a :

$$D^\alpha u(x) = f(x, u(x)); x \in [0, T]$$

En composant par l'opérateur d'intégration d'ordre α (2.1) dans les deux côtés de l'équation précédente, on obtient :

$$I^\alpha (D^\alpha u)(x) = I^\alpha (f(\cdot, u(\cdot)))(x)$$

En appliquant la propriété (4) de la proposition (2.8) pour $0 < \alpha < 1$ et $a = 0$,

on obtient (revoir la démonstration du théorème (2.14))

$$I^\alpha(D^\alpha u(x)) = u(x) - \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(I^{1-\alpha} f(x, u(x)) \right) (x)$$

D'après le lemme (3.1), on a ainsi :

$$I^\alpha(D^\alpha u(x)) = u(x)$$

D'autre part, vue la définition (2.1) de I^α , on a :

$$I^\alpha f(x, u(x)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x f(t, u(t))(x-t)^{\alpha-1} dt$$

D'où le résultat.

□

3.3 Existence des solutions positives

L'existence des solutions positives du problème (3.1) sera basé sur la méthode de sur et sous-solutions, fondée sur la théorie des points fixes dans les espaces ordonné. Pour plus de détail sur les concepts de "**poset**" (abrégé de : **p**artial **o**rder **s**et), et la théorie des points fixes dans ces espaces, voir et consulter [5] et [11]

3.3.1 Notations et définitions

Définition 3.1. *Soit E un espace de Banach réel. Un sous espace H de E est appelé cône si les conditions suivantes sont satisfaites :*

$$H \text{ est un fermé non vide et } H \neq \{0\} \tag{3.3}$$

3. Solutions positives d'une équation différentielle fractionnaire non linéaire 41

$$\text{si } x \in H \text{ et } \alpha, \beta > 0 \text{ alors } \alpha.x + \beta.y \in H \quad (3.4)$$

$$\text{si } x \in H \text{ et } (-x) \in H \text{ alors } x = 0 \quad (3.5)$$

Proposition 3.3. *Soit H un cône d'un espace de Banach réel E .*

La relation binaire $\leq$ défini sur E par :

$$\forall x, y \in E : x \leq y \text{ si et seulement si } y - x \in H \quad (3.6)$$

est un ordre partiel sur E

Démonstration.

Réflexivité Pour tout $x \in E$ on a $x - x \in H$ et par suite $x \leq x$.

Anti-symétrie Si $x \leq y$ et $y \leq x$, alors $y - x \in H$ et $x - y \in H$, donc

$$y - x \in H \text{ et } -(y - x) \in H$$

ainsi d'après (3.5)

$$y - x = 0 \text{ et par suite } x = y$$

Transitivité : Si $x \leq y$ et $y \leq z$, alors :

$$y - x \in H \text{ et } z - y \in H$$

Donc d'après (3.4), on a :

$$2\left[\frac{1}{2}(y - x) + \frac{1}{2}(z - y)\right] \in H$$

ainsi $z - x \in C$.

Ce qui est équivalent à $x \leq z$. □

Remarque 3.4.

1. L'ordre $\leq$ introduit dans la proposition (3.3) s'appelle l'ordre introduit par le cône
2. Si $x \leq y$ et de plus $x = y$, on note $x < y$ et dans ce cas, on définit l'intervalle $\langle x, y \rangle$ de E par :

$$\langle x, y \rangle = \{z \in E : x \leq z \leq y\}$$

Définition 3.2. Un cône H d'un espace de Banach E est dit normale, s'il existe un nombre positif μ tel que :
si $x, y \in H$ et $0 < x < y$, alors :

$$\|x\|_E \leq \mu \|y\|_E \tag{3.7}$$

La plus petite constante μ qui vérifie (3.7), s'appelle la constante normale de H .

