Analyse Multivoque et Inclusions Différentielles

Smaïl Djebali[1] **& Abdelghani Ouahab**[2]

[1] Laboratoire d'E.D.P. & H.M., E.N.S.,

B.P. 92, 16050 Kouba. Alger, Algérie

Aélec. : djebali@ens-kouba.dz, djebali@hotmail.com

[2] Laboratoire de Mathématiques, Université de Sidi-Bel-Abbès

B.P. 89, 22000 Sidi-Bel-Abbès, Algérie.

Aélec. : ouahab@univ-sba.dz, agh_ouahab@yahoo.fr

Table des matières

Première partie

Généralités sur les fonctions multivoques

Chapitre 1

Multifonctions : généralités et notions de continuité

Dans tout le cours, nous utiliserons les notations suivantes :

- $\mathcal{P}(E) = \{Y \subset E \colon\ Y \neq \emptyset\}$ and
- $\mathcal{P}_p(E) = \{Y \in \mathcal{P}(E) \colon\ Y$ possède la propriété "p"$\}$, avec $p = f$ (fermé), $p = b$ (borné), $p = cp$ (compacte), $p = cv$ (convexe), etc.

Alors

- $\mathcal{P}_f(E) = \{Y \in \mathcal{P}(E) \colon\ Y$ fermé $\}$,
- $\mathcal{P}_b(E) = \{Y \in \mathcal{P}(X) \colon\ Y$ borné $\}$,
- $\mathcal{P}_{cv}(E) = \{Y \in \mathcal{P}(E) \colon\ Y$ convexe$\}$,
- $\mathcal{P}_{cp}(E) = \{Y \in \mathcal{P}(E) \colon\ Y$ compact $\}$,
- $\mathcal{P}_{cv,cp}(E) = \mathcal{P}_{cv}(E) \cap \mathcal{P}_{cp}(E)$, etc.

1.1 Généralités

1.1.1 Définitions

Définition 1.1 *Une multifonction (ou application multivoque) (ou multiapplication) F d'un espace X vers un espace Y est une correspondance qui associe à tout élement $x \in X$ un sous-ensemble $F(x)$ de Y. On notera $F \colon\ X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ (les notations $F \colon\ X \longrightarrow 2^Y$ et $F \colon\ X \rightarrow\!\circ Y$ sont aussi utilisées dans la littérature).*

Définition 1.2 *On appelle graphe de la multi-fonction F, l'ensemble*

$$Graph(F) = \{(x, y) \in E_1 \times E_2 \colon\ y \in F(x)\}.$$

F est à graphe fermé si $Graph(F)$ est fermé dans $X \times Y$. On dira aussi que F est fermée.

Le graphe d'une multi-fonction joue un rôle extrêmement important, en particulier pour définir les dérivées des multi-fonctions.

Définition 1.3 *On appelle image de F l'union des images $F(x)$*

$$Im(F) = \bigcup_{x \in E_1} F(x)$$

et domaine de F l'ensemble

$$DomF = \{x \in E_1 \colon\ F(x) \neq \emptyset\}.$$

Définition 1.4 *(a) Une multi-fonction $F \colon X \to \mathcal{P}(Y)$ est à valeurs fermées (respec. convexes) si $F(x)$ est fermée (respec. convexe) pour tout $x \in X$.*

(a) F est dite bornée sur les bornés si l'ensemble

$$F(A) = \bigcup_{x \in A} \{F(x)\}$$

est borné dans Y pour chaque sous-ensemble $A \in \mathcal{P}_b(X)$, i.e.

$$\sup_{x \in A}\{\sup\{\|y\|,\ y \in F(x)\}\} < \infty.$$

Enfin, on peut vérifier facilement la

Proposition 1.1 *Soit $F \colon X \to \mathcal{P}(Y)$ une multi-fonction, et A_1, A_2 deux sous-ensembles de X. Alors*

(a) $F(A_1 \cup A_2) = F(A_1) \cup F(A_2)$.

(b) $F(A_1 \cap A_2) \subset F(A_1) \cap F(A_2)$.

(c) $Im(F) \backslash F(A) \subset F(X \backslash A)$.

(d) $A_1 \subset A_2 \Rightarrow F(A_1) \subset F(A_2)$.

1.1.2 Image réciproque d'une multi-fonctions

Soit E_1 et E_2 deux ensemble et F une application multivoque

$$F \colon\ E_1 \to \mathcal{P}(E_2).$$

Définition 1.5 *L'inverse (Fiber en anglais) F^{-1} de F est l'application multivoque de E_2 dans E_1 définie par la relation*

$$x \in F^{-1}(y) \Leftrightarrow y \in F(x) \Leftrightarrow (x, y) \in Graph(F).$$

C'est-à-dire

$$F^{-1}(y) = \{x \in E_1 : \ y \in F(x)\} = \{x \in E_1 : \ (x, y) \in Graph(F)\}.$$

L'une des différences entre les applications univoques et les applications univoques est que pour une fonction univoque, l'inverse d'un ensemble est défini de manière unique ; par contre, il existe deux maniéres de définir l'image inverse d'un ensemble par une multi-fonction.

Définition 1.6 *Soit $F\colon E_1 \to \mathcal{P}(E_2)$ une application multivoque et B un sous-ensemble de E_2. L'image inverse de B par F (inverse image en anglais) notée $F^{-}(B)$, est définie par*

$$F^{-}(B) = \{x \in E_1 : \ F(x) \cap B \neq \emptyset\}.$$

Le noyau (coeur ou image inverse stricte) (core en anglais) de F, noté $F^{+}(B)$, est défini par

$$F^{+}(B) = \{x \in E_1 : \ F(x) \subset B\}.$$

On peut facilement vérifier la

Proposition 1.2 *Soit $F\colon X \to \mathcal{P}(Y)$ une multi-fonction et $A \subset X, \ B \subset Y$ deux sous-ensembles de X, Y respectivement. Alors*

(a) $A \subset (F^{+}(F(A)).$

(b) $F(F^{+}(B)) \subset B.$

1.1.3 Union, intersection, composition et produit cartésien de multi-fonctions

Définition 1.7 *Si $F, G\colon \ \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ sont des multi-applications, alors*

$$(F \cup G)(x) = F(x) \cup G(x), \ (F \cap G)(x) = F(x) \cap G(x)$$

et

$$(F \times G)(x) = F(x) \times G(x).$$

Définition 1.8 *Si $F\colon X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ et $G\colon Y \longrightarrow \mathcal{P}(Z)$ sont des multi-applications, alors la composition $(G \circ F)(.)$ est définie par*

$$(G \circ F)(x) = \bigcup_{y \in F(x)} G(y).$$

$$(F \cup G)(x) = F(x) \cup G(x) \quad et \quad (F \cap G)(x) = F(x) \cap G(x).$$

1.1.4 Propriétés principales

Les propositions suivantes sont des consequences immédiates de ces définitions.

Proposition 1.3 *Soit $F, G\colon X \to \mathcal{P}(Y)$ deux multi-fonctions, et B un sous-ensemble de Y. Alors*

(a) $(F \cup G)^-(B) = F^-(B) \cup G^-(B)$ *et* $(F \cup G)^+(B) = F^-(B) \cup G^+(B)$.

(b) $(F \cap G)^-(B) \subseteq F^-(B) \cap G^-(B)$ *et* $F^-(B) \cap G^+(B) \subseteq (F \cap G)^+(B)$.

Proposition 1.4 *(a) Soit $F\colon X \to \mathcal{P}(Y)$, $G\colon Y \to \mathcal{P}(Z)$ deux multi-fonctions, et $B \subseteq Y$. Alors*

$$(G \circ F)^-(B) = F^-(G^-(A)) \quad et \quad (G \circ F)^+(B) = F^+(G^+(A)).$$

(b) Soit $F\colon X \to \mathcal{P}(Y)$ et $G\colon Y \to \mathcal{P}(Z)$ deux multi-fonctions, $B \subseteq Y$ et $C \subseteq Z$. Alors

$$(F \times G)^+(B \times C) = F^+(B) \cap G^+(C) \quad et \quad (F \times G)^-(B \times C) = F^-(B) \cap G^-(C).$$

1.2 Élements de topologie

1.2.1 Métrique de Hausdorff

(a) Définitions et propriérés générales

La définition classique d'une distance telle que nous la connaissons (dans le plan entre 2 points par exemple, ou entre un point et une droite, etc.) est la longueur minimale des chemins possibles d'un point à un autre. Mais qu'en est-il entre deux ensembles ou deux figures ? On voudrait définnir une distance qui soit grande si les ensembles sont très différents, petite s'ils se ressemblent beaucoup et nulle s'il s'agit de mêmes ensembles. Félix Hausdorff, mathématicien allemand a introduit du début de ce siécle la notion de distance de Hausdorff.

Soit (E,d) un espace métrique. Pour tout $a \in E$ et $A \in \mathcal{P}(E)$ on définit la distance entre a et A par

$$d(a,B) = \inf\{d(a,b) \colon\ b \in B\}, \quad d(a,\emptyset) = +\infty.$$

Définition 1.9 *Soit (E,d) un espace métrique et A, B deux sous-ensembles de E.*

(a) On définit la distance entre A et B par

$$H_d^*(A,B) = \sup\{d(a,B) \colon\ a \in A\}.$$

(b) La distance de Hausdorff entre A, B est donnée par

$$H_d(A,B) = \max(H_d^*(A,B), H_d^*(B,A)).$$

D'après cette définition, on peux facilement vérifier les propriétés suivantes :
- $H_d(A,A) = 0$, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$,
- $H_d(A,B) = H_d(B,A)$, pour tout $A, B \in \mathcal{P}(E)$,
- $H_d(A,B) \leq H_d(A,C) + H_d(C,B)$, pour tout $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$.

Lemme 1.1 *(Caractérisation de la métrique de Hausdorff) Soit (E,d) un espace métrique et A, B deux parties de E. Pour chaque $\varepsilon > 0$, considérons les ensembles :*

$$A_\varepsilon = \{a \in E \colon\ d(a,A) < \varepsilon\} \ \text{ et } \ B_\varepsilon = \{b \in B \colon\ d(b,B) < \varepsilon\}.$$

Alors

$$H_d^*(A,B) = \inf\{\varepsilon > 0 \colon\ A \subset B_\varepsilon\}, \ H_d^*(B,A) = \inf\{\varepsilon > 0 \colon\ B \subset A_\varepsilon\}$$

et

$$H_d(B,A) = \inf\{\varepsilon > 0 \colon\ B \subset A_\varepsilon, \ B \subset A_\varepsilon\}.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $A \subset B_\varepsilon$; alors

$$d(a,B) \leq \varepsilon \ \forall\, a \in A \Rightarrow \sup_{a \in A} d(a,B) \leq \varepsilon \Rightarrow H_d^*(A,B) \leq \inf\{\varepsilon > 0 \colon\ A \subset B_\varepsilon\}.$$

Supposons que

$$H_d^*(A,B) < \inf\{\varepsilon > 0 \colon\ A \subset B_\varepsilon\} \Rightarrow d(a,B) < \inf\{\varepsilon > 0 \colon\ A \subset B_\varepsilon\} \ \forall\, a \in A,$$

donc il existe $\alpha > 0$ tel que

$$d(a, B) < \alpha < \inf\{\varepsilon > 0\colon\ A \subset (B)_\varepsilon\}\ \forall\, a \in A.$$

Donc $A \subset B_\alpha$, alors $\inf\{\varepsilon > 0\colon\ A \subset B_\varepsilon\} \leq \alpha$ est contradiction. D'où

$$H_d^*(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0\colon\ A \subset B_\varepsilon\}.$$

De la même manière, on peut montrer que que

$$H_d^*(B, A) = \inf\{\varepsilon > 0\colon\ B \subset A_\varepsilon\}.$$

Alors

$$H_d(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0\colon\ A \subset B_\varepsilon, B \subset A_\varepsilon\}.$$

□

Remarque 1.1 *Généralement, H_d ne vérifie pas la condition*

$$H_d(A, B) = 0 \Longleftrightarrow A = B.$$

H_d est une pseudo-métrique. Par exemple, soit $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, l'espace métrique euclidien et $A = \{\frac{1}{n}\colon\ n \in \mathbb{N}^*\}$, $B = \{\frac{n}{n+1}\colon\ n \in \mathbb{N}\}$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Il est clair que $H_d(A, B) = 0$, mais $A \neq B$; donc H_d n'est pas une distance sur l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$. On remarque que l'ensemble B n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$.

Le lemme suivant montre que la distance de Hausdorrff peut être une métrique classique.

Lemme 1.2 *Soit (E, d) un espace métrique et A un sous-ensemble de E. Alors*

$$H_d(A, B) = 0 \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$$

et donc $(\mathcal{P}_f(E), H_d)$ est un espace métrique.

En effet ce résultat découle du fait que

$$d(a, A) = 0 \Leftrightarrow a \in \overline{A}.$$

Définition 1.10 *Soit $\{A_n\colon\ n \in \mathbb{N}\}$ une suite dans $\mathcal{P}_f(E)$. On dira que A_n converge vers $A \in \mathcal{P}_f(E)$ si et seulement si*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 > 0\colon\ \forall\, n \in \mathbb{N}\ (n \geq n_0 \Rightarrow H_d(A_n, A) \leq \varepsilon).$$

On dit que $\{A_n\colon\ n \in \mathbb{N}\}$ et de Cauchy si

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 > 0\colon\ \forall\, n, p \in \mathbb{N}\ (n, p \geq n_0 \Rightarrow H_d(A_n, A_p) \leq \varepsilon).$$

Lemme 1.3 *(Caractérisation de la limite d'une suite.) Soit* $\{A_n,\ A\} \in \mathcal{P}_f(E)$ *et* $A_n \to A$. *alors*

$$A = \bigcap_{n\geq 1} \overline{\bigcup_{m\geq n} A_m} = \bigcap_{\varepsilon\geq 0} \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{m\geq n} (A_m)_\varepsilon.$$

Démonstration. Soit $A_n \xrightarrow{H_d} A$. alors il existe $n_0(\varepsilon) \geq 0$ tel que pour chaque $m \geq n_0(\varepsilon)$, on a $A \subset (A_m)_\varepsilon$ et $A_m \subset A_\varepsilon$. D'après la définition de la limite, on obtient

$$A \subset \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{m\geq n} (A_m)_\varepsilon$$

et

$$\bigcap_{n\geq 1} \overline{\bigcup_{m\geq n} A_m} \subset A.$$

Donc

$$\bigcap_{n\geq 1} \overline{\bigcup_{m\geq n} A_m} \subseteq A \subseteq \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{m\geq n} (A_m)_\varepsilon.$$

Inversement, soit, $x \in \bigcap_{\varepsilon\geq 0} \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{m\geq n} (A_m)_\varepsilon$. Alors pour tout $\varepsilon \geq 0$, il existe $n_0(\varepsilon) \geq 1$ tel que $m \geq n_0(\varepsilon)$, donc $x \in (A_m)_\varepsilon$. Pour $n \geq 1$, il existe $m \geq \max(n, n_0(\varepsilon))$ tel que $x \in (A_m)_\varepsilon \subset (\bigcup_{m\geq n} A_m)_\varepsilon$. Comme $\varepsilon > 0$ est aléatoire, on obtient que $x \in \overline{\bigcup_{m\geq n} A_m}$ et alors $x \in \bigcap_{n\geq 1} \overline{\bigcup_{m\geq n} A_m}$, d'où le résultat demandé. □

Théorème 1.1 *Soit* (X, d) *un espace métrique complet, alors* $(\mathcal{P}_f(X), H_d)$ *est aussi complet.*

Démonstration. En effet, soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{P}_f(X)$. D'après le lemme 1.3, la seule limite possible est $A = \cap_{n\geq 1} \overline{\cup_{m\geq n} A_m}$. Montrons que $A \in \mathcal{P}_f(X)$ et que A_n converge vers A. La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant de Cauchy, pour tout ε positif, il existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que pour chaque $n, m \geq n(\varepsilon)$ on a $H_d(A_n, A_m) \leq \varepsilon$ et donc

$$A_n \subset (A_m)_\varepsilon \text{ et } A_m \subset (A_n)_\varepsilon.$$

Alors

$$\sup_{x\in A_n} d(x, A_m) \leq \varepsilon \text{ et } \sup_{x\in A_m} d(x, A_n) \leq \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe N_k telle que pour chaque $n, m \geq N_k$, on a

$$\sup_{x\in A_n} d(x, A_m) \leq \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \text{ et } \sup_{x\in A_m} d(x, A_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

On construit ainsi par récurrence une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans X telle que pour $\varepsilon > 0$ et pour tout k,

$$d(x_k, x_{k+1}) \leq \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \tag{1.1}$$

- $k=0$, il existe $n_0 \geq N_0$ et $n_1 > \max(n_0, N_1)$ telle que $H_d(A_{n_0}, A_{n_1}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, alors il existe $(x_0, x_1) \in A_{n_0} \times A_{n_1}$ tel que $d(x_0, x_1) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
- $k=1$, il existe $n_2 > \max(n_1, N_2)$ tel que $H_d(A_{n_1}, A_{n_2}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$; donc il existe $x_2 \in A_{n_2}$ tel que $d(x_1, x_2) \leq \frac{\varepsilon}{2^2}$.
- Supposons que pour $n_k > \max(n_{k-1}, N_k)$, il existe $x_k \in A_{n_k}$ tel que
$$d(x_{k-1}, x_k) \leq \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$
- Montrons qu'il existe $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ et $x_{k+1} \in A_{n_{k+1}}$ tel que
$$d(x_k, x_{k+1}) \leq \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}.$$

  Comme c'est suite de Cauchy, alors il existe $n_{k+1} > \max(n_k, N_{k+1})$ tel que
$$H_d(A_{n_k}, A_{n_{k+1}}) \leq \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}.$$

  D'où l'existence de $x_{k+1} \in A_{n_{k+1}}$ tel que $d(x_k, x_{k+1}) \leq \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$.

Par (1.1), la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{N}$, et donc converge vers un certain élement $x \in X$. ($\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ étant une suite strictement croissante, pour tout $n \geq 1$, il existe k_n tel que $n_{k_n} \geq n$.) Ceci montre que, pour tout $n \geq 1$ et $k \geq k_n$, on a $x_k \in \cup_{m\geq n} A_m$, d'où $x \in \overline{\cup_{m\geq n} A_m}$. Alors $x \in A$. De plus

$$\begin{aligned} d(x, x_0) = \lim_{n\to+\infty} d(x_n, x_0) &\leq \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{k=n} d(x_k, x_{k+1}) \\ &\leq \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \\ &= \varepsilon \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc pour chaque $n_0 \geq N_0$ et $x_0 \in A_{n_0}$, il existe $x \in A$ tel que $d(x, x_0) < \varepsilon$, ce qui exprime le fait que $A_{n_0} \subset A_\varepsilon$. Il reste à montrer que $A \subset (A_n)_\varepsilon \ \forall n \geq N_0$. Soit $x \in A$, alors $x \in \overline{\cup_{m\geq N_0} A_m}$ et donc il existe $m \geq N_0$, $y \in A_m$ tel que $d(x, y) < \frac{\varepsilon}{2}$,

$$\begin{aligned} d(x, A_n) &\leq d(x, A_m) + H_d(A_n, A_m) \\ &\leq d(x, y) + H_d(A_n, A_m) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Longrightarrow A \subset (A_n)_\varepsilon, \ \forall n \geq N_0. \end{aligned}$$

Donc la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers A. $\square$

(b) Topologie de l'espace $(\mathcal{P}_{cp}(X), H_d)$

Définition 1.11 *Soit* (X, d) *un espace métrique complet et soit* $A \subset X$ *une partie de* X. A *est dite totalement bornée si pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe une famille finie* $\{x_1, x_2, \dots, x_{n(\varepsilon)}\}$ *d'élements de* A *tels que* $A \subset \cup_{i=1}^{n(\varepsilon)} B(x_i, \varepsilon)$.

Rappelons le théorème suivant qui donne un critère commode de relative compacité.

Théorème 1.2 *Soit* (X, d) *un espace métrique complet et* $A \subset X$ *une partie de* X. *Les deux assertions suivantes sont équivalentes*

(a) A *est totalement bornée (précompacte).*

(b) A *est relativement compact.*

Lemme 1.4 *Soit* (X, d) *un espace métrique complet. Alors* $\mathcal{P}_{tb}(X)$ *est fermée dans* $\mathcal{P}_f(X)$.

Démonstration. Soit $\{A_n\}_{n\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}_{tb}(X)$ une suite convergente vers A. Montrons que $A \in \mathcal{P}_{tb}(X)$. $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = A$. alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in N$, $n \geq n(\varepsilon)$ on a $A \subset (A_n)_\varepsilon$ et $(A_n)_\varepsilon \subset A$. Puisque A_n est totalement bornée, il existe un ensemble fini $\{x_1^n, x_2^n, \dots, x_m^n\} \subset A_n$ tel que $A_n \subset \cup_{j=1}^m B(x_j^n, \varepsilon)$. Il clair que pour chaque $x_j^n \in A_n$ il existe $x_j^{n,A} \in A$ vérifiant

$$d(x_j^n, x_j^{n,A}) \leq \varepsilon, \; j = 1, \dots, m.$$

Soit $x \in A$. Alors

$$\begin{aligned} d(x, x_j^{n,A}) &\leq d(x, y) + d(y, x_j^n) + d(x_j^n, x_j^{n,A}), \quad \forall\, y \in A \\ &\leq d(x, A) + d(x_j^n, x_j^{n,A}) < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Ceci exprime que $A \subset \cup_{j=1}^m B(x_j^{n,A}, 2\varepsilon)$. D'où $A \in \mathcal{P}_{tb}(X)$. $\square$

Lemme 1.5 *Soit* (X, d) *un espace métrique complet. Alors* $\mathcal{P}_{cp}(X)$ *est fermé dans* $\mathcal{P}_f(X)$*; de plus* $(\mathcal{P}_{cp}(X), H_d)$ *est complet.*

Démonstration. En effet, soit $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{P}_{cp}(X)$, convergente vers A. Montrons que $A \in \mathcal{P}(X)$. D'après le lemme 1.3 et le théorème 1.3 $A \in \mathcal{P}_f(X)$. D'autre part $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est tatement bornée, donc $A \in \mathcal{P}_{tb}(X)$. Donc A est compact. De plus, si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}_{cp}(X)$ une suite de Cauchy, alors $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{P}_f(X)$ et comme X est complet, il existe $A \in \mathcal{P}_f(X)$ tel que $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers A. Finalement, on obtient $A \in \mathcal{P}_{cp}(X)$. $\square$

Corollaire 1.1 *Soit* (X,d) *un espace métrique,* $K \subset X$ *une partie compacte et* $A \subset X$ *un ensemble fermé tel que* $K \cap A \neq \emptyset$*. Alors* $\sup\limits_{x\in A} d(x,K) > 0$.

Démonstration. Supposons que $d(K,A) = \inf\{d(x,y)\colon\ x \in K, y \in A\} = 0$. Alors pour tout ε strictement positif, il existe $x_\varepsilon \in K, y_\varepsilon \in A$ tel que $d(y_\varepsilon, x_\varepsilon) \leq \varepsilon$. Posone $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et considérons $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ et $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tel que

$$d(x_n, y_n) \leq \frac{1}{n},\ \forall\,(x_n, y_n) \in K \times A,\ n \in \mathbb{N}^*. \tag{1.2}$$

Comme K est compact, donc il existe une sous-suite $\{x_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}^*}$ qui converge vers $x \in K$. En utilisant l'équation (5.23), on obtient

$$d(x_{n_m}, y_{n_m}) \leq \frac{1}{m} \Rightarrow d(x, y_{n_m}) \leq d(x, x_{n_m}) + d(x_{n_m}, y_{n_m}) \leq d(x, x_{n_m}) + \frac{1}{m}.$$

Ce qui montre que $\{y_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ est suite convegente et sa limite égale à $x \in A$. Contradiction avec $K \cap A \neq \emptyset$. □

Théorème 1.3 *Soit* (X,d) *un espace métrique. Alors la topologie de Hausdorff sur les parties compactes de* X *est engendrée par les ensembles :*

$$\mathcal{L}_u = \{K \in \mathcal{P}_{cp}(X)\colon\ K \subset U\}$$

et

$$\mathcal{L}_l = \{K \in \mathcal{P}_{cp}(X)\colon\ K \cap U \neq \emptyset\}.$$

où U *est un ouvert de* X*. De plus, la famille*

$$\mathcal{B}_{ul} = \{K \in \mathcal{P}_{cp}(X)\colon\ K \subset U,\ K \cap V_1 \neq \emptyset, \ldots, K \cap V_n \neq \emptyset\},$$

où $U,\ V_i,\ i = 1, \ldots, m$ *sont des ouverts de* X*, forme une base de topologie de* $\mathcal{P}_{cp}(X)$.

Démonstration. Montrons que les ensembles $\mathcal{L}_u$ et $\mathcal{L}_l$ sont des ouverts de $\mathcal{P}_{cp}(X)$. En effet, soit $K_0 \in \mathcal{L}_u$; alors il existe un ouvert $U \in X$ tel que $K_0 \subset U$. D'après le corollaire 1.1, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $d(K_0, X\backslash U) = \varepsilon$. Considérons l'ensemble

$$B(K_0, \varepsilon) = \{K \in \mathcal{P}_{cp}(X)\colon\ H_d(K, K_0) < \varepsilon\}.$$

Soit $K \in B(K_0,\varepsilon)$. Alors $H_d(K,K_0) < \varepsilon \Rightarrow \forall\, x \in K, d(x,K_0) < \varepsilon$. Supposons qu'il existe $x \in K$ tel que $x \notin U$; donc

$$\varepsilon = d(K, K_0) \leq d(x, K_0) < \varepsilon;$$

d'où une contradiction et alors $K \in U$. Ceci montre que $\mathcal{L}_u$ est un ouvert dans $\mathcal{P}_{cp}(X)$. Soit $K_0 \in \mathcal{L}_l$; alors il existe un ouvert U tel que $K_0 \cap U \neq \emptyset$, et donc il existe $x_0 \in K_0 \cap U$, tel que pour $\varepsilon > 0$, on a $B(x_0, \varepsilon) \subset U$. Posons

$$B(K_0, \varepsilon) = \{K \in \mathcal{P}_{cp}(X) \colon \; H_d(K, K_0) < \varepsilon\} \Rightarrow K \cap U \neq \emptyset.$$

Sinon $K \cap B(x_0, \varepsilon) = \emptyset$, pour tout $x \in K$ on a $d(x, x_0) \geq \varepsilon$. Alors

$$\varepsilon \leq \sup_{x \in K} d(x, x_0) \leq H_d(K, K_0) < \varepsilon$$

d'où $\mathcal{L}_l$ est un ouvert dans $\mathcal{P}_{cp}(X)$. Finalement, montrons que pour tout $K_0 \in \mathcal{P}_{cp}(X)$, $\varepsilon > 0, B(K_0, \varepsilon)$ contient un élement de $\mathcal{B}_{ul}$. Soit

$$U = \{x \in X \colon \; d(x, K_0) < \varepsilon\}.$$

Puisque K_0 est compact, alors il existe $\{x_1, \ldots, x_m\} \subset K_0$ tel que

$$K_0 \subset \cup_{i=1}^m B\left(x_i, \frac{\varepsilon}{2}\right) \;\text{ et }\; K_0 \cap B\left(x_i, \frac{\varepsilon}{2}\right) \neq \emptyset, \; i = 1, \ldots, m.$$

On considère l'ensemble

$$W = \{K \in \mathcal{P}_{cp}(X) \colon \; K \subset U\} \cap_{i=1}^m \left\{K \in \mathcal{P}_{cp}(X) \colon \; K \cap B\left(x_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)\right\}.$$

Il clair que $K_0 \in W$. Soit $K \in W$; alors $K \subset U$ et $K \cap B\left(x_i, \frac{\varepsilon}{2}\right) \neq \emptyset, \; i = 1, \ldots, m$. $K \cap B\left(x_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ et $K \subset U \Rightarrow \exists \, y_i \in B\left(x_i, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap K$, ce qui implique que

$$d(x_i, y_i) < \frac{\varepsilon}{2} \;\text{ et }\; d(x, K_0) < \varepsilon \; \forall \, x \in K \Rightarrow d(x_i, K) < \frac{\varepsilon}{2} \;\text{ et }\; \sup_{x \in K} d(x, K_0) < \varepsilon.$$

De plus, on a

$$d(y, K) \leq d(y, x_i) + d(x_i, K) < \varepsilon \; \forall \, y \in K_0 \;\text{ et }\; \sup_{x \in K} d(x, K_0) \leq \varepsilon \Rightarrow H_d(K, K_0) < \varepsilon.$$

On en déduit que $H_d(K, K_0) < \varepsilon$. Donc $W \subset B(K_0, \varepsilon)$. □

Proposition 1.5 *$\mathcal{P}_{bf}(X)$ est un ensemble fermé dans $(\mathcal{P}_f(X), H_d)$. De plus si (X, d) est un espace métrique complet, alors $(\mathcal{P}_{bf}(X), H_d)$ est complet.*

Démonstration. Soit $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}_{fb}(X)$ une suite convergente vers A. On se propose de montrer que $A \in \mathcal{P}_{bf}(X)$. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Alors il existe $n_0(\varepsilon)$ tel que, pour tout $n_0(\varepsilon) \geq n$, $A \subset (A_n)_\varepsilon$. Comme $A_{n_0(\varepsilon)}$ est borné ; il existe $x_0 \in A_{n_0(\varepsilon)}$ et $M > 0$ tel que $A_{n_0(\varepsilon)} \subset B(x_0, M)$; par conséquent $A \subset B(x_0, \varepsilon + M)$. Ceci montre que A est borné. Puisque X est complet, $\mathcal{P}_f(X)$ et par suite $(\mathcal{P}_{fb}(X), H_d)$, est complet. □

Théorème 1.4 *Soit X un espace métrique séparable, alors $(\mathcal{P}_{cp}(X), H_d)$ est séparable.*

Démonstration. Soit $B = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \subset X$ un ensemble dénembrable d'élements de X tel que $\overline{B} = \overline{\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}} = X$. Considérons

$$\mathcal{K} = \{A \in \mathcal{P}(B) \colon\ B \ \text{ une partie finie}\}.$$

Soit $f \colon \mathcal{K} \to \mathbb{N}^*$ une application définie par

$$A \to f(A) = \sum_{i=1}^{n} \sigma(i), A = \{x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\},\ n = CardA.$$

On peut facilement montrer que f est bijective, et donc $\mathcal{K}$ est une ensemble dénombrable. Montrons que $\overline{\mathcal{K}} = \mathcal{P}_{cp}(X)$. En effet, soit W un ouvert ; alors pour tout $K_0 \in W$ il existe une famille d'ouverts $U, V_1, \ldots, V_m$ dans X tels que

$$W_K = \{K \in \mathcal{P}_{cp}(X) \colon\ K \subset U, K \cap V_1 \neq \emptyset, \ldots, V_m \cap K \neq \emptyset\} \subset W$$

avec

$$K_0 \subset U, K_0 \cap V_1, \ldots, K_0 \cap V_m.$$

Posons

$$A = \{x_u, x_{v_1}, \ldots, x_{v_m}\}$$

où

$$x_u \in K \cap U, x_{v_i} \in K \cap V_i,\ i = 1, \ldots, m.$$

Ceci exprime que $\mathcal{K} \cap W \neq \emptyset$.

□ □

Définition 1.12 *Soit (X, τ) un espace topologique. On dit que X est un espace polonais s'il est métrisable et séparable.*

Corollaire 1.2 *Si X un espace polonais, alors $\mathcal{P}_{cp}(X)$ l'est aussi.*

Démonstration. D'apèrs la définition d'une espace polonais et les théorèmes 1.1, 1.4, on peut déduire que $\mathcal{P}_{cp}(X)$ est un espace polonais. □

Théorème 1.5 *Soit X un espace métrique et $A, B \in \mathcal{P}(X)$. Alors*

$$H_d(A, B) = \sup\{|d(x, A) - d(x, B)| \colon\ x \in X\}.$$

Démonstration. Soit $x \in X$. Alors

$$\begin{aligned} d(x,A) &\leq d(x,y) + d(y,A)\ \forall\, y \in B \\ &\leq d(x,y) + H_d(A,B)\ \forall\, y \in B \\ &\leq d(x,B) + H_d(A,B) \Rightarrow d(x,A) - d(x,B) \leq H_d(A,B). \end{aligned}$$

De même, on peut montrer que

$$d(x,B) - d(x,A) \leq H_d(A,B).$$

Donc

$$|d(x,A) - d(x,B)| \leq H_d(A,B)\colon\ \forall\, x \in X.$$

Ceci exprime le fait que

$$\sup\{|d(x,A) - d(x,B)|\colon\ x \in X\} \leq H_d(A,B).$$

D'après la définition de H_d, on obtient

$$\begin{aligned} \sup_{x\in B} d(x,A) &= \sup\{d(x,A) - d(x,B)\colon\ x \in B\} \\ &\leq \sup\{|d(x,A) - d(x,B)|\colon\ x \in X\} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sup_{x\in A} d(x,B) &= \sup\{d(x,B) - d(x,A)\colon\ x \in A\} \\ &\leq \sup\{|d(x,A) - d(x,B)|\colon\ x \in X\}. \end{aligned}$$

Donc

$$H_d(A,B) \leq \sup\{|d(x,A) - d(x,B)|\colon\ x \in X\}.$$

Par suite

$$H_d(A,B) = \sup\{|d(x,A) - d(x,B)|\colon\ x \in X\}.$$

□

Dans tout ce qui suit, on suppose que $(X, \|\cdot\|)$ est un espace normé.

Proposition 1.6 *Soit X un espace normé, $\mathcal{P}_{cv,f}(X)$ est un ensemble fermé dans $(\mathcal{P}_f(X), H_d)$.*

Démonstration. En effet, soit $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{P}_{cv,f}(X)$, convergente vers A. Montrons que $A \in \mathcal{P}_{cv,f}(X)$. D'après le lemme 1.3 $A \in \mathcal{P}_f(X)$ et $A = \cap_{\varepsilon\geq 0}\cup_{n\geq 1}\cap_{m\geq n}(A_m)_\varepsilon$. Montrons que $(A_m)_\varepsilon \in \mathcal{P}_{cv}(X)$. Soit $x, y \in (A_m)_\varepsilon$ et $\lambda \in [0,1]$, alors

$$\begin{aligned}
& d(\lambda x + (1-\lambda)y, A_m) \\
\leq\ & d(\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda A_m + (1-\lambda)A_m) + d(\lambda A_m + (1-\lambda)A_m, A_m) \\
\leq\ & \lambda d(x, A_m) + (1-\lambda)d(y, A_m) < \varepsilon
\end{aligned}$$

Comme $A_m \in \mathcal{P}_{cv,f}(X)$, on obtient

$$d(\lambda x + (1-\lambda)y, A_m) \ \leq\ \lambda d(x, A_m) + (1-\lambda)d(y, A_m) < \varepsilon.$$

donc $(A_m)_\varepsilon \in \mathcal{P}_{cv}(X) \Rightarrow \cap_{m\geq n}(A_m)_\varepsilon \in \mathcal{P}_{cv}(X)$. Puisque $\{\cap_{m\geq n}(A_m)_\varepsilon\}$ est une suite d'ensembles convexes et décroissants, alors $\cup_{n\geq 1}\cap_{m\geq n}(A_m)_\varepsilon \in \mathcal{P}_{cv}$, ce qui montre que

$$A = \cap_{\varepsilon\geq 0}\cup_{n\geq 1}\cap_{m\geq n}(A_m)_\varepsilon \in \mathcal{P}_{cv,f}(X).$$

□

Définition 1.13 *Soit X un espace normé, A une partie de X et X^* le dual topologique de X. On appelle fonction support de A la fonction $\sigma(.,A)\colon X^* \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ définie par*

$$\sigma(x^*, A) = \sup\{(x^*, x)\colon\ x \in A\}$$

où $(.,.)$ est le crochet de dualité.

