Calcul fractionnaire

Abdelghani Ouahab

Laboratoire de Mathématiques, Université de Sidi-Bel-Abbès
B.P. 89, 22000 Sidi-Bel-Abbès, Algérie.
E-Mail. : ouahab@univ-sba.dz, agh_ouahab@yahoo.

Table des matières

Introduction

En 1695, Leibniz dans une lettre à l'Hospital, voulut engager une réflexion sur une possible théorie de la dérivation non entière d'une fonction. Dans sa réponse, l'Hospital s'est intérrogé sur la signification qu'on pourrait donner à la dérivée d'ordre 1/2. *En effet,* 1/2 *est à égale distance de l'ordre* 0 *qui est sensé désigner la continuité et l'ordre* 1 *sensé désigner la dérivabilité classique. La réponse de Leibniz contenait à peu près cette phrase :* "*cela conduirait à un paradoxe à partir duquel, un jour, on pourra tirer des conséquences utiles*".

Depuis cette époque, la dérivation d'ordre non entier a attiré l'attention de nombreux mathématiciens célèbres, tels Euler (1730), Laplace (1812), Fourier (1822), Abel (1823-1826), Liouville(1832-1873), Riemann (1847), et Laurent (1884). C'est seulement lors de ces dernières décennies que cette théorie commence a toucher un nombre important de domaines mathématiques et autres grace à une explosion des activités de recherche sur l'application du calcul fractionnaire touchant la physique, la mécanique, la diffusion fractale, la biologie, l'électrotechnique, l'électrochimie,...

La théorie du calcul fractionnaire est presque aussi vieille que le calcul lui-même, mais aujourd'hui, un certain nombre de manuels ont été publiés sur ce domaine et ses applications, on cite par exemple le livre de S. G. Samko, et al [4], qui considéré comme une encyclopédie de la dérivation et de l'intégration d'ordre fractionnaire. On peut cite également les travaux de K. Diethelm [2], A. A. Kilbas et al. [5] et K. B. Oldham et al. [7].

Ce cours est décomposé en trois chapitres organisés de la façon suivante :

Dans le premier chapitre, nous introduisons quelques notions concernant les espaces fonctionnels tels que : l'espace de Hölder, les espaces L^p et l'espace des fonctions absolument continues. Pour plus de détails, nous proposons les ouverages de F. Demengel [1] et S. Fučik et al. *[3], et A. Komogorov et S. Fomine [6].*

Au second chapitre, nous présentons quelques fonctions spéciales qui jouent un rôle important dans le calcul fractionnaire. Nous en citons : la fonction Gamma, la fonction Béta (ou la fonction de Bessel de seconde espèce) et la fonction de Mittag-Liffler. Pour plus de détail voir [8].

Dans le chapitre trois, nous allons aborder la dérivation et l'intégration fractionnaire *au sens de Riemann-Liouville ainsi que au sense de Caputo. La propriété de semi-groupe et la formule de Leibnitz sont abordés également. Cette note de cours est basée essentiellement sur les documents cités en référence(se conférer a la bibliographie) notament l'ouvrage de A. A. Kilbas et al. [5] ainsi que celui de K. Diethelm [2].*

Chapitre 1

Espaces fonctionnels

1.1 Espaces des fonctions continues sur un domaine ouvert de $\mathbb{R}^n$

Notations

$(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n,\ |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$.
$C_\alpha^\beta = \left(\begin{array}{c} \alpha \\ \beta \end{array} \right) = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$.
$D^\alpha f = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_n} x_n} f$
$\alpha! = \alpha_1!\alpha_2! \cdots \alpha_n!$
$x^\alpha = x_1^{\alpha_1}.x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$.

Définition 1.1 *Un sous ensemble Ω de $\mathbb{R}^n$ est dit domaine si :*

1. *Ω un ouvert dans $\mathbb{R}^n$.*
2. *Ω est connexe dans $\mathbb{R}^n$.*

Définition 1.2 *Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^n$. On définit respectivement les espaces $C^0(\Omega)$ et $C^m(\Omega)$ $m \in \mathbb{N}$ et $C^\infty(\Omega)$ par :*

$$C^0(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \textit{ continue } \}$$

$$C^m(\Omega) = \{f \in C^{m-1}(\Omega) :\ D^\alpha f \in C^0(\Omega),\ |\alpha| = m\},\ \textit{pour } m \geq 1.$$

$$C^\infty(\Omega) = \cap_{m=0}^\infty C^m(\Omega).$$

Notons maintenant

$$C_0(\Omega) = \{f \in C(\Omega) \textit{ tel que supp}(f) = K \textit{ soit compact}\}.$$

Exemple 1.1 *Montrer que* $C_0(\Omega) = B(\Omega)$ *avec*

$$B(\Omega) = \{f \in C(\Omega) : \ f \equiv 0 \text{ sur } \Omega \backslash K, \ K \text{ compact dans } \Omega\}.$$

Solution : • *Soit* $f \in C_0(\Omega) \Rightarrow supp(f) = K$ *est un compact dans* $\mathbb{R}^n$. *Pour* $x \in \Omega \backslash K \Rightarrow x \notin K \Rightarrow x \notin supp(f) \Rightarrow f(x) = 0$.
Alors $f(x) = 0, \ \forall x \in \Omega \backslash K$. *D'où* $C_0(\Omega) \subset B(\Omega)$.

- *On a* $f \in B(\Omega) \Rightarrow \exists \ K$ *compact tel que :* $f \equiv 0$ *sur* $\Omega \backslash K$

$$supp(f) = \overline{\{x \in \Omega : \ f(x) \neq 0\}}.$$

Puisque $f \equiv 0$ *sur* $\Omega \backslash K \Rightarrow supp(f) \subseteq K \Rightarrow supp(f) = K$ *compact dans* $\mathbb{R}^n$.
D'où $B(\Omega) = C_0(\Omega)$.

Définition 1.3 *Soit* Ω *un domaine de* $\mathbb{R}^n$. *On définit les espaces* $C^0(\overline{\Omega})$, $C^m(\overline{\Omega})$ *et* $C^\infty(\overline{\Omega})$ *par :*

$$C^0(\overline{\Omega}) = \{f \in C^0(\Omega) : \ f \text{ bornée et uniformément continue sur } \Omega\}.$$

$$C^m(\overline{\Omega}) = \{f \in C^m(\Omega) : \ D^\alpha f \in C^0(\overline{\Omega}), \ |\alpha| \leq m\}.$$

$$C^\infty(\overline{\Omega}) = \cap_{m=0}^{\infty} C^m(\overline{\Omega}).$$

Définition 1.4 *Soit* f *une fonction définie sur* Ω *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *On dit qu'elle vérifie la condition de Hölder d'ordre* $\lambda \in \mathbb{R}_+$ *s'il existe une constante* $A(f) \geq 0$ *telle que*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq A|x_1 - x_2|^\lambda, \quad \forall x_1, x_2 \in \Omega \qquad (CH)$$

pour un certain constant.

Définition 1.5 *Soit* Ω *un domaine de* $\mathbb{R}^n$ *et* $\lambda \in]0, 1]$. *Une fonction* $f \in C^m(\Omega)$ *est Hölderienne s'il existe* $\widetilde{A} > 0$ *tel que*

$$|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)| \leq \widetilde{A}|x - y|^\lambda, \ \forall x, y \in \Omega, \ |\alpha| \leq m \qquad (CH)'.$$

Lemme 1.1 *Soit* f *une fonction satisfaisant la condition* $(CH)'$, *alors*

$$H_{\alpha,\lambda}(f) = \sup_{x,y\in\Omega, x\neq y} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|}{|x - y|^\lambda} < +\infty, \ \forall \alpha : \ |\alpha| \leq m.$$

Démonstration. *D'après la définition 1.5* $\exists A(f) > 0$, *tel que :*

$$|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)| \leq A(f)|x - y|^\lambda, \ \forall x, y \in \Omega.$$

Si

$$\begin{aligned} x \neq y \quad \Rightarrow \quad & \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|}{|x - y|^\lambda} \leq A(f) < +\infty, \ \forall \ x, y \in \Omega \\ \Rightarrow \quad & \sup_{x,y\in\Omega, x\neq y} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|}{|x - y|^\lambda} \leq A(f) < +\infty, \ \forall \ |\alpha| \leq m. \end{aligned}$$

□

On note $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}) = \{f \in C^m(\overline{\Omega}) : \ H_{K,\alpha}(f) < +\infty, \ |\alpha| \leq m\}$.

Remarque 1.1

1. *Si* $\lambda \in]0,1]$, *on dit que* f *est Höldeienne, et on note* $C^{0,\lambda}(\overline{\Omega}) = H^{\lambda}(\overline{\Omega})$ *l'espace de Hölder.*
2. *Si* $\lambda = 1$, $C^{0,1}(\overline{\Omega})$ *l'espace des fonctions lipschitzienne.*

Lemme 1.2 *Si* f *est une fonction Hölderienne alors* f *est uniformément continue sur* Ω.

Démonstration. *Le fait que* f *soit Hölderienne alors*

$$\exists \ A(f) > 0, \quad |f(x_1) - f(x_2)| \leq A(f)|x_1 - x_2|^{\lambda}, \ \forall x_1, x_2 \in \Omega.$$

$|f(x_1) - f(x_2)| \leq A(f)|x_1 - x_2|^{\lambda} < \varepsilon \Rightarrow |x_1 - x_2| < \left(\frac{\varepsilon}{A}\right)^{\frac{1}{\lambda}}$.
Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta = \left(\frac{\varepsilon}{A}\right)^{\frac{1}{\lambda}} > 0, \ \forall x_1, x_2 \in \Omega : \ |x_1 - x_2| < \eta \Rightarrow |f(x_1 - f(x_2)| < \varepsilon.$$

C'est-à-dire f *est uniformément continue.* □

Lemme 1.3 *Soit* Ω *un domaine de* $\mathbb{R}^n$, $0 \leq \gamma \leq \lambda$. *Alors*

$$H_{\alpha,\gamma}(f) \leq H_{\alpha,\lambda}(f)(diam(\Omega))^{\lambda-\gamma}$$

et

$$H_{\alpha,\gamma}(f) \leq \left(2 \max_{x \in \overline{\Omega}} |D^{\alpha} f(x)|\right)^{\frac{\lambda-\gamma}{\lambda}} (H_{\alpha,\lambda}(f))^{\frac{\gamma}{\lambda}}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
H_{\alpha,\gamma}(f) &= \sup_{x,y \in \Omega, x \neq y} \frac{|D^{\alpha} f(x) - D^{\alpha} f(y)|}{|x-y|^{\gamma}} \\
&= \sup_{x,y \in \Omega, x \neq y} \frac{|x-y|^{\lambda}|D^{\alpha} f(x) - D^{\alpha} f(y)|}{|x-y|^{\gamma}|x-y|^{\lambda}} \\
&= \sup_{x,y \in \Omega, x \neq y} |x-y|^{\lambda-\gamma} \frac{|D^{\alpha} f(x) - D^{\alpha} f(y)|}{|x-y|^{\lambda}} \\
&\leq \sup_{x,y \in \Omega, x \neq y} |x-y|^{\lambda-\gamma} \sup_{x,y \in \Omega, x \neq y} \frac{|D^{\alpha} f(x) - D^{\alpha} f(y)|}{|x-y|^{\lambda}} \\
&\leq (diam(\Omega))^{\lambda-\gamma} H_{\alpha,\lambda}(f).
\end{aligned}$$

Puisque $1 = \frac{\lambda-\gamma}{\lambda} + \frac{\gamma}{\lambda}$. *Alors*

$$\begin{aligned} H_{\alpha,\gamma}(f) &= \sup_{x,y\in\Omega, x\neq y} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|}{|x-y|^\gamma} \\ &\leq \sup_{x,y\in\Omega, x\neq y} |D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|^{\frac{\lambda-\gamma}{\lambda}} \sup_{x,y\in\Omega, x\neq y} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|^{\frac{\gamma}{\lambda}}}{|x-y|^\gamma} \\ &\leq \left(2 \max_{x\in\overline{\Omega}} |D^\alpha f(x)|\right)^{\frac{\lambda-\gamma}{\lambda}} . \left[\sup_{x,y\in\Omega, x\neq y} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|}{|x-y|^\lambda}\right]^{\frac{\gamma}{\lambda}} \\ &= \left(2 \max_{x\in\overline{\Omega}} |D^\alpha f(x)|\right)^{\frac{\lambda-\gamma}{\lambda}} . \left[H_{\alpha,\lambda}(f)\right]^{\frac{\gamma}{\lambda}} . \end{aligned}$$

□

Lemme 1.4 *Si $\lambda > 1$ alors : $C^{m,\lambda}(\Omega)$ c'est l'espace des fonctions constantes. (i. e $\forall\ f \in C^{m,\lambda}(\Omega) \Rightarrow\ \exists c \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ tel que $f(x) = c$ sur Ω). On peut déduire aussi que $H^\lambda(\Omega)$ c'est l'espace des fonctions constantes.*

Démonstration. *Soient $f \in C^{m,\lambda}(\Omega)$, $\lambda > 1$ et $|\alpha| \leq m \Rightarrow H_{\alpha,\lambda}(f) < +\infty$*

$H_{\alpha,\lambda}(f) = \sup_{x,y\in\Omega, x\neq y} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|}{|x-y|^\lambda} < +\infty \ \Rightarrow \exists A(f) > 0$ *tel que*

$$\begin{aligned} H_{\alpha,\lambda}(f) < +\infty \ &\Rightarrow \ \sup_{x,y\in\Omega, x\neq y} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|}{|x-y|^\lambda} \leq A(f),\ \forall x, y\Omega \\ &\Rightarrow \ |D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)| \leq A(f)|x-y|^\lambda,\ \forall x, y \in \Omega \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|}{|x-y|} \leq A(f)|x-y|^{\lambda-1}$$

$$0 \leq \lim_{|x-y|\to 0} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y) - o(x-y)|}{|x-y|} \leq \lim_{|x-y|\to 0} A(f)|x-y|^{\lambda-1} = 0$$

$$\lim_{|x-y|\to 0} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|}{|x-y|} = 0 \Rightarrow D^\alpha f(x) = 0,\ \forall |\alpha| \leq m.$$

Ce qui montre qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = c$ pour tout $x \in \Omega$. □

1.2 Espaces de Hölder

Définition 1.6 *Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in]0, 1]$. On définie $C^{m,\lambda,0}(\overline{\Omega})$ par*

$$C^{m,\lambda,0}(\overline{\Omega}) = \left\{ f \in C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}) : \ \lim_{|x-y|\to 0} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|}{|x-y|^\lambda} = 0,\ \forall \alpha : \ |\alpha| = m \right\}$$

Lemme 1.5 *Une fonction $f \in C^{m,1,0}(\overline{\Omega})$ si et seulement si f est un pôlynome de degré inférieur ou égale à m.*

- $C^{m,\lambda,0}(\overline{\Omega}) \subset C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$.
- $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}) \subset C^{m,\gamma,0}(\overline{\Omega})$ *avec* $0 < \gamma < \lambda \leq 1$.

Démonstration. *Par définition* $C^{m,\lambda,0}(\overline{\Omega}) \subset C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$.
Soit $f \in C^{k,\lambda}(\overline{\Omega}) \Rightarrow f \in C^{k,\lambda,0}(\overline{\Omega})$

$$H_{\alpha,\gamma}(f) = \sup_{x,y\in\overline{\Omega}} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|}{|x-y|^\gamma} \Rightarrow \lim_{|x-y|\to 0} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|}{|x-y|^\gamma} = 0$$

Soient $x, y \in \Omega$ *tels que* $x \neq y$

$$\begin{aligned} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|}{|x-y|^\gamma} &= \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)||x-y|^\lambda}{|x-y|^\lambda |x-y|^\gamma} \\ &= \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|}{|x-y|^\lambda}|x-y|^{\lambda-\gamma}, \end{aligned}$$

alors

$$\frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|}{|x-y|^\gamma} \leq H_{\alpha,\lambda}(f).|x-y|^{\lambda-\gamma}$$

D'où

$$\lim_{|x-y|\to 0} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|}{|x-y|^\gamma} = 0 \Rightarrow f \in C^{m,\gamma,0}(\overline{\Omega}).$$

□

Remarque 1.2 *Pour tout* $\gamma, \lambda \in [0, 1]$ *avec* $0 < \gamma < \lambda \leq 1$ *on a*

- $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}) \subset C^{m,\gamma}(\overline{\Omega})$.

Mais en général on n'a pas l'assertion suivante

- $C^{k+1,\lambda}(\overline{\Omega}) \subset C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$ *ou* $C^{k+1}(\overline{\Omega}) \subset C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$.

Définition 1.7 *Soit* Ω *un domaine de* $\mathbb{R}^n$. *On dit que* Ω *satisfait la condition (S)*
S'il existe $M > 0$, $\forall\ x, y \in \Omega$ *il existe* $x = z_0, z_1, \ldots, z_n = y$ *tel que* $[z_i, z_{i+1}] \subset \Omega$ *tel que*

$$\sum_{i=0}^{n-1} |z_i - z_{i+1}| \leq M|x-y|,$$

où $[z_i, z_{i+1}] = \{tz_i + (1-t)z_{i+1} :\ t \in [0, 1]\}$.

Théorème 1.1 *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *vérifiant la condition* (S). *Alors* $C^{m+1}(\overline{\Omega}) \subset C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ *et* $C^m(\overline{\Omega}) = \widetilde{C}^m(\overline{\Omega})$, $\lambda \in]0, 1]$, $m \in \mathbb{N}^*$ *tel que*

$$\widetilde{C}^m(\overline{\Omega}) = \{u \in C(\overline{\Omega}) :\ D^\alpha u \in C(\Omega),\ \textit{pour tout}\ |\alpha| = 0\ \textit{et}\ |\alpha| = m\}.$$

Démonstration. *Soit* $f \in C^{m+1}(\overline{\Omega}) \Rightarrow f \in C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ *i.e.* $H_{\alpha,\lambda}(f) < +\infty$?

$$\begin{aligned}
|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)| &\leq \sum_{i=1}^{n-1} |D^\alpha f(z_i) - D^\alpha f(z_{i+1})| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n-1} \sup_{t\in[0,1],\beta=\alpha+1} |D^\beta f(tz_i - t(z_{i+1} - z_i))||z_i - z_{i-1}| \\
&\leq \max_{|\beta|=|\alpha|+1} \sup_{z\in\Omega} |D^\beta f(z)| \sum_{i=1}^{n-1} |z_i - z_{i-1}| \\
&\leq M \max_{|\beta|=|\alpha|+1} \sup_{z\in\Omega} |D^\beta f(z)||x-y|,\ x, y \in \Omega.
\end{aligned}$$

1.2.1 Topologie

Lemme 1.6 *Soient* $m \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in]0,1]$, *et* $f \in C^m(\overline{\Omega})$,

$$\|f\|_m = \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{m\in\Omega} |D^\alpha f(x)|$$

et

$$\|f\|_{m,\lambda} = \|f\|_m + \sum_{|\alpha|\leq m} [f]_{\alpha,\lambda},\ [f]_{\alpha,\lambda} = H_{\alpha,\lambda}(f).$$

Alors $(C^m(\overline{\Omega}), \|.\|_m)$ *et* $(C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}), \|.\|_{m,\lambda})$ *sont des espaces normés.*

Théorème 1.2 $C^m(\overline{\Omega}$ *et* $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ *sont des espace de Banach.*

Démonstration. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suit de Cauchy dans* $C^m(\overline{\Omega})$ *alors il existe* $f \in C^m(\overline{\Omega})$ *tel que* $\|f_n - f\|_m \longrightarrow 0$, $n \longrightarrow +\infty$. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de Cauchy dans* $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$.
Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de Cauchy dans* $C^m(\overline{\Omega})$.
Donc il existe $f \in C^m(\overline{\Omega})$ *tel que* $\|f_n - f\|_m \longrightarrow 0$, $n \longrightarrow +\infty$
Montrons que $f \in C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$.
Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de Cauchy dans* $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$, *alors*

$$\begin{aligned}
\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists n_0(\varepsilon):\ \forall n, p > n_0(\varepsilon) &\Rightarrow \|u_n - u_p\|_{m,\lambda} < \varepsilon \\
&\Rightarrow [f_n - f]_{m,\lambda} < \varepsilon \\
&\Rightarrow H_{m,\lambda}(f_n - f) < \varepsilon
\end{aligned}$$

Soient $n, p \geq n_0(\varepsilon)$ *alors*

$$H_{\alpha,\lambda}(f_n - f) = \sup_{(x,y)\in\Omega^2, x\neq y} \frac{|D^\alpha f_n(x) - D^\alpha f_p(x) - D^\alpha f_n(y) + D^\alpha f_p(y)|}{|x-y|\lambda}.$$

Donc $\forall x, y \in \Omega$, $x \neq y$.

$$|x-y|^{-\lambda}|D^\alpha f_n(x) - D^\alpha f_n(y) - [D^\alpha f_p(x) - D^\alpha f_p(y)]| \leq \varepsilon.$$

Pour $p \longrightarrow +\infty$ *on a :*

$$H_{\alpha,\lambda}(f_n - f) < \varepsilon, \ \forall n \geq n_0(\varepsilon),$$

ce qui montre $f_n - f \in C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$, $\forall n \geq n_0$.
Comme $f = f_n - (f_n - f) \in C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$.

$$[f, g \in C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}) \Rightarrow f + g \in C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})].$$

De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} H_{\alpha,\lambda}(f_n - f) = 0$.
d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{m,\lambda} = 0$, *donc* $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ *est un espace de Banach.*

$\square$

Exercice 1.1 *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in]0, 1]$

1. *Montrer que l'application* $\begin{array}{rccc} |||.|||_{m,\lambda}: & C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & f & \longrightarrow & |||f|||_{m,\lambda} \end{array}$ *est une norme.*

$$|||f|||_{m,\lambda} = \|f\|_m + \sum_{|\alpha|=m} \sup_{h\in\mathbb{R}^n, x\in\Omega_{2h}, h\neq 0} \frac{|D^\alpha f(x+2h) - 2D^\alpha f(x+h) - D^\alpha f(x)|}{|h|^\lambda}.$$

   avec $\Omega_{2h} = \{x \in \Omega : \ x + h \in \Omega, \ x - 2h \in \Omega\}$.

2. *Montrer que* $|||.|||_{m,\lambda}$ *est équivalante à* $\|.\|_{m,\lambda}$.

Solution. *On peut facilement prouver que* $|||.|||_{m,\lambda}$ *c'est une norme, de plus*

$$|||f|||_{m,\lambda} \leq 2\left(\|f\|_m + \sum_{|\alpha|=m} [f]_{m,\lambda}\right) = 2\|f\|_{m,\lambda}.$$

1.2.2 Séparabilité

En 1885 Weierstrass il a montré que l'espace des fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ *à valeur dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *est séparable.*

Théorème 1.3 *Soit* $f \in C([a, b])$ *avec* $a, b \in \mathbb{R}$. *Alors* $\forall \varepsilon > 0, \ \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, $\exists a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$|f(t) - (a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n)| < \varepsilon, \quad \forall t \in [a, b].$$

Pour démontrer ce théorème on aura besoin du lemme de P. P. Korovkin qui suit.

Lemme 1.7 *Soit* $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite d'opérateurs linéaires monotones de* $C([0, 1])$ *dans lui même. Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \|H_n e_i - e_i\|_\infty = 0$ *avec* $e_i(t) = t^{i-1}$, $i \in \mathbb{N}^*$,
alors pour tout $f \in C([0, 1])$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \|H_n(f) - f\|_\infty = 0$, *où* $\|x\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]} |x(t)|$.