On considère dans tout ce qui suit, X l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$: $X = C([0, 1])$ muni de la norme :

$$\|f\|_X = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)| \tag{3.8}$$

et K le cône défini par :

$$K = \{x \in X : u(x) \geq 0; 0 \leq x \leq 1\} \tag{3.9}$$

et on définit l'opérateur A sur K par :

$$(Au)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, u(s)) ds \tag{3.10}$$

Définition 3.3. *On appelle sur-solution pour le problème (3.1) (pour l'opérateur A respectivement), toute fonction $u \in X$ vérifiant :*

$$D^\alpha u(t) \leq f(t, u(t)) \quad (u(t) \leq (Au)(t) \text{ respectivement})$$

On appelle sous-solution pour le problème (3.1) (pour le l'opérateur A respectivement), toute fonction $v \in X$ vérifiant :

$$D^\alpha v(t) \geq f(t, v(t)) \quad (v(t) \geq (Av)(t) \text{ respectivement})$$

3.3.2 Théorème d'existence

On est maintenant en mesure de prouver l'existence des solutions positives du problèmes (3.1) en utilisant la méthode de sur et sous-solutions fondée sur le théorème suivant

Théorème 3.5. [11]

Soient H un cône d'un espace de Banach E partiellement ordonné, D un sous espace de H et $F : D \rightarrow E$ un opérateur croissant.

On suppose qu'il existe $x_0, y_0 \in D$ tels que $x_0 \leq y_0$, $\langle x_0, y_0 \rangle \subset D$ et x_0, y_0 sont respectivement une sur-solution et sous-solution de l'opérateur F .

Si H est un cône normale et F est un opérateur compact, alors l'équation $x - F(x) = 0$ admet un point fixe dans $\langle x_0, y_0 \rangle$.

Proposition 3.6. *L'image de tout borné de K par A est borné.*

Démonstration. Soit M un bornée de K . Donc :

$$\exists C > 0 : \|u\|_X = \max_{x \in [0,1]} |u(x)| \leq C, \forall u \in M$$

Maintenant, pour tout $u \in M$, on a :

$$|(Au)(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, u(s))| ds \quad (3.11)$$

3. Solutions positives d'une équation différentielle fractionnaire non linéaire 44

Ainsi, pour

$$L = \max_{0 \leq t \leq 1; 0 \leq u \leq c} f(t, u(t)) \quad (3.12)$$

en déduit de (3.11) :

$$\begin{aligned} |(Au)(t)| &\leq \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\ &= \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \left[-\frac{(t-s)^\alpha}{\alpha} \right]_0^t = \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \frac{t^\alpha}{\alpha} \end{aligned}$$

Puisque $t \in [0, 1]$, on conclut que :

$$|(Au)(t)| \leq \frac{L}{\alpha\Gamma(\alpha)} = \frac{L}{\Gamma(\alpha+1)}$$

En tenant compte de la définition de la norme dans X donnée par (3.8), on obtient :

$$\|Au\|_X \leq \frac{L}{\Gamma(\alpha+1)}$$

d'où le résultat. □

Proposition 3.7. *Pour tout borné M de K , $A(M)$ est équicontinue.*

Démonstration. Pour chaque $u \in M$, $\forall \varepsilon > 0$, $t_1, t_2 \in [0, 1] : |t_1 - t_2| < \delta$,

3. Solutions positives d'une équation différentielle fractionnaire non linéaire 45

on suppose que $t_1 < t_2$ alors $|t_1 - t_2| = t_2 - t_1 < \delta$, et on a :

$$\begin{aligned}
 |A(u(t_1)) - A(u(t_2))| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} f(s, u(s)) ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, u(s)) ds \right| \\
 &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} f(s, u(s)) ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, u(s)) ds \right| \\
 &\quad - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, u(s)) ds \Big| \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} |(t_1 - s)^{\alpha-1} - (t_2 - s)^{\alpha-1}| |f(s, u(s))| ds \\
 &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} |f(s, u(s))| ds \\
 &\leq \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} ((t_1 - s)^{\alpha-1} - (t_2 - s)^{\alpha-1}) ds + \frac{l}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} ds \\
 &= \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} ds - \int_0^{t_1} (t_2 - s)^{\alpha-1} ds + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} ds \right] \\
 &= \frac{L}{\alpha \Gamma(\alpha)} [t_1^\alpha + (t_2 - t_1)^\alpha - t_2^\alpha + (t_2 - t_1)^\alpha] \\
 &= \frac{2L}{\alpha \Gamma(\alpha)} (t_2 - t_1)^\alpha + \frac{L}{\Gamma(\alpha)} (t_1^\alpha - t_2^\alpha)
 \end{aligned}$$