Théorème 1.6 *Soit X un espace normé et $A, B \in \mathcal{P}_{cv,f,b}(X)$. Alors*

$$H_d(A,B) = \sup\{|\sigma(x^*,A) - \sigma(x^*,B)|\colon\ \|x^*\| \leq 1\}$$

où

$$d(x,y) = \|x - y\|\colon,\ \forall\, x, y \in X.$$

Démonstration. Soit $A, C \in \mathcal{P}_{cv,b,f}(X)$. Alors

$$H_d(A,C) = \inf\{\varepsilon > 0\colon\ A \subset C_\varepsilon \ \text{ et } \ C \subset A_\varepsilon\}.$$

Montrons que

$$\inf\{\varepsilon > 0\colon\ A \subset C_\varepsilon \ \text{ et } \ B \subset A_\varepsilon\} = \sup\{\|\sigma(x^*, A) - \sigma(x^*, C)\|\colon\ \|x^*\| \leq 1\}.$$

On peut facilement montrer que

$$C_\varepsilon = \{x \in X\colon\ |x - A\| < \varepsilon\} = A + \varepsilon B(0,1), B(0,1) = \{x \in X\colon\ \|x\| < 1\}.$$

Soit $x^* \in X^*$ $\sigma(x^*, A) = \sup\{\langle x^*, a\rangle\colon\ a \in A\}$, $\varepsilon > 0$ tel que $A \subset C + \varepsilon B(0,1)$ et $C \subset A + \varepsilon B(0,1)$. On a

$$\begin{array}{rcl}
\langle x^*, a\rangle &=& \langle x^*, a - b\rangle + \langle x^*, b\rangle,\ \forall\, b \in C \\
&\leq& \|x^*\|\|a - b\| + \langle x^*, b\rangle\ \forall\, b \in C \\
&\leq& \|a - b\| + \sigma(x^*, C) \\
&<& \varepsilon + \sigma(x^*, C) \Rightarrow \sigma(x^*, A) - \sigma(x^*, C) < \varepsilon
\end{array}$$

De la même manière, on peut montrer que

$$\sigma(x^*, C) - \sigma(x^*, A) < \varepsilon$$

et donc

$$\sup\{|\sigma(x^*, A) - \sigma(x^*, C)|\colon\ \|x^*\| \leq 1\} \leq \inf\{\varepsilon > 0\colon\ A \subset C_\varepsilon \ \text{ et } \ C \subset A_\varepsilon\}.$$

Soit $\varepsilon = H_d(A, C)$ et $x_0 \notin \overline{A - C}$. Comme $A, C \in \mathcal{P}_{cv,f,b}(X)$, alors d'après le théorème de Han-Banach il existe une forme linéaire $x^* \in X^*$ telle que

$$\|x^*\| \leq 1 \ \text{ et } \ \varepsilon \leq \langle x^*, a\rangle - \langle x^*, b\rangle,\ \forall\, a \in A,\ \forall\, b \in C$$

ce qui montre que

$$H_d(A, C) \leq \sup\{|\sigma(x^*, A) - \sigma(x^*, C)|\colon\ \|x^*\| \leq 1\}.$$

D'où

$$H_d(A, C) = \sup\{|\sigma(x^*, A) - \sigma(x^*, C)|\colon\ \|x^*\| \leq 1\}.$$

$\square$

1.2.2 Limites d'ensembles

Les limites d'ensembles on été inroduites en 1902 par Painlevé avant la formalisation des espaces métriques en 1906 par Fréchet, donc sans utilisation de concepts topologiques. Elles ont été par la suite rendues plus connues par Kuratowski dans ses travaux sur la topologie et appelées limite inférieure et limite supérieure d'ensembles au sens de Kuratowski. Soit (X, d) un espace métrique et $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une famille des sous-ensemble de X.

Définition 1.14 *Le sous ensemble*

$$A^\sharp = \lim_{n\to+\infty} \sup A_n = \{x \in X : \lim_{n\to+\infty} \inf d(x, A_n) = 0\}$$

est la limite supérieure au sens de Painlevé-Kuratowski de la suite A_n et le sous-ensemble

$$A^\flat = \lim_{n\to+\infty} \inf A_n = \{x \in X : \lim_{n\to+\infty} d(x, A_n) = 0\}$$

est la limite inférieure de la suite A_n. On dit que la suite d'ensembles A_n converge vers A au sens de Painlevé-Kuratowski si

$$A = A^\flat = A^\sharp := \lim_{n\to+\infty} A_n.$$

Corollaire 1.3 *Les ensembles limites inférieures et supérieures sont des ensembles fermés vérifiant :*

$$\lim_{n\to+\infty} \inf A_n \subset \lim_{n\to+\infty} \sup A_n.$$

Toute suite décroissante de sous-ensembles A_n admet une limite qui est intersection de leurs fermetures :

$$si\ A_n \subset A_m \quad quand\ \ n \geq m, \quad alors \quad \lim_{n\to+\infty} A_n = \cap_{n\geq 0}\overline{A_n}.$$

Démonstration. Soit $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset A^\natural$ une suite convergente vers x. Montrons que $x \in A^\natural$.

$$d(x, A_n) \leq d(x, x_m) + d(x_m, A_n) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \inf d(x, A_n) \leq d(x, x_m) + \lim_{n\to+\infty} \inf d(x_m, A_n).$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \inf d(x, A_n) = 0$. Par de même méthode, on peut facilement montrer que $A^\flat$ est un ensemble fermé. Soit $x \in A^\flat$. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \inf d(x, A_n) \leq \lim_{n\to+\infty} d(x, A_n) = 0 \Rightarrow x \in A^\natural.$$

Finalement, montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \cap_{n\geq 0}\overline{A_n}$. Soit $x \in \lim\limits_{n\to+\infty} A_n$; alors

$$\lim_{n\to+\infty} d(x, A_n) = 0 \Leftrightarrow \forall\,\varepsilon, \exists\, N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow d(x, A_n) \leq \varepsilon.$$

En effet, la suite $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et donc

$$\forall\,\varepsilon > 0,\ d(x, A_n) \leq \varepsilon,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Alors

$$x \in \overline{A_n},\ \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \cap_{n\geq 0}\overline{A_n}.$$

Réciproquement, soit $x \in \cap_{n\geq 0}\overline{A_n}$; alors $x \in \overline{A_n}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. D'après le lemme, on obtient

$$d(x, A_n) = 0,\ \forall\, xn \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in A^\flat.$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \cap_{n\geq 0}\overline{A_n}$. $\square$

Proposition 1.7 *Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de sous-ensembles d'un espace métrique, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \inf A_n$ est l'ensemble des limites des valeurs d'adhérences de suites $x_n \in A_n$, c'est-à-dire les limites de sous-suites convergentes $x_m \in A_m$.*

Théorème 1.7 *Considérons des suites de sous-ensembles $\{L_n\}_{\in\mathbb{N}}$ et $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'un espace métrique et supposons qu'il existe un sous-ensemble compact M satisfaisant la propriété suivante :*

$$\textit{pour tout voisinage } W \textit{ de } M,\ \exists\, N \textit{ tel que } \forall\, n \geq N, M_n \subset W.$$

Alors, pour tout voisinage U de $M \cap (\lim\limits_{n\to+\infty} \sup L_n)$, il existe un entier N tel que $L_n \cap M_n \subset U$ dés que $n \geq N$.

1.2.3 Topologie de Vietoris

Dans toute la suite, on suppose que (X, τ) est un espace topologique de Hausdorff. Pour $A \in \mathcal{P}(X)$, on définit les ensembles qui touchent A et qui ne rencontrent pas le complémentaire de A, respectivement :

$$A^- = \{B \in \mathcal{P}(X) :\ A \cap B \neq \emptyset\}$$

et

$$A^+ = \{B \in \mathcal{P}(X) :\ B \subseteq A\}.$$

Définition 1.15 *Soit* (X, τ) *un espace topologique et* $\mathcal{L}_{UV}$, $\mathcal{L}_{LV}$ *deux familles de parties de* X *définies par*

$$\mathcal{L}_{UV} = \{U^+ \colon\ U \in \tau\} \ \text{ et } \ \mathcal{L}_{LV} = \{U^- \colon\ U \in \tau\}.$$

(a) *La topologie engendrée par* $\mathcal{L}_{UV}$ *est appellée topologie de Vietoris supérieure et est notée par* τ_{UV} *et* $(\mathcal{P}(X), \tau_{UV})$ *est dit espace topologique de Vietoris supérieur.*

(b) *La topologie engendrée par* $\mathcal{L}_{LV}$ *est appellée topologie de Vietoris inférieure et on note par* $(\mathcal{P}(X), \tau_{UV})$ *l'espace topologique de Vietoris inférieur.*

(c) *La topologie engendrée par* $\mathcal{L}_{UV} \cup \mathcal{L}_{LV}$ *est appellée la topologie de Vietoris est on note par* $(\mathcal{P}(X), \tau_V)$ *l'espace topologique de Vietoris.*

Remarque 1.2 *La famille des parties de* $\mathcal{P}(X)$ *définie par*

$$B(U, V_1, \ldots, V_n) = \{A \in \mathcal{P}(X) \colon\ A \subseteq U, A \cap V_k \neq \emptyset, k = 1, \ldots, n\},$$

où $U, V_1, \ldots, V_n \in \tau$ *forme une base de la topologie de Vietoris.*

Lemme 1.6 *Soit* $I \colon\ X \to (\mathcal{P}(X), \tau_V)$ *l'application multivoque définie par* $I(x) = \{x\}$. *Alors* $I(\cdot)$ *est continue.*

Démonstration. Soit $U \in \tau$. Alors

$$I^{-1}(U^+) = \{x \in \colon\ \{x\} \subseteq U\} = U \in \tau.$$

Par la même méthode, si $V_1, \ldots, V_n \in \tau$, alors

$$I^{-1}(\cap_{k=1}^n V_k^-) = \{x \in X \colon\ \{x\} \cap V_k \neq \emptyset, k = 1, \ldots, n\} = \cap_{k=1}^n V_k^- \in \tau.$$

Ceci exprime le fait que $I(\cdot)$ est continue. Considérons l'ensemble $\mathcal{F}$ défini par

$$\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{P}(X) \colon\ A \ \text{ est un partie finie}\}.$$

□

Proposition 1.8 $\mathcal{F}$ *est dense in* $(\mathcal{P}(X), \widehat{\tau}_V)$.

Démonstration. Soit $U \in \tau \backslash \{\emptyset\}$. Alors, il existe $B \in \mathcal{F}$ tel que $B \subset$; donc $U^+ \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$. De la même manière, si $V_1, \ldots, V_n \in \tau \backslash \{\emptyset\}$ on chosit des élements $x_k \in V_k,\ k = 1, \ldots, n$. Posons $\{x_k\}_{k=1}^n \in (\cap_{k=1}^n V_k^-) \cap \mathcal{F}$. Donc $\mathcal{F}$ a une intersecion non vide avec élements dans la base de la topologie de Vietoris. Par conséquent, $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{P}(X)$. □

Lemme 1.7 *Soit (X, τ) un espace topologique séparable. Alors $(\mathcal{P}(X), \widehat{\tau}_V)$ est un espace topologique séparable.*

Démonstration. Voir le théorème 1.4 et la proposition 1.8. □

Lemme 1.8 *Soit (X, τ) un espace topolgique régulier, alors $(\mathcal{P}_{cl}(X), \widehat{\tau}_V)$ est un espace topologique de Hausdorff.*

Démonstration. Soit $A, B \in \mathcal{P}_{cl}(X)$ et supposons que $A \neq B$. Alors $A \cap X \backslash B \neq \emptyset$ au $B \cap X \backslash A \neq \emptyset$. Supposons que $A \cap X \backslash B \neq \emptyset$; alors il existe $a \in A \cap X \backslash B$. Puisque X est espace topologique régulier, il existe $U_1,\ U_2 \in \tau$ tel que $a \in U_1, B \subseteq U_2$ et $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Soit U_1^- et U_2^+ deux ouvets dans $\widehat{\tau}_V$. Il clair que $A \in U_1^-$, et $B \in U_2^+$; de plus $U_1^- \cap U_2^+ = \emptyset$. Donc $(\mathcal{P}(X), \widehat{\tau}_V)$ est un espace topologique séparé. □

Lemme 1.9 *Si (X, τ) est un espace topologique de Hausdorff, alors (X, τ) est compact si et seulement si $(\mathcal{P}_{cl}(X), \widehat{\tau}_V)$ est compact.*

En général, il n'existe pas de relation directe entre la pseudométrique (respec. métrique) $\widehat{\tau}_H$ de la topologie de Hausdorff et la topologie de Vietoris $\widehat{\tau}_V$ definie sur $\mathcal{P}(X)$ (respec. sur $\mathcal{P}_{cl}(X)$). Cependant, si on se restreint à $\mathcal{P}_{cp}(X)$, alors on a le résultat précis suivant :

Lemme 1.10 *[46] Si (X, d) est un espace métrique sur $\mathcal{P}_{cp}(X)$, alors la topologie de la métrique de Haudorff $\widehat{\tau}_H$ et la topologie de Vietoris $\widehat{\tau}_V$ coincident.*

1.3 Continuité de multi-fonctions

1.3.1 Définitions et propriétés principales

Les trois versions de la topologie de Vietoris introduites dans la Section 3 nous ammènent aux concepts de continuité de multifonctions.

Définition 1.16 *Soit $F\colon\ X \to \mathcal{P}(Y)$ une muti-function.*

(a) Si $F\colon\ X \to (\mathcal{P}(Y), \tau_{UV})$ est continue, alors on dit que F est semi-continue supérieurement (s.c.s)

(b) Si $F\colon\ X \to (\mathcal{P}(Y), \tau_{LV})$, est continue, alors on dit que $F(\cdot)$ est semi-continue inférieurement (s.c.i.).

(c) Si $F\colon X \to (\mathcal{P}(Y), \tau_V)$ *est continue, alors* $F(\cdot)$ *est dite continue (ou continue au sens de Vietoris).*

Définition 1.17 *(Version locale) Soit* $F\colon X \to \mathcal{P}(Y)$ *une multi-fonctions.*

(a) F *est dite semi-continue supérieurement en* $x_0 \in X$ *si pour tout ouvert* U *de* Y *avec* $F(x_0) \subseteq U$*, il existe un ouvert* V *de* x_0 *tel que pour tout* $x \in V$*, on a que* $F(x) \subseteq U$*.*

(b) F *est dite semi-continue inférieurement au point* $x_0 \in X$ *si l'ensemble* $\{x \in X\colon F(x) \cap U \neq \emptyset\}$ *est ouvert pour tout ouvert* $U \in Y$*.*

Utilisant les trois versions des topologies de Vietoris, on obtient les résultats immédiats suivants. Rappellons d'abord qu'un ensemble $\mathcal{M}$ muni d'un préordre $\succeq$ est dit dirigé si tout sous-ensemble fini est majoré. Une suite généralisée est une application

$$\nu \in \mathcal{M} \mapsto x_\mu \in X,$$

où (X, τ) est un espace topologique. Un élement $x \in X$ est limite de $(x_\mu)_{\mu \in \mathcal{M}}$ si, pour chaque voisinage $\mathcal{V}$ de x il existe $\mu_0 \in \mathcal{M}$ tel que $x_\mu \in \mathcal{V}$ pour tout $\mu \succeq \mu_0$.

Proposition 1.9 *Pour une multi-fonction* $F\colon X \to \mathcal{P}(Y)$*, les propositions suivantes sont équivalentes :*

(a) F *est s.c.s.*

(b) $F^+(V)$ *est ouvert dans* X *pour tout ouvert* $V \subseteq Y$*.*

(c) Pour tout fermé $C \subseteq Y$*,* $F^-(C)$ *est fermé dans* X*.*

(d) $\overline{F^-(D)} \subseteq F^-(\overline{D})$*.*

(e) Pour tout $x \in X$*, si* $\{x_\alpha\}_{\alpha \in J}$ *est une suite généralisée,* $x_\alpha \to x$*, et* $V \subseteq Y$ *est un ouvert tel que* $F(x) \subseteq V$*, alors il existe* $\alpha_0 \in J$ *tel que pour tout* $\alpha \in J$*,* $\alpha \geq \alpha_0$ *on a que* $F(x_\alpha) \subseteq V$*.*

Démonstration. $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (e) \Rightarrow (a)$.

- $(a) \Rightarrow (b)$.

  Soit W ouvert dans Y, $F^+(W) = \{x \in X\colon F(x) \subset W\}$ et soit $x \in F^+(W)$. Alors $F(x) \subset W$. Comme F est s.c.s., alors il existe $V(x) \in \mathcal{N}(x)$ tel que

  $$F(V(x)) \subset W \Rightarrow V(x) \subset F^-(W).$$

  Donc $F^+(W)$ est ouvert dans X.

- $b) \Rightarrow c)$.
  Soit Q un ensemble fermé dans Y et$F^-(Q) = \{x \in X:\ F(x) \cap Q \neq \emptyset\}$. Alors
  $$X \backslash F^-(Q) = \{x \in X:\ F(x) \subset X \backslash Q\} = F_+^{-1}(X \backslash Q).$$
  Q est un ensemble fermé dans Y ; alors $X \backslash Q$ est fermé dans Y. De (b), on déduit que $F^- + (X \backslash Q)$ est ouvert dans X. Ainsi $F^-(Q)$ est fermé dans X.
- $(c) \Longrightarrow (d)$.
  Soit D un sous-ensemble de Y. Alors
  $$D \subset \overline{D} \Longrightarrow F^-(D) \subset F^-(\overline{D}) \Longrightarrow \overline{F^-(D)} \subset \overline{F^-(\overline{D})}.$$
  Comme $F^-(\overline{D})$ est fermé, alors $F^-(\overline{D}) = \overline{F^-(\overline{D})}$. Ainsi
  $$\overline{F^-(D)} \subset F^-(\overline{D}).$$
- $(d) \Longrightarrow (e)$.
  Soit $\{x_\alpha\}_{\alpha \in J}$ une suite généralisée, $x \in X,\ x_\alpha \to x$ et V un ouvert de Y tel que $F(x) \subset V$. Montrons qu'il existe $\alpha_0 \in J$ tel que pour tout $\alpha \geq \alpha_0$, on a $F(x_\alpha) \subset V$. Dans le cas contraire, pour tout $\alpha \in J$, il existe $\beta \in J$ tel que $\beta \geq \alpha$ et $F(x_\beta) \not\subset V$; ceci implique que $x_\beta \in F^-(Y \backslash V)$; ainsi $x_\beta \in \overline{F^-(Y \backslash V)}$. Comme $x_\alpha \to x$, on peut facilement montrer que $x_\beta \to x \in \overline{F^-(Y \backslash V)}$. De (d), on tire $x \in F^-(Y \backslash V)$, ce qui conterdit $F(x) \subset V$.
- $(e) \Longrightarrow (a)$.
  Soit $x \in X$ et V sous-ensembles ouverts de Y tels que $F(x) \subseteq V$. Supposons que pour tout $V \in \mathcal{N}(x)$, on a que $x_v \in V$ tel que $F(x_v) \cap Y \backslash V \neq \emptyset$. Soit
  $$R = \{[x_v, V] \in V \times \mathcal{N}(x):\ x_v \in F^-(Y \backslash V)\}.$$
  Introduisons un ordre partial sur R, $[x_v, V] \leq [x_{v'}, V']$ si $V' \subset V$. Montrons qu'avec cet ordre partial, R devient un ensemble dirigé. En effet, soit $[x_v, V],\ [x_{v'}, V'] \in R$. Comme $V \cap V' \in \mathcal{N}(x)$, il existe $x_{v \cap v'} \in V \cap V'$ tel que $x_{v \cap v'} \in F^-(Y \backslash V \cap V')$. Considérons $[x_{v \cap v'}, V \cap V'] \in R$; il est clair que $[x_v, V] \leq [x_{v \cap v'}, V \cap V']$ et $[x_{v'}, V'] \leq [x_{v \cap v'}, V \cap V']$. Soit $\phi\colon\ R \to \mathcal{N}(x)$ by $[x_v, V] \to \phi([x_v, V]) = V$. Il est clair que $\phi(R)$ est cofinal dans $\mathcal{N}(x)$. Pour tout $[x_v, V]$, soit $x_{\phi[x_v, V]} = x_v$. Montrons que $x_v \to x$ et soit $V' \in \mathcal{N}(x)$. Alors il exists $x_{v'} \in V'$ tel que $x_{v'} \in F^-(Y \backslash V)$. Alors pour tout $[x_v, V] \geq [x_{v'}, V']$, on a que $x_v \in V \subset V'$. Donc $x_v \to x$. Comme $F(x) \subset V$, alors d'après (e), il existe $[x_v, V] \in R$ tel que $[x_{v'}, V'] \geq [x_v, V]$, implique $F(x_{v'}) \subset V$. Ainsi $x_{v'} \notin F^-(Y \backslash V')$, ce qui est une contradiction.

□

Pour la semi-continuité inférieure, on a le résultat correspondant suivant

Proposition 1.10 *Soit $F\colon X \to \mathcal{P}(Y)$ une multi-fonction. Alors les propositions suivantes sont équivalenes :*

(a) F est s.c.i.

(b) Pour chaque ouvert $V \subseteq Y$, $F^-(V)$ est ouvert dans X ;

(c) Pour chaque fermé $C \subseteq Y$, $F^+(C)$ est fermé dans X;

(d) $\overline{F^+(D)} \subseteq F^+(\overline{D})$

(e) $F(\overline{A}) \subseteq \overline{F(A)}$, pour chaque sous-ensemble $A \subseteq X$

(g) Pour chaque $x \in X$, si $\{x_\alpha\}_{\alpha\in J}$ est une suite généralisée, $x_\alpha \to x$, alors pour chaque $y \in F(x)$ il existe une suite généralisée $\{y_\alpha\}_{\alpha\in J} \subset Y$, $y_\alpha \in F(x_\alpha)$, $y_\alpha \to y$.

Démonstration. $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (e) \Rightarrow (f) \Longrightarrow (g) \Longrightarrow (a)$.

- $(a) \Rightarrow (b)$.
  Soit W ouvert dans Y, $F^-(W) = \{x \in X\colon\ F(x) \subseteq W\}$ et soit $x \in F^-(W)$, alors $F(x) \cap W \neq \emptyset$. Comme F est s.c.i., alors il existe $V(x) \in \mathcal{N}(x)$ tel que

$$F(z) \cap W \neq \emptyset, \quad \text{for all} \quad z \in V(x), \Rightarrow V(x) \subseteq F^-(W).$$

  Donc $F^-(W)$ est ouvert dans X.
- $b) \Rightarrow c)$.
  Soit Q fermé dans Y et $F^+(Q) = \{x \in X\colon\ F(x) \subseteq Q\}$. Alors

$$X \backslash F^+(Q) = \{x \in X\colon\ F(x) \cap X \backslash Q \neq \emptyset\} = F^-(X \backslash Q).$$

  Q est fermé dans Y; donc $X\backslash Q$ est ouvert dans Y. De (b), on a que $F^-(X\backslash Q)$ est ouvert dans X. Ainsi $F^+(Q)$ est fermé dans X.
- $(c) \Longrightarrow (d)$.
  Soit D un sous-ensemble de Y; alors on

$$F^+(D) \subseteq F^+(\overline{D}) \Longrightarrow \overline{F^+(D)} \subseteq \overline{F^+(\overline{D})}.$$

  De (c), on obtient

$$\overline{F^+(D)} \subseteq F^+(\overline{D}).$$

- $(d) \Longrightarrow (e)$.
Soit A un sous-ensemble de X. Montrons que $F(\overline{A}) \subseteq \overline{F(A)}$. Supposons que $F(\overline{A}) \nsubseteq \overline{F(A)}$; alors il existe $y \in F(\overline{A})$ tel que $y \notin \overline{F(A)}$ et donc il existe $V(y) \in \mathcal{N}(y)$ avec $V(y) \cap F(A) = \emptyset$; ceci implique que
$$A \subseteq F^+(Y \backslash V(y)).$$
De (d), on a que
$$A \subseteq \overline{F^+(Y \backslash V(y))} = F^+(Y \backslash V(y)).$$
$y \in F(\overline{A})$; alors il existe $x \in \overline{A}$, tel que $y \in F(x)$. Comme $x \in \overline{A}$, alors on a une suite généralisée $\{x_\alpha\}_{\alpha \in J}$ dans A, $x_\alpha \to x$. Donc $x \in F^+(Y \backslash V(y))$; par définition de F^+, on obtient que $F(x) \cap V(y) = \emptyset$, ce qui est en contradiction avec $y \in F(x)$.
- $e) \Longrightarrow (g)$.
Soit $\{x_\alpha\}_{\alpha \in J}$ une suite généralisée, $x \in X$, $x_\alpha \to x$ et $y \in F(x)$. Posons $A = \{x_\alpha \colon \ \alpha \in J\}$ où J est un ensemble dirigé. D'après (e), on a
$$F(\overline{A}) = F(A \cup \{x\}) \subseteq \overline{F(A)}.$$
Let
$$R = \{[x_\alpha, V] \in V \times \mathcal{N}(y) \colon \ x_v \in F^-(V)\}.$$
Comme $y \in F(\overline{A})$, alors $y \in \overline{F(\{x_\alpha \colon \ \alpha \in J\})}$, et donc $R \neq \emptyset$. On définit un ordre partiel sur R en posant $[\alpha, V] \leq [\alpha', V']$ si $V' \subset V$ et $\alpha' \leq \alpha$. Montrons que R muni de cet ordre partial est un ensemble dirigé. En effet, soit $[\alpha, V],\ [\alpha', V'] \in R$. Comme J est dirigé, il existe $\beta \in J$ tel que $\alpha \leq \beta$ et $\alpha' \leq \beta$. Comme $y \in \cap_{\alpha \in J} \overline{\cup_{\beta \geq \alpha} F(x_\beta)}$ et $V \cap V' \in \mathcal{N}(y)$, on peut trouver $\gamma \in J$, $\gamma \geq \alpha$, tel que $x_\gamma \in F^-(V \cap V')$. Alors $[\alpha, V] \leq [\gamma, V \cap V']$ et $[\beta, V'] \leq [\gamma, V \cap V']$. So R est dirigé. Définissons $\phi \colon \ R \to \mathcal{N}(y)$ par $[\alpha, V] \to \phi([\alpha, V]) = \alpha$. Alors, il est clair que $\phi(R)$ est cofinal dans J. Pour tout $[\alpha, V] \in R$, soit $y_{\phi([\alpha,V])} \in F(x_\alpha) \cap V$. De même, $x_{\phi([\alpha,V])} = x_\alpha$. Comme $\phi(R)$ est cofinal dans J, on a que $x_{\phi([\alpha,V])} \to x$. Montrons que $y_{\phi([\alpha,V])} \to y$. Soit $V' \in \mathcal{N}(y)$. Alors il existe $\alpha' \in J$ tel que $x_{\alpha'} \in F^-(V')$. Ainsi pour tout $[\alpha, V] \geq [\alpha', V']$, on a que $y_{\phi([\alpha,V])} \in V \subseteq V'$ ce qui implique que $y_{\phi([\alpha,V])} \to y$.
- $(g) \Longrightarrow (a)$.
Soit $x \in X$ et W ouvert dans Y tel que $F(x) \cap W \neq \emptyset$. Montrons qu'il existe

$V \in \mathcal{N}(x)$ tel que $F(z) \cap V \neq \emptyset$, pour tout $z \in W$. Dans le cas contraire, pour tout $V \in \mathcal{N}(x)$, on a $x_v \in V$ tel que $F(x_v) \cap V = \emptyset$. Soit

$$R = \{[x_v, V] \in V \times \mathcal{N}(x) \colon\ x_v \in F^-(V)\}.$$

and

$$\phi\colon\ R \to \mathcal{N}(x) \ \text{ par } \ [x_v, V] \to \phi([x_v, V]) = V.$$

Comme dans la proposition 1.9 on peut montrer que R est dirigé et $\phi(R)$ est cofinal dans $\mathcal{N}(x)$. Pour tout $[x_v, V]$, soit $x_{\phi[x_v,V]} = x_v$. Montrons que $x_v \to x$. Soit $V' \in \mathcal{N}(x)$; alors il existe $x_{v'} \in V'$ tel que $x_{v'} \in F^-(V)$. Ainsi pour tout $[x_v, V] \geq [x_{v'}, V']$, on a que $x_v \in V \subset V'$. Alors $x_v \to x$. Comme $F(x) \cap W \neq \emptyset$, alors il existe $y \in F(x) \cap W$. D'après (g), il existe $y_{\phi([x_v,V])} \in F(x_v)$ tel que $y_{\phi([\alpha,V])} \to y$. Mais $y_{\phi([\alpha,V])} \in F(x_v) \subseteq Y \backslash W$. Ainsi $y \in Y \backslash W$, ce qui est contradictoire.
$[x_{v'}, V'] \geq [x_v, V]$, implique $F(x_{v'}) \subset V$. Ainsi $x_{v'} \notin F^-(V')$, ce qui est une contradiction.

$\square$

Remarque 1.3 *Dans le cas où X sont Y deux espaces topologiques à bases dénombrables, on peut prendre des suites ordinaires plutôt que des suites généralisées dans le cadre des conditions e) et g) des propositions 1.9, 1.10 respectivement.*

Définition 1.18 *Soit $F, G\colon X \longrightarrow Y$ deux multi-applications. On définit, quand cela existe, les multi-applications :*
(a) $(F \cap G)(x) = F(x) \cap G(x)$.
(b) $(F \cup G)(x) = F(x) \cup G(x)$.

Proposition 1.11 *Si F et G sont s.c.s., alors $F \cap G$ et $F \cup G$ le sont aussi.*

Démonstration. Montrons la première assertion. Soit $x \in X$ et V un voisinage ouvert de $F(x) \cap G(x)$ dans Y. Alors $F(x) \setminus V$ et $G(x) \setminus V$ sont des sous-ensembles fermés de Y tels que $F(x) \setminus V \cap G(x) \setminus V = \emptyset$. Soit W_1 et W_2 deux voisinage ouverts disjoins de $F(x) \setminus V$ et $G(x) \setminus V$ respectivement. F étant s.c.s., soit U_1 voisinage ouvert de x dans X tel que $F(U_1) \subset U \cap W_1$ et U_2 voisinage ouvert de x dans X tel que $G(U_2) \subset U \cap W_2$. Si $U = U_1 \cap U_2$, alors $(F \cap G)(U) \subset V$, ce qui complète la démonstration. $\square$

1.3.2 Exemples et contre-exemples

Exemple 1.1 *Les applications multivoques suivantes sont semi-continues supérieurement :*

1) $F\colon \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *définie par*

$$F(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ \{-1, 1\} & x = 0, \\ \{-1\} & x < 0. \end{cases}$$

2) $F\colon \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *définie par*

$$F(x) = \begin{cases} x+1, & x > 0, \\ [-1, 1] & x = 0, \\ x-1 & x < 0. \end{cases}$$

2) $F\colon \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *définie par* $F(x) = [f(x), g(x)]$, *où* $f, g\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sont s.c.i. et s.c.s. respectivement.*

Exemple 1.2 *Les applications multivoques suivantes sont semi-continues inférieurement :*

1) $F\colon \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *définie par*

$$F(x) = \begin{cases} [a, b], & x \neq 0, \\ \{\alpha\} & \alpha \in [a, b]. \end{cases}$$

2) $F\colon \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *définie par*

$$F(x) = \begin{cases} [0, |x|+1], & x \neq 0, \\ \{1\} & x = 0. \end{cases}$$

3) $F\colon \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *définie par* $F(x) = [f(x), g(x)]$, *où les fonctions* $f, g\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sont s.c.s. et s.c.i. respectivement.*

4) *Soit* $X = Y = [0, 1]$ *et*

$$F(x) = \begin{cases} [0, 1], & x \neq \frac{1}{2}, \\ [0, \frac{1}{2}] & x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

En général, les concepts de semi-continuités supérieure et inférieure sont distincts comme le montre l'exemple standard suivant :

Exemple 1.3 *Soit* $X = Y = \mathbb{R}$ *et*

$$F_1(x) = \begin{cases} \{1\}, & x \neq 0, \\ [0,1] & x = 0, \end{cases} \quad et \quad F_2(x) = \begin{cases} \{0\}, & x = 0, \\ [0,1], & x \neq 0. \end{cases}$$

On peut facilement montrer que F_1 *est s.c.s. mais non s.c.i. alors que* F_2 *est s.c.i. mais non s.c.s.*

1.3.3 d_H-continuité

Soit (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques et $F\colon X \longrightarrow \mathcal{P}_b(Y)$ une multi-application.

Définition 1.19 F *est dite* d_H-*continue si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ (\forall x \in B(x_0, \delta) \Longrightarrow d_H(F(x_0), F(x)) < \varepsilon).$$

On peut montrer que si F est s.c.i., alors elle est d_H-continue. De plus, on a (voir Thm 20.3 dans [38]

Proposition 1.12 *Soit* $F\colon X \longrightarrow \mathcal{P}_{cp}(Y)$ *une multi-application à valeurs compactes. Alors* F *est dite* d_H-*continue si et seulement si* F *est à la fois s.c.s. et s.c.i.*

Remarque 1.4 *Les multi-fonctions des exemples 1.1 et 1.2 sont s.c.s. mais ne sont pas* d_H-*continue. L'exemple suivant fournit une fonction s.c.i. mais non* d_H-*continue (voir example 20.4 dans [38]). Soit* $F\colon\ [0,1] \to \mathcal{P}([0,1])$ *définie par*

$$F(x) = \begin{cases} [0,1], & x \neq 0, \\ \{0\} & x = 0. \end{cases}$$

En effet F *est s.c.i. à valeurs compactes mais* $d_H(F(0), F(x)) = 1,\ \forall\, x \neq 0.$

1.4 Fermeture du graphe

Une autre notion de continuité liée à ces dernières peut être obtenue en utilisant les graphes de fonction. On rappelle qy'une multi-application est dire fermée si son graphe est fermé. On d'abord la caractérisation.

Théorème 1.8 *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) la multi-fonction F est fermée.

(b) Pour chaque $(x, y) \in X \times Y$ tel que $y \notin F(x)$, il existe des voisinages $V(x)$ de x et $W(y)$ de y tels que $F(V(x)) \cap W(y) = \emptyset$;

(c) Pour des suites généralisées $\{x_\alpha\}_{\alpha \in J} \subset X$, $\{y_\alpha\}_{\alpha \in J} \subset Y$, si $x_\alpha \to x$, et $y_\alpha \in F(x_\alpha)$, $y_\alpha \to y$ alors $y \in F(x)$.

Démonstration. $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a)$.

- $(a) \Rightarrow (b)$.

  Soit $(x, y) \in X \times Y$ tel que $ynot \in F(y)$; alors $(x, y) \notin GraF$, ce qui implique que $(x, y) \in X \times Y \backslash GraF$. Comme F est fermée ou de manière équivalente, $GraF$ est fermée, il existe $(V(x), W(y)) \in \mathcal{N}(x) \times \mathcal{N}(y)$ tel que $V(x) \times W(y) \cap GraF = \emptyset$. Pour montrons que $F(V(x)) \cap W(y) = \emptyset$, supposons qu'il existe $z \in F(V(x)) \cap W(y)$; alors il existe $r \in V(x)$ tel que $z \in F(r)$; ceci implique que $(r, z) \in GraF$, ce qui est contradictoire.

- $(b) \Rightarrow (c)$.

  Soit $\{x_\alpha\}_{\alpha \in J}$ une suite généralisée telle que

$$x_\alpha \to x, \ y_\alpha \in F(x_\alpha), \ y_\alpha \to y.$$

Supposons que $y \notin F(x)$; alors il existe $(V(x), W(y)) \in \mathcal{N}(x) \times \mathcal{N}(y)$ telle que $F(V(x)) \cap W(y) \neq \emptyset$.

$$x_\alpha \to x \Longrightarrow \exists\, \alpha_0 \in J \ \text{ tel que } \ \forall\, \alpha \geq \alpha_0 \ \text{ on a , } x_\alpha \in V(x),$$

et

$$y_\alpha \to y \Longrightarrow \exists_; \alpha_1 \in J \ \text{ tel que } \ \forall\, \alpha \geq \alpha_1 \ \text{ on a , } y_\alpha \in W(y).$$

Comme J est dirigé, il existe $\beta \in J$ tel que $\alpha_0, \alpha_1 \leq \beta$; donc pour tout $\alpha \geq \beta$, on a que $x_\alpha \in V(x)$ et $y_\alpha \in W(y)$, avec $y_\alpha \in F(x_\alpha)$. Alors $F(V(x)) \cap W(y) \neq \emptyset$ ce qui est contradictoire.

- $(c) \Rightarrow (a)$.
  Soit $(x_\alpha, y_\alpha) \in GraF$, $\alpha \in J$, $x_\alpha \to x, y_\alpha \to y$ et $y_\alpha \in F(x_\alpha)$. De (c), on obtient que $y \in F(x)$. Alors $GraF$ est fermé.

$\square$

Exemple 1.4 *Soit $f\colon Y \to X$ une application surjective entre deux espaces vectoriels topologiques. Alors l'application inverse $F\colon X \to \mathcal{P}(Y)$, $F(x) = f^{-1}(x)$ est fermée.*

La fermeture des applications s.c.s. est assurée par :

Théorème 1.9 *Soit X un e.v.t., Y un e.v.t. séparé et $F\colon X \to \mathcal{P}(Y)$ une multi-fonction s.c.s. Alors F est fermée.*

Démonstration. Montrons que $E = X \times Y \setminus Gr(F)$ est ouvert. Soit $(x, y) \in E$. Alors il existe $V_1 \in \mathcal{V}_y$ et $V_2 \in \mathcal{V}_{F(x)}$ tels que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Soit $U_x = F^+(V_2)$. Alors U_x est un voisinage ouvert de x car F est s.c.s. Donc $U_x \cap V_1$ est un voisinage ouvert de (x, y) dans $X \times Y$. De plus $(U_x \times V_1) \cap Gr(F) = \emptyset$. En effet, si $(x', y') \in U_x \times V_1$, alors $F(x') \subset V_2$ et par conséquent $y' \notin V_2$. $\square$

Dans le résultat qui suit, nous donnons des conditions suffisantes pour qu'une multi-fonction fermée soit s.c.s. On aura d'abord besoin de quelques notions préliminaires :

Définition 1.20 *Une multi-fonction $F\colon X \to \mathcal{P}(Y)$ est dite :*

(a) compacte si l'image $F(X)$ est relativement compacte dans Y, i.e $\overline{F(X)}$ est compacte in Y;

(b) relativement compacte si tout point $x \in X$ possède un voisinage $V(x)$ tel que la restriction de F à $V(x)$ est compacte;

(c) quasicompacte si la restriction à tout sous-ensemble compact $A \subseteq X$ est compact.

Il est clair que $(a) \Longrightarrow (b) \Longrightarrow (c)$.