Démonstration. *Soit* $f \in C([0,1])$. *Comme* f *est une fonction uniformément continue sur* $[0,1]$, *alors* $\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ *tel que*

$$|f(t_1) - f(t_2)| < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \forall t_1, t_2 \in [0,1], \ |t_1 - t_2| < \delta.$$

Pour $s, t \in [0,1]$ *tel que* $|t-s| < \delta(\varepsilon)$

Pour $|t-s| \geq \delta$. *on a* $|f(t) - f(s)| \leq 2\|f\|_\infty$. *Puisque* $|t-s| \geq \delta \Rightarrow (t-s)^2\delta^{-2} > 1$. *Donc*

$$|f(t) - f(s)| \leq 2\|f\|_\infty \delta^{-2}(t-s)^2. \tag{1.1}$$

Soit $s \in [0,1]$. *On considère* $g(t) = f(t) - f(s) = f(t) - f(s)e_1(t)$ *et*

$$\begin{aligned} w(t) &= \frac{1}{2}\varepsilon + 2\|f\|_\infty \delta^{-2}(t-s)^2 \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon + 2\|f\|_\infty \delta^{-2}(t^2 - 2st + s^2) \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon e_1(t) + 2\|f\|_\infty \delta^{-2}(e_3(t) - 2se_2(t) + se_1(t)). \end{aligned}$$

D'après (1.1) on a

$$-w(t) \leq g(t) \leq w(t) \Rightarrow -(H_n w)(t) \leq (H_n g)(t) \leq (H_n w)(t),$$

et par la linéarité de H_n *on obtient*

$$(H_n g)(t) = (H_n f)(t) - f(s)(H_n e_1)(t),$$

et

$$(H_n w)(t) = \frac{1}{2}\varepsilon((H_n e_1)(t) + 2\|f\|_\infty \delta^{-2}(H_n e_n)(t) - 2s(H_n e_2)(t) + s^2(H_n e_1)(t)).$$

Ce qui montre que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall s, t \in [0,1]$

$$-H_n(f_n(s) - f_n(s)) = (H_n f)(t) - f(s)(H_n e_1)(t) = H_n(f_n(t) - f_n(s)) = (H_n g)(t).$$

Alors on obtient

$$\begin{aligned} |(H_n g)(t)| &= |(H_n f)(t) - f(s)(H_n e_1)(t)| \\ &\leq |(H_n w)(t)| \\ &\leq \frac{1}{2}\varepsilon((H_n e_1)(t) + 2\|f\|_\infty \delta^{-2}(H_n e_3)(t) \\ &\quad -2s(H_n e_2)(t) + s^2(H_n e_1)(t)) \end{aligned} \tag{1.2}$$

Posons que $s = t$ *alors d'après (1.2) on trouve*

$$\begin{aligned} |(H_n f)(t) - f(t)(H_n e_1)(t)| &\leq \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon[(H_n e_1)(t) - e_1(t)] \\ &+ 2\|f\|_\infty \delta^{-2}\{[(H_n e_2)(t) - e_2(t)] \\ &+ t^2[(H_n e_1)(t) - e_1] - 2t[(H_n e_2)(t) - e_2(t)]\}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
|(H_nf)(t) - f(t)| &= |(H_nf)(t) - f(t)(H_ne_1)(t) + f(t)(H_ne_1)(t) - f(t)e_1(t)| \\
&\leq |(H_nf)(t) - f(t)(H_ne_1)(t)| + |f(t)(H_ne_1)(t) - f(t)e_1(t)| \\
&\leq \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon|(H_ne_1)(t) - e_1(t)| + 2\|f\|_\infty\delta^{-2}|(H_ne_3)(t) - e_3(t)| \\
&+ 2\|f\|_\infty\delta^{-2}|(H_ne_2)(t) - e_2||e_2(t)| + 2\|f\|_\infty\delta^{-2}|(H_ne_2)(t) - e_2(t)||e_2(t)| \\
&+ 2\|f\|_\infty\delta^{-2}|(H_ne_1)(t) - e_1(t)||e_3(t)| + 2\|f\|_\infty\delta^{-2}|(H_ne_1)(t) - e_1(t)| \\
&\leq \frac{1}{2}\varepsilon + \left[\frac{1}{2}\varepsilon + |f(t)| + 2\|f\|_\infty\delta^{-2}|e_3(t)|\right] |(H_ne_1)(t) - e_1(t)| \\
&+ 4\delta^{-2}\|f\|_\infty|e_2(t)|\ |(H_ne_2)(t) - e_2(t)| + 2\|f\|_\infty\delta^{-2}|(H_ne_3)(t) - e_3(t)|.
\end{aligned}$$

Ceci donne

$$\begin{aligned}
\|H_nf - f\|_\infty &\leq \frac{1}{2}\varepsilon + \left[\frac{1}{2}\varepsilon + \|f\|_\infty + 2\|f\|_\infty\delta^{-2}\|e_3\|_\infty\right] \|H_ne_1 - e_1\|_\infty \\
&+ 4\delta^{-2}\|f\|_\infty\|e_2\|_\infty\ \|H_ne_2 - e_2\|_\infty + 2\|f\|_\infty\delta^{-2}\|H_ne_3 - e_3\|_\infty.
\end{aligned}$$

Alors $\|H_nf - f\|_\infty \longrightarrow 0$ *si* $n \longrightarrow +\infty$. □

Démonstration. *(Théorème 1.3)*
On définit l'opérateur

$$\begin{array}{rccc} B_n & C([0,1]) & \longrightarrow & C([0,1]) \\ & f & \longrightarrow & B_nf \end{array}$$

$$(B_nf)(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{k}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) t^i(1-t)^{n-i}, \quad n \in \mathbb{N},\ t \in [0,1].$$

B_n *est linéaire continu*

$$(B_ne_1)(t) = 1, \qquad (B_ne_2)(t) = t$$

$$(B_ne_3)(t) = t^2 + \frac{t-t^2}{n} = e_3(t) + \frac{t-t^2}{n}$$

Alors $\|(B_ne_i) - e_i\|_\infty \longrightarrow 0$ *quand* $n \longrightarrow +\infty$, $i = 1, 2, 3$.
Il suffit de montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|(B_ne_i) - e_i\|_\infty = 0$ *pour tout* $n > 3$.
Alors d'après le lemme précédent pour toute $f \in C^0([0,1])$ *on a* $\|(B_ne_i) - e_i\|_\infty \longrightarrow 0$ *quand* $n \longrightarrow +\infty$.
D'où le résultat annoncé. □

Théorème 1.4 *Soit* $f \in C(\overline{\Omega})$, *alors pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe un polynôme* $P_n(x) = \sum\limits_{|\alpha|\leq n} a_\alpha x^\alpha$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$ *pour* $a_\alpha \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\|f - P_n\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Théorème 1.5 *L'espace $C(\overline{\Omega})$ est séparable.*

Démonstration. *Soit $\varepsilon > 0$ et P_n un polynôme définie dans le théorème 1.4. Puisque Ω borné il existe $d > 0$ tel que*

$$\overline{\Omega} \subseteq C_d = [-d, d]^n = \underbrace{[-d, d] \times \cdots \times [-d, d]}_{n \text{ fois}}$$

Soit $\bar{c} = \text{card}\{a_\alpha : \ |\alpha| \leq n\}$.
Comme $\mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}} \Rightarrow \exists r_\alpha \in \mathbb{Q}^n$ tel que :

$$|r_\alpha - a_\alpha| \leq \frac{\varepsilon}{\bar{c} d^{|\alpha|}}. \tag{1.3}$$

On considère le polynôme $\psi(x) = \sum_{|\alpha| \leq n} r_\alpha x^\alpha$. Alors d'après (1.3) on obtient que

$$\begin{aligned} |P_n(x) - Q_n(x)| &\leq \sum_{|\alpha| \leq n} |a_\alpha - r_n| \ |x|^\alpha & (1.4) \\ &\leq \varepsilon \sum_{|\alpha| \leq n} \frac{1}{\bar{c} \ d^{|\alpha|}} \ d^{|\alpha|} = \varepsilon, \ \forall x \in \overline{\Omega}. & (1.5) \end{aligned}$$

Donc $\|P_n - Q_n\|_\infty \leq \varepsilon$

$$\|f - Q\|_\infty \leq \|f - P_0\|_\infty + \|P_1 - Q\|_\infty < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Ce qui montre la séparabilité de $C(\overline{\Omega})$ □

Théorème 1.6 *L'espace $C^m(\overline{\Omega})$ est séparable.*

Démonstration. *Soient $P = \text{card}\{\alpha : \ |\alpha| \leq m\}$ et $Y = [C(\overline{\Omega})]^p = \underbrace{C(\overline{\Omega}) \times \cdots \times C(\overline{\Omega})}_{p \text{ fois}}$.*

Posons $U = \{f_\alpha : \ |\alpha| \leq k\} = \{f_{\alpha_1 \cdots \alpha_n} : \ |\alpha| \leq k\} \in Y$, $U_\alpha \in C(\overline{\Omega})$.
On définit sur Y la norme suivante $\|U\|_Y = \sum_{|\alpha| \leq k} \|f_\alpha\|_\infty$.
$(Y, \|.\|_Y)$ est un espace de Banach séparable car $C(\overline{\Omega})$ est séparable.
On définie Y_1 comme suite :

$$U = \{u_\alpha : \ |\alpha| \leq m\} \in Y \quad \text{ ssi } \quad \exists u_0 \in C^m(\overline{\Omega}) : \ u_\alpha = D^\alpha u_0$$

$Y_1 \subseteq Y$ est séparable. Montrons que Y_1 est isomorphs à $C^k(\overline{\Omega})$. □

Théorème 1.7 *Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $0 < \lambda \leq 1$. Alors l'espace $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ n'est pas séparable.*

Démonstration. *Il suffit de prouver la séparabilité de $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ dans le cas où $n = 1$, $m = 0$ et $\Omega =]0, 1[$.*
Soit $a \in]0, 1[$ on considère la fonction $f \in C(\overline{\Omega})$telle que

$$f_a(t) = \begin{cases} 0, & \text{pour } t \in [0, a] \\ (t-a)^\lambda, & \text{pour } t \in]a, 1] \end{cases}$$

Soient $t, s \in]0, 1[$ on a

$$\frac{f(t) - f(s)}{|t-s|^\lambda} = \begin{cases} 0, & \text{pour } t \in [0, a] \\ \frac{(t-a)^\lambda}{|t-s|^\lambda}, & \text{pour } s \in [0, a],\ t \in]a, 1] \\ \frac{(t-a)^\lambda - (s-a)^\lambda}{|t-s|^\lambda}, & \text{pour } t \in]a, 1] \end{cases}$$

et $\sup\limits_{t,s\in[0,1],t\neq s} \dfrac{f(t) - f(s)}{|t-s|^\lambda} < +\infty.$
Pour tout $a, b \in]0, 1[$ on peut montrer que $\|f_a - f_b\|_{0,\lambda} > 1$
En effet soit $a, b \in]0, 1[$, $a \neq b$ et $a < b$. On pose $w = f_a - f_b$

$$H_{0,\lambda}(w) \geq \frac{|w(b) - w(a)|}{|b-a|^\lambda} = \frac{(b-a)^\lambda}{|b-a|} = 1$$

Posons $\widetilde{Y} = \{u_a : \ a \in]0, 1[\}$. Comme $]0, 1[$ n'est pas dénombrable, alors $\widetilde{Y}$ n'est pas dénombrable. □

1.2.3 Compacité

Définition 1.8 *Soit $K \subset C(\overline{\Omega})$. K est dite équicontinue si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall x, y \in \overline{\Omega},\ |x - y| < \delta(\varepsilon)$ on a $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, pour tout f de K.*

Exercice 1.2 *$K \subset C(\overline{\Omega})$ est équicontinue si et seulement si $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in \overline{\Omega}$ il existe un voisinage $\mathcal{V}(x)$ de x tel que*

$$\sup_{f\in K} \sup_{y\in\mathcal{V}(x)} |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Théorème 1.8 **(Arzéla-Ascoli)** *$K \subset C(\overline{\Omega})$ est relativement compact si et seulement si*

1. *K est bornée.*
2. *K est équicontinue.*

Théorème 1.9 **(Arzéla-Ascoli)** *$K \subset C^m(\overline{\Omega})$ est relativement compact si et seulement si*

1. *K est bornée dans $C^m(\overline{\Omega})$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leq m$.*
2. *L'ensemble $K_\alpha = \{D^\alpha f :\ f \in K\}$ est équicontinue.*

Définition 1.9 *Soit $K \subset C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$. On dite que K est (m,λ)-équicontinue si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, $\forall x, y \in \Omega$: $|x-y| < \delta$ on a $\dfrac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|}{|x-y|^\lambda} < \varepsilon$, pour tout $f \in K$, $|\alpha| = m$.*

Théorème 1.10 *$K \subset C^{m,\lambda,0}(\overline{\Omega})$, si K est relativement compact dans $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$, alors K est borné et $(m,\lambda)-$équicontinue dans $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$.*

Démonstration. *Comme K est relativement compact dans $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ alors K est borné. Supposons que K n'est pas $(m,\lambda)-$équicontinue, alors il existe $\varepsilon > 0$, $\forall \delta > 0$, $\exists x_\varepsilon, y_\varepsilon \in \Omega$ tel que $|x_\varepsilon - y_\varepsilon| < \delta$ et $\dfrac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|}{|x-y|^\lambda} \geq \varepsilon$*
Soit $\delta \in \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ donc il existe $x_n, y_n \in \Omega$ tel que

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \qquad et \qquad \frac{|D^\alpha f_n(x_n) - D^\alpha f_n(y_n)|}{|x_n - y_n|^\lambda} > \varepsilon.$$

Puisque K est relativement compact alors f_n converge vers f dans $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ avec $f \in C^{m,\lambda,0}(\overline{\Omega})$.

$$\begin{aligned}
\varepsilon &\leq \frac{|D^\alpha f_n(x_n) - D^\alpha f_n(y_n)|}{|x_n - y_n|^\lambda} \\
&= \frac{|D^\alpha f_n(x_n) - D^\alpha f_n(y_n) + D^\alpha f(x_n) - D^\alpha f(x_n) + D^\alpha f(y_n) - D^\alpha f(y_n)|}{|x_n - y_n|^\lambda} \\
&\leq \frac{|D^\alpha f_n(x_n) - D^\alpha f_n(y_n) - D^\alpha f(x_n) + D^\alpha f(y_n)|}{|x_n - y_n|^\lambda} + \frac{|D^\alpha f(x_n) - D^\alpha f(y_n)|}{|x_n - y_n|^\lambda}
\end{aligned}$$

Alors $|x_n - y_n| \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$, ceci implique

$$\frac{|D^\alpha f(x_n) - D^\alpha f(y_n)|}{|x_n - y_n|^\lambda} \longrightarrow 0$$

finalement on trouve

$$\varepsilon \leq \|f_n - f\|_{m,\lambda} + \frac{|D^\alpha f(x_n) - D^\alpha f(y_n)|}{|x_n - y_n|^\lambda} \longrightarrow 0,$$

donc $\varepsilon \leq 0$ c'est une contradiction. □

Exercice 1.3 *Soit K un ensemble (m,λ)-équicontinue dans $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$. Montrer que $K \subset C^{m,\lambda,0}(\overline{\Omega})$ est relativement compact dans $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ si et seulement si K est relativement compact dans $C^m(\overline{\Omega})$.*

Théorème 1.11 *Soit $m \in \mathbb{N}$, $\lambda \in]0,1[$. Alors $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega})$ par une injection continue.*
De plus $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega})$ par une injection compacte.

1.3 Espaces L^p, lorsque $p \in [1, +\infty[$

On suppose connues la définition des applications mesurables pour la mesure de Lebesgue et la définition de $L^1(\Omega)$, espace des fonctions sommables sur Ω, muni de la norme définie par $\|f\| = \int_\Omega |f(x)|dx$.

Définition 1.10 *L'espace des fonctions de puissance p-ième sommables dans Ω peut être défini par :*

$$L^p(\Omega, \mathbb{C}) = \{u \text{ mesurables sur } [a,b], \text{ à valeurs dans } \mathbb{C} / \ |u|^p \in L^1\}.$$

Grâce à l'inégalité de Minkowski, c'est un espace normé, dont la norme, notée $\|\cdot\|_p$ où $\|\cdot\|_{L^p}$ est définie par :

$$\|f\|_p = \left[\int_\Omega |f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Définition 1.11 *Soit $L^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions f mesurables telles que :*

$$\exists a > 0, \ mesE_\alpha = mes\{x : \ |f(x)| > \alpha\} = 0.$$

C'est un espace normé, la norme étant : $\|f\|_\infty = \inf\limits_{\{\alpha:\ mesE_\alpha = 0\}} \alpha$.

1.3.1 L'inégalités de Hölder et complétude de L^p

Si $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$, où les réels p et q satisfont à $1 < p < m$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a l'inégalité :

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq \left[\int_\Omega |f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_\Omega |f(x)|^q dx\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Cette inégalité se généralise en considérant les réels $p_j > 1$ dont la somme des inverses est égale à 1 :

$$\forall f \in L^{p_j}(\Omega), \quad \int_\Omega |\prod f_j(x)|dx \leq \prod \left[\left(\int_\Omega |f_j(x)|^{p_j} dx\right)^{\frac{1}{p_j}}\right].$$

1.3.2 L'inégalité de Minkowsky

Soient f une fonction intégrable sur $\Omega_1 \times \Omega_2$ et $1 \leq p \leq +\infty$

$$\left[\int_{\Omega_1} dx \left|\int_{\Omega_2} f(x,y)dy\right|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \int_{\Omega_2} dy \left[\int_{\Omega_1} |f(x,y)|^p dx\right]$$

Théorème 1.12 (Théorème de la convergence dominée de Lebesgue) *Soit $(f_n)_n$ une suite réelles mesurables définies sur $(E, \mathcal{T}, \mu)$ (espace mesuré), converge presque partout vers f.*
S'il existe une fonction g intégrable telle que $|f_n| \leq g$ presque partout, alors :

1. f est intégrable.
2. $\forall\ A \in \mathcal{T} \quad \lim_{n\to+\infty} \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu.$

Théorème 1.13 (Fubini) *Soit* $f: \ \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ *, mesurable* $A\times B$ *un ensemble borélien de* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

(a) *Si* f *est positive sur* $A\times B$ *alors :*

$$\int_{A\times B} f(x,y)dxdy = \int_A \left(\int_B f(x,y)dy\right)dx = \int_B \left(\int_A f(x,y)dx\right)dy,$$

ces intégrales étant éventuellement égales à $+\infty$.

(b) *Si* $\int_{A\times B}|f(x,y)|dxdy$ *est finie, alors les fonction* $x \longmapsto f(x,y)$, $y \longmapsto f(x,y)$ *sont intégrable p.p pour les valeur respectives fixées de* x *et de* y*, les fonctions* $x \longmapsto \int_B f(x,y)dy$ *et* $y \longmapsto \int_A f(x,y)dx$ *sont respectivement* dx*-intégrable et* dy*-intégrable et les égalités suivantes sont vérifiées*

$$\int_{A\times B} f(x,y)dxdy = \int_A \left(\int_B f(x,y)dy\right)dx = \int_B \left(\int_A f(x,y)dx\right)dy.$$

1.4 Espace des fonctions absolument continues

Définition 1.12 *Une fonction* f *définie sur* $[a,b]$ *est dite à variation bornée, s'il existe une constante c positif telle que, pour tout subdivision* $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ *de* $[a,b]$*, on ait*

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq c. \tag{1.6}$$

Lemme 1.8 *Si* f *une fonction monotone de* $[a,b]$ *dans* $\mathbb{R}$*, alors elle est à variation bornée.*

Démonstration. *Soit* $\prod = \{]x_{i-1},x_i[\}_{i=1}^n$ *telle que* $\cup_{i=1}^n [x_{i-1},x_i] = [a,b]$ *une partition de* $[a,b]$.
On suppose que f *est croissante, de plus on a* $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ *ça implique* $f(a) - f(b) < f(x_k) - f(x_{k-1}) < f(b) - f(a)$*, Donc*

$$|f(x_k) - f(x_{k-1})| < |f(b) - f(a)|.$$

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = f(x_n) - f(x_0) \leq |f(b) - f(a)|.$$

D'où

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq |f(b) - f(a)|.$$

□

Définition 1.13 *Soit f une fonction de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. f est dite absolument continue si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout partition $\{]a_k, b_k[\}_{i=1}^{n}$ de $[a,b]$, si $\sum_{i=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$, Alors*

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

• *Si f est absolument continue alors elle est uniformément continue.*
• *Toute fonction absolument continue est à variation bornée.*
• *La somme de deux fonctions absolument continue et le produit d'une telle fonction par un nombre sont absolument continue.*
• *Toute fonction absolument continue est est la différence de deux fonction absolument continue croissantes.*

Théorème 1.14 *soit $f \in L_1([a,b], \mathbb{R})$ alors $\phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ est absolument continue.*

On note $AC([a,b], \mathbb{R})$ l'espace des fonction absolument continue.
• *$(AC([a,b], \mathbb{R}), \| \cdot \|_{AC})$ est un espace de Banach, avec*

$$\|f\|_{AC} = |f(a)| + \int_a^b |f'(s)|ds.$$

• $AC^n([a,b], \mathbb{R}) = \{\ f : \ [a,b] \ \longrightarrow \ \mathbb{R} \ : \ f, \dots, f^{(n-1)}$ *sont absolument continue* $\}$.
• $f \in AC([a,b], \mathbb{R}) \Longleftrightarrow f(x) = f(a) + \int_a^x f'(s)ds, \quad f' \in L^1([a,b], \mathbb{R})$.
• $f \in AC^n([a,b], \mathbb{R}) \Longleftrightarrow f(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x f^{(n)}(s)ds.$

Chapitre 2

Fonctions spéciales

2.1 Introduction

Les fonctions spéciales sont définies de manière assez imprécise, puisqu'elles regroupent les fonctions que l'usage (ou la fréquence d'utilisation) a fini par associer à un nom. Parmi ces fonctions, la fonction Gamma qui joue un rôle très important dans le calcul fractionnaire.

Définition 2.1 *La fonction Gamma est généralement définie par l'intégrale suivante*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}\ e^{-t}dt$$

quand la partie réelle de z est strictement positive $Re(z) > 0$

Soit $z \in \mathbb{C}$ alors $\exists!(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = x + iy$ et

$$\Gamma(x+iy) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1+iy}dt.$$

Or $t^{x-1+iy} = t^{x-1}t^{iy} = t^{x-1}e^{iy\ln(t)} = t^{x-1}[\cos(y\ln(t)) + i\sin(y\ln(t))]$ Alors

$$\Gamma(x+iy) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}[\cos(y\ln(t)) + i\sin(y\ln(t))]dt.$$

Pour $x > 0$ on pose

$$I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\cos(y\ln(t))dt \qquad \text{et} \qquad I_2 = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\sin(y\ln(t))dt.$$

On a

$$|e^{-t}t^{x-1}\cos(y\ln(t))| \leq \frac{e^{-t}}{t^{1-x}} \text{ et } |e^{-t}t^{x-1}\sin(y\ln(t))| \leq \frac{e^{-t}}{t^{1-x}}.$$

• *Si* $x = 1$ *on obtient*

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{1-x}} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} = 1.$$

Donc les deux intégrales I_1 *et* I_2 *convergent.*

• *Si* $x > 1$ *on considère*

$$J_1 = \int_0^c e^{-t} t^{x-1} \cos(y \ln(t)) dt, \qquad J_2 = \int_c^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \cos(y \ln(t)) dt \qquad \text{avec } c > 0.$$

Comme $x > 1$ *la fonction* $t \longmapsto e^{-t} t^{x-1}$ *est continue. D'où la convergence de* J_1*.*
Puisque $\lim\limits_{t \to +\infty} t^{x+1} e^{-t} t^{x-1} = \lim\limits_{t \to +\infty} t^{2x} e^{-t} = 0$ *on a*

$$\forall A, \ \exists B > 0 : \ \forall t \geq B \ \ e^{-t} t^{x-1} \leq \frac{A}{t^{x+1}},$$

ceci implique

$$\int_B^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \leq A \int_B^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}} = \frac{A}{x B^x} < +\infty$$

Par conséquence I_1 *et* I_2 *convergent.*

• *si* $0 < x < 1$ *prenant* $c > 0$

$$\int_0^c e^{-t} t^{x-1} dt \leq \int_0^c t^{x-1} dt = \frac{1}{x} c^x.$$

D'où la convergence de J_1*.*

$\lim\limits_{t \to +\infty} t^{x+1} e^{-t} t^{1-x} = \lim\limits_{t \to +\infty} t^2 e^{-t} = 0$ *on a pour tout* $A > 0$ *il existe* $c > 0$ *tel que*

$$e^{-t} t^{1-x} \leq \frac{A}{t^{x+1}} \quad \Longrightarrow \quad \int_c^{+\infty} e^{-t} t^{1-x} dt \leq \frac{A}{x c^x}.$$

Conclusion *Si la partie réelle de* z *est strictement positive alors la fonction* $\Gamma(z)$ *est bien définie.*

2.2 Propriétés de la fonction $\Gamma(.)$

Lemme 2.1 *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $Re(z) > 0$*, on a*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \ \text{ et } \Gamma(n) = (n-1)! \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Démonstration. *Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $Re(z) > 0$ alors*

$$\begin{aligned}
\Gamma(z) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{1-x} dt \\
&= \left[\frac{e^{-t}t^z}{z}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{z}\int_0^{+\infty} e^{-t}t^z dt \\
&= \frac{1}{z}\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{(z-1)+1}dt \\
&= \frac{1}{z}\Gamma(z+1)
\end{aligned}$$

D'où

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{2.1}$$

D'après (2.1) pour tout $z \in \mathbb{N}^*$ on obtient

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1!$$

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2.1\Gamma(1) = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3.2.1\Gamma(1) = 3!$$

$$\vdots$$

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\ldots 2.1 = n!$$

□

Théorème 2.1 *La fonction Γ est définie et de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$, ses dérivées successives sont données par la formule*

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}(\ln(x))^k t^{x-1}dt, \;\; z = x \in]0,+\infty[.$$

Pour démontrer ce théorème, on utilisera les théorèmes suivants :

Théorème 2.2 *Soient U un ouvert dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, T un espace mesuré muni par la mesure de Lebesgue et $f : T \times U \longrightarrow \mathbb{C}$.*
Soit f une fonction avec une paramètre x définie comme suit

$$\begin{array}{rccl} f: & T & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & f(x,t), \end{array}$$

on suppose qu'elle est intégrable. On considère la fonction

$$\begin{array}{rccl} F: & U & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & x & \longmapsto & F(x) = \displaystyle\int_T f(x,t)d\mu(t) \end{array}$$

où μ est la mesure de Lebesgue.