L étant la constante définie par (3.12)

puisque $t_1 \leq t_2$:

$$\begin{aligned}
 |A(u(t_1)) - A(u(t_2))| &\leq \frac{2L}{\alpha \Gamma(\alpha)} (t_2 - t_1)^\alpha \\
 &= \frac{2L}{\Gamma(\alpha + 1)} (t_2 - t_1)^\alpha.
 \end{aligned}$$

il suffit donc de choisir $\delta = \left(\frac{\epsilon \Gamma(\alpha+1)}{2L}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ pour aboutir au résultat. $\square$

Théorème 3.8. *L'opérateur A définie par (3.10) est un opérateur compact.*

Démonstration. Le résultat découle immédiatement des propositions (3.6) et (3.7) et du théorème de Arzela-Ascoli (1.7) $\square$

Théorème 3.9. [5] *Sous les conditions suivantes*

(H_1) : $f : [0, 1] \times [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ est continue, $f(t, \cdot)$ est croissante pour tout $t \in [0, 1]$, et il existe une constante positive a telle que $f(t, \cdot)$ est strictement croissante sur $[0, a]$ pour tout $t \in [0, 1]$.

(H_2) : u_0, v_0 sont respectivement une sous-solution et sur-solution pour l'équation (3.1) vérifiant $u_0 \leq v_0, 0 \leq t \leq 1$

l'équation (3.1) admet une solution positive.

Démonstration. Soit $u_1, u_2 \in K$, on a :

$$(Au_1)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, u_1(s)) ds$$

donc d'après (H_1) si $u_1 \leq u_2$, on a :

$$\begin{aligned} (Au_1)(t) &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, u_2(s)) ds \\ &= (Au_2)(t) \end{aligned}$$

et par suite A est un opérateur croissant.

D'autre part, d'après (H_2) et vue la définition (3.3), u_0, v_0 sont respectivement une sous-solution et sur-solution pour l'opérateur A , par suite

$$(Au_0) \geq u_0 \text{ et } (Av_0) \leq v_0$$

3. Solutions positives d'une équation différentielle fractionnaire non linéaire 47

et donc l'opérateur A applique $\langle u_0, v_0 \rangle$ sur $\langle u_0, v_0 \rangle$.

c'est à dire :

$$A : \langle u_0, v_0 \rangle \subset K \rightarrow \langle u_0, v_0 \rangle$$

Enfin, puisque K est un cône normale et d'après le théorème (3.8), A est un opérateur compact, ainsi le résultat découle immédiatement du théorème (3.5). □

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. Amman ,*Ordinary Differential Equations, An Introduction to nonlinear Analysis*, Studies in Mathematics, **13**, Walter de Gryter, 1991.
- [2] A.A.A Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo Theory and applications of fractional differential Equations, North-Holland Mathematical studies 204, Ed van Mill, Amsterdam, (2006).
- [3] Samko S.G., Klbas A.A. and Marichev O.I. (1993), Fractional integrals and derivatives : theory and applications, Gordon and Breach, New York.
- [4] M. Garh, A. Rao, S. L. Kalla; emphFractional generalization of temperature fields problems in oil strata, Mat. Bilten 30 (2006) 71-84.
- [5] Zhang S, The Existence of a Positive Solution for a Nonlinear Fractional Differential Equation, J.Math.Anal.Appl., **252**, 804-812 (2000).
- [6] Yang C,Zhai C.B, Uniqueness of Positive Solutions for a Fractional Differential Equation Via a Fixed Point Theorem of a Sum Operator, Elec.J.Diff.Eqs., **70**, 1-8 (2012).
- [7] Ye H,Gao J, The Existence of a Positive Solution of $D^\alpha [x(t) - x(0)] = x(t)f(t, x_t)$, Birkhauser Verlag Basel,Positivity 11, pp.341-350 (2007).
- [8] Lin L,Liu X,Fang H, Method of Upper and Lower Solutions for Fractional Differential Equations, Elec.J.Diff.Eqs., **100**, 1-13 (2012).
- [9] F.Boyer,P.Fabrie ,*Mathematical Tools for the Study of the Incompressible Navir-Stokes Equations and Related Models*, Appl.Math.Sci, New York, 2013.

- [10] Erdelyi A, Magnus W, Oberhettinger F and Tricomi F, Higher Transcendental Functions, Vol.III, Krieger Pub, Melbourne, Florida, (1981).
- [11] Chengkui Zhong, Xianlin Fan, Wenyuan Chen, Nonlinear Functional Analysis and Its Application, Lanzhou Univ. Press, 1998.