Théorème 1.10 *Soit $F\colon X \to \mathcal{P}_{cp}(Y)$ une multi-fonction fermée et localement compacte. Alors F est s.c.s.*

Démonstration. Soit $x \in X, W$ un voisinage ouvert de $F(x)$ et $V(x)$ un voisinage ouvert de x tel que la restriction de F à $V(x)$ est compacte. Supposons que l'ensemble $Q = \overline{F(v(x))} \backslash W$ non vide. Comme F est fermée, pour tout $y \in Q$, il existe des voisinages de $\widetilde{W}(y)$ de y et $V_y(x)$ de x tels que $F(V_y(x)) \cap \widetilde{W}(y) = \emptyset$. D'après la compacité de Q, il existe un recouvrement fini $\widetilde{W}(y_1), \widetilde{W}(y_2), \ldots, \widetilde{W}(y_n)$. Si on considère le voisinage ouvert de x defini par $\widetilde{V}(x) = V(x) \cap (\cap_{i=1}^{n} V_{y_1}(x)$, alors $F(\widetilde{V}(x)) \subset W$. □

Exemple 1.5 *La compacité locale est essentielle. Autrement, la multi-fonction* $F\colon [-1,1] \to \mathcal{P}_{cp}(\mathbb{R})$ *définie par*

$$F(x) = \begin{cases} \{\frac{1}{x}\}, & x \neq 0, \\ \{0\}, & x = 0, \end{cases}$$

est fermée mais n'est pas s.c.s. au point $x = 0$.

On termine ce chapitre par un résultat qui s'avère utile dans de nombreuses applications. Mais on commence par donner la

Définition 1.21 *Une multi-application* F *est dite de* $s-$*Carathéodory (respec.* $i-$*Carathéodory) si*

(a) *La fonction* $t \mapsto F(t,x)$ *est mesurable pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

(b) *Pour p.p.* $t \in J$, *l'application* $x \mapsto F(t,x)$ *est s.c.s. (respec. s.c.i.).*

Elle est en plus $L^1 s-$*Carathéodory si elle est localement integrablement bornée, i.e. pour chaque réel* $r > 0$, *til existe une fonction* $h_r \in L^1(J, \mathbb{R}^+)$ *telle que*

$$\|F(t,x)\| \leq h_r(t) \ \ p.p. \ \ t \in J \ \ and\ all \ |x| \leq r.$$

Exemple 1.6 *La multi-application* $F\colon [0,1] \times R \longrightarrow (\mathbb{R})$ *définie par*

$$F(t,x) = \begin{cases} \{0\}, & x=0, \\ [0,1], & \text{sinon} \end{cases}$$

est $i-$*Carathéodory mais non* $s-$*Carathéodory.*

Lemme 1.11 *[26, 53] Soit* X *un espace de Banach,* $F : [a,b] \times X \longrightarrow \mathcal{P}_{cp,cv}(X)$ *une muli-application* L^1*-Carathéodory et soit* Γ *un opérateur linéaire continu de* $L^1([a,b], X)$ *vers* $C([a,b], X)$. *Alors, l'opérateur*

$$\Gamma \circ S_F : C([a,b], X) \ \longrightarrow \mathcal{P}_{cp,cv}(C([a,b], X))$$

$$x \ \longmapsto (\Gamma \circ S_F)(x) := \Gamma(S_{F,x})$$

est à graphe fermé $C([a,b], X) \times C([a,b], X)$.

1.5 Opérateur Linéaire Multivoque

Définition 1.22 *Soit X et Y deux espaces vectoriels topologiques (e.v.t). Un opérateur multivoque $A : X \to \mathcal{P}(Y)$ est dit opérateur linéaire multivoque si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :*

(i) $A(\alpha x) = \alpha A(x)$ *pour toute constante* $\alpha \neq 0$ *et tout* $x \in X$.

(ii) $A(x) + A(y) \subset A(x) + A(y)$ *pour tout* $x, y \in X$.

Remarque 1.5 *Par convention, on pose* $0.A(x) = A(0)$ *pour tout* $x \in X$.

Proposition 1.13 (Propriété caractéristique) *Soit $A\colon X \to \mathcal{P}(X)$ un opérateur linéaire multivoque. Alors, pour tout $y \in A(x)$ on a*

$$A(x) = y + A(0)$$

et il existe une application linéaire $\widetilde{A}\colon X \to \mathcal{P}(Y/A(0))$ telle que

$$A(x) = \pi^{-1}(\widetilde{A}(x)),\ x \in X,$$

où π est la surjection canonique de Y dans $Y/A(0)$.

Lemme 1.12 *Soit $A\colon X \to \mathcal{P}(Y)$ un opérateur multivoque linéaire. A est s.c.s. (ou continu) si et seulement si A est s.c.s en 0 (c'est-à-dire que pour tout voisinage V de 0 dans Y, il existe un voisinage U de 0 dans X tel que $A(x) \subset A(0) + V$ pour tout $x \in U$.).*

Définition 1.23 *Une famille $\{A_i\}_{i\in I}$ d'opérateurs linéaires multivoques continus de X dans Y est dite simplement bornée si pour tout voisinage V de 0 dans Y et tout $x \in X$, il existe $r > 0$ tel que pour $s \geq r$, on a*

$$A_i(x) \subset A_i(0) + sV,\ i \in I.$$

$\{A_i\}_{i\in I}$ est équicontinue si pour tout vosinage V de 0 dans Y, il existe un voisinage U de 0 dans X tel que

$$A_i(x) \subset A_i(0) + V \text{ pour tout } x \in U \text{ et tout } i \in I.$$

Chapitre 2

Mesurabilité de multi-fonctions et de sélections

2.1 Tribu ou σ-algèbre

Définition 2.1 *Soit Ω un ensemble, Σ une famille de parties de Ω (i.e. $\Sigma \subset \mathcal{P}(\Omega)$). La famille Σ est une tribu (on dit aussi une σ-algèbre) sur Ω si Σ vérifie :*

(1) $\emptyset \in \Sigma$, $\Omega \in \Sigma$

(2) Σ est stable par union dénombrable, c'est-à-dire que pour toute famille dénombrable $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$, on a $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Sigma$

(3) Σ est stable par intersection dénombrable, c'est-à-dire que pour toute famille dénombrable $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$, on a $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n$

(4) Σ est stable par passage au complémentaire, c'est-à-dire que pour tout $A \in \Sigma$, on a $A^c \in \Sigma$ (On rappelle que $A^c = \Omega \backslash A$).

Proposition 2.1 *(Stabilité par intersection des tribus) Soit Ω et I deux ensembles. Pour tout $i \in I$, on se donne une tribu, Σ_i sur Ω. Alors, la famille (de parties de Ω)*

$$\cap_{i\in I} \Sigma_i = \{A \subset \Omega : \ A \subset \Sigma_i \ \forall\, i \in I\}$$

est encore une tribu sur Ω.

Cette proposition nous permet de définir la notion de tribu engendrée.

Définition 2.2 *(Tribu engendrée) Soit Ω un ensemble et $C \subset \mathcal{P}(\Omega)$. On appelle tribu engendrée par C la plus petite tribu contenant C, c'est-à-dire la tribu $\Sigma(C)$ intersection de toutes les tribus sur Ω contenant C (cette intersection est non vide car $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu contenant C).*

Il est parfois utile d'utiliser la notion d'algèbre, qui est indentique à celle de tribu, en remplaçant "dénombrable" par "fini".

Définition 2.3 *(algèbre) Soit Ω un ensemble, $\mathcal{A}$ une famille de parties de Ω (i.e. $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$). La famille Σ est une tribu (on dit aussi une algèbre) sur Ω si $\mathcal{A}$ vérife :*

(1) $\emptyset \in \mathcal{A}$, $\Omega \in \mathcal{A}$

(2) $\mathcal{A}$ est stable par union finie, c'est-à-dire que pour toute $A, B \in \mathcal{A}$, on a $A \cup B \in \mathcal{A}$

(3) $\mathcal{A}$ est stable par intersection finie, c'est-à-dire que pour tout $A, B \in \mathcal{A}$, on a $A \cap B \in \mathcal{A}$

(4) $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire, c'est-à-dire que pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a $A^c \in \mathcal{A}$.

Il est clair que (2) ou (3) est redundant.

Soit Ω un ensemble. On rappelle qu'une topologie sur Ω est donnée par une famille de parties de Ω, appelées ouverts de Ω, contenant $\emptyset$ et Ω, stable par union quelconque et par intersection finie. L'ensemble Ω, muni de cette famile de parties est alors un espace topologique.

Définition 2.4 *(Tribu borélienne) Soit Ω un ensemble muni d'une topologie (un espace métrique, par exemple). On appelle tribu borélienne (ou tribu de Borel) la tribu engendrée par l'ensemble des ouverts de Ω, cette tribu sera notée $B(\Omega)$. Dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^n$, cette tribu est donc notée $B(\mathbb{R}^n)$.*

Théorème 2.1 *Soit (X, d) un espace métrique séparable, alors la tribu Borlélinne de $\mathcal{P}_{cp}(X)$ engendrée par les parties de $\mathcal{P}_{cp}(X)$ définie par*

$$\mathcal{L}_u = \{K \in \mathcal{P}_{cp}(X) \colon \ K \subset U\} \ \textit{ et } \ \mathcal{L}_l = \{K \in \mathcal{P}_{cp}(X) \colon \ K \cap U \neq \emptyset\}$$

où U représente un ouvert dans X. De plus la famille

$$\mathcal{B}_{ul} = \{K \in \mathcal{P}_{cp}(X) \colon \ K \subset U, \ K \cap V_1 \neq \emptyset, \dots, K \cap V_n \neq \emptyset\}$$

où les V_i, $i = 1, \dots, m$ sont des ouverts de X.

Démonstration. Montrons que $B(\mathcal{L}_l) = B(\mathcal{L}_u) = B(\mathcal{P}_{cp}(X))$. Soit

$$\{K \in \mathcal{P}_{cp}(X) \colon \ K \cap U \neq \emptyset\} \in B(\mathcal{L}_l)$$

où U est ouvert dans X de plus $U = \cup_{n=1}^{+\infty} F_n$ avec

$$F_n = \{x \in X\colon\ d(x, X\backslash U) \geq 1/n\}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\{K \in \mathcal{P}_{cp}(X)\colon\ K \cap U \neq \emptyset\} &= \cup_{n=1}^{+\infty}\{K \in \mathcal{P}_{cp}(X)\colon\ K \cap F_n \neq \emptyset\} \\ &= \cup_{n=1}^{+\infty}\mathcal{P}_{cp}(X)\backslash\{K \in \mathcal{P}_{cp}(X)\colon\ K \subset X\backslash F_n\}\end{aligned}$$

Donc $\{K \in \mathcal{P}_{cp}(X)\colon\ K \cap U \neq \emptyset\} \in B(\mathcal{L}_u)$. Réciproquement, soit

$$\{K \in \mathcal{P}_{cp}(X)\colon\ K \subset U\} \in B(\mathcal{L}_u).$$

Posons $V_n = \{x \in X\colon\ d(x, X\backslash U) < \frac{1}{n}\}$; alors $X\backslash U = \cap_{n=1}^{+\infty} V_n$. Comme quelque soit $x \in X\backslash U$, on a $d(x, X\backslash U) = 0$, alors $X\backslash U \subset \cap_{n=1}^{+\infty} V_n$. Soit $x \in \cap_{n=1}^{+\infty} V_n$; ceci implique que

$$d(x, X\backslash U)\frac{1}{n},\ \forall\, n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow d(x, X\backslash U) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{X\backslash U} = X\backslash U.$$

On en déduit que $X\backslash U = \cap_{n=1}^{+\infty} V_n$. Alors on peut facilement montrer le résultat suivant :

$$\{K \in \mathcal{P}_{cp}(X)\colon\ K \subset U\} = \cap_{n=1}^{+\infty}\mathcal{P}_{cp}(X)\backslash\{K \in \mathcal{P}_{cp}(X)\colon\ K \cap V_n \neq \emptyset\} \in B(\mathcal{L}_l).$$

Cela démontre que $B(\mathcal{L}_u) = B(\mathcal{L}_l)$. D'aprés le théorème 1.4, tout ouvert $W \in \mathcal{P}_{cp}(X)$ est écrit comme union de intersection finie d'élements de la famille $\mathcal{L}_u$ et $\mathcal{L}_l$. Par conséquent, $B(\mathcal{L}_u) = B(\mathcal{L}_l) = B(\mathcal{P}_{cp}(X))$. □

2.2 Propriétés de mesures

Définition 2.5 *(Mesure) Soit Ω un ensemble non vide et Σ) une tribu. On appelle mesure une application $\mu\colon\ \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}_+$ (avec $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$) vérifant :*

(a) $\mu(\emptyset) = 0$

(b) μ est σ-additive, c'est-à-dire que pour toute famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ de parties disjointes deux à deux, (i.e. t.q. $A_n \cap A_m \neq \emptyset$ si $n \neq m$), on a :

$$\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Définition 2.6 *On appelle espace mesurable un triplet (Ω, Σ, μ) où Σ est une $\sigma-$algèbre sur l'ensemble Ω et μ une mesure.*

Définition 2.7 *On dit qu'une multi-application $F \in \mathcal{P}(\Omega)$ est mesurable si l'image réciproque*

$$F^{-}(\mathcal{O}) = \{\omega \in \Sigma\colon\ F(\omega) \cap \mathcal{O} \neq \emptyset\}.$$

de tout ouvert $\mathcal{O}$ est dans Σ.

Lemme 2.1 *Soit $F\colon\ \Omega \to \mathcal{P}(X)$ une fonction multivoque. Alors F est mesurable si et seulement si $\overline{F}$ est mesurable.*

Démonstration. En effet, si U ouvert dans X, alors

$$\begin{array}{rcl} F^{-1}(U) & = & \{\omega \in \Omega\colon\ F(\omega) \cap U \neq \emptyset\} \\ \overline{F}^{-1}(U) & = & \{\omega \in \Omega\colon\ \overline{F}(\omega) \cap U \neq \emptyset\}. \end{array}$$

□

2.3 Mesurabilité Forte

Définition 2.8 *On dit que F est fortement mesurable si l'image réciproque de tout fermé $\mathcal{B}$*

$$F^{-}(\mathcal{B}) = \{\omega \in \Sigma\colon\ F(\omega) \cap \mathcal{B} \neq \emptyset\}$$

est dans Σ.

Lemme 2.2 *Soit $F\colon\ \Omega \to \mathcal{P}(X)$ un application multivoque fortement mesurable, alors F est mesurable.*

Démonstration. Soit U un ouvert dans X, donc $U = \cup_{n\in\mathbb{N}} B(x_n, r)$ (car X est un espace métrique séparable). De plus, on peut facilement montrer que pour tout $r > 0$, on a

$$B(x_n, r) = \cup_{m=1}^{+\infty} \overline{B(x_n, r - m^{-1})}.$$

Par suite

$$F^{-1}(B(x_n, r)) = \cup_{m=1}^{+\infty} F^{-1}(\overline{B(x_n, r - m^{-1})}) \in \Sigma \Rightarrow F^{-1}(U).$$

La réciproque du lemme est en général fausse, i.e la mesurabilié n'implique pas la mesurabilité forte, comme le montre l'exemple suivant : □

Exemple 2.1 *Soit* $\Omega = [0,1], \Sigma = \wp$: *σ-algèbre de mesure de Lebegues et A une sous-ensemble de Ω qui n'est pas mesurable et F un fonction multivoque définie par :*

$$F(\omega) = \begin{cases} [0,1) & si\ \ \omega \in A^c \\ \\ [0,1] & si\ \ \omega \in A. \end{cases}$$

Soit U un overt dans $\mathbb{R}$. Alors

$$F^{-1}(U) = \{\omega \in \Omega \colon\ F(\omega) \cap U \neq \emptyset\}.$$

Donc

$$F^{-1}(U) = \begin{cases} \Omega & si\ \ [0,1] \subset U \\ \emptyset & si\ \ U \cap [0,1] = \emptyset \\ intervale\ ouvert & si\ \ U \cap [0,1] \neq \emptyset. \end{cases}$$

Donc F est mesurable. Mais F n'est pas fortement mesurable car

$$F^{-1}(\{1\}) = A \notin \Sigma.$$

Par contre, on peut vérifier sans peine le

Théorème 2.2 *Soit $F\colon\ \Omega \to \mathcal{P}_f(X)$ une multi-fonction. Alors F est mesurable si et seulement F est fortement mesurable.*

2.4 Mesurabilité du graphe

Définition 2.9 *Soit X, Y deux espaces métriques et (Ω, Σ) un espace mesurable. Une fonction univoque $f\colon\ \Omega \times X \to Y$ est dite de Carathédory si :*

(a) $\omega \longmapsto f(\omega, x)$ est mesurable pour tout h $y \in X$;

(b) $x \longmapsto f(\omega, x)$ est semi-continue suppérieurement presque pour tout $\omega \in \Omega$.

Dans ce qui suit, on suppose que X est un espace métrique separable.

Proposition 2.2 *Soit $f\colon\ \Omega \times X \to Y$ une fonction Carathédory. Alors $f(.,.)$ est mesurable.*

Démonstration. Comme Y est un espace métrique séprable, il existe un sous-ensemble D dans Y dénombrable tel que $\overline{D} = X$. Soit C une ensemble fermé de Y. Alors

$$C = \{y \in Y\colon\ d_Y(y, C) = 0\} = \cap_{n=1}^{+\infty}\{y \in Y\colon\ d_Y(y, C) < 1/n\}.$$

Montrons que $f(\omega,x) \in C$ si et seulement si pour tout $n \geq 1$, il existe $v \in D$ tel que

$$d_X(x,v) < 1/n \;\text{ et }\; f(\omega,v) \in C_n,$$

avec

$$C_n = \{y \in Y\colon\ d_Y(y,C) < 1/n\}.$$

Comme $x \in X$, alors il existe $v_m \in D$, telle que v_n converge vers x, c'est-à-dire

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, m_0 \in \mathbb{N} \;\text{ tel que },\ \forall\, m \in \mathbb{N}, m \geq m_0 \Rightarrow d_X(v_m,x) < \varepsilon.$$

En utilisant la continuité de $f(\omega,.)$, on obtient

$$d_Y(f(\omega,x), f(\omega,v_m)) \leq \varepsilon.$$

Donc on peut conclure qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $m \geq m_0$ tel que

$$d_X(v_m,x) < \frac{1}{n} \;\text{ et }\; d_Y(f(\omega,v_m),C) < 1/n.$$

Pour tout $n \geq 1$, il existe $v_n \in D$ tel que

$$d_X(v_n,x) < 1/n \;\text{ et }\; f(\omega,v_n) \in C_n.$$

Alors

$$d(f(\omega,x), f(\omega,v_n)) \leq \varepsilon.$$

Par suite

$$f^{-1}(C) = \cap_{n\geq 1} \cup_{v\in D} \{\omega \in \Omega\colon\ f(\omega,x) \in C_n\} \times \{x \in X\colon\ d_X(x,v) < 1/n\}.$$

$\square$

Lemme 2.3 *Soit* (Ω,Σ) *un espace mesurable,* X *un espace métrique séparable et* $F\colon\ \Omega \to \widehat{\mathcal{P}}(X)$ *une application multivoque mesurable, alors le graphe de* F *est mesurable (i.e.* $GraF \in \Sigma \times B(X)$*).*

Démonstration. Il clair que

$$GraF := \{(\omega,x)\colon\ d(x,F(\omega)) = 0\} = h^{-1}(0)$$

avec $h\colon\ \Omega \times X \to \mathbb{R}_+$ la fonction définie par

$$(\omega,x) \to d(x,F(\omega))$$

et que $h(\omega,.)$ est continue ; de plus d'après le théorème 5.1, $h(.,x)$ est mesurable ; donc h est de Carathédory, et donc

$$GraF := \{(\omega,x)\colon\ d(x,F(\omega)) = 0\} = h^{-1}(0) \in \Sigma \times .B(X)$$

$\square$

2.5 Sélection mesurable

Définition 2.10 *On dit que $f\colon \Omega \to X$ est une sélection mesurable de F si*

$$f(\omega) \in F(\omega), \quad \forall\, \omega \in \Omega.$$

Théorème 2.3 *(Kuratowski-Ryll Nardzewski) Soit $F\colon \Omega \to \mathcal{P}(X)$ une multi-fonction mesurable à images fermées non vides et supposons X séparable. Alors F admet au moins une sélection mesurable.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dense dans X. Pour tout $\omega \in \Omega$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$F(\omega) \cap B(x_n, 1) \neq \emptyset.$$

Posons $f_0(\omega) = x_n$ où n est le plus petit entiter dont la distance à $F(\omega)$ est strictement inférieure à 1. On va vérifier que f_0 et mesurable. Soit V un ouvert dans X, alors

$$f_0^{-1}(V) = \{\omega \in \Omega\colon\ f_0(\omega) \in V\} \in \Sigma.$$

Par définition de f_0, on a

$$\begin{aligned} f_0^{-1}(x_n) &= F^{-1}(B(x_n, 2^{-k}))\backslash \cup_{m<n} F^{-1}(B(x_m, 2^{-k}) \\ &= F^{-1}(B(x_n, 2^{-k})) \cap \Omega \backslash \cup_{m<n} F^{-1}(B(x_m, 2^{-k}) \end{aligned}$$

D'où

$$f_0^{-1}(V) = F^{-1}(B(x_n, 2^{-k}) \cap V) \cap \Omega \backslash \cup_{m<n} F^{-1}(B(x_m, 2^{-k}) \cap V) \in \Sigma.$$

Donc f_0 est mesurable. Comme X est séparable, alors on peut vérifier facilement qu'il existe $x_m \in X$ tel que

$$F(\omega) \cap B(x_n, 1) \cap B(x_m, 1/2) \neq \emptyset, \quad \forall\, \omega \in \Omega.$$

Soit $f_1(\omega) = x_r$ où r est le plus petit entier naturel tel que pour $\omega \in \Omega$,

$$d(f_0(\omega), F(\omega)) < 1 \text{ et } d(f_0(\omega), f_1(\omega)) < 1/2.$$

On suppose que

$$d(f_k(\omega), F(\omega)) < \frac{1}{2^k} \quad 0 \leq k \leq m,\ \forall\, \omega \in \Omega$$

et

$$d(f_k(\omega), f_{k+1}(\omega)) < \frac{1}{2^{k-1}} \quad 0 \leq k \leq m-1,\ \forall\, \omega \in \Omega.$$

Montrons qu'il existe f_{m+2} vérifiant

$$d(f_{m+1}(\omega), F(\omega)) < \frac{1}{2^{m+1}},\ \forall\, \omega \in \Omega$$

et

$$d(f_{m+1}(\omega), f_{m+2}(\omega)) < \frac{1}{2^m},\ \forall\, \omega \in \Omega.$$

D'après la construction de f_m et f_{m+1}, on utilise la séparabilité de X pour définir f_{n+m+2}

$$F(\omega) \cap B(x_n, 1) \cap B(x_{n+1}, \frac{1}{2}) \cap \ldots \cap B(x_{n+m}, \frac{1}{2^m}) \cap B(x_{n+m+1}, \frac{1}{2^{m+1}}) \neq \emptyset,\ \forall\, \omega \in \Omega,$$

où $f_{m+2}(\omega) = x_{n+m+1}$ et $n+m+1$ est le plus petit entier naturel vérifiant l'inégalité ci-dessus et

$$d(f_{n+m}(\omega), f_{n+m+1}(\omega)) < \frac{1}{2^m},\ \forall\, \omega \in \Omega.$$

On en déduit que

$$d(f_{m+1}(\omega), F(\omega)) < \frac{1}{2^{m+1}},\ \forall\, \omega \in \Omega$$

et

$$d(f_{m+1}(\omega), f_{m+2}(\omega)) < \frac{1}{2^m},\ \forall\, \omega \in \Omega.$$

Posons

$$S_n = \{\omega \in \Omega\colon\ f_k(\omega) = x_n\} = f_k^{-1}(x_n) \in \Sigma.$$

Alors les ensembles $\{S_n\colon\ n \in \mathbb{N}\}$ forment une partition de Ω en ensembles mesurables. Soit $\omega \in \Omega$. Alors il existe $n, k \in \mathbb{N}$ tel que $F(\omega) \cap B(x_n, 2^{-k})$ (qui est non vide par hypothèse) ; de plus il existe un plus petit entier r tel que la distance entre x_r et $F(\omega) \cap B(x_n, 2^{-k})$ soit inférieure strictement à $2^{-(k+1)}$. Posons $f_{k+1}(\omega) = x_r$.

$$d(f_k(\omega), F(\omega)) \leq d(f_k(\omega), F(\omega) \cap B(x_n, 2^{-k})) < 2^{-k}$$

et pour tout $z \in F(\omega)$

$$d(f_k(\omega), f_{k+1}(\omega)) \leq d(f_k(\omega), z) + d(z, f_{k+1}(\omega)) < 2^{-k} + 2^{-(k+1)} < 2^{-k+1}.$$

Donc

$$\cup_{k \geq 1} S_n = \Omega.$$

Pour tout ω, la suite $(f_k(\omega))_{k \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans X, et donc converge vers un certain élement $f(\omega) \in X$. Alors f est mesurable comme limite simple de fonctions mesurables. De plus, par

$$d(f_k(\omega), F(\omega)) < \frac{1}{2^k}$$

et du fait que F est à image fermée,

$$f(\omega) \in F(\Omega) \;\text{ pour tout }\; \omega \in \Omega$$

c'est-à-dire que f est un sélection de F. $\square$

Remarque 2.1 *Dans le théorème précedent, on peut remplacer l'image de F fermée par F à valeurs fermées.*

Lemme 2.4 *Soit (Ω, Σ) un espace mesure, X un espace polonais et*

$$F\colon\ \Omega \to \mathcal{P}_f(X)$$

une fonctions multivoque mesurable. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) F est measurable.

(b) Il existe une suite de sélection $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mesurable de F telle que

$$F(\omega) = \overline{\{f_n(\omega)\colon\ n \geq 1\}}.$$

Démonstration. $(a) \Rightarrow (b)$. Comme X est un espace séparable, alors il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ telle que

$$X = \overline{\{x_1, x_2, \ldots\}}.$$

Pour tout n, k, on définit les multi-fonctions suivantes :

$$F_{n,k}(\omega) = \begin{cases} F(\omega) \cap B(x_n, \frac{1}{2^k}) & \text{si } \omega \in F^{-1}(B(x_n, \frac{1}{2^k})) \\ F(\omega) & \text{si } \omega \notin F^{-1}(B(x_n, \frac{1}{2^k})). \end{cases}$$

$F^{-1}(B(x_n, \frac{1}{2^k})) \in \Sigma$ (car F est mesurable). Si $\mathcal{O}$ un ouvert dans X, alors

$$F_{n,k}^{-1}(\mathcal{O}) = F^{-1}(B(x_n, \frac{1}{2^k})) \cup \Omega \backslash F^{-1}(B(x_n, 2^{-k}) \cap F^{-1}(\mathcal{O})).$$

Donc, l'application

$$\omega \mapsto F_{n,k}(\omega)$$

est mesurable et d'après le lemme, l'application

$$\omega \mapsto \overline{F_{n,k}(\omega)}$$

est mesurable. En appliquant le théorème 2.3, on obtient que

$$f_{n,k}\colon\ \Omega \to X$$

est une sélection mesurable de $F_{n,k}$. Montrons que

$$F(\omega) = \overline{\{f_{n,k}(\omega) \colon \ n, k \geq 1\}}.$$

Soit $\omega \in \Omega$ et $x \in F(\omega)$. $\forall\, \varepsilon > 0$, il existe $k, n \geq 1$ tel que $\frac{1}{2^{k-1}} \leq \varepsilon$ et $x \in B(x_n, \frac{1}{2^k})$. Donc $\omega \in F^{-1}(B(x_n, \frac{1}{2^k}))$ et $f_{n,k}(\omega) \in \overline{B(x_n, \frac{1}{2^k})}$. Alors

$$d(f_{n,k}(\omega), x) \leq d(f_{n,k}(\omega), x_n) + d(x_n, x) \leq \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2^{k-1}} \leq \varepsilon.$$

Par suite pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\{f_{n,k}(\omega) \colon \ n, k \geq 1\} \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset.$$

Ceci montre que

$$F(\omega) = \overline{\{f_{n,k}(\omega) \colon \ n, k \geq 1\}}.$$

$(a) \Leftarrow (b)$. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert dans X. Alors

$$F^{-1}(\mathcal{O}) = \{\omega \in \Omega \colon \ F(\omega) \cap \mathcal{O} \neq \emptyset\} = \cup_{n \geq 1} \{\omega \in \Omega \colon \ f_n(\omega) \in \mathcal{O}\} = \cup_{n \geq 1} f_n^{-1}(\mathcal{O}).$$

De même les $f_n, n \in \mathbb{N}$ sont des fonctions mesurables et donc $F^{-1}(\mathcal{O}) \in \Sigma$. $\square$

Théorème 2.4 *Soit* (Ω, Σ) *un espace mesurable,* X *un espace métrique séparable et* $F \colon \Omega \to \mathcal{P}_f(X)$ *une application multivoque. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) F *est mesurable.*

(b) Pour chaque $x \in X$, *la fonction* $\omega \mapsto h(\omega) := d(x, F(\omega))$ *est mesurable.*

(c) F *admis une sélection mesurale telle que*

$$F(\omega) = \overline{\{f_n(\omega) \colon \ n \in \mathbb{N}\}}.$$

Démonstration. $(a) \Rightarrow (b)$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit l'ensemble suivant :

$$L_\alpha(x) = \{\omega \in \Omega \colon \ \inf_{y \in F(\omega)} d(x, y) < \alpha\} = F^{-1}(B(x, \alpha)).$$

$F^{-1}(B(x, \alpha)) \in \Sigma$ car F est mesurable. Soit $\omega \in L_\alpha(x)$, alors $d(x, F(\omega)) < \alpha$. Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que

$$d(x, F(\omega)) \leq r - \varepsilon < \alpha.$$

En utilisant la définition de l'inf, on en déduit l'existence de $y_\varepsilon \in F(\omega)$ tel que

$$d(x, y_\varepsilon) - \varepsilon \leq r - \varepsilon \Rightarrow d(x, y_\varepsilon) < \alpha \Rightarrow \omega \in F^{-1}(B(x, \alpha)).$$

Donc l'application $\omega \mapsto d(x, F(\omega))$ est mesurable.

$(b) \Rightarrow (a)$. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert dans X. Puisque X et séparable, il existe $\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\} \subset X$ tel que

$$X = \overline{\{x_1, x_2, \ldots\}}$$

et $\mathcal{O} = \cup_{n \in I} B(x_n, \alpha_n)$ où I est un sous-ensemble dans $\mathbb{N}$. Donc

$$F^{-1}(\mathcal{O}) = \cup_{n \in I} F^{-1}(B(x_n, \alpha_n)) \in \Sigma.$$

D'après le théorème 2.3, on a $(a) \Leftrightarrow (c)$, d'où $(b) \Leftrightarrow (c)$. $\square$

Exemple 2.2 *Soit* $\Omega = [0,1] = X, \Sigma := \wp$ $\sigma-$*algèbre engendrée par les sous-ensembles mesurables au sens de Lebesgue dans* Ω. *On considère* $D_1,\ D_2$ *deux ensembles dénombrable dans* Ω. *Soit* $F \colon \Omega \to \mathcal{P}(X)$.

$$F(\omega) = \begin{cases} D_1 & si\ \ \omega \in A \\ D_2 & si\ \ \omega \in A^c \end{cases}$$

où A *est une sous-ensemble de* $[0,1]$ *qui n'est pas mesurable. On peut facilement montrer que* F *est mesurable mais n'admet pas de sélection mesurable. Supposons le contraire, c'est-à-dire qu'il existe une fonction* $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ *mesurable telle que*

$$f(\omega) \in F(\omega), \quad \forall\, \omega \in \Omega.$$

On pose $h \colon \Omega \to X$.

$$h(\omega) = \begin{cases} 1 & si\ \ \omega \in D_1 \\ \\ 0 & si\ \ \omega \in D_2 \\ \\ \frac{1}{2} & si\ \ \omega \in \Omega \backslash (D_2 \cup D_1) \end{cases}$$

Il est clair que

$$f(\omega) = (h^{-1} \circ \chi_A)(\omega), \quad \forall\, \omega \in \Omega,$$

alors

$$(h \circ f)(\omega) = \chi_A(\omega), \quad \forall\, \omega \in \Omega.$$

D'après la définition de h, *on obtient*

$$h^{-1}(\{1\}) = D_1 \in B([0,1])$$

et

$$f^{-1}(h^{-1}(\{1\})) \in \wp.$$

Mais

$$f^{-1}(h^{-1}(\{1\})) = \chi_A(\{1\}) = A \notin \wp,$$

ce qui est une condradiction avec f *mesurable. On remarque que* $F(.) \notin \mathcal{P}_f(X)$.

On termine cette section sur la mesurabilité par un récapitulatif d'assertions équivalentes.

Théorème 2.5 *Soit* (Ω, Σ) *un espace mesurable,* X *un espace métrique séparable et* $F\colon \Omega \to \mathcal{P}_f(X)$ *une application multivoque. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) $F^{-1}(D) \in \Sigma, \quad \forall\, D \in B(X.)$

(2) F *est fortement mesurable.*

(3) F *est mesurable.*

(4) Pour chaque $x \in X$, *la fonction* $\omega \to h(\omega) := d(x, F(\omega))$ *est mesurable.*

(5) F *admet des sélections mesurables telles que*

$$F(\omega) = \overline{\{f_n(\omega)\colon\ n \in \mathbb{N}\}}.$$

(6) $GrF \in \Sigma \bigotimes B(X)$.

Alors

(a) $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (6)$.

(b) Si X *est un espace métrique complet, alors* $(3) \Leftrightarrow (5)$.

(c) Si X *est* $\sigma-$*compact, alors* $(2) \Leftrightarrow (3)$.

(d) Si $\Sigma = \widehat{\Sigma}$ *et* X *est un espace complet, alors les propriétés* $(1) - (6)$ *sont équivalentes.*

Démonstration.

(a) $(1) \Rightarrow (2)$. Soit D un fermé de X; alors $D \in B(X)$ et donc $F^{-1}(D) \in \Sigma$. D'après les lemmes 2.3,2.3 et le théorème 5.1, on peut facilement montrer que

$$(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (6).$$

(b) Comme X est un espace complet, X est un espace polonais. Alors d'après le théorème 5.1 $(3) \Longleftrightarrow (5)$.

$\square$

2.6 Selection continue

Nous allons énoncer et prouver un théorème très important en analyse multivoque, le théorème de sélection de Michael. Mais d'abord nous allons commencer par deux lemmes :

Lemme 2.5 *Soit* (X, d) *un espace métrique,* Y *un espace de Banach et* $F_1\colon X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ *s.c.i. et* $F_2\colon X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ *à graphe ouvert tel que* $F_1(x) \cap F_2(x) \neq \emptyset$*, pour tout* $x \in X$*. Alors, l'operateur multi-voque* $F_1 \cap F_2$ *est s.c.i.*

Lemme 2.6 *Soit* (X, d) *un espace métrique,* Y *un espace de Banach et* $F\colon X \longrightarrow \mathcal{P}_{cv}(Y)$ *s.c.i. Alors, pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe une fonction continue* $f_\varepsilon\colon X \longrightarrow Y$ *telle que pour tout* $x \in X$*, on a que* $f_\varepsilon(x) \in V(F(x), \varepsilon)$*.*

Démonstration. Comme F est s.c.i., on peut associer à tout $x \in X$ et à tout $y_x \in F(x)$ un voisinage ouvert U_x tel que $F(x) \cap B(y_x, \varepsilon) \neq \emptyset$ for all $x' \in U_x$. L'espace X étant paracompact, il existe un recouvrement local fini $\{U_x\}_{x\in X}$ de $\{U_x\}_{x\in X}$ (i.e ; pour tout $y \in X$, il existe $V \in \mathcal{V}(y)$ tel que $V \cap U'_x \neq \emptyset$, $\forall\, x \in X$. De plus, à tout recouvrement local fini, on peut associer une partition de l'unité localement lipschitzienne $\{\phi_x\}_{x\in X}$. Posons alors $f(t) = \sigma_{x\in X}\phi_x(t)y_x$. Alors f est continue et est localement une somme finie de fonctions continues. De plus, si $\phi_x(t) > 0$, pour $t \in U'_c \subset U_x$ alors $y_x \in V(F(x), \varepsilon)$ implique que $f\varepsilon_(t) \in V(F(t), \varepsilon)$. $\square$

Théorème 2.6 *(Théorème de sélection de Michael)[55] Soit* (X, d) *un espace métrique,* Y *un espace de Banach et* $F\colon X \longrightarrow \mathcal{P}_{f,cv}(Y)$*. Alors il existe* $f\colon X \longrightarrow Y$ *selection continue de* F*.*

Démonstration. On définit par récurrence une suite $f_n\colon X \longrightarrow Y$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ par

(a) $H(f_n(x), F(x)) < 1/2^n, \quad \forall\, x \in X$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

(b) $\|f_{n+1}(x), f_n(x)\| < 1/2^{n-2}, \quad \forall\, x \in X$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$.

Pour ce faire, on distingue deux cas :

Cas $n = 1$. f_1 se déduit alors du lemme 2.6 avec $\varepsilon = 1/2$.

Cas $n + 1$. Pour définir f_{n+1} à partir de f_n, on considère l'application multivoque F_{n+1} définie par $F_{n+1}(x) = F(x) \cap B(f_n(x), 1/2^n)$ pour chaque $x \in X$. De la partie (a), on a que $F_{n+1}(x) \neq$ for all $x \in X$. Par le lemme 2.5, F_{n+1} est s.c.i.