Théorème 2.3 **(La continuité)** *En considère les fonctions f et F définies précedement, si :*

1. *pour presque tout t, la fonction*

$$\begin{array}{rcl} f: \ U & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & f(x,t), \end{array}$$

   est continue sur U,

2. *pour tout compact $K \subset U$, il existe une fonction intégrable et positive g_k telle que*

$$|f(x,t)| \leq g_k(t), \ \forall t \in T, \ \forall x \in K,$$

alors la fonction F est continue sur U.

Théorème 2.4 **(Dérivabilité)** *Si*

1. *pour presque tout t, la fonction*

$$\begin{array}{rcl} f: \ U & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & f(x,t), \end{array}$$

   est dérivable sur U,

2. *pour tout compact $K \subset U$, il existe une fonction g_k intégrable et positive de plus $x \longmapsto \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)$ continue, on a*

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} f(x,t) \right| \leq g_k(t), \ \forall x \in K,$$

alors la fonction F est dérivable sur U avec

$$F'(x) = \int_T \frac{\partial}{\partial x} f(x,t) d\mu(t).$$

Théorème 2.5 **(Analyticité)** *On suppose que U est un ouvert de $\mathbb{C}$. Si*

1. *pour presque tout t, la fonction*

$$\begin{array}{rcl} f: \ U & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & f(t,x), \end{array}$$

   est analytique sur U,

2. *pour tout compact $K \subset U$, il existe une fonction intégrable et positive g_k telle que*

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} f(t,x) \right| \leq g_k(t), \ \forall t \in T, \ \forall x \in K,$$

alors la fonction F est analytique sur U, et on a pour tout entier n

$$F^{(n)}(x) = \int_U \frac{\partial^n}{\partial x^n} f(x,t) d\mu(t).$$

Démonstration. *(du théorème 2.1) On applique le théorème standard de dérivée sur $T \times U =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.*
Soit

$$\begin{array}{rccl} f: & T \times U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t,x) & \longmapsto & f(t,x) = e^{-t}t^{x-1} \end{array}$$

Il est claire que $f(\cdot,\cdot)$ est une fonction continue.

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}[e^{-t}e^{(x-1)\ln(t)}] = \ln(t)e^{-t}t^{x-1}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,t) = e^{-t}t^{(x-1)}(\ln(t))^2.$$

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} f(x,t) = (\ln(t))^n e^{-t}t^{(x-1)}. \tag{2.2}$$

Donc la fonction $x \longmapsto f(t,x)$ est de classe C^∞.
Pour tout $K \subset]0,+\infty[$ compact $K = [a,b]$ et d'après (2.2) on a

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,t) \right| \leq g_k(t), \quad t]0,+\infty[,$$

avec $g_k(t) = e^{-t}(\ln(t))^n \max(t^{a-1}, t^{b-1})$. *On considère*

$$\widetilde{J}_1 = \int_0^a e^{-t}(\ln(t))^n t^{a-1} dt, \qquad \widetilde{J}_2 = \int_a^b e^{-t}(\ln(t))^n t^{b-1} dt$$

$$\widetilde{J}_3 = \int_b^{+\infty} e^{-t}(\ln(t))^n t^{b-1} dt$$

On a $\lim\limits_{t\to 0} e^{-t}(\ln(t))^n t^{a-1} = 0$ donc on pose $\widetilde{J}_1 = \int_0^a f_x(t)dt$ tel que

$$f_x(t) = \begin{cases} e^{-t}(\ln(t))^n t^{a-1} & \text{si } t \in]0,a] \\ \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Il est clair que f_x est continue sur $[0,1]$, d'où la convergence de $\widetilde{J}_1$.

On a

$$\begin{aligned}
\widetilde{J}_2 &= \int_a^b e^{-t}(\ln(t))^n t^{b-1}dt \\
&\leq (\ln(b))^n \int_a^b e^{-t}t^{b-1}dt \\
&\leq (\ln(b))^n \int_a^b t^{b-1}dt = \frac{(\ln(b))^n}{b}(b^b - a^b) < +\infty
\end{aligned}$$

par conséquent $\widetilde{J}_2$ *est converge.*

On a aussi $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t}(\ln(t))^n t^{b-1} = +\infty$, *alors*

$$\forall A > 0,\ \exists d > 0 :\ \forall t \geq d\ \ e^{-t}(\ln(t))^n t^{b-1} < \frac{A}{t^{b+1}},$$

on obtient $\widetilde{J}_3 \leq \int_b^{+\infty} \frac{A}{t^{b+1}} < +\infty$.
D'où la convergence de $\widetilde{J}_3$, *ce qui montre l'intégrabilité de* g_k *d'après le théorème de dérivée. Finalement on a trouvé que* f *est de classe* C^∞ *de plus*

$$F^{(n)}(x) = \frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{(x-1)}dt\right) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^n e^{-t}t^{(x-1)}dt. \qquad \square$$

Théorème 2.6 **(Prolongement de la fonction Gamma)** *La fonction* Γ *s'étend (en une fonction holomorphe) à* $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ *et pour tout entier négative* n : $\lim\limits_{z\to n}(z-n)\Gamma(z) = \dfrac{(-1)^n}{n!}$ *c'est le résidu de* $-n$.

Démonstration. *On applique la relation de Chasles pour tout* z *tel que* $Re(z) > 0$

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t}t^{(z-1)}dt + \int_1^{+\infty} e^{-t}t^{(z-1)}dt.$$

Le fait que $z \longmapsto \int_1^{+\infty} e^{-t}t^{(z-1)}dt$ *est analytique d'après le théorème 2.5.*
De plus on introduit le développement en série entière de la fonction e^{-t} *dans la première intégrale, et il est clair qu'on peut permuter entre la somme et signe d'intégration*

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^{-t}t^{(z-1)}dt &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{t^n}{n!}t^{(z-1)}dt \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{z-1+n}}{n!}dt \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{z-1+n}}{}dt \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(z+n)n!}.
\end{aligned}$$

Cette dernière expression nous donne une fonction définie sur l'ouvert $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$, et elle est même holomorphe.
Nous définissons alors la fonction $\widetilde{T}$ sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ comme suit

$$\widetilde{\Gamma}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{(z+n)} + \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{(z-1)} dt.$$

Il est immédiat que cette nouvelle fonction prolonge Γ, et qu'elle est holomorphe, de plus

$$\lim_{z\to -n} \widetilde{\Gamma}(z) = \lim_{z\to -n} (z+n)\Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!} = Res(\widetilde{\Gamma}(-n)).$$

La limite s'obtient par le théorème de permutation limite-série. □

Lemme 2.2 *Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $Rez > 0$ alors*

$$\lim_{n\to +\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)} = \Gamma(z)$$

et

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{z\gamma} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{z}{k}+1\right) e^{-\frac{Z}{k}}, \quad z \neq -n \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

Démonstration. • *On considère*

$$f_n(z) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt.$$

On pose $s = \frac{t}{n} \Rightarrow (ds = \frac{dt}{n}$, et $t = ns)$ on obtient

$$f_n(z) = n^z \int_0^1 (1-s)^n s^{z-1} ds$$

par intégration par partie on a

$$\begin{aligned} f_n(z) &= n^z \left\{ \frac{1}{z} [s^z (1-s)^n]_0^1 + \frac{n}{z} \int_0^1 (1-s)^{n-1} s^z ds \right\} \\ &= \frac{n^{z+1}}{z} \int_0^1 (1-s)^{n-1} s^z ds \\ &= \frac{n^z n(n-1)}{z(z+1)} \int_0^1 (1-s)^{n-2} s^{z-1} ds \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \\ &= \frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)} \int_0^1 (1-s)^{n-1} s^z ds \end{aligned}$$

Il est clair que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(z) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n = e^{-t}$ *alors*

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(z) = \lim_{n\to+\infty}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt = \lim_{n\to+\infty}\int_0^n e^{-t}t^{z-1}dt \tag{2.3}$$

Justification de la limite précédente :
Soit $\Delta = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt - f_n(z)$

$$\begin{aligned}\Delta &= \int_0^n e^{-t}t^{z-1}dt + \int_n^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt - f_n(z)\\ &= \int_0^n \left(e^{-t}t^{z-1} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\right)dt + \int_n^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt\\ &= \int_0^n \left(e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right) t^{z-1}dt + \int_n^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt\end{aligned}$$

comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt$ *converge, on a*

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N:\ \forall n>N \quad \int_N^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

maintenant, si on fixe N *alors on a*

$$\begin{aligned}\Delta &= \int_0^N \left[e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right] t^{z-1}dt\\ &\quad + \int_N^n \left[e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right] t^{z-1}dt + \int_n^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt\\ &\le I_1 + I_2 + I_3,\end{aligned}$$

avec

$$I_1 = \int_0^n \left[e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right] t^{z-1}dt.$$

$$I_2 = \int_N^n \left[e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right] t^{z-1}dt \le \int_N^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pour $t\in]0,n[$ *on a*

$$0 < e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n < \frac{t^2}{2n}.$$

En effet $e^{-t} = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{p!}t^p$, $\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \simeq \frac{t}{n} + \frac{t^2}{2n}$ *alors*

$$0 \le e^{-t} \le \frac{t^2}{2n} \tag{2.4}$$

Alors

$$\left|\int_0^t \left[e^{-s} - \left(1-\frac{s}{n}\right)^n\right] s^{z-1}\right| ds \le \int_0^t \left|e^{-s} - \left(1-\frac{s}{n}\right)^n\right| s^{x-1}ds,\ \text{pour } x = Re(z).$$

D'après (2.4) on obtient

$$\left|\int_0^t \left[e^{-s} - \left(1-\frac{s}{n}\right)^n\right] s^{z-1}\right| ds \leq \frac{1}{2n}\int_0^t s^2 s^{x-1} ds = \frac{1}{2n}\int_0^t s^{x+1} ds.$$

Donc

$$\left|\int_0^N \left[e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right] t^{z-1}\right| ds \leq \frac{1}{2n}\int_0^N t^{x+1} ds = \frac{1}{2n(N+2)} N^{x+1}.$$

Comme N est fixé et $n > N$, alors quand $n \longrightarrow +\infty$ on obtient

$$|I_1| = \left|\int_0^N \left[e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)\right] t^{z-1}\right| dt \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Finalement

$$\left|\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt - f_n(z)\right| \leq I_1 + I_2 + I_3 \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Ceci montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(z) = \Gamma(z) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}$.

- *On a* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n! n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)} = \Gamma(z)$, *on pose* $\gamma = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)\right)$

$$\begin{aligned}
\frac{n! n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)} &= \frac{n! e^{z\ln(n)}}{n! z(z+1)\left(\frac{z}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{z}{n}+1\right)} \\
&= \frac{e^{z\ln(n)}}{z\prod_{k=1}^n \left(\frac{z}{n}+1\right)} \\
&= \frac{e^{z\left(\ln(n)+\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)}}{z\prod_{k=1}^n \left(\frac{z}{n}+1\right)} \\
&= \frac{1}{z e^{z\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)\right)} \prod_{k=1}^n \left(\frac{z}{n}+1\right) e^{-\frac{z}{k}}}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(z)} &= \lim_{n\to+\infty} z e^{z\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)\right)} \prod_{k=1}^n \left(\frac{z}{n}+1\right) e^{-\frac{z}{k}} \\
&= z e^{z\gamma} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{z}{n}+1\right) e^{-\frac{z}{k}}.
\end{aligned}$$

□

Remarque 2.1 $\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{z}{n}+1\right) e^{-\frac{z}{k}}$ *converge si et seulement si* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\ln(\frac{z}{k}+1) - \frac{z}{k}\right)$ *est une série convergente.*

En effet $\ln(\frac{z}{k}+1) - \frac{z}{k} \simeq \frac{z}{k^2}$ *donc* $\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{z}{n}+1\right) e^{-\frac{z}{k}}$ *converge.*

2.3 Fonction Bêta (ou la fonction de Bessel de seconde espèce)

Définition 2.2 *La fonction Bêta (ou la fonction de Bessel de seconde espèce) est donnée par :*
Pour tout $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ *avec* $Re(z) > 0$, *on a*

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt.$$

• *Justification de l'existence de la fonction bêta*

∗ *Si* $Re(z) > 0$ *et* $Re(w) > 1$, *alors la fonction* $t \longmapsto t^{Re(z)-1}(1-t)^{Re(w)-1}$ *est continue. Ce qui donne*

$$\left| \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt \right| \leq \int_0^1 t^{Re(z)-1}(1-t)^{Re(w)-1} dt < +\infty. \tag{2.5}$$

∗ *Si* $Re(z) > 0$ *et* $0 < Re(w) < 1$, *on considère*

$$I_1(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt, \text{ pour } \varepsilon \in]0, 1[.$$

En fait

$$\begin{aligned} |I_1(\varepsilon)| &\leq \int_0^\varepsilon |(1-t)^{w-1}| dt \\ &= \int_0^\varepsilon |(1-t)^{Re(w)-1}| dt \\ &= \left[-\frac{1}{Re(w)} (1-t)^{Re(w)} \right]_0^\varepsilon = \frac{1}{Re(w)} \left[-(1-\varepsilon)^{Re(w)} \int_0^\varepsilon t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt + 1 \right], \end{aligned}$$

et obtient

$$|I_1(\varepsilon)| \leq \frac{1}{Re(w)} \left[-(1-\varepsilon)^{Re(w)} + 1 \right],$$

ceci implique

$$|I_1(1)| = \left| \int_0^\varepsilon t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt \right| \leq \frac{1}{Re(w)} < +\infty \tag{2.6}$$

∗ *Si* $0 < Re(z) < 1$ *et* $Re(w) > 1$
On considère

$$I_2(\varepsilon) = \int_\varepsilon^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt, \text{ pour } \varepsilon \in]0, 1[.$$

On a

$$\begin{aligned}|I_2(\varepsilon)| &\leq \int_\varepsilon^1 t^{Re(z)-1}(1-t)^{Re(w)-1}dt \\ &\leq \int_\varepsilon^1 t^{Re(z)-1}dt \\ &= \frac{1}{Re(z)}[t^{Re(z)}]_\varepsilon^1 = \frac{1}{Re(z)}[1-\varepsilon^{Re(z)}]\end{aligned}$$

D'où

$$I_2(0) = \left|\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt\right| \leq \frac{1}{Re(z)}. \tag{2.7}$$

$*$ *Si* $0 < Re(z) < 1$ *et* $0 < Re(w) < 1$, *soit* $c \in]0,1[$

$$J_1 = \int_0^c t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt, \qquad \text{et} \qquad J_2 = \int_c^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt,$$

le cas où $0 < t \leq c$ *on a* $\frac{1}{1-t} \leq \frac{1}{1-c}$, *alors* $1 < (1-t)^{Re(w)-1} \leq (1-c)^{Re(w)-1}$ *et on obtient*

$$|J_1| \leq (1-c)^{Re(w)-1}\int_0^c t^{Re(z)-1}dt = \frac{c^{Re(z)}}{Re(z)(1-c)^{1-Re(w)}} \tag{2.8}$$

De même si $c \leq t < 1$ *on déduit que*

$$|J_2| \leq \frac{1}{Re(w)c^{1-Re(z)}}[1-(1-c)^{Re(w)}] \tag{2.9}$$

D'après (2.5), (2.6), (2.7), (2.8) et (2.9) on conclut que la fonction bêta est bien définie.

2.4 Propriétés de la fonction Bêta

Théorème 2.7 *Soient* $(p,q) \in \mathbb{C}^2$, *avec* $Re(p) > 0$ *et* $Re(q) > 0$. *Alors*

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Démonstration. *Soient* $(p,q) \in \mathbb{C}^2$, *avec* $Re(p) > 0$ *et* $Re(q) > 0$. *¡en utilisant le théorème de Fubini, on obtient*

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^\infty \int_0^\infty t^{p-1}e^{-t}s^{p-1}e^{-s}dtds$$

On effectue le changement de variable $r = t+s$

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= \int_0^\infty t^{p-1}\left[\int_0^\infty (r-t)^{q-1}e^{-r}dr\right]dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-r}\left[\int_0^\infty t^{p-1}(r-t)^{q-1}dt\right]dr\end{aligned}$$

On pose $\frac{t}{r} = s$ *et on aboutit à*

$$\begin{aligned}
\Gamma(p)\Gamma(q) &= \int_0^{+\infty} e^{-r} \int_0^1 r(1-s)^{q-1} r^{q-1} s^{p-1} r^{p-1} ds dr \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-r} r^{p+q-1} \int_0^1 (1-s)^{q-1} s^{p-1} ds dr \\
&= \int_0^{+\infty} r^{p+q-1} e^{-r} dr B(p,q)
\end{aligned}$$

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

□

Proposition 2.1 *Pour tout* $p, q \in \mathbb{C}$: $Re(p) > 0$ *et* $Re(q) > 0$. *On a*

1. $B(p,q) = B(q,p)$
2. $B(p,q) = B(p+1,q) + B(p,q+1)$
3. $B(p,q+1) = \frac{q}{p} B(p+1,q) = \frac{q}{p+q} B(p,q)$
4. $B(p,q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2p-1} (\cos t)^{2q-1} dt.$

Démonstration. *1.*

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt = \int_0^1 (1-t)^{p-1} t^q dt = B(p,q).$$

2. $B(p,q) = B(p+1,q) + B(p,q+1)$

$$\begin{aligned}
B(p,q+1) &= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+1)} = \frac{\Gamma(p)q\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)} = \frac{q\Gamma(p)\Gamma(q)}{(p+q)\Gamma(p+q)} \\
&= \frac{q}{p+q} \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \frac{q}{p+q} B(p,q).
\end{aligned}$$

On obtient

$$(p+q)B(p,q+1) = qB(p,q).$$

et ceci implique

$$\begin{aligned}
B(p,q) &= \frac{p}{q} B(p,q+1) + B(p,q+1) \\
&= \frac{p\Gamma(p)\Gamma(q+1)}{q\Gamma(p+q+1)} + B(p,q+1) = \frac{p\Gamma(p)q\Gamma(q)}{q\Gamma(p+q+1)} + B(p,q+1) \\
&= \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)} + B(p,q+1)
\end{aligned}$$

Donc

$$B(p,q) = B(p+1,q) + B(p,q+1)$$

3.

$$\begin{aligned} B(p,q+1) &= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+1)} = \frac{q\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)} \\ &= \frac{q}{p}\frac{p\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)} = \frac{q}{p}\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)} \\ &= \frac{q}{p}B(p+1,q) \end{aligned}$$

D'où

$$B(p,q+1) = \frac{q}{p+q}B(p,q)$$

4. On a

$$\begin{aligned} B(p,q) = B(q,p) &= \int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}dt \\ &= \int_0^1 t^{q-1}t^{p-1}\left(\frac{1}{t}-1\right)^{p-1} dt. \end{aligned}$$

Posons $\frac{1}{t} - 1 = r \Rightarrow t = \frac{1}{r+1}$ *et* $dt = -t^2 dr$, *donc*

$$\begin{aligned} B(p,q) &= -\int_{+\infty}^0 \frac{1}{(r+1)^{p+q-2}}\frac{r^{p-1}}{(r+1)^2}dr \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{r^{p-1}}{(r+1)^{p+q}}dr \end{aligned}$$

D'où

$$B(p,q) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(t+1)^{p+q}}dt$$

- *Montrons que* $B(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2p-1}(\cos t)^{2p-1}dt$

On a $B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$, *alors par le changement de variable* $t = \sin^2\theta$ *ça implique* $dt = 2\cos\theta\sin\theta d\theta$. *Alors*

$$\begin{aligned} B(p,q) &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2p-2}(1-\sin^2\theta)^{q-1}\cos\theta\sin\theta\ d\theta \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2p-1}(\cos\theta)^{2q-2}\cos\theta\ d\theta \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2p-1}(\cos\theta)^{2q-1}\ d\theta \end{aligned}$$

D'où le résultat

$$B(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2p-1}(\cos\theta)^{2q-1}\, d\theta$$

□

Pour déduire que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, *on considère*

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2p-1}(\cos\theta)^{2q-1}\, d\theta = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

et on prend $p = q = \frac{1}{2}$ *pour obtenir*

$$\begin{aligned} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 \quad &\Rightarrow \quad \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \pi \\ &\Rightarrow \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Proposition 2.2 *Pour tout* $a, b \in \mathbb{R}^+$

$$\int_a^b (b-u)^{p-1}(u-a)^{q-1} du = (b-a)^{p+q-1} B(p,q)$$

Démonstration. *On pose* $t = \frac{u-a}{b-a}$ *alors* $dt = \frac{du}{b-a}$

$$\int_0^1 \frac{t^{q-1}(b-a)^{q-1}((b-a)t+b-a)^{p-1}}{b-a} dt = (b-a)^{p+q-2}\int_0^1 \frac{t^{q-1}(1-t)^{p-1}}{b-a} dt.$$

D'où $\displaystyle\int_a^b (b-u)^{p-1}(u-a)^{q-1} du = (b-a)^{p+q-1} B(q,p)$.