En appliquant le lemme lemme 2.6 à la fonction F_{n+1}, on obtient l'existence d'une fonction continue $f_{n+1}\colon\ X \longrightarrow Y$ telle que

$$H(f_{n+1}(x), F(x)) < 1/2^{n+1}, \qquad \text{pour tout } x \in X.$$

De plus $f_{n+1}(x) \in V^0(F(x), 1/2^{n+1})$ et donc

$$\|f_{n+1}(x), f_n(x)\| < 1/2^{n-2},$$

ce qui termine le raisonnement par récurrence.

D'après (b), $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy qui converge vers une limite $f\colon\ X \longrightarrow Y$. D'après (a) et le fait que $F(x)$ est fermée pour chaque $x \in X$, on obtient que $f(x) \in F(x)$ pour tout $x \in X$. Par conséquent, f est la sélection recherchée. □

2.7 Selection décomposable

Rappellons tout d'abord la définition d'une $\sigma-$algèbre. (voir par exemple [8]). Soit E un e.v.t. et A une famille de sous-ensembles de E.

Définition 2.11 *A est dite σ-algebra si elle vérifie les propriétés suivantes :*

(a) $\emptyset \in A$.

(b) $\mathcal{O} \in A \Rightarrow\ E \setminus \mathcal{O} \in A$.

(c) $\mathcal{O}_n \in A$, $n = 1, 2, \cdots \Rightarrow \bigcup\limits_{n\geq 1} \mathcal{O}_n \in A$.

Soit E un espace de Banach et A un sous-ensemble $J \times E$.

Définition 2.12 *On dit que A est $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$ mesurable si A appartient à la σ-algèbre générée par tous les ensembles de la forme $I \times D$ où I est Lebesgue mesurable dans J et D est Borel mesurable dans E.*

Définition 2.13 *Un sous-ensemble $A \subset L^1(J, E)$ is décomposable si pour tout $u, v \in A$ et pour tout sous-ensemble Lebesgue mesurable $I \subset J$, on a :*

$$u\chi_I + v\chi_{J\setminus I} \in A,$$

où χ est la fonction caratéristique.

Soit $F : J \times E \to \mathcal{P}(E)$ une multi-application à valeurs fermées non vides. A F, on associe l'opérateur multivoque $\mathcal{F} : C(J, E) \to \mathcal{P}(L^1(J, E))$ défini par $\mathcal{F}(y) = S_{F,y}$ et posons $\mathcal{F}(t, y) = S_{F,y}(t),\ t \in J$. L'opérateur $\mathcal{F}$ est appelé opérateur de Nemyts'kĭi associé à F.

Définition 2.14 *Soit $F : J \times E \to \mathcal{P}(E)$ une application à valeurs compactes non vides. On dit que F est de type s.c.i. (t.s.c.i.) si l'opérateur de Nemyts'kĭi associé $\mathcal{F}$ est s.c.i. et est à valeurs non vides et décomposables.*

Une condition suffisante d'existence de fonction de type s.c.i. est assurée par le résultat suivant :

Lemme 2.7 *(see [30], [34]) Soit $F : J \times \mathbb{R} \to \mathcal{P}_{cp}(\mathbb{R})$ une multi-fonction intégrablement bornée vérifiant la condition suivante :*

$$\begin{cases} (a) \quad (t, x) \mapsto F(t, x) \ \textit{est } \mathcal{L} \otimes \mathcal{B} \ \textit{mesurable.} \\ (b) \quad x \mapsto F(t, x) \ \textit{est s.c.i. p.p. } t \in J. \end{cases}$$

Alors F est de type s.c.i.

Pour l'existence de sélection mesurable, le fameux théorème de sélection de Bressan and Colombo (aussi appelé théorème de sélection de Fryszkowski) s'énonce comme suit.

Lemme 2.8 *(see [7, 25, **?**, 46]) Soit X un espace métrique séparable et E un espace de Banach. Alors tout opérateur s.c.i. $N : X \to \mathcal{P}_{cl}(L^1(J,\ E))$ à valeurs décomposables fermées possède une selection continue, i.e. il existe une fonction univoque continue $f : X \to L^1(J, E)$ telle que $f(x) \in N(x)$ pour tout $x \in X$.*

2.8 Ensemble de sélection

Soit F une application multivoque ; définissons l'ensemble

$$S_{F,x} = \{v \in L^1(J, \mathbb{R}^+) : \ v(t) \in F(t, x(t)), \ \ \text{p.p. } \ t \in J\}$$

Cet ensemble $S_{F,x}$ s'appelle ensemble des selections ; il est fermé. Il est convexe si et seulement si $F(t, x(t))$ est convexe pour p.p. $t \in J$.

Lorsque F est une multi-application L^1-Carathéodory, on sait en vertu d'un résultat de Lasota and Opial [53] que pour chaque $x \in C(J, \mathbb{R})$, l'ensemble $S_{F,x}$ est non vide. Ceci nous permet de définir le multi-opérateur

$$\begin{aligned} S_F : C(J, \mathbb{R}^+) &\to \mathcal{P}(C(J, \mathbb{R}^+)) \\ x &\mapsto S_F(x) = S_{F,x}. \end{aligned}$$

Deuxième partie

Inclusions différentielles

Chapitre 3

Élements de théorie de semi-groupe

3.1 Définitions

Définition 3.1 *Un semi-groupe de classe C_0 (ou C_0 semi-group) est une famille à paramètre $\{T(t)\colon\ t \geq 0\} \subset B(E)$ vérifiant les conditions :*

(a) $T(t) \circ T(s) = T(t+s)$, *pour* $t, s \geq 0$

(b) $T(0) = I$

Ici I est l'opérateur identité dans E.

Définition 3.2 *Un semi-groupe $T(t)$ est uniformément continu si*

$$\lim_{t \to 0^+} \|T(t) - T(0)\|_{B(E)} = 0,$$

soit

$$\lim_{|t-s| \to 0} \|T(t) - T(s)\|_{B(E)} = 0.$$

Définition 3.3 *On dit que le semi-groupe $\{T(t)_{t \geq 0}\}$ est fortement continu (ou bien un C_0 semi-groupe) si, pour chaque $x \in E$, l'application $t \mapsto T(t)(x)$ est fortement continue, i.e.*

$$\lim_{t \to 0^+} T(t)x = T(0)x, \quad \forall\, x \in E.$$

Définition 3.4 *Soit $T(t)$ un C_0 semi-group défini sur E. Le générateur infinitésimal A de $T(t)$ est l'opérateur linéaire défini par*

$$A(x) = \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)(x) - T(0)x}{t}, \quad \text{for } x \in D(A),$$

où $D(A) = \{x \in E\colon\ \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)(x) - x}{t}$ existe dans $E\}$.

3.2 Propriétés

Les proriétés suivantes sont classiques (voir Hille and Yosida [59]) :

Proposition 3.1 *Soit A un opérateur linéaire. Alors A est générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu si et seulement si A est borné.*

Démonstration. **(a)** Soit A un opérateur linéaire borné et

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}\cdot$$

Cette série est donc convergente en norme ce qui permet de définir la famille d'opérateurs linéaires bornés $T(t) = e^{tA}$, $t \geq 0$. Il est connu que $T(0) = I$ et que $T(t+s) = T(t)T(s)$. Les estimations suivantes en découlent également

$$\begin{aligned} \|T(t) - I\| &\leq t\|A\|e^{t\|A\|} \\ \left\|\tfrac{T(t)-I}{t} - A\right\| \leq \|A\|\,\|T(t) - I\|. \end{aligned}$$

Donc A est le générateur infinitésimal du semi-groupe uniformément continue $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés.

(b) Réciproquement, soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe uniformément continue d'opérateurs linéaires bornés et soit $\rho > 0$ assez petit tel que

$$\|I - \frac{1}{\rho}\int_0^{\rho} T(s)\, ds\| < 1.$$

Alors l'opérateur $\int_0^{\rho} T(s)\, ds$ est inversible. Cependant

$$\begin{aligned} h^{-1}(T(h) - I)\int_0^{\rho} T(s)\, ds &= h^{-1}\left(\int_0^{\rho} T(s+h)\, ds - \int_0^{\rho} T(s)\, ds\right) \\ &= h^{-1}\left(\int_0^{\rho+h} T(s)\, ds - \int_0^{\rho} T(s)\, ds\right). \end{aligned}$$

Par multiplication par h et passage à la limite quand $h \to 0$, on obtient la convergence en norme de $h^{-1}(T(h)-I)$ vers $(T(\rho)-I)(\int_0^{\rho} T(s)\, ds)^{-1}$ lequel est le générateur infinitésimal de $T(t)$. □

Lemme 3.1 *Soit $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ et $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ deux semi-groupes uniformément continus d'opérateurs linéaires bornés tels que*

$$\lim_{t\to 0} \frac{T(t) - I}{t} = A = \lim_{t\to 0} \frac{S(t) - I}{t}\cdot$$

Alors $T(t) = S(t)$, for $t \geq 0$.

Démonstration. Montrons que pour T fixé, $S(t) = T(t)$ pour $0 \leq t \leq T$. Les applications $t \mapsto \|T(t)\|$ et $t \mapsto \|S(t)\|$ étant continues, il existe une constante positive C telle que $\|T(t)\| \, \|T(t)\| \leq C$ pour tout $0 \leq s, t \leq T$. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $\delta > O$ tel que

$$\frac{\|T(h) - S(h)\|}{h} < \frac{\varepsilon}{TC}, \qquad \text{pour } \ 0 \leq h \leq \delta.$$

Soit $0 \leq t \leq T$ et $n > 1/\delta$. Alors

$$\begin{aligned}
&\|T(h) - S(h)\| = \left\|T\left(n\tfrac{t}{n}\right) - S\left(n\tfrac{t}{n}\right)\right\| \\
\leq\; &\sum_{k=0}^{n-1} \left\| T\left((n-k)\frac{t}{n}\right) S\left(\frac{kt}{n}\right) - T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right) S\left(\frac{(k+1)t}{n}\right) \right\| \\
\leq\; &\sum_{k=0}^{n-1} \left\| T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right)\right\| \left\| T\left(\frac{t}{n}\right)\right\| \left\| S\left(\frac{kt}{n}\right)\right\| \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Comme ε est arbitraire, l'égalité demandée en découle. □

Proposition 3.2 *Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un semigroup uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés. Alors*

(a) il existe une constante $\omega \geq 0$ telle que

$$\|T(t)\|_{B(E)} \leq \exp(\omega t), \quad \textit{for} \ \ t \geq 0.$$

(b) L'opérateur défini de manière unique par $T(t) = e^{tA}$ est le générateur infinitesimal de $T(t)$.

(c) L'application $t \mapsto T(t)$ is différentiable en norme. De plus, si $x \in D(A)$, alors

$$\frac{d}{dt}T(t)(x) = A(T(t)(x)) = T(t)(A(x)) \quad t \geq 0.$$

Démonstration. Elle découle du lemme 3.1. En effet, le générateur infinitésimal de $T(t)$ est un opérateur linéaire borné A. A est également le générateur infinitésimal de e^{tA} défini par

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}.$$

D'après le lemme 3.1, $T(t) = e^{tA}$ et les autres assertions de la proposition en découlent aisément. □

Proposition 3.3 *Si $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0 semi-groupe d'opéerateurs linéaires bornés, alors il existe des constantes $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ telles que*

$$\|T(t)\|_{B(E)} \leq M \exp(\omega t), \quad \textit{pour} \ \ t \geq 0.$$

Démonstration. Montrons d'abord que $T(.)$ est localement borné en norme. dans le cas contraire, il existe une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $t_n \geq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} = 0$ et $\|T(t_n)\| \geq n$. Alors, il existe $x \in X$ tel que $\|T(t_n)x\|$ n'est pas borné ce qui est une contradiction. Par suite, il existe η, $M > 0$ tel que $\|T(t)\| \leq M$ pour $0 \leq t \leq \eta$. posons $\omega = \eta^{-1}\ln M$ et $t \geq 0$. Alors pour $0 \leq \delta < \eta$, $t = n\eta + \delta$ et d'après les propriétés des semi-groupes

$$\|T(t)\| = \|T(\delta)T(\eta)^n\| \leq M^{n+1} \leq MM^{\frac{t}{\eta}} = Me^{\omega t}.$$

□

Corollaire 3.1 *Si $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0 semi-groupe d'opéerateurs linéaires bornés, alors pour tout $x \in X$, l'application*

$$t \mapsto T(t)x$$

est continue de $[0, \infty)$ vers X.

3.3 Théorème de Hille-Yoshida

Les résultats de la proposition suivante correspondent au Corollaire 2.5 et au théorème 2.6 de [66]. Nous omettons les démonstrations ainsi que celle du théorème de Hille-Yoshida qui suit.

Proposition 3.4 *(a) Si A est le générateur infinitesimal d'un C_0 semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, alors $D(A)$, le domaine de A, est dense dans X et A est un opérateur linéaire fermé.*

(b) Soit $T(t)$ et $S(t)$ deux C_0 semi-groupes d'opérateurs linéaires bornés avec générateurs infinitesimaux respectifs A et B. Si $A = B$, alors $T(t) = S(t)\,; t \geq 0$.

Le théorème suivant est connu sous le nom de Théorème de Hille-Yosida (voir Thm 3.1, p. 8) dans [66])

Théorème 3.1 *Soir A un opérateur linéaire non borné. Alors A est le générateur infinitesimal d'un C_0 semi-groupe de contraction $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ si et seulement si*

(a) A est fermé et $\overline{D(A)} = X$.

(b) L'enesemble résolvant de A contient $\mathbb{R}$ et pour tout $\lambda > 0$, on a

$$\|R(\lambda : A)\| \leq 1/\lambda\cdot$$

Comme consequénce de ce théorème, on a aussi le résultat suivant :

Corollaire 3.2 *Soir A le générateur infinitesimal d'un C_0 semi-groupe de contraction $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Alors L'enesemble résolvant de A contient la demi-droite réelle positive et pour tout $\lambda > 0$, on a*

$$\|R(\lambda : A)\| \leq 1/Re\,\lambda\cdot$$

3.4 Familles de sinus et de cosinus

Définition 3.5 *On dit qu'une famille d'opérateurs linéaires bornés $\{C(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ est une famille de cosinus fortement continues si*

(a) $C(0) = I$.

(b) $C(t+s) - C(t-s) = 2C(t)C(s), \quad \forall\, s,t \in \mathbb{R}$.

(c) L'application $t \mapsto C(t)(x)$ is fortement continue, pour chaque $x \in E$.

Définition 3.6 *La famille de sinus fortement continues $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ associée à la famille de cosinus fortement continues $\{C(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ est définie par :*

$$S(t)(x) = \int_0^t C(t)(x)\,ds, \quad x \in E,\ t \in \mathbb{R}.$$

On peut vérifier les propriétés suivantes (plus de détails sur les familles de sinus et de cosinus de semi-groupes ainsi que sur les semi-groupes intégrés peuvent être trouvés dans [2, 14, 47, 49].

- Le générateur infinitésimal $A\colon\ E \longrightarrow E$ d'une famille de cosinus $\{C(t),\ t \in \mathbb{R}\}$ est défini par

$$A(x) = \frac{d^2}{dt^2}C(t)(x)_{|t=0}$$

pour $x \in D(A) = \{x \in E,\ \lim_{h\to 0} \frac{2}{h^2}(C(h) - h)\}$ i.e.

$$A(x) = \lim_{h\to 0} \frac{2}{h^2}(C(h) - I)x, \quad x \in D(A).$$

- Il existe $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ tels que

$$\|C(t)\| \leq Me^{\psi|t|}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- $\overline{D(A)} = \mathbb{R}$ et A est un opérateur linéaire fermé. Pour chaque $x \in D(A)$ et $t \in \mathbb{R}$, on a que $C(t)x \in D(A)$ et

$$\frac{d^2}{dt^2}C(t)x = AC(t)x = C(t)Ax.$$

3.5 Semi-groupes intégrés

Définition 3.7 *Soit E un espace de Banach. Une famille d'opérateurs linéaires bornés $\{T(t)_{t\geq 0}\}$ est appellée semi-groupe intégré si elle vérifie les conditions suivantes*

(a) $T(0) = 0$.

(b) *L'application $t \mapsto T(t)$ est fortement continue.*

(c)

$$T(s)T(t) = \int_0^s (T(s+\tau) - T(\tau))d\tau, \; \forall\, s \geq 0.$$

Définition 3.8 *A opérateur linéaire A est appellé générateur d'un semi-groupe intégré s'il existe $\omega \in \mathbb{R}$ avec $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$ ($\rho(A)$ est la résolvante de l'ensemble A) et s'il existe une famille d'opérateurs linéaires continus exponentiellement bornés $\{T(t)_{t\geq 0}\}$ telle que $T(0) = 0$ et $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1} := \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)dt$ existe pour tout $\lambda > \omega$.*

Proposition 3.5 *[5] Soit A un générateur de semi-groupe $\{T(t)_{t\geq 0}\}$. Alors pour tout $x \in E$ et tout $t \geq 0$,*

$$\int_0^t T(s)xds \in D(A) \;\text{ et }\; T(t)x = A\int_0^t T(s)xds.$$

Définition 3.9 **(a)** *Un semi-groupe intégré $\{T(t)_{t\geq 0}\}$ est dit localement lipschitzien s'il existe une constante $L > 0$ telle que*

$$|T(t) - T(s)| \leq L|t-s|, \quad s, t \in [0, \tau].$$

(b) *Un semi-groupe intégré $\{T(t)_{t\geq 0}\}$ est dit non dégénéré si*

$$(T(t)x = 0, \; \forall\, t \geq 0) \implies x = 0.$$

Définition 3.10 *On dit qu'un opérateur linéaire A satisfait la condition de Hille-Yosida s'il existe $M \geq 0$ and $\omega \in \mathbb{R}$ such that $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$ et*

$$\sup\{(\lambda - \omega)^n |(\lambda I - A)^{-n}\} \leq M.$$

Théorème 3.2 *[49] Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) A satisfait la condition de Hille-Yosida.

(b) A est le générateur d'un semi-groupe intégré, non dégénéré, localement lipschitzien.

Chapitre 4

Élements de théorie du point fixe

4.1 Cas des fonctions univoques

Un théorème de point fixe est un résultat qui affirme qu'une fonction F posséde au moins un point fixe moyennant quelques conditions sur F. Les résultats de ce type sont parmi les plus utiles en mathématiques. Le théorème du point fixe de Banach fournit un critère garantissant une procédure d'itération d'une fonction amènant à un point fixe. Le théorème du point fixe de Brouwer, quant à lui, est un résultat non constructif ; il affirme qu'une fonction continue de la boule unité fermée dans l'espace euclidien de dimension vers elle-même doit avoir un point fixe mais ne montre pas comment trouver ce point fixe. Nous présentons ici d'autres théorèmes du point fixe, notamment ceux de Schauder et de Kakutani, généralisations du théorème de Brouwer, suivis d'une brève description du travail de John Nash, Prix Nobel d'économie en 1994. La théorie du point fixe est assez bien développée dans des références standrads (voir à titre d'exemples [1, 29, 63].

4.1.1 Théorème du point fixe de Banach

Définition 4.1 *Un point fixe de* $N\colon X \to X$ *est un point* $x \in X$ *qui est appliqué sur lui même, i.e.* $Nx = x$.

Définition 4.2 *Soit* (X, d) *un espace métrique. Une application* $N\colon X \to X$ *est appelée contraction sur* X *s'il existe un nombre réel positif* $0 < M < 1$ *tel que pour tout* $x, y \in X$

$$d(Nx, Ny) \leq Md(x, y).$$

Géométriquement, cela signifie qu'il existe deux points x et y qui ont des images aussi proches l'une de l'autre que le sont les points x et y.

Théorème 4.1 *Considérons un espace métrique (X, d). Supposons que X soit complet et que $N\colon\ X \to X$ soit une contraction sur X. Alors N possède un unique point fixe.*

Démonstration.

- L'unicité :

  Supposons qu'il existe $x, y \in X$ tels que $x = N(x)$ et $y = N(y)$.

$$d(x, y) = d(N(x), N(y)) \leq Md(x, y).$$

  Comme $K \in]0, 1[$, alors $d(x, y)) = 0$ ce qui entraîne que $x = y$.

- L'existence :

  Soit $x_0 \in X$ un point arbitraire de X. Posons

$$x_1 = N(x_0),\ x_2 = N(x_1), \ldots, x_n = N(x_{n-1}), \ldots$$

$$\begin{aligned}
d(x_0, x_1) &= d(x_0, N(x_0)) \\
d(x_1, x_2) &= d(N(x_0), N(x_1) \leq Md(x_0, N(x_0)) \\
d(x_2, x_3) &= d(N(x_1), N(x_2) \leq M^2 d(x_0, N(x_0)) \\
&\vdots \\
d(x_n, x_{n+1}) &\leq M^{n+1} d(x_0, N(x_0).
\end{aligned}$$

  Considérons la suite définie par $\{x_n = N(x_{n-1})\}_{n\in\mathbb{N}}$ et montrons qu'elle est de Cauchy dans X.

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_{n+p}) &\leq \sum_{k=0}^{k=p} d(N(x_{n+k}), N(x_{n+k+1})) \\
&\leq \sum_{k=0}^{k=p} M^{n+k} d(x_0, N(x_0) \\
&\leq \frac{M^{n+1}}{1-M} d(x_0, N(x_0)) \to 0, \quad \text{lorsque} \ \ n \to +\infty.
\end{aligned}$$

  Ceci exprime le fait que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans X. Il existe donc $x_* = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. Montros que $x_* = N(x_*)$. On a $x_n = N(x_{n-1},\ n \in \mathbb{N}$. Par passage à la limite, on obtient $x_* = N(x_*)$ car N est continu.

La propostion suivante, qui généralise le théorème 4.1, sera utile pour la suite. □

Proposition 4.1 *Soit* (X, d) *un espace métrique complet et une application* $N\colon X \to X$*. Supposons qu'il existe* $n_0 \in \mathbb{N}^*$ *et* $M \in]0, 1[$ *tels que*

$$d(N^{n_0}(x), N^{n_0}(y)) \leq Md(x, y), \ \forall\, x, y \in X$$

avec $N^{n_0} = N \circ N \circ \ldots \circ N, \ n_0$ *fois. Alors* N *admet une point fixe unique.*

Démonstration. Montrons N admet un point fixe unique.

- L'unicité :
  Supposons qu'il existe $x, y \in X$ tels que $x = N(x)$ et $y = N(y)$. Supposons qu'il existe $x, y \in X$ tels que $x = N(x)$ et $y = N(y)$.

$$\begin{aligned} x = N(x) \quad &\Rightarrow \quad N^{n_0}(x) = N^{n_0+1}(x) = N^{n_0}(N(x)) = \ldots = x \\ y = N(y) \quad &\Rightarrow \quad N^{n_0}(y) = N^{n_0+1}(y) = N^{n_0}(N(y)) = \ldots = y \end{aligned}$$

$$d(x, y) = d(N^{n_0}(x), N^{n_0}(y)) \leq Md(x, y).$$

Or $K \in]0, 1[$. Donc $d(x, y)) = 0$ et donc $x = y$.

Comme N^{n_0} est contractante, alors en vertu du théorème 4.1, il existe $x \in X$ tel que $N^{n_0}(x) = x$. Finalement montrons que $N(x) = x$.

$$\begin{aligned} x_* &= N^{n_0}(x_*) \Rightarrow N(x_*) = N^{n_0+1}(x_*) = N^{n_0}(N(x_*)) \\ d(x_*, N(x_*)) &= d(N^{n_0}(x_*), N^{n_0}(N(x_*))) \leq Md(x_*, N(x_*)). \end{aligned}$$

Or $M \in]0, 1[$; donc $x_* = N(x_*)$. □

Corollaire 4.1 *Soit* (X, d) *un espace métrique complet et*

$$B(y_0, r) = \{y \in X\colon \ d(y, y_0) < r\}$$

et une application $N\colon \ B(y_0, r) \to X$*. Supposons qu'il existe* $M \in]0, 1[$ *tel que*

$$d(N(x), N(y)) \leq Md(x, y), \ \forall\, x, y \in B(y_0, r).$$

Si $d(y_0, N(y_0)) < (1 - M)r$*, alors* N *admet un point fixe unique.*

Démonstration. Comme $d(y_0, N(y_0)) < (1 - M)r$, alors on peut choisir $0 < \varepsilon < r$ tel que

$$d(y_0, N(y_0)) \leq (1 - M)\varepsilon < (1 - M)r.$$

Posons

$$D = \{y \in X\colon\ d(y, y_0) \leq \varepsilon\}.$$

Montrons $N(D) \subset D$. Soit $y \in D$. Alors

$$\begin{aligned} d(N(y), y_0) &\leq d(N(y), N(y_0) + d(N(y_0), y_0) \\ &\leq Md(y, y_0) + (1 - M)\varepsilon \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc $N\colon\ D \to D$ est un application contractante sur D et puisque X est un espace complet, alors d'après le théorème 4.1 N admet une point fixe unique. □

Corollaire 4.2 *Soit* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace de Banach,*

$$\overline{B}_r = \{y \in E\colon\ \|y\| \leq r\}$$

et une application $N\colon\ \overline{B}_r \to X$. *Supposons qu'il existe* $M \in]0, 1[$ *lel que*

$$\|N(x) - N(y)\| \leq M\|x - y\|,\ \forall\, x, y \in \overline{B}_r \ \ \textit{et} \ \ N(\partial\overline{B_r}) \subset \overline{B}_r.$$

Alors N *admet un point fixe unique.*

Démonstration. Considérons l'application $F(x) = \dfrac{x + N(x)}{2}$. Montrons que $F(\overline{B}_r) \subset \overline{B}_r$. Soit $x \in \overline{B}_r$ et $x \neq 0$. Posons $x_* = r\dfrac{x}{\|x\|}$

$$\begin{aligned} \|N(x) - N(x_*)\| &\leq M\|x - x_*\| \\ &\leq M(r - \|x\|), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|N(x)\| &\leq \|N(x_*)\| + \|N(x) - N(x_*)\| \\ &\leq r + M(r - \|x\|) \\ &\leq 2r - \|x\| \end{aligned}$$

Donc pour tout $x \in \overline{B}_r$ et $x \neq 0$, on a

$$\|F(x)\| = \left\|\frac{x + N(x)}{2}\right\| \leq \frac{\|x\|}{2} + \frac{\|N(x)\|}{2} \leq \frac{\|x\|}{2} + \frac{2r - \|x\|}{2} \leq r.$$

Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{B}_r,\ x_n \neq 0$ une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$. D'après les inéqalités précédantes et la continuité de F, on obtient

$$\|F(x_n)\| \leq r \Rightarrow \|F(0)\| \leq r.$$

Par conséquent $F\colon\ \overline{B}_r \to \overline{B}_r$. De plus F est contractante. Soit $x, y \in \overline{B}_r$

$$\|F(x) - F(y)\| \ \leq\ \frac{1+M}{2}\|x-y\| \ \forall\, x, y \in \overline{B}_r.$$

D'après le théorème 4.1, F admet un point fixe unique i.e. il existe $x_0 \in \overline{B}_r$ tel que $x_0 = F(x_0) = N(x_0)$. □

Théorème 4.2 *(Edelstein) Soit (X, d) un espace métrique compact et une application $F\colon\ X \to X$. Supposons que*

$$d(N(x), N(y)) < d(x, y),\ \forall\, x, y \in X, x \neq y.$$

Alors N admet une point fixe unique.

Démonstration.

- Unicité :
  Soit $x, y \in X$ tels que $x = N(x)$ et $y = N(y)$

$$d(x, y) = d(N(x), N(y)) < d(x, y) \Rightarrow x = y.$$

- Existence :
  Considérons l'application $F\colon\ X \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$x \to F(x) := d(x, N(x)).$$

Puisque X est compact, alors il existe $x_0 \in X$ tel que

$$F(x_0) = d(x_0, N(x_0)) = \min_{x \in X} d(x, N(x)).$$

Montrons que $x_0 = N(x_0)$.

$$\begin{aligned}
&d(x_0, N(x_0))\\
&\leq d(N(N(x_0)), N(x_0))\\
&< d(x_0, N(x_0))
\end{aligned}$$

ce qui implique $d(x_0, N(x_0)) = 0$ puis $x_0 = N(x_0)$.

□

Remarque 4.1 *Soit C un convexe fermé borné de E et $F\colon\ C \to C$ une 1-contraction, c'est à dire que*

$$\|F(x) - F(y)\| \leq \|x - y\|, \quad \forall\, x, y \in C.$$

Alors F admet-il un point fixe ?
La réponse est en général négative comme le montre l'exemple suivant. Soit $E = c_0$ l'ensemble des suites $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ qui tendent vers 0, muni de la norme

$$\|x\| = \sup_{i \in \mathbb{N}^*} |x_i|.$$

Sur l'ensemble $C = \{x \in E \colon \|x\| \leq 1\}$, l'application F définie par

$$F(x) = (1, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$$

est une $1-$contraction de C dans C et n'admet pas de point fixe dans C.
La réponse est néanmoins affirmative lorsque $F(C)$ est compact.

Théorème 4.3 *(Théorème de contraction de type Schauder) Soit E un espace de Banach sur le corps $K = \mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$, $C \subset E$ un ensemble convexe fermée et soit $F \colon C \to C$ une 1-contraction. Supposons que $F(C)$ est compact. Alors F admet au moins un point fixe.*

Démonstration. Soit $x_0 \in C$ et $F_n \colon C \to E$ une application définie par

$$F_n := \left(1 - \frac{1}{n}\right) F + \frac{1}{n} x_0, \ n = 2, 3, \ldots$$

Montrons que $F_n(C) \subset C$ est une contracton. Soit $y \in F_n(C)$; alors il existe $x_1 \in C$ tel que

$$y = \left(1 - \frac{1}{n}\right) F(x_1) + \frac{1}{n} x_0 \in C \ \text{ car } \ C; \text{ est convexe.}$$

Soit $x, y \in C$. □

$$\|F_n(x) - F_n(y)\| \ \leq \ \frac{1}{n} \|x - y\|.$$

Alors d'après le théorème 4.1, F_n possède un point fixe unique $x_n \in C$, soit

$$x_n = F_n(x_n) \subset C, \ n = 2, 3, \ldots.$$

Il existe donc $y_n \in C$ telle que

$$x_n = (1 - \frac{1}{n}) F(y_n) + \frac{1}{n} x_0, n = 2, 3, \ldots.$$

Puisque $F(C)$ est compact, alors il existe une sous-suite $\{F(y_{n_k})\colon\ k = 2,3,\ldots\}$ converge vers $u \in C$. $x_{n_k} := \left(1 - \dfrac{1}{n_k}\right) F(y_{n_k}) + \dfrac{1}{n_k} x_0$ converge vers u. Comme F est continue, alors $F(x_{n_k})$ converge vers $F(u)$. Montrons que $u = F(u)$.

$$\begin{aligned}
\|u - F(u)\| &\leq \|u - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - F(u)\| \\
&\leq \|u - x_{n_k}\| + \left(1 - \frac{1}{n_k}\right) \|F(y_{n_k}) - F(u)\| \\
&\quad + \frac{1}{n_k}\|F(u)\| + \frac{1}{n_k}\|x_0\| \to 0 \ \text{ alors que } \ n \to +\infty.
\end{aligned}$$

Ce qui montre que $u = F(u)$.

Remarque 4.2 *Soit $f\colon\ [0,1] \to [0,1]$ l'application identité*

$$f(x) = x.$$

En vertu du théorème 4.3, f admet au moins un point fixe ; mais on n'a pas de résultat d'unicité.

4.1.2 Théorème de Banach généralisé

Théorème 4.4 *Soit (X, d) un espace métrique complet et $N\colon\ X \to X$ une application vérifiant la condition suivante :*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0\colon\ (d(x, N(x)) < \delta) \Rightarrow (N(B(x,\varepsilon)) \subset B(x,\varepsilon)).$$

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} d(N^n(u), N^{n+1}(u)) = 0$ pour certain $u \in X$, alors la suite $\{N^n(u)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point fixe de N.

Démonstration. Considérons la suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\{u_n = N^n(u)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Montrons que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Puisque la

$$\lim_{n\to+\infty} d(u_n, u_{n+1}) = 0.$$

Alors

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, m \in \mathbb{N} \ \text{ tel que } \ d(u_n, u_{n+1}) < \varepsilon\ \forall\, n \geq m.$$

$$d(u_n, N(u_n)) = d(u_n, u_{n+1}) < \varepsilon\ \forall\, n \geq m \Rightarrow N(B(u_n, \varepsilon)) \subset B(u_n, \varepsilon)\ \forall\, n \geq m.$$

Par suite

$$u_{n+1} = N(u_n) \in B(u_n, \varepsilon),\ \forall\, n \geq m \Rightarrow u_{m+1} \in B(u_m, \varepsilon).$$

Alors

$$u_{m+2} = N(u_{m+1}) \in N(B(u_m, \varepsilon)) \subset B(u_m, \varepsilon) \Rightarrow d(u_{m+2}, u_m) < \varepsilon.$$

On peut montrer par récurrence que

$$u_{m+k} = N^k(u_m) \in B(u_m, \varepsilon) \; \forall \, k \geq 0.$$

Soit $n, p \geq m$. Alors

$$d(u_n, u_p) \leq d(u_n, u_m) + d(u_m, u_p) < 2\varepsilon.$$

Autrement dit $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Alors il existe $z \in X$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = z$. Montrons que

$$N(z) = z \Leftrightarrow d(z, N(z)) = 0.$$

Supposons que $d(z, N(z)) = a > 0$; alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in B(z, \frac{a}{3}), \; \forall \, n \geq m$; de plus $d(u_n, u_{n+1}) \leq \frac{a}{3}$. D'après l'hypothèse du théorème, il vient

$$N(B(u_n, \frac{a}{3})) \subset B(u_n, \frac{a}{3}) \Rightarrow N(z) \in B(u_n, \frac{a}{3}).$$

et donc

$$\begin{array}{rcl} d(N(z), z) & \leq & d(N(z), u_n) + d(u_n, z) \\ & \Rightarrow & d(N(z), z) - d(u_n, z)s \leq d(N(z), z) \\ & \Rightarrow & \frac{2a}{3} \leq d(N(z), u_n). \end{array}$$

Mais c'est une contradiction avec $N(z) \in B(u_n, \frac{a}{3})$. □

Théorème 4.5 *Soit (X, d) un espace métrique complet et $N\colon X \to X$ une application. Supposons que*

$$d(N(x), N(y)) \leq \phi(d(x, y)), \; \forall \, x, y \in X$$

où $\phi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction monotone vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty} \phi^n(t) = 0, \; t \in]0, +\infty[$. Alors N admet un point fixe unique $u \in X$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} N^n(x) = u, \; \forall \, x \in X.$$

Démonstration. Soit $x_0 \in X$ et $x_1 = N(x_0), x_2 = N(x_1), \ldots, x_{n+1} = N(x_n), \ldots;$ alors

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(N^n(x_0), N^{n+1}(x_0)) \leq \phi^n(d(x_0, N(x_0)) \; \forall \, n \in \mathbb{N}.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} d(N^n(x_0), N^{n+1}(x_0)) = 0.$$

Montrons que $\phi(t) < t \; \forall t \in \mathbb{R}_+^*$. Supposons qu'il existe $t \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$t \leq \phi(t) \Rightarrow t \leq \phi^2(t) \ldots \; t \leq \phi^n(t), \; \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow t \leq 0.$$

C'est une contradiction avec t positive ; alors $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$ on a $\phi(t) < t$. Soit $\varepsilon > 0 \Rightarrow \phi(\varepsilon) < \varepsilon$. Posons $\delta(\varepsilon) = \varepsilon - \phi(\varepsilon)$. Montrons que si $d(x, N(x)) < \delta(\varepsilon))$, alors

$$N(B(x,\varepsilon)) \subset B(x,\varepsilon).$$

Soit $z \in B(x,\varepsilon)$; alors

$$d(x, N(z)) \leq d(x, N(x)) + d(N(x), N(z)) \leq \delta(\varepsilon) + \phi(d(x,z)) < \varepsilon - \phi(\varepsilon) + \phi(\varepsilon) = \varepsilon.$$

Alors

$$N(B(x,\varepsilon)) \subset B(x,\varepsilon).$$

D'après le théorème 4.4, l'application N admet un point fixe. Il reste à montrer l'unicité de point fixe. Soit $x, y \in X$ tels que $x = N(x)$ et $y = N(y)$. Alors

$$d(x,y) = d(N(x), N(y)) \leq \phi(d(x,y)) \Rightarrow d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y.$$

Sinon $d(x,y) > 0$, ce qui donne

$$d(x,y) \leq \phi(d(x,y)) < d(x,y),$$

ce qui est impossible. $\square$

4.1.3 Alternative nonlinéaire pour les applications contractantes

Dans cette section, nous exposons une preuve élémentaire et directe d'une généralisation de l'alternative non linéaire pour les applications contratantes (voir [35].

Théorème 4.6 *Soit E un espace de Banach et $T\colon B(0,r) \to E$ une application contractante sur $B(0,r)$. Alors il existe $\lambda_* \in]0,1]$ et une courbe Lipschitzienne $\lambda \to x_\lambda$ définie de $[0,\lambda_*]$ dans $\overline{B}(0,r)$ tels que $x_\lambda = \lambda T x_\lambda$ pour tout $\lambda \in [0,\lambda_*]$ et $(\lambda_*, x_{\lambda_*})$ est sur la frontière de $[0,1] \times \overline{B}(0,r)$.*

Démonstration. Posons

$$Q = \{\lambda \in [0,1]\colon\ \lambda T \ \text{ admet un point fixe } \ y \text{ tel que } \|y\| < r\}.$$

On remarque que Q est non vide car $0 \in Q$.