Donc $\displaystyle\int_a^b (b-u)^{p-1}(u-a)^{q-1} du = (b-a)^{p+q-1} B(p,q)$

□

Proposition 2.3

- *La formule des compléments ; Soit* $z \in \mathbb{C} : 0 < Re(z) < 1$, *alors*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

- *La formule de duplication,*

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}),$$

ou, de manière équivalente,

$$B(z, \frac{1}{2}) = 2^{2z-1} B(z,z).$$

Démonstration. • ***La formule des compléments*** *se démontre en partant de la représentation intégrale de B*

$$B(z,1-z)=\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{(1-z)-1}dt=\int_0^1\left(\frac{t}{1-t}\right)^{a-1}\frac{dt}{1+t},$$

en y effectuant le changement de variable $s=\frac{dt}{1-t}$, *alors* $ds=\frac{1}{(1-t)^2}dt$, $t=\frac{s}{s+1}$, *quand* $t\longrightarrow 0$ *on a* $s\longrightarrow 0$ *et si* $t\longrightarrow 1$, $s\longrightarrow +\infty$.
Donc

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\int_0^{+\infty}\frac{s^{z-1}}{1+s}ds. \tag{2.10}$$

En calculant l'intégrale (2.10) à l'aide du théorème des résidus.
On considère le contour suivant

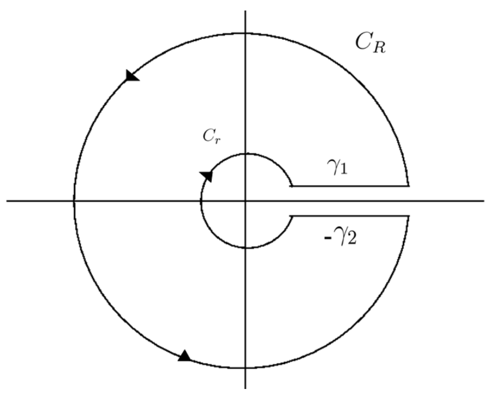

FIGURE 2.1:

$$C_R=\{z=Re^{i\varphi}:\ 0\le\varphi\le 2\pi\},\qquad C_r=\{z=re^{i\varphi}:\ 0\le\varphi\le 2\pi\}$$

$$\gamma_1=\{z=se^{2\pi i}:\ r\le s\le R\},\qquad \gamma_2=\{z=s:\ r\le s\le R\}$$

Posons $c=C_R\cup C_r\cup\gamma_1\cup(-\gamma_2)$.
Le point $s=e^{\pi i}$ *est un pôle simple de la fonction*

$$s\longmapsto f(s)=\frac{s^{z-1}}{1+s}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_C\frac{s^{z-1}}{1+s}ds &= 2\pi i[Res(f(s))]_{s=e^{\pi i}}=2\pi i e^{(z-1)i\pi}\\ &= 2\pi i e^{zi\pi}e^{-i\pi}=-2\pi i e^{i\pi z}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_C \frac{s^{z-1}}{1+s}ds &= \int_{C_R}\frac{u^{z-1}}{1+u}du+\int_{-C_r}\frac{u^{z-1}}{1+u}du+\int_{\gamma_1}\frac{u^{z-1}}{1+u}du+\int_{-\gamma_2}\frac{u^{z-1}}{1+u}du\\
&= i\int_0^{2\pi}\frac{R^{z-1}e^{i(z-1)}e^{i\varphi}R^{\varphi}}{1+Re^{i\varphi}}d\varphi - i\int_0^{2\pi}\frac{r^{z-1}e^{i(z-1)}e^{i\varphi}r^{\varphi}}{1+re^{i\varphi}}d\varphi\\
&+ \int_r^R\frac{s^{z-1}}{1+s}ds-\int_r^R\frac{s^{z-1}e^{2\pi(z-1)i}}{1+s}ds\\
&= iR^z\int_0^{2\pi}\frac{e^{iz\varphi}}{1+Re^{i\varphi}}d\varphi - ir^z\int_0^{2\pi}\frac{e^{iz\varphi}}{1+re^{i\varphi}}d\varphi\\
&+ \int_r^R\frac{s^{z-1}}{1+s}ds-e^{2\pi zi}\int_r^R\frac{s^{z-1}}{1+s}ds.
\end{aligned}$$

On calcul le second membre de l'intégrale lorsque $R\longrightarrow+\infty$, $r\longrightarrow 0$, *comme* $0<Re(z)<1$, *alors*

$$\left|iR^z\int_0^{2\pi}\frac{e^{iz\varphi}}{1+Re^{i\varphi}}d\varphi\right|\le R^{x-1}\int_0^{2\pi}\left|\frac{e^{iz\varphi}}{\frac{1}{R}+e^{i\varphi}}\right|d\varphi\longrightarrow 0,\ \text{quand } R\longrightarrow+\infty,\ x=Re(z),$$

et

$$\left|ir^z\int_0^{2\pi}\frac{e^{iz\varphi}}{1+re^{i\varphi}}d\varphi\right|\le r^{x-1}\int_0^{2\pi}\left|\frac{e^{iz\varphi}}{1+re^{i\varphi}}\right|d\varphi\longrightarrow 0,\ \text{quand } r\longrightarrow 0.$$

Donc

$$\begin{aligned}
(1-e^{2\pi zi})\int_0^{+\infty}\frac{s^{z-1}}{1+s}ds=-2\pi i e^{i\pi z} \quad &\Longrightarrow \int_0^{+\infty}\frac{s^{z-1}}{1+s}ds=\frac{-2\pi i e^{i\pi z}}{1-e^{2\pi zi}}\\
&= \frac{\pi}{\frac{e^{i\pi z}-e^{-i\pi z}}{2}}=\frac{\pi}{\sin(\pi z)}.
\end{aligned}$$

• ***La formule de duplication :***

$$\begin{aligned}
B(z,z) &= \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{z-1}dt=\int_0^1[t(1-t)]^{z-1}dt\\
&= \int_0^{\frac{1}{2}}[t(1-t)]^{z-1}dt\int_{\frac{1}{2}}^1[t(1-t)]^{z-1}dt
\end{aligned}$$

On pose $s=1-t$ *on trouve*

$$\int_{\frac{1}{2}}^1[t(1-t)]^{z-1}dt=-\int_{\frac{1}{2}}^0[s(1-s)]^{z-1}ds=\int_0^{\frac{1}{2}}[t(1-t)]^{z-1}dt.$$

Donc

$$B(z,z)=2\int_0^{\frac{1}{2}}[t(1-t)]^{z-1}dt.$$

On effectue alors le changement $s = 4t(1-t)$ et on obtient

$$B(z,z) = 2\int_0^1 \frac{s^{z-1}}{2^{2z-2}} \frac{ds}{4(1-2t)}.$$

On a $s = 4t(1-t) \Longrightarrow (1-s)^{\frac{1}{2}} = 1-2t$, d'où

$$B(z,z) = \frac{1}{2^{2z-1}} \int_0^1 s^{z-1}(1-s)^{-\frac{1}{2}} ds = \frac{1}{2^{2z-1}} B(z, \frac{1}{2}).$$

Alors

$$\frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)} = \frac{1}{2^{2z-1}} \frac{\Gamma(z)\Gamma(frac12)}{\Gamma(z+frac12)},$$

finalement on trouve

$$\frac{2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+frac12)}{\sqrt{\pi}} = \Gamma(2z).$$

2.5 Fonction de Mittag-Leffler

Définition 2.3 *La fonction de Mittag-Leffler est définie par la série de fonction suivante*

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}, \quad \alpha > 0, \ z \in \mathbb{C}.$$

La fonction généralisée de Mittag-Leffler est donnée par

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, \quad \alpha, \beta > 0, \ z \in \mathbb{C}.$$

Propriétés 2.1

1. $E_{1,1}(z) = e^z$,
2. $E_{1,2}(z) = \frac{e^z-1}{z}$,
3. $E_{1,3}(z) = \frac{e^z-1-z}{z^2}$,
4. $\forall m \in \mathbb{N}, \ E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}}\left[e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!}\right]$.
5. $E_{2,1}(z^2) = \cosh(z)$,
6. $E_{2,2} = \frac{\sinh(z)}{2}$

Démonstration. *1. Soit $z \in \mathbb{C}$, alors*

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

2. On a

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^{k-1}}{k!}.$$

Comme $e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$ *on obtient* $e^z = z\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^{k-1}}{k!} + 1$, *et alors* $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^{k-1}}{k!} = \frac{e^z-1}{z}$ *ceci donne*

$$E_{1,2}(z) = \frac{e^z - 1}{z}.$$

3. *On a* $E_{1,3}(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{(k+2)!} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{z^{k-2}}{k!}$. *Puisque*

$$e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \Longrightarrow \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}.$$

Et alors on trouve

$$E_{1,3}(z) = \frac{e^z - 1 - z}{z^2} = \frac{1}{z^{3-1}} \left[e^z - \sum_{k=0}^{1} \frac{z^k}{k!} \right].$$

4. *Soit* $m \in \mathbb{N}^*$ *fixé on a*

$$E_{1,m} = \frac{1}{z^{m-1}} \left[e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!} \right].$$

Montrons que $E_{1,m+1} = \frac{1}{z^m} \left[e^z - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{z^k}{k!} \right]$.

$$\begin{aligned}
E_{1,m+1}(z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+m+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{(k+m)\Gamma(k+m)}, \\
&= \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{z^{k-m}}{k\Gamma(k)} = \frac{1}{z^m} \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{z^k}{k\Gamma(k)}, \\
&= \frac{1}{z^m} \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}, \\
&= \frac{1}{z^m} \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{z^k}{k!} \right] = \frac{1}{z^m} \left[e^z - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{z^k}{k!} \right],
\end{aligned}$$

D'où

$$E_{1,m+1}(z) = \frac{1}{z^m} \left[e^z - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{z^k}{k!} \right].$$

5.

$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z).$$

6.

$$E_{2,2}(z^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{(2k+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh(z)}{z}.$$

□

- **Fonction hyperbolique généralisée.**

$$h_r(z,n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{nk+r-1}}{(nk+r-1)!},\ r \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow h_r(z,n) = z^{r-1}E_{n,r}(z^n).$$

- **Fonction trigonométrique généralisée.**

$$k_r(z,n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{nk+r-1}}{(nk+r-1)!}, \Longrightarrow k_r(z,n) = z^{r-1}E_{n,r}(-z^n) \text{ pour } r \in \mathbb{N}^*.$$

En effet

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{nk+r-1}}{(nk+r-1)!} = z^{r-1}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{nk}}{\Gamma(nk+r)} = z^{r-1}E_{n,r}(z^n).$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{nk+r-1}}{(nk+r-1)!} = z^{r-1}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-z^n)^k}{\Gamma(nk+r)} = z^{r-1}E_{n,r}(-z^n).$$

Finalement on a montré que

$$h_r(z,n) = z^{r-1}E_{n,z}(z^n),\ \text{et } k_r(z,n) = z^{r-1}E_{n,z}(-z^n).$$

- *Pour* $\alpha \to 0^+$ *on a*

$$E_0(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1.$$

- $E_{\frac{1}{2}}(z^{\frac{1}{2}}) = e^z[1 + erf(z^{\frac{1}{2}}] = e^z erf(-z^{\frac{1}{2}})$ • $E_{\frac{1}{2}}(-z^{\frac{1}{2}}) = e^z[1 + erf(-z^{\frac{1}{2}}] = e^z erf(z^{\frac{1}{2}})$,

  où

$$erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-u^2}du,\ erf(z) = 1 - erf(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

- $E_{\alpha,\beta}(z) = \dfrac{1}{\Gamma(\beta)} + zE_{\alpha,\beta+\alpha}(z)$.

  - $E_{\alpha,\beta}(z) = \beta E_{\alpha,\beta+1}(z) + \alpha z \frac{d}{dz}E_{\alpha,\beta+1}(z)$.

  - $\left(\frac{d}{dz}\right)^p E_{\alpha,\beta}(z^\alpha) = z^{\beta-p-1}E_{\alpha,\beta-p}(z^\alpha),\ p \in \mathbb{N}$.

  - **La fonction de Mittag-Leffer pour les nombre irrational**

  Soit $p, q \in \mathbb{N}^*$, $\alpha = \dfrac{p}{q}$ *avec* p *et* q *sont de nombres premier :*

  - $\left(\frac{d}{dz}\right)^p E_p(z^p) = E_p(z^p)$.

  - $\left(\frac{d}{dz}\right)^p E_{\frac{p}{q}}(z^{\frac{p}{q}}) = E_{\frac{p}{q}}(z^p) + \displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} \frac{z^{-\frac{-kp}{q}}}{\Gamma(1-\frac{kp}{q})}, \quad q = 2, 3, \ldots,$

- $E_{\frac{p}{q}}(z) = \frac{1}{p}\sum_{n=0}^{p-1} E_{\frac{1}{q}}(z^{\frac{1}{p}e^{\frac{i2\pi}{p}}}),\ E_{\frac{1}{p}}(z^{\frac{1}{p}}) = e^z[1 + \sum_{k=1}^{q-1} \frac{\gamma(1-\frac{k}{q}, z)}{\Gamma(1-\frac{k}{q})}, \quad q = 2, 3, \ldots,$

avec $\gamma(a, z) = \int_0^z e^{-u} u^{a-1}$.

Chapitre 3

Intégrale et dérivée d'ordre fractionnaire

3.1 Introduction

Dans ce chapitre on va présenter les notions de la dérivie et l'intégrale fractionnaire. il existe beaucoup d'approches différentes qui ont été utilisées pour généraliser la notion de dérivation d'ordre non entiers, par exemple on a : la formule de Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville et de Caputo, on s'intéresse seulement sur les deux dernier.

3.2 Équation d'Abel

Définition 3.1 *On considère l'équation intégrale*

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt = f(t), \quad \alpha \in]0,1[, \ x \in [a,b], \tag{3.1}$$

où φ est la fonction inconnue et f est une fonction donnée .
L'équation (3.1) s'appelle équation d'Abel, et elle admet une solution définie par

$$\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}} dt.$$

En effet, posons $x = t$, et $t = s$ alors

$$f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(s)}{(x-s)^{1-\alpha}} ds, \tag{3.2}$$

en multipliant l'équation (3.2) par $(x-t)^{-\alpha}$, on obtient

$$(x-t)^{-\alpha} f(t) = (x-t)^{-\alpha} \int_a^t \frac{\varphi(t)}{(x-s)^{1-\alpha}} ds.$$

Par intégration

$$\Gamma(\alpha)\int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t)dt = \int_a^x (x-t)^{-\alpha}\left(\int_a^t \frac{\varphi(s)}{(x-s)^{1-\alpha}}ds\right)dt.$$

D'après le théorème de Fubini on obtient

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t)dt &= \int_a^x\int_a^t \varphi(s)(x-t)^{-\alpha}(x-s)^{\alpha-1}dtds \\ &= \int_a^x \varphi(s)ds\int_s^x (x-t)^{-\alpha}(t-s)^{\alpha-1}dt, \qquad (3.3)\end{aligned}$$

maintenant, on calcule l'intégrale

$$J = \int_s^x (x-t)^{-\alpha}(t-s)^{\alpha-1}dt, \qquad (3.4)$$

en y effectuant le changement de variable $t = s + r(x-s)$, *on a* $dt = (x-s)dr$, *si* $t = x$ $r = 1$ *et si* $t = s$ $r = 0$, $t - s = r(x-s)$, *donc*

$$\begin{aligned}\int_s^x (x-t)^{-\alpha}(t-s)^{\alpha-1}dt &= \int_0^1 (x-t)^{-\alpha} r^{\alpha-1}(x-s)^{\alpha}dr \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x-s}{x-t}\right)^{\alpha} r^{\alpha-1}dr \\ &= \int_0^1 (1-r)^{-\alpha} r^{\alpha-1}dr \\ &= B(\alpha, 1-\alpha) = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha).\end{aligned}$$

Donc

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)\int_a^x \varphi(s)ds = \Gamma(\alpha)\int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t)dt,$$

alors

$$\int_a^x \varphi(s)ds = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t)dt,$$

ceci implique

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t)dt.$$

Justification de la solution de l'équation d'Abel *Dans cette partie on va imposer quelque condition sur la fonction* f *de l'équation (3.1) pour justifier l'existence de la solution. Soit* $f : \ [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ *une fonction donnée. On introduit la fonction suivante :*

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt.$$

Lemme 3.1 *Si* $f \in L^1([a,b],\mathbb{R})$ *alors* $f_{1-\alpha} \in L^1([a,b],\mathbb{R})$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}\int_a^b |f_{1-\alpha}(x)|dx &= \left|\int_a^b \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}dt\right)dx\right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^b dx \int_a^x \frac{|f(t)|}{(x-t)^\alpha}dt\end{aligned}$$

D'après le théorème de Fubini et Dirichlet on obtient

$$\int_a^b |f_{1-\alpha}(x)|dx \leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^b |f(t)|dt \int_t^b \frac{1}{(x-t)^\alpha}dx = \frac{1}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\int_a^b |f(t)|(x-t)^{1-\alpha}dt.$$

Alors

$$\begin{aligned}\int_a^b |f_{1-\alpha}(x)|dx &\leq \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_a^b |f(t)|(b-t)^{1-\alpha}dt \\ &\leq \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\|f\|_{L^1} < +\infty,\end{aligned}$$

d'où $f_{1-\alpha} \in L^1([a,b],\mathbb{R})$.

Théorème 3.1 *Soit* $\alpha \in]0,1[$. *L'équation d'Abel admet une solution dans* $L^1([a,b],\mathbb{R})$ *si et seulement si*

$$f_{1-\alpha} \in AC([a,b],\mathbb{R}), \text{ et } f_{1-\alpha}(a) = 0.$$

Démonstration. ***La condition nécessaire***.
Soit $\varphi \in AC([a,b],\mathbb{R})$ *solution de l'équation d'Abel, alors*

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^\alpha}dt = f(t) \Rightarrow f_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\int_a^t \frac{\varphi(s)}{(t-s)^\alpha}ds\right)dt.$$

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x dt \int_a^t \frac{\varphi(s)}{(t-s)^\alpha}ds = \frac{1}{B(\alpha,1-\alpha)}\int_a^x \left(\int_a^t \frac{\varphi(s)}{(t-s)^\alpha}ds\right)dt.$$

Montrons que $f_{1-\alpha}(\cdot) \in AC([a,b],\mathbb{R})$.

- $f_{1-\alpha}$ ***est continue.***

Soient $x_1, x_2 \in [a,b]$ *tels que* $x_1 < x_2$ *alors*

$$\begin{aligned}
|f_{1-\alpha}(x_1) - f_{1-\alpha}(x_2)| &= \frac{1}{B(\alpha,1-\alpha)}\left|\int_{x_1}^{x_2} dt \int_a^t \frac{\varphi(s)}{(t-s)^\alpha} ds\right| \\
&\leq \frac{1}{B(\alpha,1-\alpha)}\int_{x_1}^{x_2} dt \int_a^t \frac{|\varphi(s)|}{(t-s)^\alpha} ds \\
&= \frac{1}{B(\alpha,1-\alpha)}\int_{x_1}^{x_2} |\varphi(s)|ds \int_s^{x_2} (t-s)^{-\alpha} dt \\
&= \frac{1}{(1-\alpha)B(\alpha,1-\alpha)}\int_{x_1}^{x_2} |\varphi(s)|[(t-s)^{1-\alpha}]_s^{x_2} ds \\
&\leq \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)B(\alpha,1-\alpha)}\int_{x_1}^{x_2} |\varphi(s)|ds.
\end{aligned}$$

Donc $|f_{1-\alpha}(x_1) - f_{1-\alpha}(x_2)| \longrightarrow 0$ *quand* $x_1 \longrightarrow x_2$*. D'où* $f_{1-\alpha} \in C([a,b],\mathbb{R})$*.*
D'après la définition de $f_{1-\alpha}$ *on a*

$$f'_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{B(\alpha,1-\alpha)}\int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^\alpha} dt, \quad f'_{1-\alpha}(a) = 0,$$

comme $\varphi \in L^1([a,b],\mathbb{R})$*, donc d'après le lemme 3.1 on a* $f'_{1-\alpha} \in L^1([a,b],\mathbb{R})$*.*
D'où $f_{1-\alpha} = \int_a^x f'_{1-\alpha} dt$*,* $x \in [a,b]$*, ce qui montre que* $f_{1-\alpha}(\cdot) \in AC([a,b],\mathbb{R})$*.*

- ***La condition suffisante***

Puisque $f_{1-\alpha} \in AC([a,b],\mathbb{R})$ *alors* $f'_{1-\alpha}(x) = \frac{d}{dx} f_{1-\alpha}(x) \in L^1([a,b],\mathbb{R})$*.*
On considère la fonction g *définie par*

$$g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f'_{1-\alpha}(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad x \in [a,b].$$

Montrons que $f = g$
D'après la définition 3.1 on a

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{g(t)}{(x-t)^\alpha} dt, \; x \in [a,b],$$

ceci implique

$$f'_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{g(t)}{(x-t)^\alpha} dt = g'_{1-\alpha}(x).$$

On a $f_{1-\alpha}$ *est absolument continue alors* $g_{1-\alpha}$ *est aussi absolument continue. Alors* $f_{1-\alpha} - g_{1-\alpha} = c$ *est constante.*
Le fait que $c = 0$*, donc* $\int_a^x \frac{f(t)-g(t)}{x-t} dt = 0 \Longrightarrow f(t) = g(t)$*.*

□

Lemme 3.2 *Si $f \in AC([a,b],\mathbb{R})$ alors $f_{1-\alpha} \in AC([a,b],\mathbb{R})$ et*

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[f(a)(x-a)^{1-\alpha} + \int_a^x f'(t)(x-t)^{1-\alpha}dt\right].$$

Démonstration. *Comme $f \in AC([a,b],\mathbb{R})$ alors $f(t) = f(a) + \int_a^t f'(s)ds$. D'après le théorème 3.1 $f_{1-\alpha} \in AC([a,b],\mathbb{R})$. ceci donne*

$$\begin{aligned}
f_{1-\alpha}(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x \frac{(f(a)+\int_a^t f'(s)ds)}{(x-t)^\alpha}dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x \frac{f(a)}{(x-t)^\alpha}dt + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x \frac{dt}{(x-t)^\alpha}\int_a^t f'(s)ds \\
&= \frac{f(a)(x-t)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x \left(\int_s^x \frac{f'(t)}{(t-s)^\alpha}dt\right)ds \\
&= \frac{f(a)(x-t)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x f'(t)ds\int_s^x \frac{dt}{(t-s)^\alpha} \\
&= \frac{f(a)(x-t)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_a^x (x-s)^{1-\alpha}f(s)ds.
\end{aligned}$$

D'où

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[f(a)(x-t)^{1-\alpha} + \int_a^x (x-s)^{1-\alpha}f'(s)ds\right].$$

□

Corollaire 3.1 *Si $f \in AC([a,b],\mathbb{R})$, alors l'équation d'Abel (3.1) $0 < \alpha < 1$ admet une solution φ dans $L^1([a,b],\mathbb{R})$ donnée par la formule*

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} + \int_a^x \frac{f'(s)}{(x-s)^\alpha}ds\right], \quad x \in]a,b].$$

Démonstration. *Comme $f \in AC([a,b],\mathbb{R})$ alors $f_{1-\alpha} \in AC([a,b],\mathbb{R})$.*
D'après le lemme 3.2 on a

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}f(a)(x-a)^{1-\alpha} + \int_a^x f'(s)(x-s)^{1-\alpha}dt,$$

alors $f_{1-\alpha}(a) = 0$.
D'après le théorème 3.1, l'équation d'Abel admet une solution donnée par

$$\varphi(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}dt\right] = \frac{d}{dx}f_{1-\alpha}(x)$$

ceci implique

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} + \int_a^x \frac{f'(t)}{(x-t)^\alpha}dt\right].$$

□

3.3 Intégrales et dérivations fractionnaires

soit $f: \ [a,b[\ \longmapsto \ \mathbb{R}$ *une fonction continue ou intégrable et*

$$\begin{aligned} I^1_{a+} : \ [a,b[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (I^1_{a+}f)(x) = \int_a^x f(t)dt, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} I^1_{b-} : \ ]a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (I^1_{b-}f)(x) = \int_x^b f(t)dt. \end{aligned}$$

Pour une primitive seconde on aura :

$$(I^2_{a+}f)(x) = \int_a^x \left(\int_a^t f(s)ds\right) dt, \qquad (I^2_{b-}f)(x) = \int_x^b \left(\int_x^b f(s)ds\right) dt.$$

D'après le théorème de Fubini nous ramènons cette intégrale double à une intégrale simple

$$(I^2_{a+}f)(x) = \int_a^x f(s)ds \int_s^x dt = \int_a^x \frac{(x-s)}{1!} f(s)ds,$$

et

$$(I^2_{b-}f)(x) = \int_x^b f(s)ds \int_x^s dt = \int_x^b \frac{(s-x)}{1!} f(s)ds.$$

Par une itération on obtient

$$(I^n_{a+}f)(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt,$$

et

$$(I^n_{b-}f)(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b (t-x)^{n-1} f(t)dt.$$

Donc

$$(I^n_{a+}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt,$$

et

$$(I^n_{b-}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_x^b (t-x)^{n-1} f(t)dt.$$

Théorème 3.2 *Soit f une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, alors la fonction*

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt, \quad pour \ \ x \in [a,b],$$

est continue et $F' = f$.

On note $D^n f(x) = f^{(n)}(x)$, *pour* $n \in \mathbb{N}$.

Lemme 3.3 *Soient* $m, n \in \mathbb{N}$ *et* $f \in C^m([a,b], \mathbb{R})$. *Alors*

Démonstration. *En effet* $D^{m-n} I_a^{m-n} f = f$ *ça implique* $D^n D^{m-n} I_a^{m-n} f = D^n f$. *Alors*

$$D^n f = D^m I_a^{m-n} f.$$

□

Définition 3.2 *Soient* $f \in L^1([a,b], \mathbb{R})$, $\alpha > 0$. *On appelle intégrale de Riemann-Liouville de* f *l'intégrale à gauche (respectivement à droite) suivante*

$$(I_{a_+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x > a,$$

et

$$(I_{b_-}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x < b.$$

Lemme 3.4 *Soit* $f \in L^1([a,b], \mathbb{R})$, *alors*

$$Q I_{a_+}^{\alpha} = I_{b_-}^{\alpha} Q, \ \text{ et } Q I_{b_-}^{\alpha} = I_{a_+}^{\alpha} Q,$$

avec $(Qf)(x) = f(a+b-x)$.

Démonstration. *Soit* $f \in L^1([a,b], \mathbb{R})$, *alors*

$$Q(I_{a_+}^{\alpha} f)(x) = (I_{a_+}^{\alpha} f)(b+a-x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{b+a-x} (b+a-x-t)^{\alpha-1} f(t) dt.$$

Posons $s = a+b-t$ *on trouve*

$$\begin{aligned} Q(I_{a_+}^{\alpha} f)(x) &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (b-x)^{\alpha-1} f(a+b-t) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_b^x (b-x)^{\alpha-1} (Qf)(t) dt \end{aligned}$$

D'où

$$Q(I_{a_+}^{\alpha} f)(x) = (I_{b_-}^{\alpha} Q f)(x).$$

Ce qui montre que $Q I_{a_+}^{\alpha} = I_{b_-}^{\alpha} Q$.