• Q est ouvert dans $[0, 1.]$
Soit $\lambda_0 \in Q$ et y point fixe de $\lambda_0 T$ tel que $\|y\| = \beta < r$. Pour $\lambda \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned} \|y - \lambda T(x)\| &\leq \|y - \lambda T(y)\| + \|\lambda T(y) - \lambda T(x)\| &(4.1)\\ &\leq |\lambda - \lambda_0|\|T(y)\| + |\lambda|\alpha\|y - x\| &(4.2)\\ &\leq |\lambda - \lambda_0|\|T(y)\| + \alpha\|y - x\|. &(4.3)\end{aligned}$$

Considérons l'application $f\colon\ [0,1] \to [0,1]$ définie par

$$f(\lambda) = \lambda\|T(y)\|.$$

f étant une application continue, on a

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0,\ \forall\, \lambda\colon\ |\lambda - \lambda_0| < \eta \Rightarrow |\lambda - \lambda_0|\|T(y)\| < \varepsilon.$$

Posons $\varepsilon = (r - \beta)(1 - \alpha)$. Alors il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall\, \lambda \in]\lambda_0 - \eta, \lambda_0 + \eta[\implies \|T(y)\||\lambda - \lambda_0| \leq (r - \beta)(1 - \alpha).$$

Montrons que pour tout $\lambda \in]\lambda_0 - \eta, \lambda_0 + \eta[$, λT possède un point fixe. Soit $z \in \overline{B}(y, r - \beta)$; alors d'après (4.1), on a

$$\begin{aligned} \|y - \lambda T(z)\| &\leq |\lambda - \lambda_0|\|T(y)\| + \alpha\|y - z\| \\ &\leq (r - \beta)(1 - \alpha) + \alpha(r - \beta) = r - \beta. \end{aligned}$$

Alors

$$\lambda T(\overline{B}(y, r - \beta)) \subset \overline{B}(y, r - \beta).$$

Comme T est contractante et $\lambda \in [0,1]$, alors λT est contractante et d'après le théeoème du point fixe de Banach λT admet un point fixe unique dans $\overline{B}(y, r - \beta)$. Ceci montre que $]\lambda_0 - \eta, \lambda_0 + \eta[\subset Q$. Donc Q est un ouvert de $[0,1]$.

• Q est fermé.

Soit $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Q$ une suite convergente vers $\lambda \in [0,1]$. Montrons que $\lambda \in Q$ c'est-à-dire qu'il existe $y_* \in E$ tel que $y_* = \lambda T(y_*)$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $y_n \in B(0,r)$ tel que $y_n = \lambda_n T(y_n)$. Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $y_n = \lambda_n T(y_n)$ et $y_m = \lambda_m T(y_m)$. Alors

$$\begin{array}{rcl} \|y_n - y_m\| & \leq & |\lambda_n T(y_n) - \lambda_m T(y_n)\| + |\lambda_m|\|T(y_n) - T(y_m)\| \\ & \leq & |\lambda_n - \lambda_m|\|T(y_n)\| + \alpha\lambda_m\|y_n - y_m\| \\ & \leq & |\lambda_n - \lambda_m|[\alpha\|y_n\| + \|T(0)\|] + \alpha\|y_n - y_m\| \\ & \leq & |\lambda_n - \lambda_m|[\alpha r + \|T(0)\|] + \alpha\|y_n - y_m\| \end{array}$$

Puisque $\alpha \in]0,1[$, on obtient que

$$\|y_n - y_m\| \leq \frac{\alpha r + \|T(0)\|}{1-\alpha}|\lambda_n - \lambda_m|.$$

Ceci exprime le fait que $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy. Il existe donc $y_* \in B(0,r)$ tel que $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers y_*. Montrons que $y_* = \lambda T(y_*)$.

$$\begin{array}{rcl} \|y_n - \lambda T(y_*)\| & \leq & |\lambda_n - \lambda|\|T(y_*)\| + \|T(y_n) - T(y_*)\| \\ & \leq & |\lambda_n - \lambda_*|\|T(y_*)\| + \alpha\|y_n - y_*\| \to 0 \text{ lorsque } n \to +\infty. \end{array}$$

Alors $y_* = \lambda T(y_*)$ et donc $\lambda \in Q$.

• Par suite Q est connexe et comme les seules parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles, il existe $\lambda_* \in [0,1]$ tel que $Q = [0, \lambda_*[$ ou bien $Q = [0, \lambda_*]$. Alors

$$[0, \lambda_*[\subset Q \Rightarrow \left(\forall\, \lambda \in [0, \lambda_*[,\ \exists!\, y_\lambda \in \overline{B}(0,r) \colon\ y_\lambda = \lambda T(y_\lambda)\right).$$

• $y_.$: $[0, \lambda_*[\to \overline{B}(0,r),\ \lambda \to y_\lambda$ est un courbe Lipschitzienne.

Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, \lambda_*[$ et $y_{\lambda_1},\ y_{\lambda_2}$ les points fixes de $\lambda_1 T$ et $\lambda_2 T$ respectivement. Par le même raisonnement que précédemment, on peut montrer que

$$\|y_{\lambda_1} - y_{\lambda_2}\| \leq \frac{\alpha r + \|T(0)\|}{1-\alpha}|\lambda_1 - \lambda_2|, \quad \text{pour tout } \ \lambda_1,\, \lambda_2 \in [0, \lambda_*[.$$

Soit $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \subset [0, \lambda_*[$ une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = \lambda_*$. Il clair que pour chaque λ_n, on a que $y_{\lambda_n} = \lambda_n T(y_{\lambda_n}),\ n \in \mathbb{N}^*$. De plus, il existe $y_* \in \overline{B}(0,r)$ tel que y_{λ_n} converge vers y_*. Alors $y_* = \lambda_* T(y_*)$. Ce qui prouve que $\lambda_* \in Q$, et donc $Q = [0, \lambda_*]$.

• $(\lambda_*, y_*) \in \partial([0,1] \times \overline{B}(0,r)$. Supposons que $(\lambda_*, y_*) \notin \partial([0,1] \times \overline{B}(0,r)$; alors

$$(\lambda_*, y_*) \in]0,1[\times B(0,r)$$

et donc il existe $0 < \varepsilon < 1, r_1 > 0$, tel que

$$]\lambda_* - \varepsilon, \lambda_* + \varepsilon[\times B(y_*, r_1) \subset]0,1[\times B(0,r).$$

Soit $\lambda \in]\lambda_*, \lambda_* + \varepsilon[$ et

$$\lambda T\colon\ \overline{B}(y_*, r_1) \to E,\ x \to \lambda T(x).$$

Montrons que $\lambda T(\overline{B}(y_*, r_1)) \subset \overline{B}(y_*, r_1)$. Soit $z \in \overline{B}(y_*, r_1)$. D'après (4.1), on a

$$\begin{aligned} \|\lambda T(z) - y_*\| &\leq |\lambda - \lambda_*|\|T(z) - T(y_*)\| \\ &\leq |\lambda - \lambda_*|\alpha\|z - y_*\| \\ &\leq \varepsilon r_1 \leq r_1. \end{aligned}$$

Alors

$$\lambda T(\overline{B}(y, r - \beta)) \subset \overline{B}(y, r - \beta).$$

Comme T est contractante, alors λT est contractante et d'après le théorème du point fixe de Banach, λT admet un point fixe unique dans $\overline{B}(y_*, r_1)$ ce qui contredit la fait que $[0, \lambda_*]$ est un intervalle maximale ; à chaque $\lambda \in [0, \lambda_*]$, l'application λT admet un point fixe dans $B(0,r)$. Ceci montre que

$$(\lambda_*, y_{\lambda_*}) \in \partial([0,1] \times B(0,r)).$$

On en déduit finalement que l'une des conditions suivantes est verifiée :

$$\lambda_* = 1 \text{ ou } \|x_{\lambda_*}\| = r.$$

□

Comme conséquence du théorème 4.6, nous obtenons les résultats suivants :

Théorème 4.7 *(Alternative nonlinéaire). Soit E un espace de Banach et $T\colon\ \overline{B}(0,r) \to E$ une application contractante. Alors au moins l'un des énoncés suivants est vérifié :*

(i) Il existe $x_0 \in \overline{B}(0,r)$ tel que $x_0 = T(x_0)$.

(ii) Il existe $x_0 \in \partial\overline{B}(0,r)$ et $\lambda \in]0,1[$ tel que $x_0 = \lambda T(x_0)$.

Démonstration. D'après le théorème 4.6, il existe $\lambda_* \in [0,1]$ et $x_{\lambda_*} \in \overline{B}(0,r)$ tels que $x_{\lambda_*} = \lambda_* T(x_{\lambda_*})$. De plus ou $\lambda_* = 1$ ou $\lambda \neq 1$ et $\|x_{\lambda_*}\| = r$. □

Théorème 4.8 *Soit* $T\colon \overline{B}(0,r) \to E$ *une application contractante telle que sur la frontière* $\partial B(0,1)$ *de* $\overline{B}(0,r)$, *une des conditions suivantes est satisfaite :*

(a) $\||T(x) \leq \|x\|$ *(condition de E. Rothe)*

(b) $\|T(x)\| \leq \|x - T(x)\|$

(c) $\|T(x)\| \leq \sqrt{\|x\|^2 + \|x - T(x)\|}$ *(condition de M. Altman)*

(d) $\|T(x)\| \leq \max\left(\|x\|, \|x - Tx\|^2\right)$.

Alors T *possède un point fixe.*

Démonstration. Montrons que la propriété (ii) du théorème 4.7 n'est pas satisfaite. Dans le cas contraire, il existe $y \in \partial B(0,r)$ tel que

$$y = \lambda T(y) \text{ pour certain } \lambda \in]0,1[.$$

Donc, si (a) est satisfie, alors

$$\|y\| = \lambda \|T(y)\| \leq \lambda \|y\| \Rightarrow \lambda = 1,$$

d'où une contradiction.

(b) donne

$$\begin{aligned}\|T(y)\| = \|T(\lambda T(y))\| &\leq \|\lambda T(y) - T(\lambda T(y))\| \\ &\leq |1-\lambda| \|T(y)\| \Rightarrow \lambda = 1,\end{aligned}$$

d'où une contradiction.

Supposons (c). Alors

$$\begin{aligned}\|T(y)\| = \|T(\lambda T(y))\| &\leq \sqrt{\|\lambda T(y)\|^2 + \|\lambda T(y) - T(\lambda T(y))\|^2} \\ &\leq \sqrt{\lambda^2 \|T(y)\|^2 + (1-\lambda)^2 \|T(y)\|^2} \\ &= \sqrt{\lambda^2 + (1-\lambda)^2} \|T(y)\| \Rightarrow 0 \leq (\lambda - 1)\lambda,\end{aligned}$$

d'où une contradiction.

Avec (d), on a

$$\begin{aligned}\|T(y)\| = \|T(\lambda T(y))\| &\leq \max(\lambda \|T(y)\|, \|\lambda T(y) - T(\lambda T(y))\|) \\ &= \max(\lambda | \|T(y)\|, (1-\lambda)\|T(y)\|) \Rightarrow \lambda = 1,\end{aligned}$$

d'où encore une contradiction. $\square$

Théorème 4.9 *Soit $T\colon\ E \to E$ une application telle que la restriction de T à n'importe quelle boule $\overline{B}(0,r)$ est une contraction. Alors, il existe $\lambda_* \in]0,1]$ et une courbe localement Lipschitzienne sur $[0,\lambda_*[$ de points fixes $x_\lambda = \lambda T(x_\lambda)$ tels qu'au moins un des énoncés suivants est vérifié :*

(i) l'ensemble

$$\mathcal{E}_T = \{x_\lambda \in E : \lambda \in [0,\lambda_*[\}$$

est non bornée ;

(ii) l'application T admet un unique point fixe x_1, $\lambda_* = 1$ et $x_\lambda \to x_1$ lorsque $\lambda \to 1$.

Démonstration. D'après le théorème 4.6, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un courbe Lipchitizenne $x^n_{\cdot}$ définie de $[0,\lambda^n_*[$ dans $\overline{B}(0,n)$ et $x_{\lambda^n_*} = \lambda^n_* T(x_{\lambda^n_*})$. De plus, pour tout $n \leq m$, $\lambda^n_* \leq \lambda^m_*$ et il existe $\lambda_* \in [0,1]$, tel que

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda^n_* = \lambda_*.$$

Soit $\lambda \in [0,\lambda_*[$; on définit x_λ par $x_\lambda = x^n_\lambda$ où $\lambda \leq \lambda^n_*$. Montrons que $x_{\cdot}$ et bien définie. Soit $\lambda \leq \lambda^n_* \leq \lambda^m_*$. Alors $x^n_\lambda = \lambda T(x^n_\lambda)$ et $x^m_\lambda = \lambda T(x^m_\lambda)$. Puisque $\|x^n_\lambda\| \leq n$, alors $x^n_\lambda \in \overline{B}(0,m)$

$$\begin{aligned}
\|x^n_\lambda - x^m_\lambda\| &\leq \alpha_m \lambda \|T(x^n_\lambda) - T(x^n_\lambda)\| \\
&\leq \alpha_m \|x^n_\lambda - x^m_\lambda\| \Rightarrow x^n_\lambda = x^m_\lambda
\end{aligned}$$

avec $\alpha_m \in]0,1[$ et pour tout $x, y \in B(0,m)$, on a

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \alpha_m \|x-y\|.$$

De plus

$$\forall\, n,m \in \mathbb{N}^* : B(0,n) \subset B(0,m) \Rightarrow \alpha_m \leq \alpha_m \ldots \leq \alpha_1.$$

$x_{\cdot}$ est localement Lipschitzienne. Soit $\lambda_0 \in]0,\lambda_*[$ et $\lambda^n_* > \lambda_0$. Posons $I_0 =]0,\lambda^n_*[$. D'après le théorème 4.6, $x_{\cdot}$ est Lipschitzienne sur I_0. Supposons que $\mathcal{E}_T$ est bornée c'est-à-dire qu'il existe $M \geq 0$ tel que

$$\|x_\lambda\| \leq M \ \text{ pour toute } \ \lambda \in [0,\lambda_*[.$$

Montrons que $\{x_{\lambda^n_*}\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy. Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $x_n = \lambda^n_* T(x_n)$ et $x_m = \lambda^m_* T(x_m)$. Alors

$$\|x_n - x_m\| \ \leq \ |\lambda^n_* T(y_n) - \lambda^m_* T(x_n)\| + |\lambda^m_*| \|T(x_n) - T(x_m)\|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \ |\lambda_*^n - \lambda_*^m| \|T(x_n)\| + \max(\alpha_n, \alpha_m)\|y_n - y_m\| \\
&\leq \ |\lambda_*^n - \lambda_*^m| [\alpha^n \lambda_*^n \|T(y_n)\| + \|T(0)\|] + \max(\alpha_n, \alpha_m)\|x_n - x_m\| \\
&\leq \ |\lambda_*^n - \lambda_*^m| [M + \|T(0)\|] + \max(\alpha_n, \alpha_m)\|x_n - x_m\| \\
&\leq \ |\lambda_*^n - \lambda_*^m| [M + \|T(0)\|] + \alpha_1\|x_n - x_m\|.
\end{aligned}$$

Puisque $\alpha_1 \in]0, 1[$, on obtient

$$\|x_n - x_m\| \leq \frac{M + \|T(0)\|}{1 - \alpha_1} |\lambda_*^n - \lambda_*^m|.$$

Comme $\{\lambda_*^n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy, alors $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi de Cauchy ; donc il existe $x_* \in E$ tel que x_n converge vers x_*. Montrons que $x_* = \lambda_* T(x_*)$. Il clair qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $x_* \in B(0, n)$ et

$$\begin{aligned}
\|x_n - \lambda_* T(x_*)\| &\leq \ |\lambda_*^n - \lambda_*| \|T(x_*)\| + \|T(x_n) - T(x_*)\| \\
&\leq \ |\lambda_*^n - \lambda_*| \|T(x_*)\| + \alpha_n \|x_n - x_*\| \\
&\leq \ |\lambda_*^n - \lambda_*| \|T(x_*)\| + \|x_n - x_*\| \to 0 \text{ lorsque } n \to +\infty.
\end{aligned}$$

Ceci montre que $x_* = \lambda_* T(x_*)$. S'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lambda_*^n = 1$, alors $\lambda_* = 1$. Supposons que

$$\lambda_*^n < 1, \ \forall\ n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \|x_{\lambda_*^n}\| = n, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

C'est un contradiction avec $\mathcal{E}_T$ borné. Il existe donc $x_* \in E$ tel que $x_* = T(x_*)$. Pour l'unicité, supposons qu'il existe $x, y \in E$ tels que $x = T(x)$ et $y = T(y)$. $x, y \in E$ alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $x, y \in B(0, n)$ alors

$$\|x - y\| = \|T(x) - T(y)\| \leq \alpha_n \|x - y\| \Rightarrow x = y.$$

□

4.1.4 Théorème du point fixe de Brouwer (1910)

Dimension 3 : Le mathématicien Luitzen Egbertus Jan Brouwer remarqua, en mélangeant son café au lait, que le point central de la surface du liquide, au milieu du tourbillon créé par le mouvement rotatoire de la cuillére, restait immobile. Il examina le problème de cette façon : à tout moment, il y a un point de la surface qui n'a pas changé de place. En dimension 2, il formula ce résultat autrement : je prends une feuille horizontale, une autre feuille identique que je froisse et que je replace en l'applatissant sur l'autre. Un point de la feuille froissée est à la même place que sur l'autre feuille. En dimension n, il obtient le résultat suivant :

Théorème 4.10 *Soit C un sous-ensemble compact, convexe et non-vide de $\mathbb{R}^n$ et supposons que f soit une fonction continue de C dans C. Alors f admet un point fixe. En particulier, si B^n désigne la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$, alors toute application continue $f\colon B^n \to B^n$ admet (au moins) un point fixe.*

Pour démontrer ce théorème, on va utiliser une conséquence du théorème de Stokes. D'autre démonstration directes peuvent être également trouvées dans [39, 63, 69].

Théorème 4.11 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant la boule unité fermée B^n. Alors in n'existe pas d'application lisse de U dans $\partial B^n = S^{n-1}$ dont la restriction à S^{n-1} soit l'identité.*

Démonstration. Soit $F = (f_1, \dots, f_n)$ une telle application. Alors les restrictions à S^{n-1} des formes différentielles

$$x_1 dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n \text{ et } f_1 df_2 \wedge \ldots \wedge df_n$$

coïncident. En particulier,

$$\int_{S^{n-1}} x_1 dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n = \int_{S^{n-1}} f_1 df_2 \wedge \ldots \wedge df_n.$$

Appliquons la formule de Stokes à chacun des deux membres. Alors, d'une part

$$\int_{S^{n-1}} x_1 dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n = \int_{B^n} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n = vol(B^n) \neq 0.$$

D'autre part,

$$\int_{S^{n-1}} f_1 df_2 \wedge \ldots \wedge df_n = \int_{B^n} df_1 \wedge df_2 \wedge \ldots \wedge df_n.$$

Mais par hypothèse $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i^2 = 1$. Alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i df_i = 0$, et par suite

$$df_1 \wedge df_2 \wedge \ldots \wedge df_n = 0,$$

ce qui conduit à une contradiction. □

Lemme 4.1 *Pour tout application continue de boule unité fermée dans elle-même, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des nombres r_1 et r_2, avec $r_1 < 1 < r_2$ et une application lisse g de la boule ouverte $B(0, r_2)$ dans la boule ouverte $B(0, r_1)$ telle que*

$$\|f(x) - g(x)\| < \varepsilon, \ \forall\, x \in B^n.$$

Démonstration. D'après le théorème de Stone-Weierstrass appliqué aux composantes de f, il existe une application $P = (p_1, \dots, p_n)$, où les p_i sont des polynômes, telle que

$$\sup_{x \in B^n} \|f(x) - P(x)\| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Alors $g = \dfrac{P}{1 + \frac{\varepsilon}{2}}$ satisfait aux conditions requises. Tout d'abord, pour $x \in B^n$ on a

$$\begin{aligned} \|g(x)\| &\leq \|\frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{2}} f(x)\| + \|g(x) - \frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{2}} f(x)\| \\ &\leq \frac{1+\frac{\varepsilon}{4}}{1+\frac{\varepsilon}{2}} = 1 - \frac{\frac{\varepsilon}{4}}{1+\frac{\varepsilon}{2}}. \end{aligned}$$

□

Lemme 4.2 *Les quatre assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) $f\colon \overline{B(0,1)} \to \overline{B(0,1)}$ *est continue, sans point fixe,*

(b) $\phi\colon \overline{B(0,1)} \to S(0,1)$ *est une rétraction continue,*

(c) $f\colon \overline{B(0,1)} \to \overline{B(0,1)}$ *est* C^1*, sans point fixe,*

(d) $\phi\colon \overline{B(0,1)} \to S(0,1)$ *est une rétraction* C^1*.*

On entend par fonction C^1 sur un fermé, toute restriction d'une fonction C^1 sur un voisinage de ce fermé.

Dans la résolution des équations différentielles ordinaires dans dans des espaces abstraits, des équations différentielles fonctionnelles ou des équations aux dérivées partielles, on est souvent amené à utiliser des théorèmes de point fixe pour obtenir l'existence de solutions à un problème aux limites ou à conditions intiales. Mais en règle générale, ces théorèmes s'appliquent dans des espaces de dimension infinie supposés comprendre toutes les solutions possibles. L'exemple suivant montre qu'il n'est pas toujours possibe d'appliquer le théorème du point fixe de Brouwer dans un espace de dimension infinie. A cette fin, il suffit de définir une application continue de la boule unité de l'espace de Hilbert $l^2(\mathbb{N})$ dans elle même qui n'a pas de point fixe.

Exemple 4.1 *Soit* $l^2(\mathbb{N})$ *l'espace des suites* $x = \{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ *de carrées sommables muni de la norme*

$$|x| = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2}$$

Soit $\overline{B(0,1)}$ la boule unité fermée de $l^2(\mathbb{N})$, et $T\colon \overline{B(0,1)} \to l^2(\mathbb{N})$ une application définie par

$$Tx = (\sqrt{1-|x|^2}, x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots).$$

On vérife sans peine que T est continue et que $T(\overline{B(0,1)}) \subseteq \overline{B(0,1)}$. Plus précisément $|Tx| = 1$. Cependant T ne possède aucun point fixe dans $\overline{B(0,1)}$, car si $x = Tx$, alors pour tout $n \geq 0$, $x_{n+1} = x_n$ et $x_0 = \sqrt{1-|x|^2}$. Or $|x| = |Tx| = 1$ et par conséquent $x_0 = 0$; d'où $x = 0$, ce qui contredit $|x| = 1$.

Donc la continuité et la borniture d'un opérateur ne suffisent pas à résoudre l'équation $Tx = x$ dans un espace de dimension infinie.

Rappelons aussi que dans un espace de dimension infinie, une application continue peut très bien être non bornée sur les fermés bornés ; mais ceci complique considérablement l'étude des équations non linéaires. Afin d'obtenir des théorèmes de point fixe analogues au théorème de Brouwer dans un espaces de dimension infinie, Il faudra rajouter une hypothèse de compacité ; plus précisément supposer que l'opérateur soit compact, ou qu'il laisse invariant un convexe compact. C'est ce que fût remarqué par Schauder dans ses travaux entre 1930 et 1934.

4.1.5 Théorème du point fixe de Schauder (1930)

Le théorème de Schauder, prouvé en 1930 par le mathématicien polonais Juliusz Schauder, s'avère un outil indispensable en théorie du point fixe moderne.

Théorème 4.12 *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$, C une partie non vide de E, compact et convexe. Si T est une application continue de C dans C telle que $T(C)$ soit relativement compact, alors T a un point fixe.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ et $C \subset \cup_{x\in C} B(x,\varepsilon)$. D'aprés la compacité de C, il existe $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset C$ tel que $C \subseteq \cup_{i=1}^n B(x_i,\varepsilon)$. Soit $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ une partition continue et positive de l'unité de C tel que

$$\sum_{i=1}^n \phi_i(x) = 1, \forall\, x \in C \quad \text{et} \quad \sup(\phi_i) \subset B(x_i,\varepsilon), \quad \text{pour tout} \quad 1 \leq i \leq n.$$

Considérons alors l'application $T_\varepsilon\colon\ C \to C$ définie par

$$T_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i(T(x))x_i \;\forall\, x \in C.$$

D'après la continutié des fonctions ϕ_i, T et la convexité de C, T_ε est continue et $T_\varepsilon(C) \subset C$. De plus

$$T_\varepsilon\colon\ C \to C_\varepsilon = conv\{x_1, \ldots, x_n\} \subset C.$$

Maintenant, soit $x \in C$; alors $T(x) \in C$ et donc

$$\begin{aligned}
|T(x) - T_\varepsilon(x)| &= \left|\sum_{i=1}^{n} \phi_i(T(x))(x_i - T(x))\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \phi_i(T(x))|x_i - T(x)| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \phi_i(T(x))\varepsilon \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ceci entraine que

$$\sup\{|T(x) - T_\varepsilon(x)|\colon\ x \in C\} \leq \varepsilon.$$

Introduisons l'application continue

$$T|_{C_\varepsilon}\colon\ C_\varepsilon \to C_\varepsilon.$$

Soit F_ε un espace vectoriel engendé par $\{x_i, \ldots, x_n\}$; alors $dimF_\varepsilon = n$ et comme $C_\varepsilon \subset F_\varepsilon$ est un ensemble conevexe fermé et borné, alors d'après le théorème de Brouwer 4.10, il existe $x_\varepsilon \in C_\varepsilon$ tel que $x_\varepsilon = T_\varepsilon(x_\varepsilon)$. Posons $\{\varepsilon_n = 1/n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$. Puisque $x_{\varepsilon_{n_m}} = T(x_{\varepsilon_{n_m}})$. D'après la compacité de C, on en déduit que

$$\{x_{\varepsilon_{n_m}}\colon\ m \in \mathbb{N}\} \subset C.$$

Il existe donc une sous-suite $\{x_{\varepsilon_{n_m}}\colon\ m \in \mathbb{N}\}$ convergente vers $x_* \in C$. Montrons que $x_* = T(x_*)$. La continuité de T entraine que la suite image $T(x_{\varepsilon_{n_m}})$ converge vers $T(x_*)$.

$$\begin{aligned}
T(x_{\varepsilon_{n_m}}) &= T(x_{\varepsilon_{n_m}}) - x_{\varepsilon_{n_m}} + x_{\varepsilon_{n_m}} \\
&= T(x_{\varepsilon_{n_m}}) - T_{\varepsilon_{n_m}}(x_{\varepsilon_{n_m}}) + x_{\varepsilon_{n_m}}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\|T(x_{\varepsilon_{n_m}}) - x_*\| &\leq \|T(x_{\varepsilon_{n_m}}) - T_{\varepsilon_{n_m}}(x_{\varepsilon_{n_m}})\| + \|T_{\varepsilon_{n_m}}(x_{\varepsilon_{n_m}}) - x_*\| \\
&\leq \varepsilon_{n_m} + \|x_{\varepsilon_{n_m}} - x_*\| \to 0 \ \text{ lorsque } \ n \to +\infty.
\end{aligned}$$

Ceci exprime que $T(x_*) = x_*$. $\square$

Théorème 4.13 *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$, C une partie non vide de E, fermée et convexe. Si T est une application continue de C dans C telle que $T(C)$ soit relativement compacte, alors T admet un point fixe.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{T(C)} \subset \cup_{y \in T(C)} B(y, \varepsilon)$, alors il existe $\{y_1, \ldots, y_n\} \subset T(C)$ tel que $\overline{T(C)} \subseteq \cup_{i=1}^{n} B(y_i, \varepsilon)$. Soit $\{\phi_i\}_{i=1}^{n}$ une partition continue, positive de l'unité de $\overline{T(C)}$ tel que

$$\sum_{i=1}^{n} \phi_i(y) = 1, \ \forall\, y \in \overline{T(C)} \ \text{ et } \ \sup(\phi_i) \subset B(y_i, \varepsilon) \ \text{ pour tout } \ 1 \leq i \leq n.$$

Considérons alors l'application $T_\varepsilon \colon \overline{T(C)} \to \overline{T(C)}$ définie par

$$T_\varepsilon(y) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(y) y_i \ \forall\, y \in \overline{T(C)}.$$

D'après la continuté des fonctions ϕ_i et la convexité de C, T_ε est continue et $T_\varepsilon(\overline{T(C)}) \subset C$. De plus $T_\varepsilon \colon T(C) \to C_\varepsilon = conv\{y_1, \ldots, y_n\}$.

$$\begin{aligned} |T(x) - T_\varepsilon T(x)| &= \left| \sum_{i=1}^{n} \phi_i(T(x))(y_i - T(x)) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \phi_i(T(x)) |y_i - T(x)| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \phi_i(T(x)) \varepsilon \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Ceci entraine que

$$\sup\{|T(x) - T_\varepsilon(T(x))| \colon \ x \in C\} \leq \varepsilon.$$

Considérons l'application $T_\varepsilon|_{C_\varepsilon} \colon \ C_\varepsilon \to C_\varepsilon$. Par le même raisonnement du théorème 4.12, on peut montrer qu'il existe $y_\varepsilon \in T(C)$ tel que $T_\varepsilon(y_\varepsilon) = y_\varepsilon$. Posons $\left\{ \varepsilon_n = \dfrac{1}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0$. Puisque $y_{\varepsilon_n} = T_{\varepsilon_n}(y_{\varepsilon_n})$, alors

$$\{y_{\varepsilon_n} \colon \ n \in \mathbb{N}\} \subset \overline{T(C)}$$

car $\overline{T(C)}$ est compact ; alors il existe une sous-suite $\{y_{\varepsilon_{n_m}} \colon \ m \in \mathbb{N}\}$ convergente vers $y_* \in \overline{T(C)} \subset C$. Montrons que $y_* = T(y_*)$. La continuité de T entraine que $T(y_{\varepsilon_{n_m}})$ converge vers $T(y_*)$.

$$T(y_{\varepsilon_{n_m}}) \ = \ T(y_{\varepsilon_{n_m}}) - y_{\varepsilon_{n_m}} + y_{\varepsilon_{n_m}}$$

$$= \quad T(y_{\varepsilon_{nm}}) - T_{\varepsilon_{nm}}(y_{\varepsilon_{nm}}) + y_{\varepsilon_{nm}}$$

Donc

$$\begin{aligned} \|T(y_{\varepsilon_{nm}}) - y_*\| &\leq \|T(y_{\varepsilon_{nm}}) - T_{\varepsilon_{nm}}(y_{\varepsilon_{nm}})\| + \|T_{\varepsilon_{nm}}(y_{\varepsilon_n}) - y_*\| \\ &\leq \varepsilon_{n_m} + \|y_{\varepsilon_{n_m}} - y_*\| \to 0 \text{ lorsque } m \to +\infty. \end{aligned}$$

Ceci exprime le fait que $T(y_*) = y_*$. □

Enfin, on termine cette section par l'alternative non linéaire de Leray et Schauder

Théorème 4.14 *Soit E un e.v.n. et $B\colon = \overline{B}(0,R)$ une boule fermée. Supposons $f\colon B \longrightarrow E$ continue, compacte. Alors*

(a) *ou bien f possède un point fixe dans B.*

(b) *ou bien il existe $x \in \partial B$ et $\lambda \in (0,1)$ tel que $x = \lambda f(x)$.*

Démonstration. Soit $r\colon E \longrightarrow B$ une rétraction. Par le théorème de Schauder, la composition compacte $r \circ f\colon B \longrightarrow B$ possède un point fixe $x = r(f(x))$. Si $f(x) \in B$, alors $x = f(x)$ et donc f possède un point fixe ; autrement, par définition de la retraction r, $x = r(f(x)) = R\frac{f(x)}{\|f(x)\|}$; alors $x \in \partial B$, et prenant $\lambda = \frac{R}{\|f(x)\|}$, le résultat en découle. □

Comme consequence, on a

Théorème 4.15 *(Théorème de Schaefer, 1955) Soit $f\colon E \longrightarrow E$ une application compacte, continue. Alors*

(a) *ou f possède un point fixe dans E.*

(b) *ou bien pour tout $\lambda \in (0,1)$, l'ensemble $\{x \in E;\ x = \lambda f(x)\}$ est non borné.*

4.2 Mesure de non compacité de Kuratowski et opérateurs condensants

4.2.1 Mesure de non compacité

Définition 4.3 *Soit E un espace de Banach et $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties bornées de E. Pour tout $A \in B$, on définit $\alpha(A) = \inf\, D$ où*

$$D = \{d > 0\colon\ A \text{ admits a finite cover by sets of diamater } \leq d\}.$$

α est appelée mesure de non compacité de Kuratowski[1], *$(\alpha - MNC)$. Elle vérifie les propriétés suivantes (voir par exemple [29]).*

Proposition 4.2 *Pour A, $B \in \mathcal{B}$, on a*

(a) $0 \leq \alpha(A) \leq diam(A)$.

(b) $A \subset B \implies \alpha(A) \leq \alpha(B)$ *(α est croissante).*

(c) $\alpha(A \cup B) = \max(\alpha(A), \alpha(B))$.

(d) $\alpha(A + B) \leq \alpha(A) + \alpha(B)$ *(α est sous-additive).*

(e) $\alpha(A + x) = \alpha(A)$, $\forall\, x \in X$ *(α est invariante par translation).*

(f) $\alpha(Conv\, A)) = \alpha(A)$.

(g) $\alpha(A) = \alpha(\bar{A})$.

(h) $\alpha(A) = 0 \iff A$ *est relativement compacte.*

(i) α *est une semi-norme sur* $\mathcal{P}(X)$.

4.2.2 Opérateurs condensants

Définition 4.4 *Soit E_1, E_2 deux espaces de Banach et $f\colon\, E_1 \longrightarrow E_2$ une application continue qui envoie les bornés de E_1 sur les bornés de E_2.*

(a) *f est dite $\alpha-$lipschitz s'il existe $k \geq 0$ tel que*

$$\alpha(f(A)) \leq k\alpha(A), \quad \textit{pour tout sous-ensemble borné } A \subset E_1.$$

(b) *On parle de $\alpha-$contraction stricte lorsque $k < 1$.*

(c) *f est dite $\alpha-$condensante si*

$$\alpha(f(A)) < \alpha(A), \quad \textit{pour tout sous-ensemble borné } A \subset E_1 \textit{ avec } \alpha(A) \neq 0.$$

Remarque 4.3 *Soit $A \subset E_1$ un sous-ensemble fermé et f une application $\alpha-$condensante. Alors $I - f$ est propre (la pre-image de tout compact de E_2 est un compact de E_1) ; en particulier, $I - f$ est une application fermée. En effet, si $A = (I - f)^{-1}(B)$ avec B compact, alors A est fermé car f est continue et B est fermée. De plus,*

$$\alpha(A) \leq \alpha(f(A)) + \alpha(B) = \alpha(f(A))$$

et donc $\alpha(A) = 0$.

[1] Kuratowski, K. (1930). Sur les espaces complets. Fund. Math. 15, pp. 301-309.

Nous mentionnons ci-desous le théorème de Schauder généralisé.

Théorème 4.16 *Soit E un espace de Banach, $C \subset E$ partie non vide, fermée, bornée et convexe ; soit $f\colon C \longrightarrow C$ une application $\alpha-$condensante. Alors f admet un point fixe.*

Démonstration. Sans perte de généralité, supposons que $0 \in C$.

• Si f est une $\alpha-$contraction avec constante $k < 1$, on définit la suite décroissante (C_n) par $C_0 = C$ et $C_n = \overline{conv}\,(f(C_{n-1}))$ pour $n \geq 1$. On a $\alpha(C_n) \leq k\alpha(C_{n-1}) \leq \cdots \leq k^n\alpha(C_0) \to 0$ quand $n \to \infty$. Alors, on peut vérifier que $\tilde{C} = \bigcap C_n$ est compact. De plus, $\tilde{C}$ est convexe et f envoie $\tilde{C}$ dans lui-même. D'après le théorème de Schauder, f admet un point fixe dans $\tilde{C} \subset C$.

• dans le cas général, l'application $k_n f\colon C \longrightarrow C$ est une $\alpha-$contraction et donc possède, d'après la première étape, un point fixe x_n. On peut choisir $k_n \to 1^-$ quand $n \to \infty$ de telle sorte que $x_n - f(x_n) = (k_n - 1)f(x_n) \to 0$ et donc $x = f(x)$ pour $x \in C$, puisque $(I - f)(C)$ est fermé, ce qui termine la démonstration. □

On termine enfin la section par une alternative non linéaire (pour la démonstration, voir [1])

Théorème 4.17 *Soit E un espace de Banach, $C \subseteq E$ une partie fermée, convexe et $0 \in \Omega \subset C$ telle que $f(\bar{\Omega})$ soit borné. Soit : $\bar{\Omega} \longrightarrow C$ une application condensante. Alors :*

(a) *ou bien f possède un point fixe dans $\bar{\Omega}$.*

(b) *ou bien il existe $x \in \bar{\Omega}$ et $\lambda \in (0,1)$ tels que $x = \lambda f(x)$.*

4.3 Cas des fonctions multivoques

Définition 4.5 *Soit (X, τ_1) et (Y, τ_2) deux espaces topologiques et*

$$F\colon X \to \mathcal{P}(Y)$$

une application multivoque. On dit que $x \in X$ est un point fixe de F si $x \in F(x)$.

Définition 4.6 *Soit (X, d) un espace métrique. Un opérator multivoque*

$$F\colon X \to \mathcal{P}_{f,b}(X)$$

est appelée contraction sur X s'il existe un nombre réel positif $0 < M < 1$ tel que pour tout $x, y \in X$

$$H_d(F(x), F(y)) \leq Md(x, y).$$

4.3.1 Théorème du point fixe de Covitz et Nadler Jr

Théorème 4.18 *Soit* (X, d) *un espace métrique complet et* $F\colon X \to \mathcal{P}(X)$ *une contraction. Alors* F *admet au moins un point fixe.*

Démonstration. Soit $x \in X$. Alors

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \ \forall\, z \in F(x), \ y \in X$$

et donc

$$d(x, y) \leq d(x, F(x)), \ y \in F(x).$$

Considérons l'ensemble

$$D(x, d(x, F(x)) = \{y \in X\colon \ d(x, y) \leq d(x, F(x))\} \Rightarrow D(x, d(x, F(x)) \cap F(x) \neq \emptyset.$$

Si $x_1 \in D(x, F(x)) \cap F(x)$, alors $d(x, x_1) \leq d(x, F(x))$. Pour $x_2 \in F(x_1)$, on a

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2) &\leq d(x_1, F(x)) + d(F(x), x_2) \\ &\leq H_d(F(x), F(x_1)) \\ &\leq Md(x, x_1) \leq Md(x, F(x)). \end{aligned}$$

$x_2 \in F(x_1)$. Il existe donc $x_3 \in F(x_2)$ tel que

$$\begin{aligned} d(x_2, x_3) &\leq d(x_2, F(x_2)) + d(F(x_1), x_3) \\ &\leq H_d(F(x_1), F(x_2)) \\ &\leq Md(x_1, x_2) \leq M^2 d(x, F(x)). \end{aligned}$$

Par récurrence

$$d(x_n, x_{n-1}) \leq M^{n-1} d(x, F(x)) \ n \in \mathbb{N}.$$

Puisque $M \in]0, 1[$, alors $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy dans X. Il existe donc $x_* \in X$ tel que $x_* = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n$. Montrons que $x_* \in F(x_*)$. Il clair que F est $H_d - u.s.c$ et donc F est à graphe fermée. La suite $x_n \in F(x_{n-1})$, x_n converge vers x_* et x_{n-1} aussi converge vers la même limite de x_n; alors $x_* \in F(x_*)$. $\square$

4.3.2 Théorème de point fixe de Bohnenblust et Karlin

Théorème 4.19 *Soit* $(X, \|\cdot\|)$ *un espace normé,* $C \in \mathcal{P}_{cp,cv}(X)$ *et* $F\colon C \to \mathcal{P}_{f,cv}(C)$ *est un opérateur multivoque semi-continu supérieurement. Alors* F *admet au moins une point fixe.*

Démonstration. (Voir aussi [23] ou [69]) Soit $\varepsilon > 0$ et $C \subset \cup_{x\in C} B(x,\varepsilon)$. D'après la compacité de C, il existe $\{x_1,\ldots,x_n\} \subset C$ tel que $C \subseteq \cup_{i=1}^{n} B(x_i,\varepsilon)$. Soit $\{\phi_i\}_{i=1}^{n}$ une partition continue, positive de l'unité de C telle que

$$\sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) = 1 \;\forall\, x \in C \quad \text{et} \quad \sup(\phi_i) \subset B(x_i,\varepsilon) \;\; \text{pour tout} \;\; 1 \leq i \leq n.$$

Pour tout x_i, on choisit $y_i \in F(x_i)$ $i = 1,\ldots,n$. Considérons l'opérateur

$$T_\varepsilon \colon\, C \to C$$

défini par

$$T_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) y_i \;\forall\, x \in C.$$

D'après la continuité des fonctions ϕ_i et la convexité de C, l'opérateur T_ε est continu et $T_\varepsilon(C) \subset C$. D'après le théorème 4.13, il existe $x_\varepsilon \in C$ tel que $x_\varepsilon = T_\varepsilon(x_\varepsilon)$. Pour $\{\varepsilon_n = \dfrac{1}{n} \colon\, n \in \mathbb{N}\}$, on a $\{x_{\varepsilon_n}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{T_{\varepsilon_n}(x_{\varepsilon_n})\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C$. Puisque C est compact, il existe une sous-suite $\{x_{\varepsilon_{n_m}} \colon\, m \in \mathbb{N}\}$ convergente vers $x_* \in C$. Montrons que $x_* \in F(x_*)$. Supposons que $x_* \notin F(x_*)$; alors il existe $\eta > 0$ tel que

$$x_* \in U_{\frac{\eta}{2}}(F(x_*)) = \{x \in X \colon\, \|x - F(x_*)\| < \frac{\eta}{2}\} \in \mathcal{V}(F(x_*)).$$

Comme F est s.c.s., il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall\, z \in U_\delta(x_*) = \{z \in X \colon\, \|z - x_*\| < \delta\} \in \mathcal{V}(x_*) \Rightarrow F(z) \in U_{\frac{\eta}{2}}(F(x_*)).$$

Posons

$$U_r(x_*) = \{z \in X \colon\, \|z - x_*\| < r := \min(\frac{\eta}{2},\delta)\}.$$

Il clair que pour tout $z \in U_r(x_*) \cap C$, $F(z) \in U_{\frac{\eta}{2}}(F(x_*))$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$, alors pour tout $r > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq N$ et donc $\dfrac{1}{n} < r$. Par suite

$$U_{r-\varepsilon_n}(x_*) \cap C \subset U_r(x_*) \cap C \;\forall\, n \geq N.$$

Si $z \in U_{r-\varepsilon_n}(x_*) \cap C$, alors il existe $x_i \in \{x_1,\ldots,x_n\}$ tel que $\|z - x_i\| < \dfrac{1}{n}$ et

$$\|x_* - x_i\| \leq \|x_* - z\| + \|z - x_i\| < r < \delta \;\; \text{et} \;\; Ax_i \in U_{\frac{\eta}{2}}(F(x_*)).$$

En utilisant la convexité de $U_{\frac{\eta}{2}}(F(x_*))$, on obtient

$$T_{\varepsilon_n}(z) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(z) y_i \in U_{\frac{\eta}{2}}(F(x_*)).$$

Pour $\frac{r}{2} > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\frac{1}{n} < \frac{r}{2}$, on a que $\varepsilon_n < r - \varepsilon_n$. Donc pour tout $x_{\varepsilon_n} \in U_{r-\varepsilon_n}(x_*) \cap C$, on a $T_{\varepsilon_n}(x_{\varepsilon_n}) \in U_{\frac{\eta}{2}}(F(x_*))$. Finalement

$$\begin{aligned} \|x_* - F(x_*)\| &\leq \|x_* - x_{\varepsilon_n}\| + \|x_{\varepsilon_n} - T_{\varepsilon_n}(x_{\varepsilon_n})\| + \|T_{\varepsilon_n}(x_{\varepsilon_n}) - F(x_*)\| \\ &< \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta \Rightarrow x_* \in U_{\frac{\eta}{2}}(F(x_*)), \end{aligned}$$

ce qui conduit à une contradiction avec $x_* \notin U_{\frac{\eta}{2}}(F(x_*))$. □

Théorème 4.20 *Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace normé, $B \in \mathcal{P}_{f,cv,b}(X)$ et $F\colon B \to \mathcal{P}_{f,cv}(B)$ un opérateur multivoque semi-continu supérieurement et compact. Alors F admet au moins un point fixe.*

4.3.3 Alternative Nonlinéaire de Leray-Schauder

Théorème 4.21 *Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace normé et $F\colon X \to \mathcal{P}_{f,cv}(X)$ un opérateur multivoque, semi-continu supérieurement et compact. Alors au moins l'une des assertions suivantes est vérifiée :*

i) F admet au mons un point fixe,

ii) l'ensemble

$$\mathcal{M} := \{x \in X,\ x \in \lambda F(x),\ \lambda \in]0,1[\}$$

est non borné.

Démonstration. Supposons que l'ensemble $\mathcal{M}$ soit borné, alors $F(\mathcal{M})$ est relativement compact et donc il existe $r > 0$ tel que

$$F(\mathcal{M}) \subset B_r = \{x \in X\colon\ \|x\| \leq r\}.$$

Considérons l'ensemble

$$B := B_{2r}, K := \sup\{\|y\|\colon\ y \in F(B_{2r})\}, k := \max(K, 2r+1)$$

et introduisons l'opérateur multivoque $G\colon\ B \to \mathcal{P}(X)$ défini par

$$G(x) = \begin{cases} F(x) \cap B, & \text{si } F(x) \cap B \neq \emptyset\,; \\ \dfrac{2r}{k} F(x), & \text{si } F(x) \cap B = \emptyset. \end{cases}$$

Montrons que G satisfait les conditions du théorème 4.20.

a) $G(B) \subseteq B$. Soit $y \in G(B)$; alors il existe $x \in B$ tel que $y \in B$ et $y \in G(x)$ donc $y \in F(x) \cap B$ or $y \in \dfrac{2r}{k} F(x)$. Dans le premier cas $y \in B$. Si $y \in \dfrac{2r}{k} F(x)$, alors il existe $z \in F(x)$ tel que $y = \dfrac{2r}{k} z$

$$\|y\| = \frac{2r}{k}\|z\| \leq \frac{2r}{k} \sup\{\|z\|\colon\ z \in F(x)\} \leq \frac{2r}{k} K \leq r.$$

b) $G \in \mathcal{P}_{cv}(B)$. Soit $y_1, y_2 \in G(x)$ au $x \in B$. Montrons que

$$\alpha y_1 + (1-\alpha) y_2 \in G(x),\ \ \alpha \in [0,1].$$

Puisque $F(x)$ est convexe, alors

$$\alpha y_1 + (1-\alpha) y_2 \in G(x).$$

c) G est s.s.c. Comme G est compact, il suffit de montrer que G est à graphe fermé. Soit $\{x_n\} \subset B$, $x_n \to x$ et $y_n \in G(x_n)$ tel que $y_n \to y$. Montrons que $y \in G(x)$. Considérons le cas

$$\{y_n\} \subset B, \ \ \text{il existe une sous suite de } \ \{y_n\colon\ n \in \mathbb{N}\} \ \text{ tel que } \ \|y_{n_p}\| \leq 2r \tag{4.4}$$

et

$$\text{il existe une sous suite de } \ ; \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \ \text{ telle que } ; \ \|y_{n_p}\| > 2r. \tag{4.5}$$

Deux situations se présentent :

- (4.4) on a $y_{n_p} \in G(x_{n_p}) = F(x_{n_p}) \cap B$. Puisque F est à graphe fermé et B est un ensemble fermée, alors $y \in G(x) = F(x) \cap B$.
- Si $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ vérfie (4.5), alors

$$y_{n_p} \in \frac{2r}{k} F(x_{n_p}) \Rightarrow \frac{k}{2r} y_{n_p} \in F(x_{n_p}).$$

Donc $y \in \dfrac{2r}{k} F(x)$; ce qui montre que G est s.c.s.

d) $G \in \mathcal{P}_f(B)$. Soit $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in G(x)$ tel que $y_n \to y$. Montrons que $y \in G(x)$. D'après la définition de G on a que $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in F(x) \cap B$ or $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in G(x) = \dfrac{2r}{k} F(x)$. Comme F est à valeurs fermées et B est fermée, alors $y \in G(x)$.

e) $G(B)$ est relativement compact. Soit $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset G(B)$ une suite ; donc il existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in B$ telle que

$$y_n \in G(x_n)\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow y_n \in F(x_n) \cap B \ \text{ ou } \ y_n \in \frac{2r}{k} F(x_n)\ n \in \mathbb{N}.$$

On en déduit que

$$\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in F(B) \ \text{ ou } \ \{\frac{k}{2r} y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in F(B).$$

D'après la compacité de F, on peut extraire de y_n une suite y_m telle que

$$y_m \in F(x_m) \cap B \ \text{ et } \ y_m \to y \in \overline{F(B)}$$

ou

$$y_m \in \frac{2r}{k} F(x_m) \ \text{ et } \ y \in \frac{2r}{k} \overline{F(B)}.$$

Ceci montre que $G(B)$ est relativement compact. Utilisant le théorème 4.20, on obtient l'existence de $x \in B$ tel que $x \in G(x)$. Montrons que $x \in F(x)$. Deux cas peuvent avoir lieu : soit $F(x) \cap B \neq \emptyset$ alors $x \in F(x)$, soit

$$F(x) \cap B = \emptyset \ \text{ et } \ x \in G(x) \Rightarrow \ \text{ il existe } \ y \in F(x),\ \|y\| > 2r\colon\ x = \frac{2r}{k} y.$$

Comme

$$x = \frac{2r}{k} y \Rightarrow y = \frac{k}{2r} x \Rightarrow 2r < \|y\| \leq k \Rightarrow \frac{2r}{k} < 1$$

alors

$$x \in \mathcal{M} \Rightarrow y \in F(\mathcal{M}) \Rightarrow \|y\| \leq r \Rightarrow 2r < r.$$

C'est donc que $F(x) \cap B = \emptyset$ est impossible.

□

4.3.4 Alternative nonlinéaire de Martelli

Théorème 4.22 *Soit E un espace de Banach et $f\colon E \longrightarrow \mathcal{P}_{cp,cv}$ une application multivoque s.c.s. et condensante. Alors :*

(a) *ou bien f possède un point fixe dans E.*

(b) *ou bien l'ensemble*

$$\{x \in E\colon\ \lambda x \in G(x),\quad \textit{pour } \lambda > 1\}$$

est non borné.

4.3.5 Alternative Nonlinéaire de Bader

Pour la démonstration, on peut se référer à [12] ou bien à [46], p. 346). On peut ausi noter que l'opérateur N n'est pas necessairement à valeurs convexes.

Théorème 4.23 *Soit X, Y deux espaces de Banach avec Y réflexif. Considérons les applicatins $F : X \to \mathcal{P}_{cp,cv}(Y)$ s.c.s. et $K : Y \to X$ continues. Si $N :\, = K \circ F$ est complètement continue, alors l'une des assertions suivantes a lieu :*

(a) ou bien l'ensemble $\{u \in X : u \in \lambda N(u)$ pour $0 < \lambda < 1\}$ est non borné.

(b) ou bien N possède un point fixe, i.e. il exist $u \in X$ tel que $u \in N(u)$.

4.3.6 Alternative Nonlinéaire de Dhage

Théorème 4.24 *[31] Soit $B(0, r)$ et $B[0, r]$ respectivement les ouverte et fermée dans un espace de Banach E centrée à l'origine et de rayon r et soit $\mathcal{A} : B[0, r] \to \mathcal{P}_{cl,c,b}(E)$ et $\mathcal{B} : B[0, r] \to \mathcal{P}_{cp,c}(E)$ deux opérateurs multivoques vérifiant*

(i) $\mathcal{A}$ est une contraction multivoque

(ii) $\mathcal{B}$ estcompact et s.c.s.

Alors ou

(a) l'opérateur d'inclusion $x \in \mathcal{A}x + \mathcal{B}x$ possède une solution dans $B[0, r]$, ou

(b) il existe $x_0 \in E$ avec $\|x_0\| = r$ tel que $\lambda x_0 \in \mathcal{A}x_0 + \mathcal{B}x_0$ pour $\lambda > 1$.

Chapitre 5

Quelques problèmes d'inclusions différentielles

5.1 Solutions positives multiples à un problème aux limites

Considérons le problème aux limites (voir [45]

$$\begin{aligned} Lu \in \lambda F(t,u), \quad 0 < t < 1\,, \\ \alpha u(0) - \beta u'(0) = 0, \quad \gamma u(1) + \delta u'(1) = 0, \end{aligned} \tag{5.1}$$

où $Lu = -(ru')' + qu$, $r \in C^1[0,1]$, $q \in C[0,1]$ avec $r > 0$, $q \geq 0$ sur $[0,1]$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \quad \geq 0$ avec $\alpha\delta + \alpha\gamma + \beta\gamma \quad > 0$, $F\colon [0,1] \times [0,+\infty) \to P([0,+\infty))$, et λ est un paramètre positif.

Lorsque F est continue, l'existence de solutions positives au problème (5.1) a été prouvée dans [40]. On notera par $C_+[0,1]$ $(L^1_+[0,1])$ le cone des fonctions positives continues (respectivement integrable) sur $[0,1]$. $C_+[0,1] \quad (L^1_+[0,1])$ seront considérés comme des sous-espaces de $C[0,1]$ (respectivement de $L^1[0,1]$) muni de la topologie induite.

5.1.1 Existence de solutions positives

Soit $G(t,s)$ la fonction de Green pour (5.1). Alors u est solution de (5.1) si et seulement si

$$u(t) \in \lambda \int_0^1 G(t,s)F(s,u(s))ds.$$

Rappelons que

$$G(t,s) = \begin{cases} c^{-1}\phi(t)\psi(s) & \text{if } t \leq s \\ c^{-1}\phi(s)\psi(t) & \text{if } s \leq t, \end{cases}$$

où ϕ et ψ vérifient

$$L\phi = 0, \quad \phi(0) = \beta, \quad \phi'(0) = \alpha,$$
$$L\psi = 0, \quad \psi(1) = \delta, \quad \psi'(1) = -\gamma$$

et $c = r(t)(\phi'(t)\psi(t) - \psi'(t)\phi(t)) > 0$. Notons que $\phi' > 0$ sur $(0,1]$ et $\psi' < 0$ sur $[0,1)$. Soit $G = \max\{G(t,s) : 0 \leq t, s \leq 1\}$. Considérons les hypothèses suivantes :

(H1) Pour tout $x \in [0,+\infty)$ l'application multivoque $F(\cdot,x)\colon [0,1] \to Kv([0,+\infty))$ possède une selection mesurable $f(t) \in F(t,x)$ p.p. $t \in [0,1]$.

(H2) Pour p.p $t \in [0,1]$, l'application multivoque $F(t,\cdot)\colon [0,+\infty) \to Kv([0,+\infty))$ est s.c.s.

(H3) Il existe une function positive $\omega \in L^1[0,1]$ telle que

$$\|F(t,x)\| \leq \omega(s)(1+x),$$

pour tout $x \in [0,+\infty)$ et p.p. $t \in [0,1]$.

(H4) L'opérateur multivoque $F\colon [0,1] \times [0,+\infty) \to K([0,\infty))$ est presque s.c.i., i.e. il existe une suite d'ensembles compacts disjoints $\{I_m\}, I_m \subset [0,1]$ telle que :

(i) $\text{meas}([0,1] \setminus \bigcup_m I_m) = 0$.

(ii) La restriction de F à chaque ensemble $J_m = I_m \times [0,\infty)$ est s.c.i.

Le résultat principal de cette section est le suivant (voir [45] :

Théorème 5.1 *Sous les hypothèses (H1)–(H3), si le problème* (5.1) *n'a pas de solution triviale, alors pour chaque* $0 < \lambda < \frac{1}{G\int_0^1 \omega(s)ds}$, (5.1) *possède une solution positive.*

Théorème 5.2 *Sous les hypothèses (H1)–(H4), si le problème* (5.1) *n'a pas de solution triviale, alors pour chaque* $0 < \lambda < \frac{1}{G\int_0^1 \omega(s)ds}$, (5.1) *possède une solution positive.*

Démonstration. [du théorème 5.1] Des hypothèses (H1)–(H3), on déduit que l'opérateur de sélection superposition

$$S_F\colon C_+[0,1] \to Cv(L^1_+[0,1]),$$

$$S_F(u) = \{f \in L^1_+[0,1] : f(s) \in F(s,u(s)) \text{ p.p. } s \in [0,1]\}.$$

est continue, fermée (voir, par exemple [24]). Considérons l'opérateur complètement continu

$$Q_\lambda \colon L^1_+[0,1] \to C_+[0,1], \quad Q_\lambda(f)(t) = \lambda \int_0^1 G(t,s)f(s)ds,$$

Posons $\Gamma_\lambda = Q_\lambda \circ \wp_F$. De [24, Theorem 1.5.30], le multi-opérateur Γ_λ est fermé. On peut facilement montrer que pour tout sous-ensemble borné $U \subset C_+[0,1]$, l'ensemble image $\Gamma_\lambda(U)$ est relativement compact dans $C_+[0,1]$. En vertu du théorème [24, Theorem 1.2.48], le multi-opérateur de Hammerstein

$$\Gamma_\lambda \colon C_+[0,1] \to Kv(C_+[0,1]),$$
$$\Gamma_\lambda(u) = \lambda \int_0^1 G(t,s)F(s,u(s))ds.$$

est s.c.s. Posons $T_+ = \{u \in C_+[0,1] : \|u\|_C \leq \rho, \text{ où } \rho > 0\}$. Pour $u \in T_+$, on a

$$\big\|\Gamma_\lambda(u)\big\|_C = \max\big\{\big\|\lambda \int_0^1 G(t,s)f(s)ds\big\|_C : f \in \wp_F(u)\big\},$$

où

$$\| \int_0^1 G(t,s)f(s)ds\big\|_C = \sup_{t\in[0,1]} \big\{ \int_0^1 G(t,s)f(s)ds\big\}.$$

Comme $f(s) \in F(s,u(s))$ p.p. $s \in [0,1]$ et (H3), p.p. $s \in [0,1]$, on a

$$f(s) \leq \|F(s,u(s))\| \leq \omega(s)(1+u(s)) \leq \omega(s)(1+\|u\|_C) \leq \omega(s)(1+\rho).$$

Par conséquent

$$\int_0^1 G(t,s)f(s)ds \leq G(1+\rho)\int_0^1 \omega(s)ds,$$

et donc

$$\| \int_0^1 G(t,s)f(s)ds\big\|_C \leq G(1+\rho)\int_0^1 \omega(s)ds.$$

Comme la dernière inégalité a lieu pour tout $f \in S_F(u)$,

$$\|\Gamma_\lambda(u)\|_C \leq \lambda G(1+\rho)\int_0^1 \omega(s)ds.$$

Choisissons $\rho \geq \frac{\lambda G \int_0^1 \omega(s)ds}{1-\lambda G\int_0^1 \omega(s)ds}$; alors $\|\Gamma_\lambda(u)\|_C \leq \rho$, i.e., Γ_λ envoie l'ensemble T_+ dans lui-même. L'existence de solution positive au problem (5.1) découle alors du théorème du point fixe de Bohnenblust-Karlin . $\square$

Démonstration. [du théorème 5.2] Des conditions (H3)–(H4), on déduit que

$$S_F \colon C_+[0,1] \to C(L^1_+[0,1])$$

est un multi-opérateur s.c.i. à valeurs décomposables fermées (voir, par exemple [24]).

Considérons le multi-opérateur de Hammerstein $\Gamma_\lambda = Q_\lambda \circ \wp_F$. Par le lemme 5.5, le multi-opérateur de sélection S_F possède une selection continue

$$\ell \colon C_+[0,1] \to L^1_+[0,1], \quad \ell(u) \in S_F(u).$$

Par suite l'opérateur

$$\gamma_\lambda \colon C_+[0,1] \to C_+[0,1], \quad \gamma_\lambda(u)(t) = \lambda \int_0^1 G(t,s)\ell(u)(s)ds,$$

est est une sélection complètement continue de la multi-application Γ_λ. Comme montré ci-dessus, pour chaque $0 < \lambda < \frac{1}{G\int_0^1 \omega(s)ds}$, on peut choisir $\rho > 0$ tel que le multi-opeéateur Γ_λ envoie T_+ dans lui-même. D'après le théorème du point fixe de Schauder, l'perateur γ_λ admet au moins un point fixe T_+, i.e., le problème (5.1) admet une solution positive. □

5.1.2 Existence de solutions multiples

Considérons les hypothèses suivantes :

(F1) $F \colon (0,1) \times [0,+\infty) \to Kv([0,+\infty))$ est s.c.i.

(F2) Pour chaque $M > 0$, il existe une fonction continue g_M sur $(0,1)$ telle que $\|F(t,x)\| \leq g_M(t)$ pour $t \in (0,1), \quad x \in [0,M]$, et

$$\int_0^1 G(s,s)g_M(s)ds < \infty.$$

(F3) Il existe un intervalle $I \subset (0,1)$ et une fonction non triviale $m \in L^1(I)$ avec $m \geq 0$ tel que pour tout $b > 0$, il existe $r_b > 0$ tel que

$$\|F(t,x)\|_0 \geq bm(t)x \quad \text{for } t \in I,\ x \in (0,r_b);$$

(F4) Il existe un intervalle $I_1 \subset (0,1)$ et une fonction non triviale $m_1 \in L^1(I_1)$ avec $m_1 \geq 0$ tels que pour tout $c > 0$, il existe $R_c > 0$ tel que

$$\|F(t,x)\|_0 \geq c\, m_1(t)x \quad \text{for } t \in I_1,\ x \geq R_c;$$

Alors, on se propose de démontrer le

Théorème 5.3 *Admettons que les hypothèses (F1)–(F3) ont lieu. Alors il existe* $\lambda_0 > 0$ *tel que le problème* (5.1) *possède une solution positive pour* $0 < \lambda < \lambda_0$. *Si, de plus, (F4) a lieu, alors le problème* (5.1) *a au moins deux solutions positives pour* $0 < \lambda < \lambda_0$

Pour la démonstration, on aura besoin du lemme suivant (voir, par exemple [24, 55]).

Lemme 5.1 *Soit* X *un espace métrique et* Y *un espace de Banach. Alors chaque multi-application s.c.i.* $W\colon X \to Cv(Y)$ *possède une sélection continue.*

Démonstration. [du théorème 5.3] Soit $f\colon (0,1)\times[0,+\infty) \to [0,+\infty)$ une sélection continue de F, i.e.,

$$f(t,x) \in F(t,x) \quad \text{for all } (t,x) \in (0,1)\times[0,+\infty).$$

Il est facile de voir que pour tout $(t,x) \in (0,1)\times[0,+\infty)$, on a

$$\|F(t,x)\|_0 \le f(t,x) \le \|F(t,x)\|.$$

Considérons le problème

$$Lu = \lambda f(t,u), \quad 0 < t < 1, \tag{5.2}$$

avec les conditions dans (5.1). D'après (F1)–(F4), on a

(f1) L'application $f\colon (0,1)\times[0,+\infty) \to [0,+\infty)$ est continue ;

(f2) Pour chaque $M > 0$, il existe une fonction continue g_M on $(0,1)$ telle que $f(t,x) \le g_M(t)$ pour $t \in (0,1)$, $0 \le x \le M$ et

$$\int_0^1 G(s,s)g_M(s)ds < \infty.$$

(f3) Il existe un intervalle $I \subset (0,1)$ et une fonction non triviale $m \in L^1(I)$ avec $m \ge 0$ telle que pour chaque $b > 0$, il existe $r_b > 0$ tel que

$$f(t,x) \ge bm(t)x, \quad \text{for } t \in I,\ x \in (0,r_b);$$

Si $(F4)$a lieu, on a

(f4) Il existe un intervalle $I_1 \subset (0,1)$ et une fonction non triviale $m_1 \in L^1(I_1)$ avec $m_1 \ge 0$ telle que pour chaque $c > 0$, il existe $R_c > 0$ telle que

$$f(t,x) \ge c\,m_1(t)x, \quad \text{for } t \in I_1, \quad x \ge R_c;$$

De [40, Theorem 1.1], on déduit qu'avec les hypothèses (f1)–(f3), il existe $\lambda_0 > 0$ tel que le problème (5.2) possède une solution positive pour $0 < \lambda < \lambda_0$. Si, de plus l'hypothèse $(f4)$ est satisfaite, alors le problème (5.2) possède au moins deux solutions pour $0 < \lambda < \lambda_0$. □

5.2 Problème aux limites associé à un système perturbé

Considérons le problème pour un système d'inclusions différentielles du premier ordre (voir [16])

$$x'(t) \in A(t)x(t) + F(t, x(t)) + G(t, x(t)), \text{ p.p. } t \in [0, 1]; \tag{5.3}$$

$$Mx(0) + Nx(1) = \eta, \tag{5.4}$$

où $F, G : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ sont des multi-applications à valeurs convexes. $A(.)$ est une fonction matrice continue $(n\times n)$; M, N sont des matrices constantes $(n\times n)$ et $\eta \in \mathbb{R}^n$. Notons par $\|x\|$ la norme de $x \in \mathbb{R}^n$ et par $\|A\|$ la norme de la matrice A.

Définition 5.1 *Une fonction $x \in AC((0, 1), \mathbb{R}^n)$ est solution de (5.20)-(5.21) s'il existe des fonctions $v_1, v_2 \in L^1([0, 1], \mathbb{R}^n)$ avec $v_1(t) \in F(t, x(t))$ p.p. $t \in [0, 1]$ et $v_2(t) \in G(t, x(t))$ p.p. $t \in [0, 1]$ tel que $x'(t) = A(t)x(t) + v_1(t) + v_2(t)$ p.p. $t \in [0, 1]$ et la fonction x vérifie la condition $Mx(0) + Nx(1) = 0$.*

Nous aurons à utiliser le lemme suivant qui se montre par des arguments standards de la théorie des systèmes différentiels.

Lemme 5.2 *Soit le problème aux limites linéaire*

$$x'(t) = A(t)x(t) + h(t), \textit{ p.p. } t \in (0, 1), \tag{5.5}$$

$$Mx(0) + Nx(1) = 0. \tag{5.6}$$

et soit $\Phi(t)$ une matrice fondamentale solution de $x'(t) = A(t)x(t)$, telle que $\Phi(0) = I$, représente la matrice identité $n \times n$. On peut vérifier facilement que si $det(M + N\Phi(1)) \neq 0$, alors le problème non homogène (5.22)-(5.29) possède une solution unique donnéee par

$$x(t) = \int_0^1 K(t, s)h(s)ds$$

où la fonction de Green $K(t,s)$ est donnée par

$$K(t,s) = \begin{cases} \Phi(t)J(s), & 0 \leq t \leq s, \\ \Phi(t)\Phi(s)^{-1} + \Phi(t)J(s), & s \leq t \leq 1, \end{cases}$$

avec

$$J(t) = -(M + N\Phi(1))^{-1}N\Phi(1)\Phi(t)^{-1}.$$

Le lemme suivant est ausi facile à vérifier

Lemme 5.3 *Considérons le problème aux limites linéaire non homogène*

$$x'(t) = A(t)x(t) + h(t), \quad p.p. \;\; t \in (0,1), \tag{5.7}$$

$$Mx(0) + Nx(1) = \eta \tag{5.8}$$

et soit x_H solution du problème (5.22)-(5.29). Avec les notations du Lemme 5.4, la solution du problème (5.30)-(5.31) s'écrit

$$x(t) = x_H(t) + \Phi(t)\left(M + \Phi(1)N\right)^{-1}\eta.$$

Nous allons transformer le problème (5.20)-(5.21) en un problème de point fixe en considérant l'operateur $\mathcal{N} : C([0,1],\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{P}(C([0,1],\mathbb{R}^n))$ defined by

$$\mathcal{N}(x) = \{u \in C([0,1],\mathbb{R}^n) : \; u(t) = \int_0^1 K(t,s)(v_1(s)+v_2(s))ds, \; v_1 \in S_{F,x} \text{ and } v_2 \in S_{G,x}\}.$$

Remarque 5.1 **(a)** *Grâce au lemme 5.3, nous traitons uniquement le problème (5.20)-(5.21) avec $\eta = 0$.*

(b) *Par le lemma 5.4, il est clair que les points fixes de $\mathcal{N}$ sont solutions du problème (5.20)-(5.21).*

Les hypothèses suivantes sont utiles pour la suite

(H1) La fonction $t \to F(t,y)$ est mesurable, à valeurs convexes et intégrablement bornée pour chaque $y \in \mathbb{R}^n$.

(H2) $H_d(F(t,y),F(t,\overline{y})) \leq l(t)\|y-\overline{y}\|$ pour p.p. $t \in [0,1]$ et tout $y,\overline{y} \in \mathbb{R}^n$ où $l \in L^1([0,1],\mathbb{R})$ avec $l(t) > 0$ pour p.p. $t \in [0,1]$ et $H_d(0,F(t,0)) \leq l(t)$ pour p.p. $t \in [0,1]$.

(H3) L'application multivoque G est de Carathéodory et $G(t,y)$ est à valeurs compactes, convexes pour chaque $(t,y) \in [0,1] \times \mathbb{R}^n$.

(H4) Il existe une function $q \in L^1([0,1],\mathbb{R})$ avec $q(t) > 0$ pour p.p. $t \in [0,1]$ et une fonction continue croissante $\psi : \mathbb{R}_+ \to (0,\infty)$ telles que

$$\|G(t,y)\|_{\mathcal{P}} = \sup\{\|v\|, v \in G(t,y)\} \leq q(t)\psi(\|y\|) \text{ p.p. } t \in [0,1] \text{ pour tout } y \in \mathbb{R}^n.$$

(H5)

$$K^*\|l\|_{L^1} < 1.$$

(H6) Il existe $r > 0$ tel que

$$r > \frac{K^*(\|l\|_{L^1} + \|q\|_{L^1}\psi(r))}{1 - K^*\|l\|_{L^1}}$$

où $K^* = \sup\limits_{(t,s)\in[0,1]\times[0,1]} |K(t,s)|$.

Théorème 5.4 *Sous les hypothèses (H1)–(H6), le problème (5.20)-(5.21) admet au moins une solution.*

Démonstration. Soit $X = C([0,1],\mathbb{R}^n)$ et $B(0,r) \subset X$ la boule ouverte centrée à l'origine et de rayon r, où r vérifie l'inégalité dans l'hypothèse (H6). On définit les deux applications multivoques sur $B[0,r]$ par

$$\mathcal{A}(x) = \{u \in X : \ u(t) = \int_0^1 K(t,s)v_1(s)ds, \ v_1 \in S_{F,x}\} \tag{5.9}$$

et

$$\mathcal{B}(x) = \{u \in X : \ u(t) = \int_0^1 K(t,s)v_2(s)ds, \ v_2 \in S_{G,x}\}. \tag{5.10}$$

Nous allons vérifier que les opérateurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ vérifient toutes les conditions du théorème 4.24.

Étape 1 : • D'abord, montrons que $\mathcal{A}(x)$ est un convexe, fermé, borné de X pour chaque $x \in B[0,r]$. La fermeture s'en ddéduit si on montre que les valeurs prises par l'operateur de Niemytsky sont fermées dans $L^1([0,1],\mathbb{R}^n)$. Soit $\{w_n\}$ une suite de $L^1([0,1],\mathbb{R}^n)$ convergente vers une limite w. Alors $w_n \to w$ en mesure et ainsi il existe un ensemble d'entiers positifs S tel que $\{w_n\}$ converge *p.p.* vers w quand $n \to \infty$ à travers S. D'après (H1) les valeurs de $S_{F,x}$ sont fermées dans $L^1([0,1],\mathbb{R}^n)$. Alors, pour chaque $x \in B[0,r]$, on a que $\mathcal{A}(x)$ est un sous-ensemble fermé, non vide de X.

• Montrons que, pour chaque $x \in B[0,r]$, $\mathcal{A}(x)$ est un sous-ensemble convexe de X. Let $u_1, u_2 \in \mathcal{A}(x)$. Alors il existe $v_1, v_2 \in S_{F,x}$ tel que pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$u_i(t) = \int_0^1 K(t,s)v_i(s)ds, \ \ (i = 1,2).$$

Soit $0 \leq d \leq 1$. Alors, pour chaque $t \in [0,1]$ on a

$$(du_1 + (1-d)u_2)(t) = \int_0^1 K(t,s)[dv_1(s) + (1-d)v_2(s)]ds.$$

Comme l'ensemble de sélection $S_{F,x}$ est convexe (car F est à valeurs convexes), alors

$$du_1 + (1-d)u_2 \in \mathcal{A}(x).$$

Étape 2 : Montrons que $\mathcal{A}$ est contraction multivoque sur $B[0,r]$. Soit $x, \overline{x} \in B[0,r]$ et $u_1 \in \mathcal{A}(x)$. Alors, il existe $v_1(t) \in F(t, x(t))$ tel que pour chaque $t \in [0,1]$

$$u_1(t) = \int_0^1 K(t,s)v_1(s)ds.$$

L'hypothèse (H2) entraîne que

$$H_d(F(t,x(t)), F(t,\overline{x}(t))) \leq l(t)\|x(t) - \overline{x}(t)\|.$$

Donc, il existe $w \in F(t, \overline{x}(t))$ tel que

$$\|v_1(t) - w\| \leq l(t)\|x(t) - \overline{x}(t)\|, \ t \in [0,1].$$

Considérons la multi-application $U : [0,1] \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ définie par

$$U(t) = \{w \in \mathbb{R}^n : \|v_1(t) - w\| \leq l(t)\|x(t) - \overline{x}(t)\|\}.$$

Comme l'opérateur multivoque $V(t) = U(t) \cap F(t, \overline{x}(t))$ est mesurable (voir Proposition III.4, [26]), V admet une sélection mesurable $v_2(t) \in F(t, \overline{x}(t))$ et pour chaque $t \in [0,1]$

$$\|v_1(t) - v_2(t)\| \leq l(t)\|x(t) - \overline{x}(t)\|.$$

Pour chaque $t \in [0,1]$

$$u_2(t) = \int_0^1 K(t,s)v_2(s)ds,$$

et l'on a

$$\begin{aligned}\|u_1(t) - u_2(t)\| &\leq \int_0^1 \|K(t,s)\|\|v_1(s) - v_2(s)\|ds \\ &\leq \int_0^1 \|K(t,s)\|l(s)\|x(s) - \overline{x}(s)\|ds.\end{aligned}$$

Par suite

$$\|u_1 - u_2\|_{L_1} \leq K^*\|l\|_{L^1}\|x - \overline{x}\|_C.$$

En interchangeant les rôles de x et $\overline{x}$, on obtient une seconde relation puis on arrive

$$H_d(\mathcal{A}(x), \mathcal{A}(\overline{x})) \leq K^*\|l\|_{L^1}\|x - \overline{x}\|_C.$$

Donc l'opérateur $\mathcal{A}$ est, en vertu de (H5), une contraction sur X.