De la même manière on peut montrer que $Q I_{b_-}^{\alpha} = I_{a_+}^{\alpha} Q$ □

Proposition 3.1 *Soit* $f \in C([a,b], \mathbb{R})$. *Pour* $\alpha, \beta > 0$ *on a*

$$I_{a_+}^{\alpha} I_{a_+}^{\beta} f = I_{a_+}^{\alpha+\beta} f, \qquad I_{b_-}^{\alpha} I_{b_-}^{\beta} f = I_{b_-}^{\alpha+\beta} f.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
(I^{\alpha}_{a_+} I^{\beta}_{a_+} f)(x) &= I^{\alpha}_{a_+}(I^{\beta}_{a_+} f)(x) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (I^{\beta}_{a_+} f)(t)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \left(\int_a^t (t-s)^{\beta-1} f(s)ds \right) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(s)ds \int_s^x (x-t)^{\alpha-1}(t-s)^{\beta-1}dt
\end{aligned}$$

en y effectuant le changement de variable $t = s + (x-s)r$

$$\begin{aligned}
\int_s^x (x-t)^{\alpha-1}(t-s)^{\beta-1}dt &= \int_0^1 (x-s)^{\alpha-1}(1-r)^{\alpha-1}(x-s)^{\beta-1} r^{\beta-1}(x-s)dr \\
&= \int_0^1 (x-s)^{\alpha+\beta-1} r^{\beta}(1-r)^{\alpha-1}dr \\
&= (x-s)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 r^{\beta}(1-r)^{\alpha-1}dr \\
&= (x-s)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha,\beta) \\
&= (x-s)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.
\end{aligned}$$

D'où

$$I^{\alpha}_{a_+} I^{\beta}_{a_+} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x (x-s)^{\alpha+\beta-1} f(s)ds = (I^{\alpha+\beta}_{a_+} f)(x).$$

De même manière on montre que $I^{\alpha}_{b_-} I^{\alpha}_{b_-} f = I^{\alpha+\beta}_{b_-} f$. □

Proposition 3.2 *Soient* $\alpha, \beta > 0$ *alors*

$$I^{\alpha}_{a_+}[(t-a)^{\beta-1}](x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-a)^{\alpha+\beta-1},$$

et

$$I^{\alpha}_{b_-}[(b-t)^{\beta-1}](x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}(b-x)^{\beta+\alpha-1}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
I^{\alpha}_{a_+}[(t-a)^{\beta-1}](x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a_+}^x (x-s)^{\alpha-1}(s-a)^{\beta-1}ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1}(s-a)^{\beta-1}ds
\end{aligned}$$

Posons $s = x - r(x-a)$ *alors on obtient*

$$\begin{aligned}
I_{a_+}^{\alpha}[(t-a)^{\beta-1}](x) &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^0 (x-a)^{\alpha} r^{\alpha-1}(x-a)^{\beta-1}(1-r)^{\beta-1}dr \\
&= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 r^{\alpha-1}(1-r)^{\beta-1}dr \\
&= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)}B(\alpha,\beta) \\
&= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta-1}\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}
\end{aligned}$$

Donc

$$I_{a_+}^{\alpha}[(t-a)^{\beta-1}](x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-a)^{\alpha+\beta-1}.$$

- $I_{b_-}^{\alpha}[(b-t)^{\beta-1}](x) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_x^b (s-x)^{\alpha-1}(b-s)^{\beta-1}ds$

Posons $s = x + r(b-x)$ *alors on obtient*

$$\begin{aligned}
I_{b_-}^{\alpha}[(b-t)^{\beta-1}](x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (b-x)^{\alpha} r^{\alpha-1}(b-s)^{\beta-1}(1-r)^{\beta-1}dr \\
&= \frac{(b-x)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 r^{\alpha-1}(1-r)^{\beta-1}dr \\
&= \frac{(b-x)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)}B(\alpha,\beta).
\end{aligned}$$

D'où

$$I_{b_-}^{\alpha}[(b-t)^{\beta-1}](x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(b-x)^{\alpha+\beta-1}.$$

□

Lemme 3.5 *Soit* $f \in L^p([a,b],\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq +\infty$ *alors*

(a) $\exists k > 0$ *tel que*

$$\|I_{a_+}^{\alpha} f\|_{L^p} \leq k\|f\|_{L^p} \quad et \quad \|I_{b_-}^{\alpha} f\|_{L^p} \leq k\|f\|_{L^p}$$

avec $k = \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$, $\alpha > 0$.

(b) *Si* $0 < \alpha < 1$ *et* $1 < p < \frac{1}{\alpha}$ *alors il existe* $\tilde{k} > 0$ *tel que*

$$\|I_{a_+}^{\alpha} f\|_{L^q} \leq \tilde{k}\|f\|_{L^p} \quad et \quad \|I_{b_-}^{\alpha} f\|_{L^q} \leq \tilde{k}\|f\|_{L^p},\ \forall f \in L^p([a,b],\mathbb{R}),\ q = \frac{p}{1-\alpha p}.$$

Démonstration. (a) *Soit* $f \in L^p([a,b],\mathbb{R})$, *alors*

$$\|I_{a_+}^{\alpha} f\|_{L^p} = \left[\int_a^b \left|\int_a^x (x-s)^{1-\alpha} f(s)ds\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}},\quad a \leq x \leq b,\ a \leq s \leq x,\ s \leq x \leq b.$$

D'après l'inégalité de Minkowsky, on obtient

$$\begin{aligned}\|I_{a+}^{\alpha} f\|_{L^p} &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_a^b |f(s)|^p ds\right]^{\frac{1}{p}} \int_s^b (x-s)^{1-\alpha} dx \\ &\leq \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\|f\|_{L^p}.\end{aligned}$$

Par la même procédure en peut montrer que

$$\|I_{b-}^{\alpha} f\|_{L^p} \leq \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\|f\|_{L^p}.$$

(*b*) *Soit* $f \in L^p([a,b],\mathbb{R})$ *alors* $I_{a+}^{\alpha}(f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt$. *Donc*

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)|I_{a+}^{\alpha}(f)(x)| &\leq \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}|f(t)|dt \\ &= \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}|f(t)|^{\frac{p}{q}}|f(t)|^{1-\frac{p}{q}} dt.\end{aligned}$$

Soit $p' > 1$ *tel que* $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)|I_{a+}^{\alpha}(f)(x)| &\leq \int_a^x (x-t)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{p}}|f(t)|^{\frac{p}{q}}.|f(t)|^{1-\frac{p}{q}}(x-t)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{p'}} dt \\ &\leq \left[\int_a^x (x-t)^{\frac{\alpha}{2}q-1}|f(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{q}} \times \left[\int_a^x |f(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \\ &\quad \times \left[\int_a^x (x-t)^{\frac{\alpha}{2}p'-1} dt\right]^{\frac{1}{p'}}\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}|I_{a+}^{\alpha}(f)(x)|^q &\leq \frac{1}{(\Gamma(\alpha))^q}\int_a^x (x-t)^{\frac{\alpha}{2}q-1}|f(t)|^p dt \times \left[\int_a^x |f(t)|^p dt\right]^{\frac{q}{p}-1} \\ &\quad \times \left[\int_a^x (x-t)^{\frac{\alpha}{2}p'-1} dt\right]^{\frac{q}{p'}}.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\int_a^b |I_{a+}^{\alpha}(f)(x)|^q dx &\leq \frac{1}{(\Gamma(\alpha))^q}\int_a^b \left[\int_a^x (x-t)^{\frac{\alpha}{2}q-1}|f(t)|^p dt\right] dx \\ &\quad \times \left[\int_a^b |f(t)|^p dt\right]^{\frac{q}{p}-1} \times C_*,\end{aligned}$$

avec $C_* = \left[\frac{2}{\alpha q}(b-a)^{\frac{\alpha}{2}p'}\right]^{\frac{q}{p'}}$, et donc

$$\left[\int_a^b |I^\alpha_{a+}(f)(x)|^q dx\right]^{\frac{1}{q}} \leq \frac{C_*^{\frac{1}{q}}}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_a^b\left[\int_a^x (x-t)^{\frac{\alpha}{2}q-1}|f(t)|^p dt\right]dx\right]^{\frac{1}{q}} \times \left[\int_a^b |f(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

D'après l'inégalité de Minkowsky, on obtient

$$\begin{aligned}\|I^\alpha_{a+}f\|_{L^q} &\leq \frac{C_*^{\frac{1}{p'}}}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_a^b |f(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{q}}\int_a^b (x-t)^{\frac{\alpha}{2}q-1}dx\|f\|_{L^p}^{1-\frac{p}{q}} \\ &\leq \frac{2(b-a)^{\frac{\alpha q}{2}}C_*^{\frac{1}{p'}}}{q\Gamma(\alpha+1)}\|f\|_{L^p}^{\frac{p}{q}}.\|f\|_{L^p}^{1-\frac{p}{q}}.\end{aligned}$$

Donc $\|I^\alpha_{a+}f\|_{L^q} \leq M\|f\|_{L^p}$, $\forall f \in L([a,b],\mathbb{R})$ où $M = \frac{2(b-a)^{\frac{\alpha q}{2}}C_*^{\frac{1}{p'}}}{q\Gamma(\alpha+1)}$. □

3.4 Propriétés de semi-groupes pour l'intégrale fractionnaire

Soit E un espace de Banach réel ou complexe muni de la norme $x \longmapsto \|x\|_E$. On désigne par $\mathcal{L}(E)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans lui-même. $\mathcal{L}(E)$ muni de la norme $A \longmapsto \|A\|$ telle que

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_E=1} = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_E}{\|x\|_E},$$

est un espace de Banach.

Définition 3.3 *Une famille $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{L}(E)$ pour $t \geq 0$ génère un semi-groupe de classe c_0 dans E si elle vérifie les conditions suivantes*

(i) $(T+s) = T(t)T(s)$ pour $t, s \geq 0$ (propriété algébrique).

(ii) $T(0) = Id_E$ (l'identité dans $\mathcal{L}(E)$).

(iii) $\lim\limits_{t\to 0^+}\|T(t)-x\|_E = 0$ pour tout $x \in E$ (propriété topologique).

Remarque 3.1 *La condition (ii) équivalente à $\lim\limits_{t\to t_0}\|T(t)x - T(t_0)\|_E = 0$.*

Exemple 3.1 Le cas où E est de dimension finie
Soit $E = \mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}$), $A \in \mathcal{L}(E)$, alors $T(t) = e^{tA}$ pour $t \in \mathbb{R}$, est un c_0-semi-groupe.

Exemple 3.2 *Soit* $X = \ell^2 = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*},\ \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty\}$ *l'espace des suites muni de la norme* $x \longmapsto \|x\|_{\ell^2} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ *associée au produit scalaire* $\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n\bar{y}_n$.
On définit $T(t)$ *par*

$$T(t)x = \{e^{-nt}x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2 \text{ pour tout } t \geq 0.$$

$T(t)$ *est un semi-groupe.*

Théorème 3.3 *L'opérateur intégrale d'ordre fractionnaire forme un semi-groupe de classe* C_0 *de* $L^p([a,b],\mathbb{R})$ *dans lui-même pour* $1 \leq p < +\infty$.

Démonstration. *Soit*

$$\begin{array}{rccl} I^\alpha: & L^p([a,b],\mathbb{R}) & \longrightarrow & L^p([a,b],\mathbb{R}) \\ & f & \longmapsto & I^\alpha_{a_+}f,\ \alpha > 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccccl} T: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & L^p([a,b],\mathbb{R}) & & & \\ & \alpha & \longmapsto & T(\alpha): & f & \longmapsto & T(\alpha)f = I^\alpha_{a_+}f \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcccccl} \widetilde{T}: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & L^p([a,b],\mathbb{R}) & & & \\ & \alpha & \longmapsto & \widetilde{T}(\alpha): & f & \longmapsto & \widetilde{T}(\alpha)f = I^\alpha_{b_-}f. \end{array}$$

• $T(t)$ **est linéaire**
Soit $\gamma, \sigma \in \mathbb{R}$, $f, g \in L^p$ alors $T(\alpha)[\gamma f + \sigma g] = I^\alpha_{a_+}[\gamma f + \sigma g]$

$$\begin{aligned} T(\alpha)[\gamma f + \sigma g](x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}[\gamma f + \sigma g](t)dt \\ &= \frac{\gamma}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt + \frac{\sigma}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}g(t)dt \\ &= \gamma T(\alpha)[f](x) + \sigma T(\alpha)[g](x),\ \forall x \in [a,b]. \end{aligned}$$

Alors

$$T(\alpha)[\gamma f + \sigma g] = T(\alpha)[f] + \sigma T(\alpha)[g],$$

et

$$\widetilde{T}(\alpha)[\gamma f + \sigma g] = \widetilde{T}(\alpha)[f] + \sigma\widetilde{T}(\alpha)[g].$$

•

$$\begin{aligned} \|T(\alpha)[f]\|_{L^p} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_a^b \left|\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}[f](t)dt\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_a^b |f(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{p}} \int_a^b (x-t)^{\alpha-1}dx \\ &\leq \frac{(b-a)^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}\|f\|_{L^p}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

et

$$\|\widetilde{T}(\alpha)[f]\|_{L^p} \leq \frac{(b-a)^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}\|f\|_{L^p}.$$

D'où $T(\cdot)$ et $\widetilde{T}(\cdot)$ sont deux opérateurs linéaires continus.

- *D'après la proposition 3.1, pour tout $\alpha, \beta > 0$ on a*

$$I^{\alpha}_{a_+} I^{\beta}_{a_+} f = I^{\alpha+\beta}_{a_+} f, \qquad I^{\alpha}_{b_-} I^{\beta}_{b_-} f = I^{\alpha+\beta}_{b_-} f.$$

Ce qui montre que

$$T(\alpha+\beta) = T(\alpha)T(\beta), \text{ et } \widetilde{T}(\alpha+\beta) = \widetilde{T}(\alpha)\widetilde{T}(\beta).$$

- ***La continuité** de $\alpha \longmapsto T(\alpha)f,\ f \in L^\alpha$.*

Soit $\alpha_0 > 0$, alors

$$\begin{aligned}
(I^{\alpha_0}_{a_+} f)(x) - (I^{\alpha}_{a_+} f)(x) &= \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha_0)} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right]\int_a^x (x-t)^{\alpha_0-1} f(t)dt \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x [(x-t)^{\alpha_0-1} - (x-t)^{\alpha-1}] f(t)dt \\
&= Af(x) + Bf(x),
\end{aligned}$$

avec

$$Af(x) = \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha_0)} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right]\int_a^x (x-t)^{\alpha_0-1} f(t)dt,$$

et

$$Bf(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x [(x-t)^{\alpha_0-1} - (x-t)^{\alpha-1}] f(t)dt.$$

D'après l'inégalité (3.5) on obtient

$$\|Af\|_{L^p} \leq \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha_0)} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right| \frac{(b-a)^{\alpha_0}}{\Gamma(\alpha_0+1)}\|f\|_{L^p},$$

ceci implique

$$\|Af\|_{L^p} \leq \left|1 - \frac{\Gamma(\alpha_0)}{\Gamma(\alpha)}\right| \frac{(b-a)^{\alpha_0}}{\Gamma(\alpha_0+1)}\|f\|_{L^p}.$$

Soit $\widetilde{\varphi}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{si } x \notin [a,b]. \end{cases}$

$$\begin{aligned}
|Bf(x)| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x [(x-t)^{\alpha_0-1} - (x-t)^{\alpha-1}]\widetilde{\varphi}(t)dt \\
&= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x-a}^0 [s^{\alpha_0-1} - s^{\alpha-1}]\widetilde{\varphi}(x-s)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x-a} [s^{\alpha_0-1} - s^{\alpha-1}]\widetilde{\varphi}(x-s)ds.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
|Bf(x)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{b-a}[s^{\alpha_0-1}-s^{\alpha-1}]|\widetilde{\varphi}(x-s)|ds\\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{b-a}\frac{|1-s^{\alpha-\alpha_0}|}{s^{\alpha_0}}|\widetilde{\varphi}(x-s)|ds,
\end{aligned}$$

et alors

$$\left[\int_a^b |Bf(x)|^p\right]^{\frac{1}{p}} = \|Bf\|_{L^p} \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_a^b\left[\int_0^{b-a}\frac{|1-s^{\alpha-\alpha_0}|}{s^{1-\alpha_0}}|\widetilde{\varphi}(x-s)|ds\right]dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

D'après l'inégalité de Minkowski on obtient

$$\begin{aligned}
\|Bf\|_{L^p} &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{b-a}\frac{|1-s^{\alpha-\alpha_0}|}{s^{1-\alpha_0}}ds\left(\int_a^b|\widetilde{\varphi}(x-s)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{b-a}\frac{|1-s^{\alpha-\alpha_0}|}{s^{1-\alpha_0}}ds\left(\int_a^b|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{b-a}\frac{|1-s^{\alpha-\alpha_0}|}{s^{1-\alpha_0}}ds\ \|f\|_{L^p}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\frac{\|(I^{\alpha_0}f)-(I^{\alpha}f)\|_{L^p}}{\|f\|_{L^p}} \leq \left|1-\frac{\Gamma(\alpha_0)}{\Gamma(\alpha)}\right|\frac{(b-a)^{\alpha_0}}{\Gamma(\alpha_0+1)} + \int_0^{b-a}\frac{|1-s^{\alpha-\alpha_0}|}{s^{1-\alpha_0}}ds.$$

Alors le côté droit de l'inégalité précédente tend vers zéro quand α tend vers α_0.

- *Soit $\alpha_0 = 0$. Montrons que $\lim_{\alpha\to 0}\|T(\alpha)f - f\|_{L^p} = 0$*

$$\begin{aligned}
(T(\alpha)f)(x) - f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt - f(x)\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{x-a} t^{\alpha-1}f(x-t)dt - f(x)\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{x-a} t^{\alpha-1}f(x-t)dt - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x-a} t^{\alpha-1}f(x)dt\\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x-a} t^{\alpha-1}f(x)dt - f(x)\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x-a}\frac{f(x-t)-f(x)}{t^{1-\alpha}}dt + f(x)\left(\frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-1\right).
\end{aligned}$$

Donc

$$|T(\alpha)f(x) - f(x)| \leq |\widetilde{A}f(x)| + |\widetilde{B}f(x)|,$$

avec

$$\widetilde{A}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x-a} \frac{f(x-t)-f(x)}{t^{1-\alpha}}dt, \quad \text{et} \quad \widetilde{B}f(x) = \left(\frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - 1\right) f(x).$$

Alors d'après le théorème de Lebesgue dominé on a

$$\|\widetilde{B}f\|_{L^p}^p \leq \int_a^b |f(x)|^p \left|\frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - 1\right|^p dx \longrightarrow 0 \text{ si } \alpha \longrightarrow 0.$$

Maintenant on montre que

$$\|\widetilde{A}f\|_{L^p} \longrightarrow 0, \text{ quand } \alpha \longrightarrow 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$ *et* P *un polynôme tel que*

$$\|P - f\|_{L^p} \leq \frac{\varepsilon P(\alpha+1)}{4(b-a)^\alpha}.$$

Alors

$$\|\widetilde{A}f\|_{L^p} \leq \|\widetilde{A}(f-P)\|_{L^p} + \|\widetilde{A}P\|_{L^p}.$$

$$\widetilde{A}(f-P)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^{x-a} \frac{f(x-t)-f(x)-P(x-t)-P(x)}{t^{1-\alpha}}dt,$$

et alors on a

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{A}(f-P)\|_{L^p} &= \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\int_a^b \left|\int_0^{x-a} \frac{f(x-t)-f(x)-P(x-t)-P(x)}{t^{1-\alpha}}dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left[\int_a^b \left(\int_0^{x-a} \frac{|f(x-t)-P(x-t)|}{t^{1-\alpha}}dt\right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left. + \int_0^{x-a} \frac{|f(x)-P(x)|}{t^{1-\alpha}}dt\right)^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b (x-t)^{\alpha-1} dt [2\|f-P\|_{L^p}] \\
&\leq \frac{2(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \|f-P\|_{L^p},
\end{aligned}$$

ce qui prouve que

$$\|\widetilde{A}(f-P)\|_{L^p} \leq \frac{2(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \|f-P\|_{L^p} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.6}$$

-
$$\begin{aligned}
\widetilde{A}f(x) &= \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x-a} \frac{P(x-t)-P(x)}{t^{1-\alpha}}dt \\
&= \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^{x-a} t^\alpha P'(\xi)dt, \quad \xi \in]x-t, x[.
\end{aligned}$$

Donc

$$|\widetilde{A}P(x)| \leq \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x-a} t^\alpha \max_{t\in[0,x-a]} |P'(t)|dt.$$

D'où

$$\|\widetilde{A}P\|_{L^p} \leq \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)}(b-a)^{\alpha-\frac{1}{p}} \max_{t\in[a,b]} |P'(t)| \longrightarrow 0, \text{ quand } \alpha \longrightarrow 0.$$

Finalement on obtient

$$\|T(\alpha)f - f\|_{L^p} \longrightarrow 0, \text{ quand } \alpha \longrightarrow 0.$$

□

Définition 3.4 *Soient $f \in L^1([a,b],\mathbb{R})$ et $x_0 \in [a,b]$, on dit que x_0 est un point de Lebesgue si*

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_0^t [f(x_0 - s) - f(x_0)]ds = 0.$$

Théorème 3.4 *Soit $f \in L^1([a,b],\mathbb{R})$, alors*

$$\lim_{\alpha\to 0} (I^\alpha f)(x) = f(x),$$

pour tout point de Lebesgue. De plus $(I^\alpha f) \longrightarrow f$ quand $\alpha \longrightarrow 0$, p.p. dans $[a,b]$.

Démonstration. *Soit $x_0 \in [a,b]$ une point de Lebesgue. On considère*

$$\psi(t) = \int_{x_0-t}^{x_0} f(s)ds = \int_0^t f(x_0 - s)ds.$$

Alors

$$\frac{\psi(t)}{t} - f(x_0) = \frac{1}{t} \int_0^t [f(x_0 - s) - f(x_0)]ds.$$

Donc

$$\lim_{t\to 0} \left[\frac{\psi(t)}{t} - f(x_0)\right] = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_0^t [f(x_0 - s) - f(x_0)]ds = 0.$$

C'est-à-dire

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) :\ \forall\ 0 < t \leq \delta(\varepsilon) \Longrightarrow \left|\frac{\psi(t)}{t} - f(x_0)\right| < \varepsilon.$$

D'où $\psi(t) = t(f(x_0) + b(t))$ avec $|b(t)| < \varepsilon$ [$b(\cdot)$ est une fonction bornée].

$$\begin{aligned}
(I^{\alpha}_{a+}f)(x_0) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{x_0}(x_0-t)^{\alpha-1}f(t)dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x_0-a}t^{\alpha-1}f(x_0-t)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x_0-a}t^{\alpha-1}d\psi(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}[\psi(t)t^{\alpha-1}]_{t=0}^{t=x_0-a} - \frac{(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x_0-a}t^{\alpha-2}\psi(t)dt \\
&= \frac{\psi(x_0-a)}{(x_0-a)^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{\psi(t)}{t^{1-\alpha}}\Big|_{t=0} + \frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x_0-a}\frac{\psi(t)}{t^{\alpha-2}}dt \\
&= \frac{\psi(x_0-a)}{(x_0-a)^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{\psi(t)}{t^{1-\alpha}}|_{t=0} + \frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x_0-a}\frac{\psi(t)}{t^{\alpha-2}}dt \\
&= \frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x_0-a}t^{\alpha-1}b(t)dt + \frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)}f(x_0)\int_0^{x_0-a}t^{\alpha-1}dt \\
&+ \frac{\psi(x_0-a)}{(x_0-a)^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)} + \frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\delta}t^{\alpha-1}b(t)dt.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
(I^{\alpha}_{a+}f)(x_0) - f(x_0) &= \frac{\psi(x_0-a)}{(x_0-a)^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)} + f(x_0)\left[\frac{1-\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}(x_0-a)-1\right] \\
&+ \frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\delta}t^{\alpha-1}b(t)dt + \frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x_0-a}t^{\alpha-1}b(t)dt.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha\to 0}|(I^{\alpha}_{a+}f)(x_0) - f(x_0)| &\leq |f(x_0)|\lim_{\alpha\to 0}\left[\frac{1-\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}(x_0-a)-1\right] \\
&+ \lim_{\alpha\to 0}\frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_0^{\delta}t^{\alpha-1}b(t)dt\right| \\
&\leq \lim_{\alpha\to 0}\frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)}\delta^{\alpha}\varepsilon = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

3.5 Intégrale fractionnaire dans un espace de Hölder

Théorème 3.5 *Soient $f \in H^{\lambda}([a,b])$ avec $0 \leq \lambda \leq 1$ et $0 < \alpha < 1$. Alors*

$$(I^{\alpha}_{a+}f)(x) = \frac{f(a)}{\Gamma(\alpha+1)}(x-a)^{\alpha} + \psi(x),$$

où $\psi \in H^{\lambda+\alpha}([a,b])$ si $\lambda+\alpha < 1$.
De plus il existe un réel A strictement positif tel que

$$|\psi(x)| \leq A|x-a|^{\lambda+\alpha}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
(I^{\alpha}_{a_+}f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{\alpha}\frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{\alpha}\frac{f(t)-f(a)+f(a)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt \\
&= \frac{f(a)}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{\alpha}\frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{\alpha}\frac{f(t)-f(a)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt \\
&= \frac{f(a)}{\Gamma(\alpha+1)}(x-a)^{\alpha} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{\alpha}\frac{f(t)-f(a)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt \\
&= \frac{f(a)}{\Gamma(\alpha+1)}(x-a)^{\alpha} + \psi(x),
\end{aligned}$$

où $\psi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{\alpha}\frac{f(t)-f(a)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt.$
Puisque $f \in H^{\lambda}([a,b])$ *on obtient*

$$\begin{aligned}
|\psi(x)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{\alpha}\frac{|f(t)-f(a)|}{(x-t)^{1-\alpha}}dt \\
&\leq \frac{H(\lambda,f)}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{x}(t-a)^{\lambda}(x-t)^{\alpha-1}dt.
\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $t = a - r(x-a)$, *alors*

$$\begin{aligned}
\int_a^{x}(t-a)^{\lambda}(x-t)^{\alpha-1}dt &= \int_0^1 r^{\lambda}(x-a)^{\lambda}(1-r)^{\alpha-1}(x-a)^{\alpha-1}(x-a)dr \\
&= (x-a)^{\lambda+\alpha}\int_0^1 r^{\lambda}(1-r)^{\alpha-1}dr = (x-a)^{\lambda+\alpha}B(\lambda,\alpha).
\end{aligned}$$