Étape 3 : Montrons que l'opérateur multivoque $\mathcal{B}$ est compact et s.c.s. sur $B[0, r]$. Pour montrer que $\mathcal{B}$ est compacte sur $B[0, r]$, soit $x \in B[0, r]$. Alors, pour chaque $u \in \mathcal{B}(x)$, il existe $v \in S_{G,x}$ tel que pour chaque $t \in [0, 1]$ on a

$$u(t) = \int_0^1 K(t, s)v(s)ds.$$

L'hypothèse (H4) entraîne que

$$\begin{aligned} \|u(t)\| &\leq \int_0^1 \|K(t, s)\|\|v(s)\|ds \\ &\leq K^* \int_0^1 \|v(s)\|ds \\ &\leq K^* \int_0^1 q(s)\psi(\|x\|_C)\, ds \\ &\leq K^*\|q\|_{L^1}\, \psi(r). \end{aligned}$$

Montrons que $\mathcal{B}$ transforme les bornés en des ensembles équicontinuous de X. Soit $t, \tau \in [0, 1]$ et $x \in B[0, r]$. Pour chaque $u \in \mathcal{B}(x)$,

$$\begin{aligned} \|u(t) - u(\tau)\| &\leq \int_0^1 \|K(t, s) - K(\tau, s)\|\, \|v(s)\|\, ds \\ &\leq \int_0^1 \|K(t, s) - K(\tau, s)\|\, q(s)\psi(\|x\|_C)\, ds \\ &\leq \int_0^1 \|K(t, s) - K(\tau, s)\|\, q(s)\psi(r)\, ds. \end{aligned}$$

Le terme de droite tend vers zéro quand $|t - \tau| \to 0$. Le lemme d'Arzelá-Ascoli nous dit que l'opérateur $\mathcal{B} : B[0, r] \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ est compact.

Étape 4 : Montrons que $\mathcal{B}$ est à graphe fermé. Soit $x_n \to x_*$, $y_n \in \mathcal{B}(x_n)$ et $y_n \to y_*$. Montrons que $y_* \in \mathcal{B}(x_*)$. Comme $y_n \in \mathcal{B}(x_n)$, il existe $v_n \in S_{G,x_n}$ tel que, pour chaque $t \in [0, 1]$,

$$y_n(t) = \int_0^1 K(t, s)v_n(s)ds.$$

On doit montrer qu'il existe $y_* \in S_{G,x_*}$ tel que, pour tout $t \in [0,1]$,

$$y_*(t) = \int_0^1 K(t,s)v_*(s)ds.$$

Il est clair que

$$\|y_n - y_*\|_C \longrightarrow 0 \text{ as } n \to \infty.$$

Considérons l'opérateur linéaire continu

$$\Gamma : L^1([0,1], \mathbb{R}^n) \to X$$

défini par

$$v \longmapsto (\Gamma v)(t) = \int_0^1 K(t,s)v(s)ds.$$

Le lemme 1.11 nous dit que $\Gamma \circ S_F$ est un opérateur à graphe fermé. De plus

$$y_n(t) \in \Gamma(S_{G,x_n}).$$

Comme $x_n \to x_*$, alors

$$y_*(t) = \int_0^1 K(t,s)v_*(s)ds$$

pour $v_* \in S_{G,x_*}$.

Étape 5 : Montrons que la seconde assertion du théorème 4.24 n'est pas satisfaite. Soit $u \in X$ une solution possible de $\lambda u \in \mathcal{A}(u) + \mathcal{B}(u)$ pour un réel $\lambda > 1$ avec $\|u\|_C = r$. Alors il existe $v_1 \in S_{F,u}$ et $v_2 \in S_{G,u}$ tel que pour chaque $t \in [0,1]$ on a

$$u(t) = \lambda^{-1} \int_0^1 K(t,s)v_1(s)ds + \lambda^{-1} \int_0^1 K(t,s)v_2(s)ds.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\|u(t)\| &\leq K^* \int_0^1 \|v_1(s)\|ds + K^* \int_0^1 \|v_2(s)\|ds. \\
&\leq K^* \int_0^1 (l(s)\|u(s)\| + l(s))ds + K^* \int_0^1 q(s)\psi(\|u(s)\|)ds \\
&\leq K^* \int_0^1 (l(s)\|u\|_C + l(s))ds + K^* \int_0^1 q(s)\psi(\|u\|_C)ds.
\end{aligned}$$

Passant au supremum sur t, on obtient

$$\|u\|_C \leq K^* \int_0^1 (l(s)\|u\|_C + l(s))ds + K^* \int_0^1 q(s)\psi(\|u\|_C)ds.$$

En remplaçant $\|u\|_C = r$ dans l'inégalité ci-dessus, on obtient que

$$r \leq \frac{K^*(\|l\|_{L^1} + \psi(r)\|q\|_{L^1})}{1 - K^*\|l\|_{L^1}}$$

contredisant (H6). Par suite, la conclusion (ii) du Théorème 4.24 n'a pas lieu. Par conséquent le problème (5.20)-(5.21) possède une solution x on $[0, 1]$, ce qui complète la démonstration du théorème 4.24. □

5.3 Problème aux limites à conditions intégrales

On se propose d'étudier le problème aux limites à conditions intégrales (voir [15])

$$\begin{cases} x''(t) \in F(t, x(t)), \quad \text{p.p. } t \in [0, 1], \\ x(0) - k_1 x'(0) = \int_0^1 h_1(x(s))ds, \\ x(1) + k_2 x'(1) = \int_0^1 h_2(x(s))ds. \end{cases} \tag{5.11}$$

où $F : [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est une multi-application à valeurs compactes, $h_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues et k_i des constantes positives $(i = 1, 2)$. Donnons la

Définition 5.2 *Une fonction $x \in AC^1((0, 1), \mathbb{R})$ est solution de (5.11) s'il existe une fonction $v \in L^1([0, 1], \mathbb{R})$ avec $v(t) \in F(t, x(t))$ p.p. $t \in [0, 1]$ telle que $x''(t) = v(t)$ p.p. sur $[0, 1]$ et la fonction x satisfait les conditions aux bords intégrales.*

Lemme 5.4 *Pour tout $\sigma(t)$, $\rho_1(t)$, $\rho_2(t) \in C([0, 1], \mathbb{R})$, le problème linéaire*

$$\begin{aligned} x''(t) &= \sigma(t), \quad p.p.\ t \in [0, 1], \\ x(0) - k_1 x'(0) &= \int_0^1 \rho_1(s)ds, \\ x(1) + k_2 x'(1) &= \int_0^1 \rho_2(s)ds, \end{aligned}$$

admet une unique solution $x \in AC^1((0, 1), \mathbb{R})$ donnée par

$$x(t) = P(t) + \int_0^1 G(t, s)\sigma(s)ds,$$

où

$$P(t) = \frac{1}{1 + k_1 + k_2}\{(1 - t + k_2)\int_0^1 \rho_1(s)ds + (k_1 + t)\int_0^1 \rho_2(s)ds\}$$

est l'unique solution du problème

$$x''(t) = 0, \quad p.p.\ t \in [0, 1],$$

$$x(0) - k_1 x'(0) = \int_0^1 \rho_1(s)ds,$$
$$x(1) + k_2 x'(1) = \int_0^1 \rho_2(s)ds,$$

and

$$G(t,s) = \frac{-1}{k_1 + k_2 + 1}\begin{cases}(k_1+t)(1-s+k_2), & 0 \leq t < s \leq 1,\\ (k_1+s)(1-t+k_2), & 0 \leq s < t \leq 1\end{cases}$$

est la fonction de Green du problème. Notons que $G(t,s) < 0$ *sur* $(0,1) \times (0,1)$.

5.3.1 Le cas convexe

Les hypothèses suivantes seront utilisées ci-desous

(H1) La fonction $F : [0,1] \times \mathbb{R} \to P_{cp,c}(\mathbb{R})$ est L^1-Carathéodory ;

(H2) il existe deux constantes positives c_1 and c_2 telles que

$$|h_1(x)| \leq c_1, \quad \text{et} \quad |h_2(x)| \leq \bar{c}_2 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R};$$

(H3) il existe une fonction positive croissante $\psi : [0,\infty) \to (0,\infty)$, une fonction $p \in L^1([0,1],\mathbb{R}_+)$ telles que

$$\|F(t,x)\| \leq p(t)\psi(|x|) \quad \text{pour chaque } (t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R},$$

(H4) il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\frac{M}{\frac{1}{1+k_1+k_2}\{(1+k_2)c_1 + (k_1+1)c_2\} + \sup_{(t,s)\in[0,1]\times[0,1]}|G(t,s)|\psi(M)\int_0^1 p(s)ds} > 1.$$

Théorème 5.5 *Sous les hypothèses (H1)–(H4), le problème (5.11) admet au moins une solution.*

Démonstration. Nous allons transformer le problème (5.11 en un problème de point fixe pour l'opérateur $N : C([0,1],\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(C([0,1],\mathbb{R}))$ défini par

$$N(x) = \{h \in C([0,1],\mathbb{R}) : h(t) = P(t) + \int_0^1 G(t,s)v(s)ds, \ v \in S_{F,x}\},$$

où

$$P(t) = \frac{1}{1+k_1+k_2}\{(1-t+k_2)\int_0^1 h_1(x(s))ds + (k_1+t)\int_0^1 h_2(x(s))ds\}.$$

D'après le lemma 5.4, les points fixes de N sont solutions du problème (5.11.

Étape 1 : $N(x)$ est convexe pour chaque $x \in C([0,1],\mathbb{R})$. En effet, si $h_1,\ h_2 \in N(x)$, alors il existe $v_1, v_2 \in S_{F,x}$ tel que pour chaque $t \in [0,1]$, on a

$$h_i(t) = P(t) + \int_0^1 G(t,s)v_i(s)ds,\ (i = 1,2).$$

Soit $0 \leq d \leq 1$. Alors, pour chaque $t \in [0,1]$ on a

$$(dh_1 + (1-d)h_2)(t) = P(t) + \int_0^1 G(t,s)[dv_1(s) + (1-d)v_2(s)]ds.$$

Comme $S_{F,x}$ est convexe (car$F$ est à valeurs convexes), alors

$$dh_1 + (1-d)h_2 \in N(x).$$

Étape 2 : *N transforme les bornés en des bornés de $C([0,1],\mathbb{R})$.* Soit $B_q = \{x \in C([0,1],\mathbb{R}) : \|x\|_\infty \leq q\}$ un borné de $C([0,1],\mathbb{R})$ et $x \in B_q$; pour chaque $h \in N(x)$, il existe $v \in S_{F,x}$ tel que

$$h(t) = P(t) + \int_0^1 G(t,s)v(s)ds.$$

Les hypothèses (H2) et (H3) entraînent que

$$\begin{aligned}
&|h(t)| \\
&\leq |P(t)| + \int_0^1 |G(t,s)||v(s)|ds \\
&\leq |P(t)| + \sup_{(t,s)\in[0,1]\times[0,1]} |G(t,s)| \int_0^1 |v(s)|ds \\
&\leq \frac{1}{1+k_1+k_2}\{(1+k_2)c_1 + (k_1+1)c_2\} + \sup_{(t,s)\in[0,1]\times[0,1]} |G(t,s)|\psi(q) \int_0^1 p(s)ds \\
&\leq \frac{1}{1+k_1+k_2}\{(1+k_2)c_1 + (k_1+1)c_2\} + \sup_{(t,s)\in[0,1]\times[0,1]} |G(t,s)|\psi(q)\|p\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

Étape 3 : *N transforme les bornés en des ensembles équicontinus de $C([0,1],\mathbb{R})$.* Soit $r_1, r_2 \in [0,1]$, $r_1 < r_2$, B_q un borné de $C([0,1],\mathbb{R})$, et $x \in B_q$. Pour chaque $h \in N(x)$

$$\begin{aligned}
|h(r_2) - h(r_1)| &\leq |P(r_2) - P(r_1)| + \int_0^1 |G(r_2,s) - G(r_1,s)||v(s)|ds \\
&\leq |P(r_2) - P(r_1)| + \psi(q) \int_0^1 |G(r_2,s) - G(r_1,s)|p(s)ds.
\end{aligned}$$

Le second membre tend vers zéro quand $r_2 - r_1 \to 0$. Comme conséquence des étapes 1 à 3 avec le lemme d'Arzelá-Ascoli, on obtient que $N : C([0,1],\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(C([0,1],\mathbb{R}))$ est complètement continu.

Étape 4 : *N est à graphe fermé.* Soit $x_n \to x_*$, $h_n \in N(x_n)$ et $h_n \to h_*$. Montrons que $h_* \in N(x_*)$. Comme $h_n \in N(x_n)$, il existe $v_n \in S_{F,x_n}$ tel que pour chaque $t \in [0,1]$

$$h_n(t) = P_n(t) + \int_0^1 G(t,s)v_n(s)ds,$$

où

$$P_n(t) = \frac{1}{1+k_1+k_2}[(1-t+k_2)\int_0^1 h_1(x_n(s))ds + (k_1+t)\int_0^1 h_2(x_n(s))ds].$$

Montrons qu'il existe $h_* \in S_{F,x_*}$ tel que pour chaque $t \in [0,1]$

$$h_*(t) = P_*(t) + \int_0^1 G(t,s)v_*(s)ds,$$

où

$$P_*(t) = \frac{1}{1+k_1+k_2}[(1-t+k_2)\int_0^1 h_1(x_*(s))ds + (k_1+t)\int_0^1 h_2(x_*(s))ds].$$

Clairement, on a $\|(h_n - P_n) - (h_* - P_*)\|_\infty \to 0$ quand $n \to \infty$. Considérons l'opérateur linéaire continu $\Gamma : L^1([0,1],\mathbb{R}) \to C([0,1],\mathbb{R})$ défini par

$$v \mapsto (\Gamma v)(t) = \int_0^1 G(t,s)v(s)ds.$$

Du lemme **??**, l'opérateur $\Gamma \circ S_F$ est à graphe fermé. De plus, on a

$$\big(h_n(t) - P_n(t)\big) \in \Gamma(S_{F,x_n}).$$

Comme $x_n \to x_*$, on déduit du lemma **??** que

$$h_*(t) = P_*(t) + \int_0^1 G(t,s)v_*(s)ds$$

pour $v_* \in S_{F,x_*}$.

Étape 5 : *Estimations a priori.* Soit x solution du problème (5.11). Alors, il existe $v \in L^1([0,1],\mathbb{R})$ avec $v \in S_{F,x}$ tel que pour chaque $t \in [0,1]$

$$x(t) = P(t) + \int_0^1 G(t,s)v(s)ds.$$

Ceci, avec les hypothèses (H2) and (H3), entraînent que, pour tout $t \in [0,1]$ on

$$\begin{aligned}
&|x(t)| \\
&\leq \frac{1}{1+k_1+k_2}\{(1+k_2)c_1+(k_1+1)c_2\} + \sup_{(t,s)\in[0,1]\times[0,1]} |G(t,s)| \int_0^1 p(s)\psi(|x(s)|)ds \\
&\leq \frac{1}{1+k_1+k_2}\{(1+k_2)c_1+(k_1+1)c_2\} + \sup_{(t,s)\in[0,1]\times[0,1]} |G(t,s)|\psi(\|x\|_\infty) \int_0^1 p(s)ds.
\end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}
&\|x\|_\infty\Big(\frac{1}{1+k_1+k_2}\{(1+k_2)c_1+(k_1+1)c_2\} \\
&\quad + \sup_{(t,s)\in[0,1]\times[0,1]} |G(t,s)|\psi(\|x\|_\infty) \int_0^1 p(s)ds\Big)^{-1} \leq 1.
\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (H4), il existe M tel que $\|x\|_\infty \neq M$. Soit

$$U = \{x \in C([0,1],\mathbb{R}) : \|x\|_\infty < M\}.$$

L'opérateur $N : \overline{U} \to \mathcal{P}(C([0,1],\mathbb{R}))$ est s.c.s et complètement continu. Par le choix U, il n'existe pas d'"'lement $x \in \partial U$ tel que $x \in \lambda N(x)$ pour $\lambda \in (0,1)$. L'alternative nonlinéaire de Leray-Schauder[39] nous donne l'existence d'un point fixe pour N solution du problème (5.11). □

5.3.2 Le cas non convexe

On admet des deux hypothèses

(H5) $F : [0,1]\times\mathbb{R} \to P_{cp}(\mathbb{R})$ est telle que $F(\cdot,x) : [0,1] \to P_{cp}(\mathbb{R})$ est mesurable pour chaque $x \in \mathbb{R}$;

(H6) $H_d(F(t,x),F(t,\overline{x})) \leq l(t)|x-\overline{x}|$ p.p. $t \in [0,1]$ et $x,\overline{x} \in \mathbb{R}$ où $l \in L^1([0,1],\mathbb{R})$ and $d(0,F(t,0)) \leq l(t)$ p.p. $t \in [0,1]$;

(H7) il existe deux constantes positives d_1 et d_2 tel que $|h_1(x)-h_1(\overline{x})| \leq d_1|x-\overline{x}|$ et $|h_2(x)-h_2(\overline{x})| \leq d_2|x-\overline{x}|$ pour tout x, $\overline{x}$ dans $\mathbb{R}$.

Théorème 5.6 *Sous les hypothèses (H5)-(H7), se de plus*

$$\frac{1}{1+k_1+k_2}[(1+k_1)d_1+(1+k_2)d_2] + \sup_{(t,s)\in[0,1]\times[0,1]} |G(t,s)|\|l\|_{L^1} < 1,$$

alors le problème (5.11) admet au moins une solution.

Démonstration.

Étape 1 :$N(x) \in P_{cl}(C([0,1],\mathbb{R}))$ *pour chaque* $x \in C([0,1],\mathbb{R})$. En effet, si $(x_n)_{n\geq 0} \in N(x)$ tel que $x_n \to \tilde{x}$ dans $C([0,1],\mathbb{R})$. Alors, $\tilde{x} \in C([0,1],\mathbb{R})$ et il existe $v_n \in S_{F,x}$ tel que pour chaque $t \in [0,1]$

$$x_n(t) = P(t) + \int_0^1 G(t,s)v_n(s)ds.$$

Comme F est à valeurs compactes, on peut, avec l'hypothèse (H6), passer à une sous-suite si nécessaire et obtenir que v_n converge vers v dans $L^1([0,1],\mathbb{R})$ et donc $v \in S_{F,x}$. Alors, pour chaque $t \in [0,1]$

$$x_n(t) \to \tilde{x}(t) = P(t) + \int_0^1 G(t,s)v(s)ds.$$

Ainsi, $\tilde{x} \in N(x)$.

Étape 2 : *Il existe* $\gamma < 1$ *tel que* $H_d(N(x), N(\overline{x})) \leq \gamma \|x - \overline{x}\|_\infty$ *pour chaque* $x, \overline{x} \in C([0,1],\mathbb{R})$. Soit $x, \overline{x} \in C([0,1],\mathbb{R})$ et $h_1 \in N(x)$. Alors, il existe $v_1(t) \in F(t, x(t))$ tel que pour chaque $t \in [0,1]$

$$h_1(t) = P(t) + \int_0^1 G(t,s)v_1(s)ds.$$

L'hypothèse(H6) entraîne que

$$H_d(F(t,x(t)), F(t,\overline{x}(t))) \leq l(t)|x(t) - \overline{x}(t)|.$$

Par consséquent, il existe $w \in F(t, \overline{x}(t))$ tel que

$$|v_1(t) - w| \leq l(t)|x(t) - \overline{x}(t)|, \ t \in [0,1].$$

Considérons la multi-application $U : [0,1] \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ donnée

$$U(t) = \{w \in \mathbb{R} : |v_1(t) - w| \leq l(t)|x(t) - \overline{x}(t)|\}.$$

Comme l'opérateur multivoque $V(t) = U(t) \cap F(t, \overline{x}(t))$ est mesurable [26, Proposition III.4], V admet une sélection mesurable $v_2(t) \in F(t, \overline{x}(t))$, et pour chaque$t \in [0,1]$, on a

$$|v_1(t) - v_2(t)| \leq l(t)|x(t) - \overline{x}(t)|.$$

Pour $t \in [0,1]$, soit

$$h_2(t) = \bar{P}(t) + \int_0^1 G(t,s)v_2(s)ds,$$

où

$$\bar{P}(t) = \frac{1}{1+k_1+k_2}[(1-t+k_2)\int_0^1 h_1(\overline{x}(s))ds + (1+k_1)\int_0^1 h_2(\overline{x}(s))ds].$$

On a

$$\begin{aligned}
&|h_1(t) - h_2(t)| \\
&\leq |P(t) - \bar{P}(t)| + \int_0^1 |G(t,s)||v_1(s) - v_2(s)|ds \\
&\leq \frac{1}{1+k_1+k_2}[(1+k_1)d_1 + (1+k_2)d_2]\|x - \bar{x}\|_\infty + \int_0^1 |G(t,s)|l(s)|x(s) - \overline{x}(s)|ds.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\|h_1 - h_2\|_\infty \\
&\leq \Big(\frac{1}{1+k_1+k_2}[(1+k_1)d_1 + (1+k_2)d_2] + \sup_{(t,s)\in[0,1]\times[0,1]} |G(t,s)|\|l\|_{L^1}\Big)\|x - \overline{x}\|_\infty.
\end{aligned}$$

Une seconde relation peut être obtenue en interchangeant les rôles de x et y et on obtient finalement

$$\begin{aligned}
&H_d(N(x), N(\overline{x})) \\
&\leq \Big(\frac{1}{1+k_1+k_2}[(1+k_1)d_1 + (1+k_2)d_2] + \sup_{(t,s)\in[0,1]\times[0,1]} |G(t,s)|\|l\|_{L^1}\Big)\|x - \overline{x}\|_\infty.
\end{aligned}$$

Finalement, N est une contraction et admet donc un point fixe x solution du problème (5.11). $\square$

5.4 Problème de Dirichlet associé au ϕ-Laplacian

On considère le problème aux limites étudié dans [32]

$$\begin{cases} -(\phi(x'))'(t) & \in & F(t,x), \quad 0 < t < 1 \\ x(0) = x(1) & = & 0 \end{cases} \tag{5.12}$$

où $F : J \times \mathbb{R}^+ \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$ est multi-application, $J := [0,1]$, et $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un homéomorphisme croissant tel que $\phi(0) = 0$.

Les deux lemmes suivants (voir [22, 21]) seront utiles pour la formulation intégrale du problème.

Lemme 5.5 *Pour chaque fonction* $h \in L^1(0,1)$ *positive presque partout, le problème de la recherche de* $0 < t < 1$ *tel que*

$$\int_0^t \phi^{-1}\left(\int_s^t h(\tau)d\tau\right)ds = \int_t^1 \phi^{-1}\left(\int_t^s h(\tau)d\tau\right)ds \tag{5.13}$$

admet une solution unique $\theta = \theta(h)$ *telle que* $0 < \theta < 1$.

Lemme 5.6 *Le problème*

$$\begin{cases} -(\phi(x'))'(t) &= h(t), \quad 0 < t < 1 \\ x(0) = x(1) &= 0 \end{cases} \tag{5.14}$$

où $h \in L^1(0,1)$ *est positive p.p.admet une unique solution* $x \in C^1(J, \mathbb{R}^+)$ *donnée par*

$$x(t) = \begin{cases} \int_0^t \phi^{-1}\left(\int_s^\theta h(\tau)d\tau\right)ds & si\ \ 0 \le t \le \theta < 1 \\ \int_t^1 \phi^{-1}\left(\int_\theta^s h(\tau)d\tau\right)ds & si\ \ 0 < \theta \le t \le 1 \end{cases} \tag{5.15}$$

où $\theta = \theta(h)$ *est donné par le lemme 5.5.*

5.4.1 Le cas convexe

Le résultat principal de cette section est

Théorème 5.7 *Soit* $F : J \times \mathbb{R}^+ \to \mathcal{P}_{cp,cv}(\mathbb{R}^+)$ *une application multivoque* L^1-*Carathéodory tel que* $0 \notin F(.,.)$ *et*

$$(\mathcal{H}_1) \quad \begin{cases} \textit{il existe une fonction continue, positive et croissante} \\ \psi : [0,\infty) \mapsto (0,\infty) \ \ \textit{et} \ \ p \in L^1(J,\mathbb{R}^+) \ \ \textit{telles que} \\ \|F(t,x)\| \le p(t)\psi(x) \ \ p.p.\ \ t \in J, \ \ \textit{tout} \ \ x \in \mathbb{R}^+, \ \ \textit{et} \\ \exists\, R_0 > 0, \quad \psi(R_0) \le \dfrac{\phi(R_0)}{|p|_1}. \end{cases}$$

Alors le problème (5.12) admet une solution positive. De plus l'ensemble des solutions est compact.

Remarque 5.2 *(a) Il est clair que toute multi-application intégrablement bornée vérifie* $(\mathcal{H}_1)$.

(b) Toute solution x *est en fait* $AC(J,\mathbb{R}^+)$. *Mais, si* ϕ *est impaire, alors*

$$\phi^{-1}\left(\int_t^\theta v(s)\,ds\right) = -\phi^{-1}\left(\int_\theta^t v(s)\,ds\right)$$

où $v \in S_{F,x}$. *Alors* $x \in C^1(J,\mathbb{R}^+)$.

Démonstration. Considérons le sous-ensemble convexe $C(J,\mathbb{R}^+)$

$$K = \left\{ \begin{array}{c} w \in C(J,\mathbb{R}^+),\ w(0)=0,\ w \text{ est croissante et} \\ 0 \leq w(t)-w(s) \leq \psi(R_0)\displaystyle\int_s^t p(\tau)d\tau, \quad \text{pour tout } 0 \leq s \leq t \leq 1 \end{array} \right\}.$$

Alors pour tout $w \in K$, $\|w\|_\infty \leq R_1 := |p|_1\psi(R_0)$ et K est compact par le lemme d'Ascoli-Arzéla. De plus tout $w \in K$ est absolument continue, ce qui nous permet de définir

$$K \xrightarrow{S} C(J,\mathbb{R}^+)$$

telle que $x = S(w)$ est l'unique solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -(\phi(x'))'(t) &=& w'(t), \quad t \in [0,1] \\ x(0)=x(1) &=& 0 \end{array} \right.$$

soit

$$x(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \int_0^t \phi^{-1}\left(w(\theta)-w(s)\right)ds, & \text{si } 0 \leq t \leq \theta < 1 \\ \\ \int_t^1 \phi^{-1}\left(w(s)-w(\theta)\right)ds, & \text{si } 0 < \theta \leq t \leq 1 \end{array} \right. \tag{5.16}$$

où $\theta = \theta(w)$ satisfait, par le Lemme 5.5, la relation de raccord C^0 :

$$\int_0^\theta \phi^{-1}\left(w(\theta)-w(s)\right)ds = \int_\theta^1 \phi^{-1}\left(w(s)-w(\theta)\right)ds.$$

Enfin, définissons la multi-application

$$G : C(J,\mathbb{R}^+) \to \mathcal{P}(C(J,\mathbb{R}^+))$$

by

$$G(x) = \{y \in C(J,\mathbb{R}^+),\ y(t) = \int_0^t v(s)\,ds \text{ pour } v \in S_{F,x}\}.$$

On se propose d'étudier les propriétés de la multi-fonction $G' = G \circ S$.

Étape 1 : $G'(K) \subset K$. Soit $w \in K$ et $y \in G(w)$; alors il existe $x \in C(J,\mathbb{R}^+)$ et $v \in S_{F,x}$ tels que

$$y(t) = \int_0^t v(s)\,ds,\ t \in [0,1].$$

Il est clair y est une function croissante et

$$y(t)-y(s) \quad = \quad \int_s^t v(s)\,ds$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_s^t \|F(t,x(s))\|\,ds \\ &\leq \int_s^t p(s)\psi(x(s))\,ds. \end{aligned}$$

D'après (5.16), on a l'estimation

$$\|x\|_\infty \leq \phi^{-1}(R_1)$$

et donc

$$0 \leq y(t) - y(s) \leq \psi(\phi^{-1}(R_1)) \int_t^s p(\tau)d\tau.$$

De la définition de R_0 and R_1, on a

$$\psi(\phi^{-1}(R_1)) \leq \psi(R_0),$$

montrant que $N(K) \subset K$.

Étape 2 : $G'(w)$ est convexe pour chaque $w \in K$. En effet, si $y_1,\ y_2 \in G'(w)$, alors il existe $x \in C(J,\mathbb{R}^+)$ et $v_1, v_2 \in S_{F,x}$ tel que, pour chaque $t \in [0,1]$, on a

$$y_i(t) = \int_0^t v_i(s)\,ds, \quad i = 1, 2.$$

Let $0 \leq \alpha \leq 1$. Alors, pour chaque $t \in [0,1]$, on a

$$(\alpha y_1 + (1-\alpha)y_2)(t) = \int_0^t [\alpha v_1(s) + (1-\alpha)v_2(s)]\,ds.$$

Comme $S_{F,x}$ est convexe (car F est à valeurs convexes), on a

$$\alpha y_1 + (1-\alpha)y_2 \in G'(w).$$

Étape 3 : G' envoie les bornés dans les bornés de $C(J,\mathbb{R}^+)$. En effet, il suffit de trouver une constante positive ℓ telle que pour tout $w \in B_r = \{w \in C(J,\mathbb{R}^+) : \|w\|_\infty \leq r\}$, on a $\|G'(w)\|_\infty \leq \ell$. Soit $w \in B_r$ et $y \in G'(w)$; alors il existe $x \in C(J,\mathbb{R})$ et $v \in S_{F,x}$ tel que pour chaque $t \in J$, on a

$$y(t) = \int_0^t v(s)\,ds,\ t \in [0,1]. \tag{5.17}$$

Utilisant $(\mathcal{H}_1)$ et notant la croissance de ψ, on obtient que $\|x\|_\infty \leq \phi^{-1}(r)$ et donc pour chaque $t \in J$

$$|y(t)| \leq \int_0^t |v(s)|\,ds \leq \int_0^1 p(s)\psi(|x(s)|)\,ds \leq |p|_1\psi(\phi^{-1}(r)).$$

Étape 4 : G' envoie les bornés en des ensembles équicontinus de $C(J,\mathbb{R}^+)$. Soit B_r une boule centrée à l'origine et de rayon r dans $C(J,\mathbb{R}^+)$; montrons que la famille $\{G'w,\ w \in B_r\}$ est relativement compact. Comme dans l'étape 3, cet ensemble est borné. Pour vérifier qu'il est équicontinuous, soit $t_1,\ t_2 \in J$ tel que $t_1 < t_2$. De $(\mathcal{H}_1)$, on a

$$|y(t_2) - y(t_1)| \leq \psi(\phi^{-1}(r)) \int_{t_1}^{t_2} p(s)\,ds$$

et le terme de droite tend vers zéro quand $t_2 - t_1 \to 0$.

Étape 5 : G' est *s.c.* Grâce au lemme 1.10, il suffit de montrer que G' est à graphe fermé. Soit $w_n \longrightarrow w_*$, $y_n \in G'(w_n)$ et $y_n \longrightarrow y_*$ quand $n \to \infty$. Montrons que $y_* \in G'(w_*)$. En effet $y_n \in G'(w_n)$ signifie qu'il existe $x_n \in C(J,\mathbb{R}^+)$ et $v_n \in S_{F,x_n}$ tel que pour chaque $t \in J$,

$$y_n(t) = \int_0^t v_n(s)\,ds, \quad t \in [0,1].$$

On doit montrer qu'il existe $v_* \in S_{F,x_*}$ tel que pour tout $t \in J$

$$y_*(t) = \int_0^t v_*(s)\,ds, \quad t \in [0,1].$$

Considérons l'opérateur linéaire continu

$$\begin{aligned} \Gamma : L^1(J,\mathbb{R}) &\longrightarrow C(J,\mathbb{R}) \\ u &\mapsto \Gamma u \end{aligned}$$

tel que

$$(\Gamma u)(t) = \int_0^t u(s)ds, \quad t \in [0,1].$$

Par le lemme **??**, l'opérateur $\Gamma \circ S_F$ est à graphe fermé et d'après la définition de G', on a

$$y_n \in \Gamma(S_{F,x_n}) = (\Gamma \circ S_F)(x_n).$$

De plus, l'opérateur S est continu (voir la démonstration de l'étape 1 du théorème 5.8). Alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et alors il existe $M \geq 0$ telle que

$$\|x_n\|_\infty \leq M, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Donc

$$|v_n(t)| \leq p(t)\psi(M), \qquad \text{p.p. } t \in J \ \text{ et tout } n \in \mathbb{N}$$

et $v_n \to v_*$ p.p. dans $\mathbb{R}^+$, quand $n \to +\infty$. Par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n(t) = y_*(t),\ t \in J$. Comme $x_n \longrightarrow x_*$, on déduit finalement de la continuité de F et Γ que

$$y_* \in \Gamma(S_{F,x_*}) = (\Gamma \circ S_F)(x_*).$$

Des étapes 3-5, G' est complètement continue et donc à valeurs compactes non vides. La multi-application $G' : K \to \mathcal{P}_{cl,cv}(K)$ vérifie donc toutes les conditions du théorème 4.19 et admet donc un point fixe w dans K. On déduit que $x = S(w)$ est point fixe de N, donc une solution du problème (5.12) dans $S(K)$. Réciproquement, si x solution au problème (5.12), alors w définie par $w(t) = \int_0^t x(s)ds$ est un point fixe de G' dans K. Comme K est compact et S est continu, l'ensemble $S(K)$ est compact et la démonstration du théorème est complète. □

5.4.2 Le cas non convexe

Le résultat principal de cette section est

Théorème 5.8 *Supposons que la multi-application* $F : J \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathcal{P}_{cp}(\mathbb{R}^+)$ *est intégrablement bornée, satisfait* $0 \notin F(.,.)$ *et*

$$(\mathcal{H}_2) \quad \begin{cases} (a) \quad (t,x) \mapsto F(t,x) \ \textit{est}\ \mathcal{L} \otimes \mathcal{B}\ \textit{mesurable}; \\ (b) \quad x \mapsto F(t,x)\ \textit{s.c.i. p.p.}\ t \in J. \end{cases}$$

Alors le problème(5.12) admet une solution positive.

Démonstration. Des lemmes 2.7 et 2.8, il existe une sélection continue $f : C(J,\mathbb{R}^+) \to L^1(J,\mathbb{R}^+)$ telle que $f(x)(t) \in \mathcal{F}(t,x)$ pour tout $x \in C(J,\mathbb{R}^+)$ et p.p. $t \in J$. Considérons le problème aux limites pour une équation différentielle autonome associée au $\phi-$Laplacien :

$$\begin{cases} -(\phi(x'))'(t) &= f(x)(t), \quad \text{p.p. } t \in J \\ x(0) = x(1) &= 0. \end{cases} \tag{5.18}$$

Il est clair que si $x \in C(J,\mathbb{R}^+)$ est solution du problème (5.24), alors x est solution du problème (5.12). On formule alore le problème (5.24) comme un problème de point fixe pour l'opérateur $A : C(J,\mathbb{R}^+) \to C(J,\mathbb{R}^+)$ défini par

$$Ax(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t \phi^{-1}\Big(\int_s^\theta f(x(\tau))\,d\tau\Big)\,ds, & \text{if } 0 \le t \le \theta < 1 \\ \displaystyle\int_t^1 \phi^{-1}\Big(\int_\theta^s f(x(\tau))\,d\tau\Big)\,ds, & \text{if } 0 < \theta \le t \le 1 \end{cases} \tag{5.19}$$

où $\theta = \theta(x)$ est tel que défini par (5.13). Montrons que A est A is complètement continu.