Donc

$$|\psi(x)| \leq \frac{H(\lambda,f)}{\Gamma(\alpha)}B(\lambda,\alpha)|x-a|^{\lambda+\alpha}.$$

Il reste à montrer que $\psi \in H^{\lambda+\alpha}([a,b])$ *ou bien* $\psi \in H^{\lambda+\alpha,1}([a,b])$.
Soit $h > 0$ *tel que* $x, x+h \in [a,b]$, *alors*

$$\begin{aligned}
\psi(x+h)-\psi(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{x+h}\frac{f(t)-f(a)}{(x+h-t)^{1-\alpha}}dt - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{x}\frac{f(t)-f(a)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-h}^{x-a}\frac{f(x-t)-f(a)}{(t+h)^{1-\alpha}}dt - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x-a}\frac{f(x-t)-f(a)}{t^{1-\alpha}}dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-h}^{x-a}\frac{g(x-t)}{(t+h)^{1-\alpha}}dt - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x-a}\frac{g(x-t)}{t^{1-\alpha}}dt,
\end{aligned}$$

où $g(x) = f(x) - f(a)$.
Alors

$$\begin{aligned}
\psi(x+h) - \psi(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x-a} g(x-t) \left[\frac{1}{(t+h)^{1-\alpha}} - \frac{1}{t^{1-\alpha}} \right] dt \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-h}^0 \frac{g(x-t)}{(t+h)^{1-\alpha}} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} g(x) \int_0^{x-a} [(t+h)^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}] dt \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x-a} [g(x-t) - g(x)][(t+h)^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}] dt \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-h}^0 \frac{g(x-t)}{(t+h)^{1-\alpha}} dt \\
&= \frac{g(x)}{\Gamma(\alpha+1)} [(x-a+h)^\alpha - (x-a)^\alpha - h^{\alpha-1}] \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x-a} [g(x-t) - g(x)][(t+h)^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}] dt \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-h}^0 [g(x-t) - g(x)](t+h)^{\alpha-1} dt + \frac{g(x)}{\Gamma(\alpha)} \int_{-h}^0 (t+h)^{\alpha-1} dt \\
&= \frac{g(x)}{\Gamma(\alpha+1)} [(x-a+h)^\alpha - (x-a)^\alpha] \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x-a} [g(x-t) - g(x)][(t+h)^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}] dt \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-h}^0 [g(x-t) - g(x)](t+h)^{\alpha-1} dt \\
&= J_1 + J_2 + J_3,
\end{aligned}$$

tel que

$$J_1 = \frac{g(x)}{\Gamma(\alpha+1)} [(x-a+h)^\alpha - (x-a)^\alpha].$$

$$J_2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x-a} [g(x-t) - g(x)][(t+h)^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}] dt.$$

et

$$J_3 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-h}^0 [g(x-t) - g(x)](t+h)^{\alpha-1} dt.$$

On a

$$\begin{aligned}
|J_1| &\leq \frac{A}{\Gamma(\alpha+1)} (x-a)^\lambda |(x-a+h)^\alpha - (x-a)^\alpha| \\
&\leq \frac{A}{\Gamma(\alpha+1)} (x-a)^{\lambda+\alpha} \left| \left(1 + \frac{h}{x-a}\right)^\alpha - 1 \right|, \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

et si $h \geq x-a$ *on a* $\left(1+\frac{h}{x-a}\right)^{\alpha}-1 \leq \frac{\alpha h}{x-a}$*, alors*

$$|J_1| \leq \frac{hA}{\Gamma(\alpha+1)}(x-a)^{\lambda+\alpha-1} \leq \frac{h^{\alpha+\lambda}A}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Dans le cas $0 < h < \lambda - a$ *on a* $(1+t)^{\alpha}-1 \leq \alpha t$*, et d'après (3.7) on obtient*

$$|J_1| \leq \frac{hA}{\Gamma(\alpha+1)}(x-a)^{\lambda+\alpha-1} \leq \frac{h^{\alpha+\lambda}A}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Finalement on a montré

$$|J_1| \leq \frac{h^{\alpha+\lambda}A}{\Gamma(\alpha+1)}. \tag{3.8}$$

De même pour J_3 *on a*

$$\begin{aligned} |J_3| &\leq \frac{A}{\Gamma(\alpha+1)}\int_{-h}^{0}\frac{|t|^{\lambda}}{(t+h)^{1-\alpha}}dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}|t|^{\lambda}(t+h)^{1-\alpha}dt \\ &\leq \frac{Ah^{\lambda}}{\Gamma(\alpha)}\int_{-h}^{0}(t+h)^{\alpha-1}dt = \frac{Ah^{\lambda+\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \end{aligned} \tag{3.9}$$

Maintenant en estime le J_2

$$\begin{aligned} |J_2| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{x-a}[t^{\alpha-1}-(t+h)^{\alpha-1}]|g(x-t)-g(x)|dt \\ &\leq \frac{A}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{x-a}t^{\lambda}[t^{\alpha-1}-(t+h)^{\alpha-1}]dt \\ &\leq \frac{A}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{x-a}h^{\lambda}\left(\frac{t}{h}\right)^{\lambda}h^{\alpha-1}\left[\left(\frac{t}{h}\right)^{\alpha-1}-\left(\frac{t}{h}+1\right)^{\alpha-1}\right]dt \\ &\leq \frac{Ah^{\lambda+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{\frac{x-a}{h}}\left(\frac{t}{h}\right)^{\lambda}[t^{\alpha-1}-(t+1)^{\alpha-1}]dt \end{aligned}$$

Si $x-a \leq h$ *alors*

$$\begin{aligned} |J_2| &\leq \frac{Ah^{\lambda+\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{\frac{x-a}{h}}t^{\lambda+\alpha-1}dt \\ &= \frac{A}{(\lambda+\alpha)\Gamma(\alpha)}h^{\lambda+\alpha}[t^{\lambda+\alpha}]_{0}^{\frac{x-a}{h}} \\ &= \frac{A}{\Gamma(\alpha+1)}h^{\lambda+\alpha}\frac{(x-a)^{\lambda+\alpha}}{h^{\lambda+\alpha}} \end{aligned}$$

Donc

$$|J_2| \leq \frac{Ah^{\lambda+\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Si $x - a > h$, *on a*

$$|J_2| \leq \frac{Ah^{\lambda+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\frac{x-a}{h}} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^{\alpha-1} - 1 \right] dt.$$

Alors

$$|J_2| \leq \frac{Ah^{\lambda+\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}. \tag{3.10}$$

D'après (3.8), (3.9) et (3.10) on trouve

$$|\psi(x+h) - \psi(x)| \leq \frac{A}{\Gamma(\alpha+1)} h^{\lambda+\alpha},$$

ce qui montre que $\psi \in H^{\lambda+\alpha}([a,b],\mathbb{R})$. □

Lemme 3.6 *Soit* $L : \; H^{\lambda}([a,b],\mathbb{R}) \longrightarrow H^{\lambda+\alpha}([a,b],\mathbb{R})$ *un opérateur défini par :*

$$(Lf)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t) - f(a)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \; 0 < \lambda \leq 1, \; 0 \leq \lambda < 1.$$

Si $0 < \lambda + \alpha < 1$, *alors* L *est borné.*

Démonstration. *On a* $\|Lf\|_{0,\lambda} = \|Lf\|_\infty + [Lf]_{0,\lambda+\alpha}$. *De plus*

$$\|Lf\|_{0,\lambda} = \sup_{x \in [a,b]} |(Lf)(x)| \leq \frac{2\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} (b-a)^\alpha. \tag{3.11}$$

Pour $x, y \in [a,b]$ *on a*

$$\begin{aligned}
|(Lf)(x) - (Lf)(y)| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_a^x \frac{f(t) - f(a)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt - \int_a^y \frac{f(t) - f(a)}{(y-t)^{1-\alpha}} dt \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_y^x \frac{f(t) - f(a)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \right| \\
&\qquad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_a^y (f(t) - f(a)) \left[\frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}} - \frac{1}{(y-t)^{1-\alpha}} \right] \right| dt \\
&= J_1 + J_2
\end{aligned}$$

tel que

$$J_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_y^x \frac{f(t) - f(a)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt,$$

et

$$J_2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^y (f(t) - f(a)) \left[\frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}} - \frac{1}{(y-t)^{1-\alpha}} \right] dt$$

$$\begin{aligned}
|J_1| &\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_y^x \frac{|f(t)-f(a)|}{(x-t)^{1-\alpha}}dt \\
&\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_y^x \frac{|f(t)-f(y)|(t-y)^\lambda}{(t-y)^\lambda(x-t)^{1-\alpha}}dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_y^x \frac{|f(y)-f(a)|}{(x-t)^{1-\alpha}}dt \\
&\le \frac{[f]_{0,\lambda}}{\Gamma(\alpha)}\int_y^x (t-y)^\lambda(x-t)^{\alpha-1}dt + \frac{[f]_{0,\lambda}}{\Gamma(\alpha)}(y-a)^\lambda\int_y^x (x-t)^{\alpha-1}dt \\
&\le \frac{[f]_{0,\lambda}}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_y^x (t-y)^\lambda(x-t)^{\alpha-1}dt + \frac{1}{\alpha}(y-a)^\lambda(x-y)^\alpha\right] \\
&\le \frac{[f]_{0,\lambda}}{\Gamma(\alpha)}\left[B(\alpha,\lambda+1)|x-y|^{\alpha+\lambda} + \frac{1}{\alpha}|y-y|^{\alpha+\lambda}\left|1-\frac{x-a}{x-y}\right|^\lambda\right]
\end{aligned}$$

Alors

$$|J_1| \le C_1[f]_{0,\lambda}|x-y|^{\alpha+\lambda}, \tag{3.12}$$

avec $C_1 = \frac{\alpha B(\alpha,\lambda+1)+1}{\Gamma(\alpha+1)}$. *Pour* J_2 *on a*

$$\begin{aligned}
|J_2| &\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^y |f(t)-f(a)|\left|\frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}} - \frac{1}{(y-t)^{1-\alpha}}\right|dt \\
&\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^y |f(t)-f(a)|\left|\frac{(y-t)^{1-\alpha}-(x-t)^{1-\alpha}}{(y-t)^{1-\alpha}(x-t)^{1-\alpha}}\right|dt \\
&\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^y |f(t)-f(a)|\frac{(x-t)^{1-\alpha}\left|1-\left(\frac{y-t}{x-t}\right)^{1-\alpha}\right|}{(y-t)^{1-\alpha}(x-t)^{1-\alpha}}dt \\
&\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^y \frac{|f(t)-f(a)|}{(y-t)^{1-\alpha}}dt \\
&\le \frac{[f]_{0,\lambda}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^y (t-a)^\lambda(y-t)^{\alpha-1}dt \\
&\le \frac{[f]_{0,\lambda}}{\Gamma(\alpha)}(y-a)^{\lambda+\alpha}\int_0^1 (1-r)^\lambda r^{\alpha-1}dr \\
&\le \frac{[f]_{0,\lambda}}{\Gamma(\alpha)}|y-a|^{\lambda+\alpha}\left|1-\left(\frac{y-t}{x-t}\right)^{1-\alpha}\right|^{\alpha+\lambda} B(\lambda,\alpha) \\
&\le \frac{[f]_{0,\lambda}}{\Gamma(\alpha)}B(\lambda,\alpha)|y-x|^{\lambda+\alpha}. \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

D'après (3.11), (3.12) et 3.13 on obtient

$$\|Lf\|_{0,\lambda+\alpha} \le \widetilde{C}\|f\|_{0,\lambda}, \quad f \in H^\lambda([a,b],\mathbb{R}),$$

où $\widetilde{C} = \frac{2(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + C1 + \frac{B(\lambda+1,\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$. □

Corollaire 3.2 *L'opérateur donné par*

$$\begin{array}{rcl} I_{a_+}^{\alpha} : \quad C([a,b],\mathbb{R}) & \longrightarrow & H^{\alpha}([a,b],\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & I_{a_+}^{\alpha} f \end{array}$$

est borné.

Démonstration. *Soit $f \in C([a,b],\mathbb{R})$, alors*

$$(I_{a_+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt = \psi(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(a)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt.$$

D'après le lemme 3.6 il existe $\widetilde{A} > 0$ tel que

$$\|\psi\|_{0,\lambda} \leq \widetilde{A}_* \|f\|_\infty. \tag{3.14}$$

Posons $\varphi(x) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_a^x \frac{f(a)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt,$

$$\|\varphi\|_\infty \leq \frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|f\|_\infty. \tag{3.15}$$

Soient $x, y \in [a,b]$ tel que $x > y$, alors

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \varphi(y)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_a^x \frac{f(a)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt - \int_a^y \frac{f(a)}{(y-t)^{1-\alpha}} dt \right| \\ &\leq \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} \left| (x-a)^\alpha - (y-a)^\alpha \right| \\ &= \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} |x-y|^\alpha \left| \left(1 - \frac{y-a}{x-y}\right)^\alpha - \left(1 - \frac{x-a}{x-y}\right)^\alpha \right| \\ &\leq \frac{2\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} |x-y|^\alpha \left| 1 - \frac{y-a}{x-y} \right|^\alpha \\ &\leq \frac{2\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} |x-y|^\alpha. \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{|\varphi(x) - \varphi(a)|}{|x-y|^\alpha} \leq \frac{2\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)}. \tag{3.16}$$

D'après (3.14), (3.15) et (3.16) on obtient

$$\|\psi\|_{0,\alpha} \leq \widetilde{C}_* \|f\|_\infty, \quad f \in C([a,b],\mathbb{R}),$$

avec $\widetilde{C}_* = \frac{2}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \widetilde{A}_*$. □

3.6 Dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 3.5 *Soit f une fonction de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On appelle dérivée d'ordre $\alpha \in]0,1[$ au sens de Riemann-Liouville les fonctions définies par*

$$D^{\alpha}_{a+}f(x) = \frac{d}{dx}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt,$$

et

$$D^{\alpha}_{b-}f(x) = -\frac{d}{dx}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha}}dt.$$

On note D_{a+} et D_{b-} respectivement la dérivée à gauche et à droite.

Lemme 3.7 *Soit $f \in AC([a,b],\mathbb{R})$ alors la fonction f admet des dérivées fractionnaires D^{α}_{a+}, D^{α}_{b-} presque par tout sur $[a,b]$ avec $D^{\alpha}_{a+}f, D^{\alpha}_{b-}f \in L^r([a,b])$, pour $1 \leq r < \frac{1}{\alpha}$. De plus*

$$D^{\alpha}_{a+}f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(a)}{(x-a)^{\alpha}} + \int_a^x \frac{f'(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt\right],$$

et

$$D^{\alpha}_{b-}f(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(b)}{(b-x)^{\alpha}} + \int_x^b \frac{f'(t)}{(t-x)^{\alpha}}dt\right].$$

Démonstration. *Soit $f \in AC([a,b],\mathbb{R})$ alors l'équation d'Abel suivante*

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\varphi(t)dt = f(x), \quad \varphi \in L^1([a,b],\mathbb{R}),$$

admet une solution unique $\varphi \in L^1([a,b],\mathbb{R})$ donnée par l'expression suivante

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(a)}{(x-a)^{\alpha}} + \int_a^x \frac{f'(s)}{(x-s)^{\alpha}}ds\right].$$

D'après la définition 3.1 on trouve que

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{1}{dx}\int_a^x (x-t)^{-\alpha}f(t)dt.$$

Alors

$$D^{\alpha}_{a+}f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(a)}{(x-a)^{\alpha}} + \int_a^x \frac{f'(s)}{(x-s)^{\alpha}}ds\right].$$

maintenant on montre que $D^{\alpha}_{a_+}f \in L^r([a,b],\mathbb{R})$, $1 \leq r < \frac{1}{\alpha}$

$$
\begin{aligned}
\|D^{\alpha}_{a_+}f\|_{L^r} &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\int_a^b \left|\frac{f(a)}{(x-a)^{\alpha}} + \int_a^x \frac{f'(s)}{(x-s)^{\alpha}}ds\right|^r dx\right]^{\frac{1}{r}} \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\int_a^b \left(\left|\frac{f(a)}{(x-a)^{\alpha}}\right| + \int_a^x \left|\frac{f'(s)}{(x-s)^{\alpha}}\right| ds\right)^r dx\right]^{\frac{1}{r}} \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\int_a^b 2^r\left(\frac{|f(a)|^r}{(x-a)^{\alpha r}} + \left[\int_a^x \frac{|f'(s)|}{(x-s)^{\alpha}}ds\right]^r\right) dx\right]^{\frac{1}{r}} \\
&\leq \frac{2}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\int_a^b \frac{|f(a)|^r}{(x-a)^{\alpha r}}dx + \int_a^b \left[\int_a^x \frac{|f'(s)|}{(x-s)^{\alpha}}ds\right]^r dx\right]^{\frac{1}{r}} \\
&\leq \frac{2}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\int_a^b \frac{|f(a)|^r}{(x-a)^{\alpha r}}dx + \left[\left(\int_a^b \left[\int_a^x \frac{|f'(s)|}{(x-s)^{\alpha}}ds\right]^r dx\right)^{\frac{1}{r}}\right]^r\right]^{\frac{1}{r}} \\
&\leq \frac{2}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{(b-a)^{1-\alpha r}|f(a)|^r}{1-\alpha r} + \left[\int_a^b |f'(s)|ds \int_s^b \frac{dx}{(x-s)^{\alpha r}}\right]^r\right]^{\frac{1}{r}} \\
&\leq \frac{2}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{(b-a)^{\alpha r-1}|f(a)|^r}{1-\alpha r} + \frac{\|f'\|^r_{L^1}(b-a)^{r-\alpha r^2}}{1-\alpha r}\right]^{\frac{1}{r}}
\end{aligned}
$$

□

Définition 3.6 *Soient* α *un réel strictement positif,* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $[\alpha] = n+1$ *et* $f:\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction définie par*

$$(D^{\alpha}_{a_+}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt.$$

On note $(I^{n-\alpha}_{a_+}f)(x) = \dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\displaystyle\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt.$

Exemple 3.3 *Calculer la dérivée d'ordre fractionnaire de la fonction puissance*

$$
\begin{aligned}
f:\ [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto f(x) = (x-a)^{\beta}, \quad \beta > 0.
\end{aligned}
$$

En effet : d'après la définition de $D^{\alpha}_{a_+}$ on a

$$(D^{\alpha}_{a_+}f)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I^{n-\alpha}_{a_+}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt.$$

$$(I^{n-\alpha}_{a_+}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (t-a)^{\beta}(x-t)^{-\alpha+n-1}dt.$$

Par le changement de variable $t = x - r(x-a)$, on a $dt = -(x-a)dr$ et alors

$$\begin{aligned}
(I_{a_+}^{n-\alpha} f)(x) &= -\frac{(x-a)^{-\alpha+n-1}}{\Gamma(n-\alpha)} \int_1^0 r^{-\alpha+n-1}(1-r)^\beta (x-a)^\beta (x-a)dr \\
&= \frac{(x-a)^{n+\beta-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^1 (1-r)^\beta r^{-\alpha+n-1} dr \\
&= \frac{(x-a)^{n+\beta-\alpha} B(\beta+1, n-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha)} \\
&= \frac{(x-a)^{n+\beta-\alpha}\Gamma(\beta+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(\beta+1-\alpha+n)\Gamma(n-\alpha)} \\
&= \frac{(x-a)^{n+\beta-1}\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha+n)}
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{a_+}^{n-\alpha} f)(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)(n+\beta-\alpha)(n+\beta-\alpha-1)\cdots(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha+n)}(x-a)^{\beta-\alpha}.$$

Puisque

$$\Gamma(\beta-\alpha+n) = (\beta-\alpha)(\beta-\alpha+1)\cdots(\beta-\alpha+n-1)\Gamma(\beta-\alpha),$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{a_+}^{n-\alpha} f)(x) &= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\beta-\alpha+n)(n+\beta-\alpha)}{(\beta-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(n+\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}.
\end{aligned}$$

D'où

$$(D_{a_+}^\alpha f)(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}.$$

Remarque 3.2 *Si on prend $\beta = 0$, on obtient le résultat suivant :*

$$(D_{a_+}^\alpha 1)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha},$$

c'est-à-dire que la dérivée de Riemann-Liouville d'une fonction constante n'est plus nulle.

Lemme 3.8 *Soient $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $[\alpha] = n+1$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction donnée. Supposons que $D_{a_+}^\alpha f = 0$. Alors*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha-n)}(x-a)^{k+\alpha-n},$$

où les c_k sont des constantes quelconques.

Démonstration. *Comme* $(D^{\alpha}_{a+}f)(x) = 0$ *alors*

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_a^{n-\alpha}f)(x) = 0 \Longrightarrow (I_a^{n-\alpha}f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x-a)^k$$

par composition avec I_a^{α} *on obtient*

$$\begin{aligned}(I^n_{a+}f)(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k I^{\alpha}_{a+}(x-a)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha)}(x-a)^{k+\alpha},\end{aligned}$$

en remplaçant $(I_{\cdot a^+}f)(x)$ *par son expression, on obtient*

$$\frac{1}{\Gamma(n)}\int_a^x (x-t)^{n-1}f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha)}(x-a)^{k+\alpha},$$

puis par dérivation classique, on obtient

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha-n)}(x-a)^{k+\alpha-n}.$$

$\square$

Proposition 3.3 *Soit* $f: \ [a,b] \ \longrightarrow \ \mathbb{R}$ *une fonction intégrale. Alors*

$$D^{\alpha}_{a+}I^{\alpha}_{a+} = D^{n}_{a+}I^{n-\alpha}_{a+}I^{\alpha}_{a+} = D^n I^n_{a+} = Id, \quad n = [\alpha]+1.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}(D^{\alpha}_{a+}I^{\alpha}_{a+}f)(x) &= D^{\alpha}_{a+}(I^{\alpha}_{a+}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{(I^{\alpha}_{a+}f)(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{1}{(x-t)^{\alpha-n+1}}\left[\int_a^t \frac{f(s)}{(t-s)^{1-\alpha}}ds\right]dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x f(s)ds\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}(t-s)^{\alpha-1}dt.\end{aligned}$$

On pose $J = \displaystyle\int_s^x (x-t)^{n-\alpha-1}(t-s)^{\alpha-1}dt$ *et on utilise le changement de variable* $t = x - r(x-s)$ *qui donne* $dt = -(x-s)dr$. *Alors*

$$\begin{aligned}J &= \int_s^x (x-t)^{n-\alpha-1}(t-s)^{\alpha-1}dt \\ &= -\int_1^0 r^{n-\alpha-1}(x-s)^{n-\alpha-1}(1-r)^{\alpha-1}(x-s)^{\alpha-1}(x-s)dr \\ &= (x-s)^{n-1}\int_0^1 r^{n-\alpha-1}(1-r)^{\alpha-1}dr \\ &= (x-s)^{n-1}B(n-\alpha,\alpha) = \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha)(x-s)^{n-1}}{\Gamma(n)}.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}(D^{\alpha}_{a_+} I^{\alpha}_{a_+} f)(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-s)^{n-1} f(s) ds \\ &= f(x) = (D^n_{a_+} I^n_{a_+} f)(x).\end{aligned}$$

Puisque $I^{n-\alpha}_{a_+} I^{\alpha}_{a_+} = I^n_{a_+}$, *on obtient*

$$D^{\alpha}_{a_+} I^{\alpha}_{a_+} = D^n_{a_+} I^{n-\alpha}_{a_+} I^{\alpha}_{a_+} = D^n I^n_{a_+} = Id.$$

Théorème 3.6 *Soient* $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, $\varphi \in L^1([a,b],\mathbb{R})$ *et* $f = I^{\alpha_1+\alpha_2}_a \varphi$. *Alors*

$$D^{\alpha_1}_{a_+} D^{\alpha_2}_{a_+} f = D^{\alpha_1+\alpha_2}_{a_+} f = D^{\alpha_2+\alpha_1}_{a_+} f.$$

Démonstration. *Soient* $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ *tels que* $n_1 = [\alpha_1] + 1$ *et* $n_2 = [\alpha_2] + 1$.

$$D^{\alpha_2}_{a_+} f = D^{\alpha_2}_{a_+} I^{\alpha_1+\alpha_2}_{a_+} \varphi = D^{n_2}_{a_+} I^{n_2-\alpha_2} I^{\alpha_1+\alpha_2}_{a_+} \varphi.$$

D'après la proposition 3.3 et la propriété de semi-groupe pour l'intégrale fractionnaire on trouve

$$D^{\alpha_2}_{a_+} f = D^{n_2}_{a_+} I^{n_2+\alpha_1}_{a_+} \varphi \Longrightarrow D^{\alpha_1}_{a_+} D^{\alpha_2}_{a_+} f = D^{\alpha_1}_{a_+} D^{n_2}_{a_+} I^{n_2+\alpha_1}_{a_+} \varphi.$$

Alors

$$\begin{aligned}D^{\alpha_1}_{a_+} D^{\alpha_2}_{a_+} f &= D^{n_1}_{a_+} I^{n_1-\alpha_1}_{a_+} D^{n_2}_{a_+} I^{n_2+\alpha_1}_{a_+} \varphi \\ &= D^{n_1}_{a_+} I^{n_1-\alpha_1}_{a_+} D^{n_2}_{a_+} I^{n_2}_{a_+} I^{\alpha_1}_{a_+} \varphi \\ &= D^{n_1}_{a_+} I^{n_1-\alpha_1}_{a_+} I^{\alpha_1}_{a_+} \varphi \\ &= D^{n_1}_{a_+} I^{n_1}_{a_+} \varphi = \varphi.\end{aligned}$$

D'où

$$D^{\alpha_1}_{a_+} D^{\alpha_2}_{a_+} f = \varphi. \tag{3.17}$$

D'autre part on a $D^{\alpha_1+\alpha_2}_{a_+} f = D^m_{a_+} I^{m-(\alpha_1+\alpha_2)}_{a_+} f$, *avec* $m = [\alpha_1 + \alpha_2] + 1$.
Alors

$$\begin{aligned}D^{\alpha_1+\alpha_2}_{a_+} f &= D^m_{a_+} I^{m-(\alpha_1+\alpha_2)}_{a_+} f I^{\alpha_1+\alpha_2}_{a_+} \varphi \\ &= D^m_{a_+} I^m_{a_+} \varphi = \varphi.\end{aligned}$$

Donc d'après (3.17) on obtient

$$D^{\alpha_1}_{a_+} D^{\alpha_2}_{a_+} f = D^{\alpha_1+\alpha_2}_{a_+} f = D^{\alpha_2}_{a_+} D^{\alpha_1}_{a_+} f.$$

Remarque 3.3 *En général* $D^{\alpha_1}_{a_+} D^{\alpha_2}_{a_+} f \neq D^{\alpha_1+\alpha_2}_{a_+} f$ *et* $D^{\alpha_2}_{a_+} D^{\alpha_1}_{a_+} \neq D^{\alpha_1+\alpha_2}_{a_+} f$.

Exemple 3.4 *On considère la fonction f définie par :*

$$\begin{array}{rccl} f: & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x)=1. \end{array}$$

Calculer $D_0^{\frac{1}{2}}$, $D_0^{\frac{1}{2}}D_0^{\frac{1}{2}}f$ et $D_0^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$

Solution. *On a $D_0^{\frac{1}{2}}1=\frac{1}{\sqrt{\pi}}x^{-\frac{1}{2}}$ ceci nous donne*

$$\begin{aligned} D_0^{\frac{1}{2}}D_0^{\frac{1}{2}}1 &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}dt \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x t^{-\frac{1}{2}}(x-t)^{-\frac{1}{2}}dt. \end{aligned}$$

On sait que

$$\int_0^x t^{-\frac{1}{2}}(x-t)^{-\frac{1}{2}}dt=\int_0^1 r^{-\frac{1}{2}}(1-r)^{-\frac{1}{2}}dr=\int_0^1 r^{\frac{1}{2}-1}(1-r)^{\frac{1}{2}-1}dr=B(\frac{1}{2},\frac{1}{2}).$$

Donc $D_0^{\frac{1}{2}}D_0^{\frac{1}{2}}1=0=D_0^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}1$.

Exemple 3.5 *Soit la fonction f définie par :*

$$\begin{array}{rccl} f: & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x)=x^{-\frac{1}{2}}. \end{array}$$

Calculer $D_0^{\frac{1}{2}}$, $D_0^{\frac{1}{2}}D_0^{\frac{1}{2}}f$ et $D_0^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$

Solution. *De la même manière que l'exemple précédent, on trouve que $(D_0^{\frac{1}{2}}f)(x)=0$, de plus on a*

$$(D_0^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}f)(x)=(D^1f)(x)=\frac{d}{dx}x^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}.$$

D'où $(D_0^{\frac{1}{2}}D_0^{\frac{1}{2}}f)(x)=0\neq-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$.

Exemple 3.6 *Soient $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$, $\alpha_1=\frac{1}{2}$ et $\alpha_2=\frac{3}{2}$.*
Calculer $(D_0^{\frac{1}{2}}f)(x)$, $(D_0^{\frac{3}{2}}f)(x)$, $(D_0^{\frac{1}{2}}D_0^{\frac{3}{2}}f)(x)$, $(D_0^{\frac{3}{2}}D_0^{\frac{1}{2}}f)(x)$ et $(D_0^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}f)(x)$.

Solution. *On a*

$$D_0^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}})=\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{t^{\frac{1}{2}}}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}dt=\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{d}{dx}\int_0^x t^{\frac{1}{2}}(x-t)^{-\frac{1}{2}}dt,$$

et alors

$$\begin{aligned} J &= \int_0^x t^{\frac{1}{2}}(x-t)^{-\frac{1}{2}}dt = \int_0^1 r^{\frac{1}{2}}(1-r)^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}xdr \\ &= x\int_0^1 r^{\frac{1}{2}}(1-r)^{-\frac{1}{2}}dr = x\int_0^1 r^{\frac{3}{2}-1}(1-r)^{\frac{1}{2}-1}dr \\ &= xB(\frac{3}{2},\frac{1}{2}). \end{aligned}$$

Alors

$$D_0^{\frac{1}{2}}[x^{\frac{1}{2}}] = \frac{B(\frac{3}{2},\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{\Gamma(\frac{3}{2}).\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(2)\Gamma(\frac{1}{2})} = \Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

$$D_0^{\frac{3}{2}}[x^{\frac{1}{2}}] = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{d^2}{dx^2}[xB(\frac{3}{2},\frac{1}{2})] = 0.$$

D'où

$$(D_0^{\alpha_1}D_0^{\alpha_2}f)(x) = 0. \tag{3.18}$$

$$(D_0^{\frac{3}{2}}D_0^{\frac{1}{2}}f)(x) = D_0^{\frac{3}{2}}[\frac{\sqrt{\pi}}{2}] = \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{4}. \tag{3.19}$$

$$(D_0^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}f)(x) = (D_0^2 f)(x) = -\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{4}. \tag{3.20}$$

Alors d'après (3.18), (3.19) et (3.20) on a

$$D_0^{\alpha_1}D_0^{\alpha_2}f \neq D_0^{\alpha_2}D_0^{\alpha_1}f \neq D_0^{\alpha_1+\alpha_2}f.$$

Théorème 3.7 *Soit α réel strictement positif. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ converge uniformément vers une fonction f continue sur $[a,b]$. Alors on a*

$$(I_{a_+}^{\alpha}\lim_{n\to+\infty} f_n)(x) = \lim_{n\to+\infty}(I_{a_+}^{\alpha}f_n)(x).$$

De plus, la suite $(I_{a_+}^{\alpha}f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers $I_{a_+}^{\alpha}f$.

Démonstration. *Puisque $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f on a*

$$\lim_{n\to+\infty}\|f_n - f\|_\infty = \lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)| = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} |(I_{a_+}^{\alpha}f_n)(x) + (I_{a_+}^{\alpha}f)(x)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x |f_n(x)-f(x)|(x-t)^{\alpha-1}dt \\ &= \frac{\|f_n-f\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}dt \\ &= \frac{\|f_n-f\|_\infty}{\alpha\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha}. \end{aligned}$$

D'où

$$\|I_{a_+}^{\alpha}f_n + I_{a_+}^{\alpha}f\|_\infty \leq \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\|f_n-f\|_\infty \longrightarrow 0, \quad \textit{quand } n \longrightarrow +\infty.$$

Donc $(I_{a_+}^{\alpha}f_n)_n$ converge uniformément vers $I_{a_+}^{\alpha}f$. □

3.6.1 Formule de Leibnitz pour l'intégrale d'ordre fractionnaire

Théorème 3.8 *Soient $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ et g une fonction analytique sur $[a,b]$, alors pour tout $\alpha > 0$ on a*

$$(I_{a_+}^{\alpha} fg)(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{-\alpha}{k} D^k g(x) I_{a_+}^{\alpha+k} f(x).$$

Démonstration. *On a*

$$I_{a_+}^{\alpha}(fg)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) g(t) dt,$$

et

$$(I_{a_+}^{\alpha+k} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+k)} \int_a^{\alpha} (x-t)^{\alpha+k-1} f(t) dt.$$

Puisque g est analytique, on obtient

$$g(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k D^k g(x)}{k!} (x-t)^k,$$

ceci implique

$$g(t) = g(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k D^k g(x)}{k!} (x-t)^k.$$

Alors

$$\begin{aligned}
I_{a_+}^{\alpha}(f(x)g(x)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) \left(g(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k D^k g(x)}{k!} (x-t)^k \right) dt \\
&= \frac{g(x)}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k D^k g(x)}{k!} \int_a^x (x-t)^k f(t) dt \\
&= g(x) I_{a_+}^{\alpha} f(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} D^k g(x) (I_{a_+}^{\alpha+k} f)(x) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{-\alpha}{k} (D^k g(x)) (I_{a_+}^{\alpha+k} f(x))
\end{aligned}$$

d'où

$$(I_{a_+}^{\alpha} fg)(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{-\alpha}{k} D^k g(x) I_{a_+}^{\alpha+k} f(x).$$

avec $\binom{-\alpha}{k} = \frac{(-1)^k \Gamma(\alpha+k)}{k!\Gamma(\alpha)}$. $\square$

Corollaire 3.3 *Soit* $f: \ ]a-h, a+h[\ \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction analytique et* $\alpha > 0$. *Alors*

$$(I^{\alpha}_{a_+}f)(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{(x-a)^{k+\alpha}}{k!(\alpha+k)\Gamma(\alpha)}(D^k_a f)(x).$$

De plus

$$(I^{\alpha}_{a_+}f)(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x-a)^{k+\alpha}}{\Gamma(k+\alpha+1)}(D^k f)(a),$$

où $a \leq x \leq a+h$, *de plus* $I^{\alpha}_{a_+}f$ *est analytique sur* $]a, a+h[$.

Démonstration. *D'après la définition de l'intégrale fractionnaire*

$$(I^{\alpha}_{a_+}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha-1}dt.$$

Puisque f *est analytique alors*

$$f(t) = f(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k D^k f(x)}{k!}(x-t)^k.$$

Donc on obtient

$$\begin{aligned} I^{\alpha}_{a_+}f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\left(f(x) + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k D^k}{k!}f(x)(x-t)^k\right)dt \\ &= \frac{f(x)}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k D^k f(x)}{k!}\int_a^x (x-t)^{k+\alpha-1}dt \\ &= \frac{f(x)}{\Gamma(\alpha+1)} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k D^k f(x)}{k!(k+\alpha)\Gamma(\alpha)}(x-a)^{k+\alpha}. \end{aligned}$$

Donc

$$(I^{\alpha}_{a_+}f)(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k D^k f(x)}{k!(k+\alpha)\Gamma(\alpha)}(x-a)^{k+\alpha}.$$

Comme f *est analytique, on a*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(x-a)^k}{k!}(D^k f)(a), \quad x \in [a, a+\frac{h}{2}[.$$

Donc

$$(I^{\alpha}_{a_+}f)(x) = I^{\alpha}_{a_+}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(x-a)^k}{k!}(D^k f)(a).$$

Soit

$$\begin{aligned} u_k(x) &= \frac{1}{k!} I^{\alpha}_{a_+}(x-a)^k (D^k f)(a) = \frac{(D^k f)(a)}{k!} I^{\alpha}_{a_+}(x-a)^k, \quad k \in \mathbb{N} \\ &= \frac{(D^k f)(a)}{k!} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (t-a)^k (x-t)^{\alpha-1} dt, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Calculons maintenant la dernière intégrale, en utilisant le changement de variable connu ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned} J &= \int_a^x (t-a)^k (x-t)^{\alpha-1} dt = \int_0^1 (1-r)^k (x-a)^k r^{\alpha-1} (x-a)(x-a)^{\alpha-1} dr \\ &= (x-a)^{\alpha+k} \int_0^1 r^{\alpha-1} (1-r)^k dr = (x-a)^{\alpha+k} \int_0^1 r^{\alpha-1} (1-r)^{(k+1)-1} dr \\ &= (x-a)^{\alpha+k} B(\alpha, k+1) = \frac{(x-a)^{\alpha+k} \Gamma(\alpha) \Gamma(k+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)}, \end{aligned}$$

et

$$u_k(x) = \frac{(D^k f)(a)}{k!} \frac{(x-a)^{\alpha+k} \Gamma(k+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)}.$$

Il est clair que $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x)$ *est une série convergente et* $\sum_{k=0}^{+\infty} v_k(x)$ *converge uniformément* dans $[a, a+h]$ avec $v_k(x) = \frac{(x-a)^k}{k!} D^k f(a)$.
D'après le théorème 3.7, on a

$$(I^{\alpha}_{a_+} f)(x) = \lim_{k \to +\infty} I^{\alpha}_{a_+} S_k(x) = I^{\alpha}_{a_+} \lim_{k \to +\infty} S_k(x),$$

avec $S_k(x) = \sum_{p=0}^{k} v_p(x)$.
On obtient

$$(I^{\alpha}_{a_+} S_k)(x) = \sum_{p=0}^{k} I^{\alpha}_{a_+} v_n(x) = \sum_{p=0}^{k} u_k(x).$$

Ce qui donne

$$(I^{\alpha}_{a_+} f)(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x).$$

D'où le résultat

$$\begin{aligned} (I^{\alpha}_{a_+} f)(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x-a)^{\alpha+k} \Gamma(k+1)}{k! \Gamma(\alpha+k+1)} (D^k f)(x) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x-a)^{\alpha+k}}{\Gamma(\alpha+k+1)} (D^k f)(x) \end{aligned}$$

□

Théorème 3.9 *Soit α un réel strictement positif et $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions à valeurs réelles. Supposons que $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f et $(D^\alpha_{a_+}f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ existe et converge uniformément vers $D^\alpha_{a_+}f$ sur $[a+\varepsilon,b]$ pour tout ε positif.*
Alors pour tout $x\in[a,b]$ nous avons

$$(D^\alpha_{a_+}\lim_{k\to+\infty}f_k)(x)=(\lim_{k\to+\infty}D^\alpha_{a_+}f_k)(x).$$

Démonstration. *On a* $(D^\alpha_{a_+}f_k)(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x\frac{f_k(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt,\quad n=[\alpha]+1.$
Alors $(D^\alpha_{a_+}f_k)(x)=(D^nI^{n-\alpha}_{a_+}f_k)(x)$.
Puisque $(f_k)_{k\geq1}$ *converge uniformément vers* f*, alors* $I^{n-\alpha}_{a_+}$ *converge uniformément vers* $I^{n-\alpha}_{a_+}f$.

Soit $x\in]a,b]$ *alors il existe* $\varepsilon>0$ *tel que* $x\in[a+\varepsilon,b]$*, donc le fait que* $(D^\alpha_{a_+}f_k)=D^nI^{n-\alpha}_{a_+}f_k$ *on a la convergence uniforme de* $(D^n(I^{n-\alpha}_{a_+}f_k))_k$ *vers* $D^n(I^{n-\alpha}_{a_+}f)$ *sur* $[a+\varepsilon,b]$.
D'où

$$\begin{aligned}\lim_{k\to+\infty}(D^\alpha_{a_+}f_k)(x) &= \lim_{k\to+\infty}D^n(I^{n-\alpha}_{a_+}f_k)(x)\\ &= D^n(\lim_{k\to+\infty}I^{n-\alpha}_{a_+}f_k)(x)=(D^nI^{n-\alpha}_{a_+}f)(x).\end{aligned}$$

□

Théorème 3.10 *Soient* $f_1,f_2:\ [a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ *deux fonctions telles que :* $D^\alpha_{a_+}f_1$ *et* $D^\alpha_{a_+}f_2$ *existent, alors pour touts* $c_1,c_2\in\mathbb{R}$, $D^\alpha_{a_+}(c_1f_1+c_2f_2)$ *existe. De plus*

$$D^\alpha_{a_+}(c_1f_1+c_2f_2)=c_1D^\alpha_{a_+}f_1+c_2D^\alpha_{a_+}f_2.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}D^\alpha_{a_+}(c_1f_1+c_2f_2) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x(x-t)^{n-\alpha-1}[c_1f_1(t)+c_2f_2(t)]dt\\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left[\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x\frac{c_1f_1(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt+\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x\frac{c_2f_2(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt\right]\\ &= c_1\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x\frac{f_1(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt+c_2\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x\frac{f_2(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt\\ &= c_1(D^\alpha_{a_+}f_1)(x)+c_2(D^\alpha_{a_+}f_2)(x).\end{aligned}$$

□

Lemme 3.9 *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset C([a,b],\mathbb{R})$ *une suite de fonctions. On suppose que la série* $\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)$ *converge uniformément dans* $[a,b]$*. Alors*

$$I^\alpha_{a_+}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}f_n\right)(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(I^\alpha_{a_+}f_n)(x).$$

Démonstration. *Nous avons*

$$\begin{aligned} I_{a_+}^{\alpha}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty}(x-t)^{\alpha-1} f_n(t)dt. \end{aligned}$$

Comme la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ *converge uniformément vers* $S(t)$. *Alors* $(S_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* $S(t)$, *avec*

$$S_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t), \quad n \in \mathbb{N}.$$

D'après le théorème 3.7 on a

$$\lim_{n\to+\infty} I_{a_+}^{\alpha}(S_n)(x) = I_{a_+}^{\alpha}(\lim_{n\to+\infty} S_n(x)) = I_{a_+}^{\alpha}(S)(x).$$

Alors

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=0}^{n}(I_{a_+}^{\alpha} f_p)(x) = I_{a_+}^{\alpha}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)(x).$$

Finalement on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(I_{a_+}^{\alpha} f_n)(x) = I_{a_+}^{\alpha}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right).$$

□

Lemme 3.10 *Soit* $\alpha > 0$, *et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions. On suppose que les séries* $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *et* $\sum_{n=0}^{+\infty} D_{a_+}^{\alpha} f_n$ *convergent uniformément sur* $[a+\varepsilon, b]$, *pour tout* $\varepsilon > 0$. *Alors*

$$\left(D_{a_+}^{\alpha}\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(D_{a_+}^{\alpha} f_n)(x).$$

Démonstration. *Si* $0 < \alpha < 1$, *on a* $D_{a_+}^{\alpha} = \frac{d}{dx} I_{a_+}^{1-\alpha} f$, *alors*

$$\left(D_{a_+}^{\alpha}\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)(x) = \frac{d}{dx} I_{a_+}^{1-\alpha}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)(x).$$

Le fait que $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *converge uniformément sur* $[a+\varepsilon, b]$, *d'après le lemme 3.9, on a* $I_{a_+}^{1-\alpha}\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_{a_+}^{1-\alpha} f_n(x)$.
De plus

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{d}{dx}(I_{a_+}^{1-\alpha} f_n)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(D_{a_+}^{\alpha} f_n)(x).$$

Donc grace à la convergence uniforme sur $[a+\varepsilon, b]$ *de la série* $\sum_{n=0}^{+\infty}(D_{a_+}^{\alpha} f_n)(x)$, *on obtient*

$$\frac{d}{dx} I_{a_+}^{1-\alpha}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(D_{a_+}^{\alpha} f_n)(x).$$

□

Proposition 3.4 *Soit* $f \in AC^n([a,b],\mathbb{R})$, $\alpha > 0$. *Alors*

$$\lim_{\alpha \to m^+} D_{a_+}^{\alpha} f = f^{(m-1)} \quad et \quad \lim_{\alpha \to m^-} D_{a_+}^{\alpha} f = f^{(m)},$$

et

$$(I_{a_+}^{\alpha} D_{a_+}^{\alpha} f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(x-a)^{kn+\alpha}}{\Gamma(x-n+\alpha+1)} C_k(f),$$

avec $C_k(f) = \lim_{x \to a^+}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^k I_{a_+}^{n-a} f\right](x)$.

Démonstration. *Puisque* $f \in AC^n([a,b],\mathbb{R})$ *alors*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + I_{a_+}^{n} f^{(n)}(x) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} (D_{a_+}^{\alpha} f)(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{a_+}^{2n-\alpha} f^{(n)})(x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(a) \\ &= (I_{a_+}^{n-\alpha} f^{(n)})(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(x-a)^{k-\alpha}, \end{aligned}$$

comme l'intégrale de Riemann-Liouville est holomorphe en α, *elle est donc continue. D'autre part la somme est nulle parce que les termes* $\frac{1}{\Gamma(k+1-m)}$ *sont nuls.*
En utilisant le théorème 3.7, on obtient

$$\lim_{\alpha \to m} (I_{a_+}^{n-\alpha} f^{(n)})(x) = f^{(n)}(x).$$

D'où

$$\lim_{\alpha \to n} (D_{a_+}^{\alpha} f)(x) = f^{(n)}(x).$$

D'après la proposition 3.3 on obtient

$$D_{a_+}^{\alpha}[I_{a_+}^{\alpha} D_{a_+}^{\alpha} f - f] = D_{a_+}^{\alpha} I_{a_+}^{\alpha} D_{a_+}^{\alpha} f - D_{a_+}^{\alpha} f = D_{a_+}^{\alpha} f - D_{a_+}^{\alpha} f = 0,$$

et d'après le lemme 3.4 on a

$$(I^{\alpha}_{a_+} D^{\alpha}_{a_+} f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k(f) \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha-n)} (x-a)^{k+\alpha-n}.$$

En composant les deux membres par $I^{n-\alpha}_{a_+}$, *on obtient*

$$\begin{aligned}(I^{n}_{a_+} D^{\alpha}_{a_+} f)(x) - (I^{n-\alpha}_{a_+} f)(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} C_k(f) \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha-n)} I^{n-\alpha}_{a_+} (x-a)^{k+\alpha-n} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} C_k(f)(x-a)^k.\end{aligned}$$

Pour tout $0 \leq k \leq m-1$ *on a*

$$\lim_{x\to a} \left[\left(\frac{d}{dx}\right)^k I^{n}_{a_+} (D^{\alpha}_{a_+} f)(x) - (I^{n-\alpha}_{a_+} f)(x) \right] = k! C_k(f) + \lim_{x\to a} \sum_{j\neq k}^{n-1} \widetilde{C}_j (x-a)^k.$$

Alors

$$\lim_{x\to a} \left(\frac{d}{dx}\right)^k (I^{n}_{a_+} D^{\alpha}_{a_+} f)(x) - (I^{n-\alpha}_{a_+} f)(x) = k! C_k(f),$$

mais comme

$$\lim_{x\to a} \left(\frac{d}{dx}\right)^k (I^{n}_{a_+} D^{\alpha}_{a_+} f)(x) = \lim_{x\to a} \left(\frac{d}{dx}\right)^k \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^{n-1} (D^{\alpha}_{a_+} f)(t) dt = 0$$

on a

$$C_k(f) = -\lim_{x\to a} \frac{(I^{n-\alpha}_{a_+} f)(x)}{k!}.$$

D'où le résultat

$$(I^{\alpha}_{a_+} D^{\alpha}_{a_+} f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{k-n+\alpha}}{\Gamma(k+1+\alpha-n)} \left(\lim_{x\to a} \frac{(I^{n-\alpha}_{a_+} f)(x)}{k!} \right).$$

□

Théorème 3.11 *Soit* $\alpha > 1$ *tel que* $[\alpha - 1] = n$. *Si* $f \in C^n([a,b],\mathbb{R})$ *alors*

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^b (b-x)^{-\alpha} f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^{k-\alpha+1}}{\Gamma(k-\alpha+2)} f^{(k)}(a) + I^{n-\alpha+1}_{a} f^{(n)}(b).$$

Lemme 3.11 *Soit* α *un réel strictement positif tel que* $\alpha \notin \mathbb{N}$ *et* $[\alpha] = n$. *Supposons que* $f \in C^n([a,b],\mathbb{R})$, *alors*

$$(D^{\alpha}_{a} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x (x-t)^{-\alpha-1} f(t) dt.$$

Démonstration. *On a*

$$\begin{aligned}(D_a^\alpha f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt \\ &= (D^n I_a^{n-\alpha} f)(x),\end{aligned}$$

le fait que $f \in C^n([a,b],\mathbb{R})$, *on a*

$$\begin{aligned}(I_a^{n-\alpha} f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha} f'(t)dt - \frac{f(t)}{\Gamma(n-\alpha+1)}(x-t)^{n-\alpha}\Big|_{t=a}^{t=x} \\ &= \frac{f(a)}{\Gamma(n-\alpha+1)}(x-a)^{n-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\int_a^x \frac{f'(t)}{(x-t)^{\alpha-n}}dt \\ &= \frac{f(a)}{\Gamma(n-\alpha+1)}(x-a)^{n-\alpha} + (I_a^{n-\alpha-1} f')(x).\end{aligned}$$

Alors

$$(I_a^{n-\alpha} f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+n-\alpha+1)}(x-a)^{n-\alpha+k} + (I_a^{2n-\alpha} f^{(n)})(x).$$

Donc

$$(D_a^\alpha f)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_a^{n-\alpha} f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(x-a)^{k-\alpha} + (I_a^{n-\alpha} f^{(n)})(x).$$

D'où d'après le théorème 3.11 on obtient

$$(D_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x (x-t)^{-\alpha-1} f(t)dt.$$

□

3.7 Dérivation fractionnaire au sens de Caputo

Définition 3.7 *Soient* α *un nombre réel positif avec* $n = [\alpha]$, *et* f *une fonction de* $[a,b]$ *dans* $\mathbb{R}$ *tel que* $\frac{d^k}{dx^k} f(a^+) = f^{(k)}(a^+)$ *existe pour* $k = 1, \dots, n-1$.
On appelle dérivée de f *au sens de Caputo la fonction définie par :*

$$({}^c D_a^\alpha f)(x) = D_a^\alpha [f - T_{n-1}[f,a]](x), \text{ pour } x \in [a,b],$$

où

$$T_{n-1}[f,a](x) = \sum_{n=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a).$$

Remarque 3.4 *Si* $\alpha = n \in \mathbb{N}$ *on a* ${}^c D_a^\alpha f = D_a^\alpha f$.

Théorème 3.12 *Soit $f \in AC^n([a,b],\mathbb{R})$, et $n=[\alpha]$ pour $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Alors*

$$({}^cD_a^\alpha f)(x) = (I_a^{n-\alpha} f^{(n)})(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt, \;\; x \in [a,b].$$

Démonstration. *Soient $\alpha \in \mathbb{R}^+ \backslash \mathbb{N}$, avec $[\alpha] = n \in \mathbb{N}$ et $m > \alpha + 1$ pour $m \in \mathbb{N}$*

$$\begin{aligned} D_a^\alpha (f - T_{m-1}[f,a])(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^m I_a^{m-\alpha}(f - T_{m-1}[f,a])(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dx^m} \int_a^x (x-t)^{m-\alpha-1}[f(t) - T_{m-1}[f,a](t)]dt, \end{aligned}$$

on pose $J = \int_a^x (x-t)^{m-\alpha-1}[f(t) - T_{m-1}[f,a](t)]dt$ alors par intégration par partie on obtient

$$J = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha+1)} \int_a^x (x-t)^{m-\alpha}[f'(t) - T'_{m-1}[f,a](t)]dt.$$

et alors

$$\begin{aligned} I_a^{m-\alpha}(f - T_{m-1}[f,a])(x) &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha+1)} \int_a^x \frac{D[f - T_{m-1}[f,a]](t)}{(x-t)^{(\alpha-m+1)-1}} dt \\ &= I_a^{m-\alpha+1}(f - T_{m-1}[f,a])(x). \end{aligned}$$

On refait l'opération m fois, on obtient

$$\begin{aligned} I_a^{m-\alpha}(f - T_{m-1}[f,a])(x) &= I_a^{2m-\alpha} D^m (f - T_{m-1}[f,a])(x) \\ &= I_a^m I_a^{m-\alpha} D^m (f - T_{m-1}[f,a])(x), \end{aligned}$$

comme $D^m(T_{m-1}[f,a])(x) = 0$, on trouve

$$I_a^{m-\alpha}(f - T_{m-1}[f,a])(x) = (I_a^m I_a^{m-\alpha} D^m f)(x),$$

ceci implique

$$\begin{aligned} D_a^\alpha (f - T_{m-1}[f,a])(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^m I_a^{m-\alpha}(f - T_{m-1}[f,a])(x) \\ &= \left(\frac{d}{dx}\right)^m (I_a^m I_a^{m-\alpha} D^m f)(x) = (I_a^{m-\alpha} D^m f)(x). \end{aligned}$$

Donc

$$D_a^\alpha (f - T_{m-1}[f,a])(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(m)}(t)}{(x-t)^{\alpha-m+1}} dt.$$

□

Lemme 3.12 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+ \backslash \mathbb{N}$ avec $m = [\alpha]$. Supposons que $f \in C^m([a,b],\mathbb{R})$. Alors*

$$({}^cD_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha-1}[f - T_{m-1}[f,a]](t)dt.$$

Démonstration. *On a* $({}^cD_a^\alpha f)(x) = D_a^\alpha(f - T_{m-1}[f,a])(x)$.
Alors d'après le lemme 3.11, on obtient

$$({}^cD_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha-1}[f - T_{m-1}[f,a]](t)dt,$$

d'où le résultat. □

Lemme 3.13 *Soient* $\alpha \geq 0$ *avec* $[\alpha] = n$ *et* f *une fonction de* $[a,b]$ *dans* $\mathbb{R}$. *On suppose que les dérivées* ${}^cD_a^\alpha f$ *et* $D_a^\alpha f$ *existent. Alors*

$$({}^cD_a^\alpha f)(x) = (D_a^\alpha f)(a) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(D^k f)(x)}{\Gamma(k-n+1)}(x-a)^{k-\alpha}.$$

Démonstration. *En effet*

$$\begin{aligned} ({}^cD_a^\alpha f)(x) &= D_a^\alpha(f - T_{m-1}[f,a])(x) \\ &= (D_a^\alpha f)(x) - D_a^\alpha(T_{m-1}[f,a])(x) \\ &= (D_a^\alpha f)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^k f(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(x-a)^{k-\alpha}. \end{aligned}$$

□

Lemme 3.14 *On suppose que les conditions du lemme 3.13 sont satisfaites, alors*

$${}^cD_a^\alpha f = D_a^\alpha f \text{ si et seulement si } (D^k f)(a) = 0.$$

Théorème 3.13 *Soit* $f \in C([a,b],\mathbb{R})$, *alors* ${}^cD_a^\alpha I_a^\alpha f = f$.

Démonstration. *Soit* $f \in C([a,b],\mathbb{R})$, *alors* $\varphi = I_a^\alpha f \in H^\alpha([a,b],\mathbb{R})$, $[\alpha] = m$

$$\varphi(x) = \frac{f(a)}{\Gamma(\alpha+1)}(x-a)^m + \psi(x)$$

alors on a $D^k\varphi(a) = 0$, $x = 0, \ldots, m-1$.
D'après la définition de ${}^cD_a$ *on obtient*

$${}^cD_a^\alpha f = D_a^\alpha I_a^\alpha f.$$

□

Théorème 3.14 *Soient* $\alpha > 0$ *avec* $[\alpha] = n \in \mathbb{N}$ *et* $f \in AC^n([a,b],\mathbb{R})$. *Alors*

$$(I_a^{\alpha c} D_a^\alpha f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Démonstration. *Soit* $f \in AC^n([a,b],\mathbb{R})$, *donc*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + (I_a^n f^{(n)})(x). \tag{3.21}$$

et

$${}^cD_a^\alpha f = I_a^{n-\alpha} f^{(n)} \longrightarrow I_a^{\alpha c} D_a^\alpha f = I_a^\alpha I_a^{n-\alpha} f^{(n)}.$$

Donc on obtient $I_a^{\alpha c} D_a^\alpha f = I_a^n f^{(n)}$. *Finalement d'après (3.21) on a*

$$(I_a^{\alpha c} D_a^\alpha f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

□

Proposition 3.5 *Soit* $f \in AC^n([a,b],\mathbb{R})$, *avec* α *un réel strictement positif et* $[\alpha] = n$. *On a :*
Si ${}^cD_a^\alpha f = 0$ *alors* $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(x-a)^k$ *pour* $c_k \in \mathbb{R}$.

Démonstration. *On a* ${}^cD_a^\alpha f = 0$ *ça implique que* $D_a^\alpha \left[f - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right] = 0$, *et alors*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha-n)}(x-a)^{k+\alpha-n}.$$

D'où

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(x-a)^k, \text{ pour } x \in [a,b],$$

avec $c_k = \tilde{c}_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha-n)} + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$, *pour* $k = 1, \ldots, n-1$.

□

Lemme 3.15 *Si* $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ *et* $\alpha > 0$ *alors* $\lim_{n\to a^+} (I_a^\alpha f)(x) = 0$.

Démonstration. *D'après la définition de* I_a^α, *on a*

$$\begin{aligned} |(I_a^\alpha f)(x)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} |f(t)| dt \\ &\leq \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} (x-a)^\alpha. \end{aligned}$$

Alors

$$0 \leq \lim_{x\to a^+} |I_a^\alpha f(x)| \leq \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} \lim_{x\to a^+} (x-a)^\alpha = 0,$$

d'où le résultat.

□

Corollaire 3.4 *Si $\alpha \in]0,1[$ et $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$, alors*

$$(I_a^\alpha D_a^\alpha) f = f, \text{ et } ({}^cD_a^\alpha I_a^\alpha) f = f.$$

Démonstration. *D'après la proposition 3.4 on a*

$$(I_a^\alpha D_a^\alpha f)(x) = f(x) - \lim_{x \to a^+} (I_{a_+}^{1-\alpha} f)(x).$$

et par le lemme 3.15 on a $(I_a^\alpha D_a^\alpha) f = f$, et alors

$$\begin{aligned} ({}^cD_a^\alpha I_a^\alpha) f &= D_a^\alpha [I_a^\alpha f - (I_{a_+}^\alpha f)](a) \\ &= D_a^\alpha I_a^\alpha f = f. \end{aligned}$$

□

Lemme 3.16 *Soient $\alpha, \beta \in [0,1]$ avec $\alpha + \beta \leq 1$ et $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$, alors*

$$({}^cD_a^{\alpha c} D_a^\beta) f =^c D_a^{\alpha+\beta} f = {}^cD_a^{\beta c} D_a^\alpha f.$$

Démonstration. *On a*

$$\begin{aligned} ({}^cD_a^{\alpha c} D_a^\beta) f &= {}^cD_a^\alpha ({}^cD_a^\beta) f =^c D_a^\alpha (I_a^{1-\beta} f') \\ &= D_a^\alpha (I_a^{1-\beta} f') = (D I_a^{1-\alpha} I_a^{1-\beta}) f' \\ &= (D I_a^{1-\beta} I_a^{1-\alpha}) f' = D I_a^{1-\beta} (I_a^{1-\alpha} f') \\ &= D I_a^{1-\beta} ({}^cD_a^{1-\alpha} f) = {}^cD_a^{\beta c} D_a^\alpha f \end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned} {}^cD_a^{\alpha c} D_a^\beta f &= D_a^\alpha (I_a^{1-\beta} f') = D_a^\alpha I_a^\alpha (I_a^{1-\alpha-\beta} f') \\ &= I_a^{1-\alpha-\beta} f' \\ &= {}^cD_a^{\alpha+\beta} f. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Donc d'après (3.22) et (3.23) on obtient

$$({}^cD_a^{\alpha c} D_a^\beta) f =^c D_a^{\alpha+\beta} f = {}^cD_a^{\beta c} D_a^\alpha f.$$

□

Théorème 3.15 *Soit $f \in C^m([a,b],\mathbb{R})$, $m \in \mathbb{N}$. Supposons que $\alpha \in [0,m]$, alors*

$$^cD_a^{m-\alpha c} D_a^\alpha f = D^m f.$$

Démonstration. *Si $\alpha \in \mathbb{N}$, on a ${}^cD_a^\alpha f = I_a^{\alpha-\alpha} f^{(\alpha)} = f^{(\alpha)}$, ce la implique*
$D_a^{m-\alpha c} D_a f = D^{m-\alpha} f^{(\alpha)} = D^{m-\alpha} D^\alpha f^{(\alpha)} = D^m f$.
D'où $D_a^{m-\alpha c} D_a f = D^m f$.

Si $\alpha \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} D_a^{m-\alpha c} D_a f &= D_a^{m-\alpha} I_a^{[\alpha]-\alpha} f^{[\alpha]} = D_a^{[m-\alpha]+1} I_a^{[m-\alpha]+1-m+\alpha} I_a^{[\alpha]-\alpha} f^{[\alpha]} \\ &= D_a^{[m-\alpha]+1} I_a^{m-[\alpha]-m+\alpha+1} I_a^{[\alpha]-\alpha} f^{[\alpha]} \\ &= D_a^{m-[\alpha]+1} I_a^1 D^{[\alpha]} f \\ &= D_a^{m-[\alpha]} D I_a^1 D^{[\alpha]} f \\ &= D_a^{m-[\alpha]} D^{[\alpha]} f = D^m f \end{aligned}$$

Théorème 3.16 *Soit* $f \in C^m([a,b],\mathbb{R})$, $m \in \mathbb{N}$ *et* $\alpha \in [0,n[$. *Alors*

$$({}^cD_a^\alpha f)(x) = \sum_{k=0}^{m-[\alpha]+1} \frac{f^{k+[\alpha]}(a)}{\Gamma([\alpha]-\alpha+k+1)}(x-a)^{[\alpha]-\alpha+2} + g(x),$$

où $g \in C^{m-[\alpha]}([a,b],\mathbb{R})$.

3.8 Intégrale et Dérivée fractionnaire sur la demi-droite réel

3.8.1 Intégrale fractionaire

Définition 3.8 *Soit* $f \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *et* $\alpha > 0$. *On appelle intégrale d'ordre fractionnaire au sens de Reimann-Liouville l'intégrale à gauche (respectivement à droite) suivante :*

$$(I_+^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad -\infty < x < +\infty, \tag{3.24}$$

et

$$(I_-^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x}^{+\infty} (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad -\infty < x < +\infty. \tag{3.25}$$

Remarque 3.5 *En faisant le changement de variable suivante :* $u = x-t$ *(respectivement* $v = t-x$*), la formule (3.24) (respectivement (3.25)) devient*

$$I_+^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} u^{\alpha-1} f(x-u)du. \tag{3.26}$$

$$I_-^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} v^{\alpha-1} f(x+v)dv. \tag{3.27}$$

Justification de l'existence des intégrales (3.26) et (3.27)
Les intégrale (3.26) et (3.27) sont définies pour $f \in L^p(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour $0 < \alpha < 1$ et $1 < p < \frac{1}{\alpha}$.
En effet

$$I_+^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 u^{\alpha-1} f(x-u)du + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{+\infty} u^{\alpha-1} f(x-u)du.$$

Pour l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 u^{\alpha-1} f(x-u)du$ pour presque tous x, on applique l'inégalité de Minkowsky et pour la deuxième intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} u^{\alpha-1} f(x-u)du$, on utilise l'inégalité de Hölder.

3.8.2 Dérivée fractionnaire

Définition 3.9 *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On appelle dérivée d'ordre α au sens de Riemann-Liouville les fonctions définies par,*

- *Si $\alpha \in]0,1[$, pour tout $x \in \mathbb{R}$*

$$D_+^\alpha f(x) = D^1 I_+^{1-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{x} (x-t)^{-\alpha} f(t)dt, \tag{3.28}$$

$$D_-^\alpha f(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_{x}^{+\infty} (t-x)^{-\alpha} f(t)dt. \tag{3.29}$$

- *Si $\alpha > 1$ et $n = [\alpha]+1$, $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$*

$$D_+^\alpha f(x) = D^n I_+^{n-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_{-\infty}^{x} (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt, \tag{3.30}$$

$$D_-^\alpha f(x) = (-1)^n D^n I_+^{n-\alpha} f(x) = (-1)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_{x}^{+\infty} (t-x)^{n-\alpha-1} f(t)dt. \tag{3.31}$$

Remarque 3.6 *Si $x > 0$ (3.30) et (3.31) devient :*

$$D_+^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_{0}^{x} (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt,$$

$$D_-^\alpha f(x) = (-1)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_{x}^{+\infty} (t-x)^{n-\alpha-1} f(t)dt.$$

Propriétés 3.1 *On considère $Qf(x) = f(-x)$ pour $x \in \mathbb{R}$*

$$QI_+^\alpha f = I_-^\alpha Qf \text{ et } QI_-^\alpha f = I_+^\alpha Qf.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} Q(I_+^\alpha f)(x) = I_+^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{-x} (-x-t)^{\alpha-1} f(t)dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x}^{+\infty} (v-x)^{\alpha-1} f(-v)dv = I_-^\alpha (Qf)(x). \end{aligned}$$

□

Propriétés 3.2 *Rappelons que :*

$$(\tau_h f)(x) = f(x-h), \ x, h \in \mathbb{R}. \quad (Translation)$$

$$(\Pi_\delta f)(x) = f(\delta x), \ x \in \mathbb{R}, \ \delta > 0. \quad (Dilatation)$$

Nous avons les propriétés suivantes :

$$\tau_h I_+^\alpha f(x) = I_+^\alpha \tau_h f(x), \qquad \tau_h I_-^\alpha f(x) = I_-^\alpha \tau_h f(x). \tag{3.32}$$

$$\Pi_h I_+^\alpha f(x) = \delta^\alpha I_+^\alpha \Pi_h f(x), \quad \Pi_h I_-^\alpha f(x) = \delta^\alpha I_-^\alpha \Pi_h f(x). \tag{3.33}$$

Démonstration. *Par définition on a*

$$\begin{aligned}\tau_h I_+^\alpha f(x) &= \tau_h\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt\right)\\ &= \tau_h\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{x-h}(x-h-t)^{\alpha-1}f(t)dt\right)\\ &= I_+^\alpha f(x-h) = I_+^\alpha \tau_h f(x),\end{aligned}$$

d'où

$$\tau_h I_+^\alpha f(x) = I_+^\alpha \tau_h f(x).$$

Montrons que

$$\Pi_h I_+^\alpha f(x) = \delta^\alpha I_+^\alpha \Pi_h f(x).$$

On a

$$\Pi_h I_+^\alpha f(x) = I_+^\alpha f(\delta x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{\delta x}(\delta x - t) f(t)dt,$$

en effectuant le changement de variable suivant : $t = \delta u$, alors

$$\begin{aligned}\Pi_h I_+^\alpha f(x) &= \delta\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{x}(x-u)f(\delta u)du\\ &= \delta^\alpha I_+^\alpha f(\delta x) = \delta^\alpha I_+^\alpha \Pi_h f(x).\end{aligned}$$

□

Propriétés 3.3 *Propriété de semi-groupe :*

$$I_+^\alpha I_+^\beta f(x) = I_+^{\alpha+\beta} f(x),\ \alpha > 0,\ \beta > 0. \tag{3.34}$$

et de même on a

$$I_-^\alpha I_-^\beta f(x) = I_-^{\alpha+\beta} f(x),\ \alpha > 0,\ \beta > 0. \tag{3.35}$$

Démonstration. *Nous avons*

$$I_-^\alpha I_-^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^{+\infty}(t-x)^{\alpha-1}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_x^{+\infty}(u-t)^{\beta-1}f(u)dudt.$$

On applique le théorème de Fubini, on obtient

$$\int_x^0 (t-x)^{\alpha-1}\int_t^a (u-t)^{\beta-1}f(u)dudt = b(\alpha,\beta)\int_t^a (u-t)^{\alpha+\beta-1}f(u)du. \tag{3.36}$$

On passe à la limite quand $a \longrightarrow +\infty$ dans (3.36) on trouve le résultat. □

Lemme 3.17 *Soient $f \in L^p([a,b],\mathbb{R})$ et $g \in L^q([a,b],\mathbb{R})$ de plus $\alpha > 0$ et $p,q > 1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, alors*

$$\int_a^b f(x)(I_{a+}^\alpha g)(x)dx = \int_a^b g(x)(I_{b-}^\alpha f)(x)dx.$$

Démonstration. *D'après le théorème de Fubini on obtient*

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)(I_{a+}^\alpha g)(x)dx &= \int_a^b f(x)\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}g(t)dt\right)dx \\
&= \int_a^b g(t)\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^b (x-t)^{\alpha-1}f(x)dx\right)dt \\
&= \int_a^b g(x)(I_{b-}^\alpha f)(x)dx
\end{aligned}$$

□

Propriétés 3.4 *Soient* $\alpha > 0$, $p > 1$, $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \alpha$, *et* $f = I_-^\alpha \phi$, $g = I_-^\alpha \psi$ *avec* $\phi \in L^p(\mathbb{R})$, $\psi \in L^q(\mathbb{R})$. *Alors*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)(I_+^\alpha \psi)(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)(I_-^\alpha \varphi)(x)dx. \tag{3.37}$$

Si $f \in I_-^\alpha(L^p)$ *et* $g \in I_+^\alpha(L^p)$, *alors*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(D_+^\alpha g)(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)(D_-^\alpha f)(x)dx. \tag{3.38}$$

On peut faire la démonstration comme pour le lemme 3.17.

Exemple 3.7 *Soit* $f(x) = e^{kx}$. *montrons que :*

$$I_+^\alpha e^{kx} = \frac{e^{kx}}{k^\sigma} \quad \alpha > 0, \text{ et } k > 0.$$

Solution. *Nous avons*

$$I_+^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty} (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt.$$

On fait le changement de variable suivant : $u = x - t \Rightarrow dt = -du$, *donc*

$$I_+^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty} u^{\alpha-1} e^{k(x-u)}du.$$

On fait un nouveau changement de variable en prenant $ku = s$, *alors* $du = \frac{ds}{k}$

$$\begin{aligned}
I_+^\alpha f(x) &= \frac{e^{kx}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty} k^{-\alpha+1}s^{\alpha-1}e^{-s}ds \\
&= \frac{e^{kx}k^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty} s^{\alpha-1}e^{-s}ds \\
&= \frac{e^{kx}k^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha) = e^{kx}k^{-\alpha}
\end{aligned}$$

Exemple 3.8 *Montrer que*

$$D^{\alpha}_{-\infty}e^{kx} = k^{\alpha}e^{kx}.$$

Solution. *Nous avons*

$$D^{\alpha}_{-\infty}f(x) = D^{n}I^{n-\alpha}_{-\infty},$$

mais $I^{n-\alpha}_{-\infty}e^{kx}$ *alors*

$$D^{\alpha}_{-\infty}f(x) = D^{n}k^{\alpha-n}e^{kn} = k^{\alpha-n}k^{n}e^{kx}.$$

Finalement on trouve

$$D^{\alpha}_{-\infty}e^{kx} = k^{\alpha}e^{kx}.$$

Remarque 3.7 *Si* $\alpha \in \mathbb{C}$.
Si $Re(\alpha) = 0$, $(\alpha \neq 0,\ \alpha = i\theta)$, *alors les dérivées fractionnaire de Riemann-Lioville d'ordre imaginaire deviennent :*

$$D^{i\theta}_{+}f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-i\theta)}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x}(x-t)^{i\theta}f(t)dt \quad (\theta \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\ x \in \mathbb{R})$$

et

$$D^{i\theta}_{-}f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-i\theta)}\frac{d}{dx}\int_{x}^{+\infty}(x-t)^{i\theta}f(t)dt \quad (\theta \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\ x \in \mathbb{R})$$

Bibliographie

[1] *F. Demengel et G. Demengel,* Espaces Fonctionnels : Utilisation dans la Résolution des Equations aux Dérivées Partielles, *EDP Sciences, CNRS ÉDITION, 2007.*

[2] *K. Diethelm,* The Analysis of Fractional Differential Equations : An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type, *Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010.*

[3] *S. Fučik, O. John and A. Kufner,* Function Spaces, *Noordhoff International Publishing, 1977.*

[4] *A. A. Kilbas, O.I. Marichev and S. G. Samko* Fractional Integrals and Derivatives : Theory and Applications, *Gordon and Breach, Leyden, 1993.*

[5] *A.A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo,* Theory and Applications of Fractional Differential Equations, *Elsevier B.V., Amsterdam, 2006.*

[6] *A. Kolmogorov et S. Fomine,* Eléments de Théorie des Fonctions et et d'analyse Fonctionnelle, *MIR, 1974.*

[7] *K. B. Oldham and J. Spanier,* The Fractional Calculus : Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order, *Academic Press, Inc., 1974.*

[8] *N. M. Temme,* Special Functions : An Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics, *John Wiley & Sons, Inc., 1996.*