Étape 1. *A* est continu. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers une limite x dans $C(J, \mathbb{R}^+)$ et posons $v_n(.) = f(x_n(.))$. D'après la continuité de la sélection f, $v_n(.) \to v(.) = f(x(.))$ p.p., quand $n \to +\infty$ et donc

$$\forall\, s \in (0, \theta_n),\; 0 \leq \lim_{n\to\infty} \int_s^{\theta_n} |v_n(\tau) - v(\tau)|\, d\tau \leq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 |v_n(\tau) - v(\tau)|\, d\tau = 0$$

où $\theta_n = \theta(x_n)$ est défini par (5.13). Comme $0 < \theta_n < 1$, alors θ_n converge, à une sous-suite près, vers une limite $\theta_* \in [0, 1]$. Supposons que $0 < \theta_* < 1$. D'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, l'intégrale $\int_0^t \phi^{-1}\left(\int_s^{\theta_n} v_n(\tau_n)\, d\tau\right) ds$ converge vers $\int_0^t \phi^{-1}\left(\int_s^{\theta_*} v(\tau)\, d\tau\right) ds$ car ϕ est un homéomorphisme. Il en va de même pour(5.19) avec $\theta = \theta_n$. De plus,

$$A(x)(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t \phi^{-1}\Big(\int_s^{\overline{\theta}} f(x(\tau))\, d\tau\Big)\, ds, & \text{if } 0 \leq t \leq \overline{\theta} < 1 \\ \displaystyle\int_t^1 \phi^{-1}\Big(\int_{\overline{\theta}}^s f(x(\tau))\, d\tau\Big)\, ds, & \text{if } 0 < \overline{\theta} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

où $\overline{\theta} = \overline{\theta}(x)$ est défini de manière unique par (5.13). Comme

$$\int_0^{\theta_n} \phi^{-1}\Big(\int_s^{\theta_n} f(x_n(\tau))\, d\tau\Big) = \int_{\theta_n}^1 \phi^{-1}\Big(\int_{\theta_n}^s f(x_n(\tau))\, d\tau\Big)\, ds,$$

alors par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on déduit que

$$\int_0^{\theta_*} \phi^{-1}\Big(\int_s^{\theta_*} f(x(\tau))\, d\tau\Big)\, ds = \int_{\theta_*}^1 \phi^{-1}\Big(\int_{\theta_*}^s f(x(\tau))\, d\tau\Big)\, ds.$$

Par unicité de $\overline{\theta}$, $\theta_* = \overline{\theta}$, montrant la continuité de A. Supposons maintenant que $\theta_* = 0$. Then

$$\begin{aligned} \textstyle\int_0^1 \phi^{-1}\left(\int_0^s f(x(\tau))\, d\tau\right)\, ds = 0 \quad &\Rightarrow \quad \phi^{-1}\left(\textstyle\int_0^t f(x(s))ds\right) = 0,\; t \in [0, 1] \\ &\Rightarrow \quad f(x(.)) = 0 \;\text{ a.e on }\; [0, 1]. \end{aligned}$$

Mais ceci est en contradiction avec $0 \notin F(., .)$. De même, on peut vérifier que $\theta_* \neq 1$.

Étape 2. *A* transforme les bornés en des bornés. Soit B une partie bornée de $C(J, \mathbb{R}^+)$ et $u \in B$. Alors $\|Ax\| \leq M = \phi^{-1}(|p|_1)$ où $|f(x(t))| \leq p(t)$; ceci entraîne la bornitude de $A(B)$.

Étape 3. L'ensemble $\{Au,\ u \in B\}$ est équicontinu. Pour cela, soit $t_1,\ t_2 \in J$ et considérons quatre cas prenant en compte la position relative de $t_1,\ t_2$ par rapport à θ. Nous étudions uniquement le cas $0 \leq t_1,\ t_2 \leq \theta < 1$ dans lequel

$$\begin{aligned} |(Ax)(t_1) - (Au)(t_2)| &= \left| \int_{t_1}^{t_2} \psi \left(\int_s^\theta f(x(\tau)) d\tau \right) ds \right| \\ &\leq |t_1 - t_2| \phi^{-1}(|p|_1). \end{aligned}$$

Le résultat s'en déduit en faisant le passage à la limite $|t_1 - t_2| \to 0$.

D'après les étapes 1-3, le lemme d'Arzéla-Ascoli entraine que A est complètement continue.

Étape 4. Estimations a priori.
Pour chaque point fixe $x = \lambda A(x)$ avec $\lambda \in (0,1)$, on a, comme dans l'étape 2

$$\|x\|_\infty \leq M = \phi^{-1}(|p|_1).$$

Soit

$$U = \{x \in C(J, \mathbb{R}^+) :\ \|u\|_\infty < M + 1\}.$$

Du choix U, il n'existe pas de solution $x \in \partial U$ telle que $x = \lambda A(x)$ pour chaque $\lambda \in (0,1)$. Par l'alternative nonlinéaire de Leray-Schauder (théorème 4.21), A possède un point fixe x dans U, solution du problème (5.12). $\square$

5.5 Inclusions différentielles fonctionnelles impulsives

Dans cette section, on s'intéresse à l'existence de solutions pour deux problèmes à conditions initiales du premier et du second ordre respectivement associés à des inclusions différentielles fonctionnelles impulsives de type neutre et à temps variables (voir [20]). Dans ce qui suit, $J = [0,T]$, $g : J \times D \to \mathbb{R}^n$ est une fonction donnée et $F : J \times D \to \mathcal{P}_{cp,cv}$ est L^1-Carathéodory. On considère l'ensemble $D = \{\psi : [-r,0] \to \mathbb{R}^n; \psi$ continues p.p. sauf en un nombre fini de points $\bar{t}$ en lequels $\psi(\bar{t})$ et $\psi(\bar{t}^+)$ existent et $\psi(\bar{t}^-) = \psi(\bar{t})\}$. Pour $k = 1, 2, \ldots, m$, on désignera par $\tau_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ des fonctions à définir par la suite, $\overline{I}_k \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Soit $0 < r < \infty$. Pour chaque fonction y définie sur $[-r, T]$ et tout $t \in J$, notons par y_t l'élement de D défini par

$$y_t(\theta) = y(t + \theta), \quad \theta \in [-r, 0].$$

Ici $y_t(\cdot)$ représente l'histoire de l'état du temps $t - r$, au temps t.

Pour définition des solutions, on utilisera l'espace

$$\begin{aligned} PC = \big\{ & y : [0,T] \to \mathbb{R}^n : \text{il existe } 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m < t_{m+1} = T \\ & \text{tel que } t_k = \tau_k(y(t_k)),\ y(t_k^-) \text{ et } y(t_k^+) \text{ existe avec } y(t_k^-) = y(t_k), \\ & k = 1, \ldots, m,\ \text{ et } y \in C([t_k, t_{k+1}], \mathbb{R}^n)\ k = 0, \ldots, m \big\}. \end{aligned}$$

Enfin, posons $\Omega := \{y : [-r, T] \to \mathbb{R}^n : y \in D \cap PC\}$.

5.5.1 IDIN du premier ordre

On considère le problème à conditions intiales du premier ordre pour des inclusions différentielles fonctionnelles impulsives :

$$\frac{d}{dt}[y(t) - g(t, y_t)] \in F(t, y_t), \quad \text{p. p. } t \in J = [0, T],\ t \neq \tau_k(y(t)),\ k = 1, \ldots, m, \tag{5.20}$$

$$y(t^+) = I_k(y(t)), \quad t = \tau_k(y(t)),\ k = 1, \ldots, m, \tag{5.21}$$

$$y(t) = \phi(t), \quad t \in [-r, 0], \tag{5.22}$$

où $\phi \in \mathcal{D}$. On définit alors ce qu'est une solution

Définition 5.3 *Une fonction $y \in \Omega \cap \cup_{k=0}^{m} AC((t_k, t_{k+1}), \mathbb{R}^n)$ est une solution de (5.20)–(5.22) s'il existe $v(t) \in F(t, y_t)$ p.p. $t \in [0, T]$ telle que $\frac{d}{dt}[y(t) - g(t, y_t)] = v(t)$ p.p. sur J, $t \neq \tau_k(y(t))$, $k = 1, \ldots, m$, $y(t^+) = I_k(y(t))$, $t = \tau_k(y(t))$, $k = 1, \ldots, m$, $y(t) = \phi(t)$, $t \in [-r, 0]$.*

Considérons les hypothèses suivantes :

(H1) Pour $k = 1, \ldots, m,\ \tau_k \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. De plus,

$$0 < \tau_1(x) < \ldots < \tau_m(x) < \tau_{m+1}(x) = T \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

(H2) Il existe des constantes c_k telles que $|I_k(x)| \leq c_k$, $k = 1, \ldots, m$ pour chaque $x \in \mathbb{R}^n$.

(H3) La fonction g est complètement continue et il existe des constantes $0 \leq d_1 < 1$, $d_2 \geq 0$ telles que

$$|g(t,u)| \leq d_1\|u\| + d_2, \quad t \in [0,T], \quad u \in D.$$

(H4) il existe a une fonction continue, croissante $\psi : [0,\infty) \to (0,\infty)$ et $p \in L^1([0,T],\mathbb{R}_+)$ telles que

$$\|F(t,u)\| \leq p(t)\psi(\|u\|) \quad \text{p.p. } t \in [0,b], \text{ et tout } u \in D$$

avec $\int_1^\infty \frac{d\gamma}{\psi(\gamma)} = \infty$.

(H5) Pour chaque $(t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n$ et pour tout $y_t \in D$, on a que $\langle \tau_k'(x), v(t)\rangle \neq 1$ pour $k = 1,\ldots,m$, pour tout $v \in S_{F,y}$, où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.

(H6) g est une fonction positive.

(H7) τ_k est décroissante et $I_k(x) \leq x$ pour tout $x \in R^n, k = 1,\ldots,m$.

(H8) pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\tau_k(x) < \tau_{k+1}(I_k(x))$ pour $k = 1,\ldots,m$.

Théorème 5.9 *Sous les hypothèses (H1)-(H8), le problème (5.20)–(5.22) admet au moins une solution sur* $[-r,T]$.

Démonstration. Elle se fait en plusieurs étapes.

Étape 1 : Considérons le problème

$$\frac{d}{dt}[y(t) - g(t,y_t)] \in F(t,y_t), \quad \text{p.p. } t \in [0,T], \tag{5.23}$$

$$y(t) = \phi(t), \quad t \in [-r,0]. \tag{5.24}$$

qu'en va transformer en un problème de point fixe. pour celan considérons l'opérateur $\mathcal{N} : C([-r,T],\mathbb{R}^n) \to \mathcal{P}(C([-r,T],\mathbb{R}^n))$ défini par $\mathcal{N}(y) = \{h \in C([-r,T],\mathbb{R}^n)\}$ où, pour $v \in S_{F,y}$,

$$h(t) = \begin{cases} \phi(t), & \text{si } t \in [-r,0) \\ \phi(0) - g(0,\phi(0)) + g(t,y_t) + \int_0^t v(s)ds, & \text{si } t \in [0,T]. \end{cases}$$

Les points fixes de N sont solutions du problème (5.23)–(5.24). Montrons qu'il est complètement continu. Grâce à l'hypothèse (H3), il suffit en fait de montrer que l'operateur $N_1 : C([-r,T],\mathbb{R}^n) \to C([-r,T],\mathbb{R}^n)$ défini par $N_1(y) = \{h \in C([-r,T],\mathbb{R}^n)\}$, où

$$h(t) = \begin{cases} \phi(t), & \text{if } t \in [-r,0); \\ \phi(0) + \int_0^t v(s)ds, & \text{if } t \in [0,T], \end{cases}$$

est complètement continu.
(a) $N_1(y)$ *est convexe pour chaque* $y \in C([-r,T],\mathbb{R}^n)$. En effet, si $v_1,\ v_2$ appartient à $N_1(y)$, alors il existe $v_1, v_2 \in S_{F,y}$ tel que pour chaque $t \in J$, on a

$$h_i(t) = \phi(0) + \int_0^t v_i(s)ds,\ i = 1,2.$$

Soit $0 \leq d \leq 1$. Pour chaque $t \in J$, on a

$$(dh_1 + (1-d)h_2(t) = \phi(0) + \int_0^t [dv_1(s) + (1-d)v_2(s)]ds$$

Comme $S_{F,y}$ est convexe (car F est à valeurs convexes), alors

$$dh_1 + (1-d)h_2 \in N_1(y).$$

(b) : N_1 *envoie les bornés en des bornés de* $C([-r,T],\mathbb{R}^n)$. En effet, il suffit de montrer que pour chaque $q > 0$, il existe une constante positive ℓ telle que pour chaque $y \in B_q = \{y \in C([-r,T],\mathbb{R}^n) : \|y\|_\infty \leq q\}$ on a $\|N_1(y)\| \leq \ell$. Soit $y \in B_q$ et $h \in N_1(y)$; alors il existe $v \in S_{F,y}$ telle que pour chaque $t \in J$ on a

$$h(t) = \phi(0) + \int_0^t v(s)ds.$$

Ainsi,

$$|h(t)| \leq |\phi(0)| + \int_0^t |v(s)|ds \leq \|\phi\|_\infty + \|h_q\|_{L^1} := \ell.$$

(c) N_1 *envoie les bornés en des ensembles équicontinuous de* $C([-r,T],\mathbb{R}^n)$. Soit $u_1, u_2 \in J,\ u_1 < u_2$ et B_q un borné de $C(J,\mathbb{R}^N)$ comme dans le (a). Soit $y \in B_q$ et $h \in N_1(y)$. Alors il existe $v \in S_{F,y}$ tel que pour chaque $t \in J$, on a

$$h(t) = \phi(0) + \int_0^t v(s)ds$$

Alors

$$|N_1(y(u_2)) - N_1(y(u_1))| \leq \int_{u_1}^{u_2} h_q(s)ds.$$

Comme $u_2 \to u_1$ le terme de droite tend vers zéro. Le lemme d'Arzela-AscoliLes entraine que N_1 est complètement continu.

Les étapes (b) et (c) nous permettent de conclure que $\mathcal{N} : C(J,\mathbb{R}^N) \to 2^{C(J,\mathbb{R}^N)}$ est un opérateur multivoque complètement continu et par suite condensing.
(d) N_1 *est à graphe fermé*. Soit $y_n \to y_*,\ h_n \in N_1(y_n)$, et $h_n \to h_*$. Montrons que $h_* \in N(y_*)$. $h_n \in N_1(y_n)$ signifie qu'il existe $v_n \in S_{F,y_n}$ tel que pour chaque $t \in J$,

$$h_n(t) = \phi(0) + \int_0^t v_n(s)ds.$$

Montrons qu'il existe $h_* \in S_{F,y_*}$ tel que pour chaque $t \in J$,

$$h_*(t) = \phi(0) + \int_0^t v_*(s)ds.$$

Il est clair que

$$\left\| \big(h_n - \phi(0)\big) - \big(h_* - \phi(0)\big) \right\|_\infty \to 0, \quad \text{as } n \to \infty.$$

Considérons l'opérateur linéaire continu $\Gamma : L^1(J, \mathbb{R}^n) \to C(J, \mathbb{R}^n)$,

$$v \mapsto (\Gamma v)(t) = \int_0^t v(s)ds.$$

D'après le lemme 1.11, l'opérateur $\Gamma \circ S_F$ est à graphe fermé. Comme $\big(h_n(t) - \phi(0)\big) \in \Gamma(S_{F,y_n})$, il découle du lemme 1.11 que pour $v_* \in S_{F,v_*}$, on a

$$h_*(t) = \phi(0) + \int_0^t v_*(s)ds\,.$$

(e) *L'ensemble suivant est borné*

$$\mathcal{E}(\mathcal{N}) := \{y \in C([-r,T], \mathbb{R}^n) : y \in \lambda \mathcal{N}(y), \text{ for some } 0 < \lambda < 1\}\,.$$

Soit $y \in \mathcal{E}(\mathcal{N})$. Alors il existe $v \in S_{F,y}$ tel que $y \in \lambda \mathcal{N}(y)$, pour $0 < \lambda < 1$. Ainsi, pour chaque $t \in [0, T]$,

$$y(t) = \lambda\Big(\phi(0) - g(0, \phi) + g(t, y_t) + \int_0^t v(s)\, ds\Big).$$

En vertu de (H2)–(H4), cela implique que pour chaque $t \in J$, on a

$$|y(t)| \leq \|\phi\| + d_1\|\phi\| + d_1\|y_t\| + 2d_2 + \int_0^t p(s)\psi(\|y_s\|)ds.$$

Considérons la fonction

$$\mu(t) = \sup\{|y(s)| : -r \leq s \leq t\}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Soit $t^* \in [-r, t]$ tel que $\mu(t) = |y(t^*)|$. Si $t^* \in J$, on a par l'inégalité ci-desus que pour chaque $t \in J$

$$\mu(t) \leq \|\phi\| + d_1\|\phi\| + d_1\mu(t) + 2d_2 + \int_0^t p(s)\psi(\mu(s))ds.$$

Ainsi

$$\mu(t) \leq \frac{1}{1 - d_1}\Big[\|\phi\| + d_1\|\phi\| + 2d_2 + \int_0^t p(s)\psi(\mu(s))ds\Big], \quad t \in J.$$

Si $t^* \in [-r, 0]$ alors $\mu(t) = \|\phi\|$ et l'inégalité a lieu. Soit $v(t)$ le terme de droite. Alors

$$c = v(0) = \frac{1}{1-d_1}(\|\phi\| + d_1\|\phi\| + 2d_2),$$
$$\mu(t) \leq v(t), \quad t \in J,$$
$$v'(t) = \frac{1}{1-d_1}p(t)\psi(\mu(t)), \quad t \in J.$$

Comme ψ est croissante, on obtient

$$v'(t) \leq \frac{1}{1-d_1}p(t)\psi(v(t)).$$

Cela implique que pour chaque $t \in J$,

$$\int_{v(0)}^{v(t)} \frac{d\gamma}{\psi(\gamma)} \leq \frac{1}{1-d_1}\int_0^T p(s)ds < \int_{v(0)}^{\infty} \frac{d\gamma}{\psi(\gamma)}.$$

Cette inégalité entraîne l'existence d'une constante K telle que $v(t) \leq K$, $t \in J$, et donc $\mu(t) \leq K$, $t \in J$. Comme pour chaque $t \in [0, T]$, $\|y_t\| \leq \mu(t)$, on a

$$\|y\|_\infty \leq K' = \max\{\|\phi\|, K\},$$

où K' depend uniquement de T, d_1, d_2, et des fonctions p, ϕ et ψ. Cela montre que $\mathcal{E}(\mathcal{N})$ est bornée.

Posons $X := C([-r, T], \mathbb{R}^n)$. D'après l'Alternative non linéaire de Leray et Schauder 4.21, N possède un point fixe, solution du problème (5.23)–(5.24). Notons y_1 cette solution puis définissons la fonction

$$r_{k,1}(t) = \tau_k(y_1(t)) - t \quad \text{for } t \geq 0.$$

L'hypothèse (H1) entraîne que $r_{k,1}(0) \neq 0$ pour $k = 1, \ldots, m$. Si $r_{k,1}(t) \neq 0$ sur $[0, T]$ pour $k = 1, \ldots, m$; i.e.,

$$t \neq \tau_k(y_1(t)) \quad \text{on } [0, T] \quad \text{for } k = 1, \ldots, m,$$

alors y_1 est solution du problème (5.20)-(5.22).

Il reste à considérer le cas où $r_{1,1}(t) = 0$ pour $t \in [0, T]$. Comme $r_{1,1}(0) \neq 0$ et $r_{1,1}$ est continue, il existe $t_1 > 0$ tel que

$$r_{1,1}(t_1) = 0, \quad \text{et} \quad r_{1,1}(t) \neq 0 \quad \text{pour tout } t \in [0, t_1).$$

D'après (H1), $r_{k,1}(t) \neq 0$ pour tout $t \in [0, t_1)$, et tout $k = 1, \ldots, m$.

Étape 2 : A présent, considérons le problème

$$\frac{d}{dt}[y(t) - g(t, y_t)] \in F(t, y_t), \quad \text{p.p. } t \in [t_1, T], \tag{5.25}$$

$$y(t_1^+) = I_1(y_1(t_1)). \tag{5.26}$$

Afin de le transformer en un problème de point fixe, on définit l'opérateur N_2 : $C([t_1, T], \mathbb{R}^n) \to \mathcal{P}(C([t_1, T], \mathbb{R}^n))$ définie par

$$N_2(y) = \big\{h \in C([t_1, T], \mathbb{R}^n) : h(t) = I_1(y_1(t_1)) - g(t_1, y_{t_1}) + g(t, y_t) + \int_{t_1}^{t} v(s)ds\big\},$$

où $v \in S_{F,y}$. Comme dans la première étape, on peut montrer que N_2 est complètement continu, et l'ensemble suivant est borné,

$$\mathcal{E}(N_2) := \{y \in C([t_1, T], \mathbb{R}^n) : y \in \lambda N_2(y), \quad \text{for some } 0 < \lambda < 1\}.$$

Posons $X := C([t_1, T], \mathbb{R}^n)$. En vertu de l'alternative non linéaire de Martelli 4.22 (ou Leray-Schauder), on en déduit que N_2 admet un point fixe y solution du problème (5.25)–(5.26). Notons cette solution par y_2 puis définissons

$$r_{k,2}(t) = \tau_k(y_2(t)) - t \quad \text{pour } t \geq t_1.$$

Si $r_{k,2}(t) \neq 0$ sur $(t_1, T]$ pour tout $k = 1, \ldots, m$, alors

$$y(t) = \begin{cases} y_1(t), & \text{if } t \in [0, t_1], \\ y_2(t), & \text{if } t \in (t_1, T], \end{cases}$$

est solution du problème (5.20)–(5.22). Il reste à considérer le cas où $r_{2,2}(t) = 0$, pour $t \in (t_1, T]$. D'après (H8), on a

$$\begin{aligned} r_{2,2}(t_1^+) &= \tau_2(y_2(t_1^+)) - t_1 \\ &= \tau_2(I_1(y_1(t_1))) - t_1 \\ &> \tau_1(y_1(t_1)) - t_1 \\ &= r_{1,1}(t_1) = 0. \end{aligned}$$

Comme $r_{2,2}$ est continue, il existe $t_2 > t_1$ tel que $r_{2,2}(t_2) = 0$ et $r_{2,2}(t) \neq 0$ pour tout $t \in (t_1, t_2)$. D'après (H1), il est clair que

$$r_{k,2}(t) \neq 0 \quad \text{pour tout } t \in (t_1, t_2), \ k = 2, \ldots, m.$$

Admettons qu'il existe $\bar{s} \in (t_1, t_2]$ tel que $r_{1,2}(\bar{s}) = 0$ et considérons la fonction $L_1(t) = \tau_1(y_2(t) - g(t, y_t)) - t$. D'après les hypothèses (H6)-(H8), on en déduit que

$$\begin{aligned} L_1(\bar{s}) &= \tau_1(y_2(\bar{s}) - g(\bar{s}, y_{\bar{s}})) - \bar{s} \\ &\geq \tau_1(y_2(\bar{s})) - \bar{s} \\ &= r_{1,2}(\bar{s}) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi la fonction L_1 atteint un maximum positif en un point $s_1 \in (t_1, T]$. Comme

$$\frac{d}{dt}[y_2(t) - g(t, y_{2t})] \in F(t, y_{2t}), \quad \text{p.p.} \;\; t \in (t_1, T),$$

alors il existe $v(\cdot) \in L^1((t_1, T))$ avec $v(t) \in F(t, y_{2t})$, p.p. $t \in (t_1, T)$ tel que

$$\frac{d}{dt}[y_2(t) - g(t, y_{2t})] = v(t);$$

d'où

$$L_1'(s_1) = \tau_1'(y_2(s_1) - g(s_1, y_{2s_1}))\frac{d}{dt}[y_2(s_1) - g(s_1, y_{s_1})] - 1 = 0.$$

Par conséquent

$$\langle \tau_1'(y_2(s_1) - g(s_1, y_{2s_1})), v(s_1)\rangle = 1,$$

ce qui contredit (H4).

Étape 3 : On continue ainsi le procédé en tenant compte du fait que $y_m := y\Big|_{[t_m, T]}$ est solution du problème

$$\frac{d}{dt}[y(t) - g(t, y_t)] \in F(t, y_t), \quad \text{p.p. } t \in (t_m, T), \tag{5.27}$$

$$y(t_m^+) = I_m(y_{m-1}(t_m)). \tag{5.28}$$

La solution y du problème (5.20)-(5.22) est alors définie par

$$y(t) = \begin{cases} y_1(t), & \text{si } t \in [-r, t_1], \\ y_2(t), & \text{si } t \in (t_1, t_2], \\ \ldots \\ y_m(t), & \text{if } t \in (t_m, T]. \end{cases}$$

$\square$

5.5.2 IDIN du second ordre

Dans cette section, on se propose d'étudier le problème du second ordre

$$\frac{d}{dt}[y'(t) - g(t, y_t)] \in F(t, y_t), \quad \text{p.p. } t \in J = [0, T],\ t \neq \tau_k(y(t)),\ k = 1, \ldots, m, \tag{5.29}$$

$$y(t^+) = I_k(y(t)), \quad t = \tau_k(y(t)),\ k = 1, \ldots, m, \tag{5.30}$$

$$y'(t^+) = \overline{I}_k(y(t)), \quad t = \tau_k(y(t)),\ k = 1, \ldots, m, \tag{5.31}$$

$$y(t) = \phi(t), \quad t \in [-r, 0],\ y'(0) = \eta \in \mathbb{R}^n. \tag{5.32}$$

Définition 5.4 *Une fonction $y \in \Omega \cap \cup_{k=0}^m AC((t_k, t_{k+1}), \mathbb{R}^n)$ est dite solution de (5.29)–(5.32) s'il existe $v(t) \in F(t, y_t)$ p.p. $t \in [0, T]$ tel que $\frac{d}{dt}[y'(t) - g(t, y_t)] = v(t)$ p.p. sur J, $t \neq \tau_k(y(t))$, $k = 1, \ldots, m$, $y(t^+) = I_k(y(t))$, $t = \tau_k(y(t))$, $k = 1, \ldots, m$, $y'(t^+) = \overline{I}_k(y(t))$, $t = \tau_k(y(t))$ $k = 1, \ldots, m$, $y(t) = \phi(t)$, $t \in [-r, 0]$ et $y'(0) = \eta$.*

Considérons les hypothèses suivantes

(A1) Il existe des constantes positives $\overline{d}_k$ telles que $|\overline{I}_k(x)| \leq \overline{d}_k$, $k = 1, \ldots, m$ pour chaque $x \in \mathbb{R}^n$.

(A2) Il existe une fonction croissante $\psi : [0, \infty) \to (0, \infty)$ et une fonction $p \in L^1([0, T], \mathbb{R}_+)$ telles que $\|F(t, u)\| \leq p(t)\psi(\|u\|)$ p.p. $t \in [0, T]$ et cahque $u \in D$ avec

$$\int_1^\infty \frac{d\gamma}{\gamma + \psi(\gamma)} = \infty,$$

(A3) Pour tout $(t, \bar{s}, x) \in [0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R}^n$ et tout $y_t \in D$ on a que pour tout $v \in S_{F,y}$,

$$\langle \tau_k'(x), \overline{I}_k(y(\bar{s})) - g(\bar{s}, y_{\bar{s}}) + g(t, y_t) + \int_{\bar{s}}^t v(s)ds \rangle \neq 1 \quad \text{pour } k = 1, \ldots, m.$$

(A4) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\tau_k(I_k(x)) \leq \tau_k(x) < \tau_{k+1}(I_k(x))$ pour $k = 1, \ldots, m$.

Théorème 5.10 *Sous les hypothèses(H1)-(H3) et (A1)-(A4), le problème (5.29)–(5.32) possède au moins une solution.*

Démonstration. Étape 1 : Considérons le problème

$$\frac{d}{dt}[y'(t) - g(t, y_t)] \in F(t, y_t), \quad \text{p.p. } t \in [0, T], \tag{5.33}$$

$$y(t) = \phi(t), \quad t \in [-r, 0],\ y'(0) = \eta. \tag{5.34}$$

Afin de transformer ce problème en un problème de point fixe, considérons l'opérateur $\overline{N}_1 : C([-r,T],\mathbb{R}^n) \to \mathcal{P}(C([-r,T],\mathbb{R}^n))$ défini par $\overline{N}_1(y) = \{h \in C([-r,T],\mathbb{R}^n)\}$ où

$$h(t) = \begin{cases} \phi(t), & \text{si } t \in [-r,0]; \\ \phi(0) + [\eta - g(0,\phi(0))]t + \int_0^t g(s,y_s)ds + \int_0^t (t-s)v(s)ds & \text{si } t \in [0,T]. \end{cases}$$

Comme avec le théorème 5.9, on peut montrer que $\overline{N}_1$ est complètement continu. Montrons donc que l''ensemble est borné :

$$\mathcal{E}(\overline{N}_1) := \{y \in C([-r,T],\mathbb{R}^n) : y \in \lambda \overline{N}_1(y), \text{ for some } 0 < \lambda < 1\}.$$

Si$y \in \mathcal{E}(\overline{N}_1)$, il existe $v \in S_{F,y}$ tel que $y \in \lambda \overline{N}_1(y)$ pour $0 < \lambda < 1$. Ainsi pour chaque $t \in [0,T]$, on a

$$y(t) = \lambda\phi(0) + \lambda[\eta - g(0,\phi(0))]t + \lambda \int_0^t g(s,y_s)ds + \lambda \int_0^t (t-s)v(s)ds.$$

D'après les hypothèses (H2), (H3), (A1), and (A2), cela entraîne que pour chaque $t \in [0,T]$, on a

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leq \|\phi\| + T(|\eta| + \|\phi\|d_1 + d_2) + \int_0^t d_1\|y_s\|ds + Td_2 + \int_0^t (T-s)p(s)\psi(\|y_s\|)ds \\ &\leq \|\phi\| + T(|\eta| + \|\phi\|d_1 + 2d_2) + \int_0^t M(s)\|y_s\|ds + \int_0^t M(s)\psi(\|y_s\|)ds, \end{aligned}$$

où $M(t) = \max\{d_1, (T-t)p(t)\}$. Considérosn la fonction

$$\mu(t) = \sup\{|y(s)| : -r \leq s \leq t\}, \quad 0 \leq t \leq T$$

et soit $t^* \in [-r,t]$ tel que $\mu(t) = |y(t^*)|$. Si $t^* \in J$, alors d'après l'inégalité précédentes, on a pour $t \in [0,T]$

$$\mu(t) \leq \|\phi\| + T(|\eta| + \|\phi\|d_1 + 2d_2) + \int_0^t M(s)\mu(s)ds + \int_0^t M(s)\psi(\mu(s))ds.$$

Notons $v(t)$ le terme du second membre. Alors

$$\begin{aligned} v(0) &= \|\phi\| + T(|\eta| + \|\phi\|d_1 + 2d_2), \\ v'(t) &= M(t)\mu(t) + M(t)\psi(\mu(t)), \ t \in [0,T]. \end{aligned}$$

Comme ψ est croissante, pour p.p. $t \in [0,T]$, on a que

$$v'(t) \leq M(t)v(t) + M(t)\psi(v(t)) = M(t)[v(t) + \psi(v(t))].$$

Cela entraîne que pour chaque $t \in [0, T]$,

$$\int_{v(0)}^{v(t)} \frac{d\gamma}{\gamma + \psi(\gamma)} \leq \int_0^T M(s)ds < \int_{v(0)}^{\infty} \frac{d\gamma}{\gamma + \psi(\gamma)}.$$

Cette inégalité entraine qu'il existe une constante b^* telle que $v(t) \leq b^*, \ t \in [0, T]$, et donc $\mu(t) \leq b^*, \ t \in [0, T]$. Comme pour chaque $t \in [0, T]$, $\|y_t\| \leq \mu(t)$, on a

$$\|y\|_\infty \leq \max\{\|\phi\|, b^*\},$$

où b^* dépend uniquement de T et des fonctions p etψ. Par suite $\mathcal{E}(\overline{N}_1)$ est borné.

Posons $X := C([-r, T], \mathbb{R}^n)$. En vertu du théorème de Martelli 4.22, l'opérateur $\overline{N}_1$ admet un point fixe y solution du problème (5.33)–(5.34). Notons-la par y_1 et définissons la fonction

$$r_{k,1}(t) = \tau_k(y_1(t)) - t \quad \text{pour} \quad t \geq 0.$$

L'hypothèse (H1) entraîne que $r_{k,1}(0) \neq 0$ pour $k = 1, \ldots, m$. Si $r_{k,1}(t) \neq 0$ sur $[0, T]$ pour $k = 1, \ldots, m$; i.e.,

$$t \neq \tau_k(y_1(t)) \quad \text{sur } [0, T] \quad \text{et pour } k = 1, \ldots, m,$$

alors y_1 est solution du problème (5.20)-(5.22).

Il reste à considérer le cas où $r_{1,1}(t) = 0$ pour $t \in [0, T]$. Comme $r_{1,1}(0) \neq 0$ et $r_{1,1}$ est continue, il existe $t_1 > 0$ tel que

$$r_{1,1}(t_1) = 0, \quad \text{et} \quad r_{1,1}(t) \neq 0 \quad \text{pour tout } t \in [0, t_1).$$

Ainsi, d'après (H1) $r_{k,1}(t) \neq 0$ pour tout $t \in [0, t_1)$ et tout $k = 1, \ldots, m$.

Étape 2 : Considérons le problème

$$\frac{d}{dt}[y'(t) - g(t, y_t)] \in F(t, y_t), \quad \text{p.p. } t \in [t_1, T], \tag{5.35}$$

$$y(t_1^+) = I_1(y_1(t_1)), \tag{5.36}$$

$$y'(t_1^+) = \overline{I}_1(y_1(t_1)). \tag{5.37}$$

Que nous allons transformer en un problème de point fixe. Pour cela, considérons l'opérateur $\overline{N}_2 : C([t_1, T], \mathbb{R}^n) \to \mathcal{P}(C([t_1, T], \mathbb{R}^n))$ défini par $\overline{N}_2(y) = \{h \in C([t_1, T], \mathbb{R}^n)\}$ où

$$h(t) = I_1(y_1(t_1)) + (t - t_1)\overline{I}_1(y_1(t_1)) - (t - t_1)g(t_1, y_{t_1}) + \int_{t_1}^t g(s, y_s)ds + \int_{t_1}^t (t - s)v(s)ds,$$

avec $v \in S_{F,y}$. Comme dans la première étape, on peut montrer que $\overline{N}_2$ est complètement continu, et que l'ensemble suivant est borné :

$$\mathcal{E}(\overline{N}_2) := \{y \in C([t_1, T], \mathbb{R}^n) : y \in \lambda \overline{N}_2(y), \text{ pour } 0 < \lambda < 1\}.$$

Posons alors $X := C([t_1, T], \mathbb{R}^n)$. Le théorème de Martelli 4.22 nous dit que l'opérateur N_2 admet un point fixe y solution du problème (5.35)–(5.37). Notons cette solution par y_2 puis définissons

$$r_{k,2}(t) = \tau_k(y_2(t)) - t \quad \text{pour } t \geq t_1.$$

Si $r_{k,2}(t) \neq 0$ sur $(t_1, T]$ pour tout $k = 1, \ldots, m$, alors

$$y(t) = \begin{cases} y_1(t), & \text{if } t \in [0, t_1], \\ y_2(t), & \text{if } t \in (t_1, T], \end{cases}$$

est solution du problème (5.29)–(5.32). Il reste dons à considérer le cas où $r_{2,2}(t) = 0$, pour $t \in (t_1, T]$. D'après l'hypothèse (A4), on a

$$\begin{aligned} r_{2,2}(t_1^+) &= \tau_2(y_2(t_1^+)) - t_1 \\ &= \tau_2(I_1(y_1(t_1)) - t_1 \\ &> \tau_1(y_1(t_1)) - t_1 \\ &= r_{1,1}(t_1) = 0. \end{aligned}$$

Comme $r_{2,2}$ est continue, il existe $t_2 > t_1$ tel que $r_{2,2}(t_2) = 0$, et $r_{2,2}(t) \neq 0$ pour tout $t \in (t_1, t_2)$. L'hypothèse (H1) entraîne clairement que

$$r_{k,2}(t) \neq 0 \quad \text{pour tout } t \in (t_1, t_2), \quad k = 2, \ldots, m.$$

Supposons à présent qu'il existe $\bar{s} \in (t_1, t_2]$ tel que $r_{1,2}(\bar{s}) = 0$. D'après (A4), on déduit que

$$\begin{aligned} r_{1,2}(t_1^+) &= \tau_1(y_2(t_1^+)) - t_1 \\ &= \tau_1(I_1(y_1(t_1))) - t_1 \\ &\leq \tau_1(y_1(t_1)) - t_1 \\ &= r_{1,1}(t_1) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi la fonction $r_{1,2}$ atteint un maximum positif en un point $s_1 \in (t_1, T]$. Comme

$$\frac{d}{dt}[y_2'(t) - g(t, y_{2t})] \in F(t, y_{2t}), \quad \text{p.p. } t \in (t_1, T),$$

il existe $v(\cdot) \in L^1((t_1, T))$ avec $v(t) \in F(t, y_{2t})$, p.p. $t \in (t_1, T)$ tel que

$$y_2'(t) = \overline{I}_1(y(t_1)) - g(t_1, y_{t_1}) + g(t, y_t) + \int_{t_1}^{t} v(s)ds\,.$$

Alors

$$r_{1,2}'(s_1) = \tau_1'(y_2(s_1))\Big(\overline{I}_1(y(t_1)) - g(t_1, y_{t_1}) + g(s_1, y_{s_1}) + \int_{t_1}^{s_1} v(s)ds\Big) - 1 = 0.$$

Par conséquent,

$$\langle \tau_1'(y_2(s_1)), \overline{I}_1(y(t_1)) - g(t_1, y_{t_1}) + g(s_1, y_{s_1}) + \int_{t_1}^{s_1} v(s)ds \rangle = 1,$$

ce qui contredit (A3).

Étape 3 : On continue ainsi le processus en tenant en compte le fait que $y_m := y\big|_{[t_m, T]}$ est solution du problème

$$\frac{d}{dt}[y'(t) - g(t, y_t)] \in F(t, y_t),\ \ p.p.\ t \in (t_m, T), \tag{5.38}$$

$$y(t_m^+) = I_m(y_{m-1}(t_m)), \tag{5.39}$$

$$y'(t_m^+) = \overline{I}_m(y_{m-1}(t_m)). \tag{5.40}$$

La solution y du problème (5.29)-(5.32) est finalement définie par

$$y(t) = \begin{cases} y_1(t), & \text{si } t \in [-r, t_1], \\ y_2(t), & \text{si } t \in (t_1, t_2], \\ \dots \\ y_m(t), & \text{si } t \in (t_m, T]\,. \end{cases}$$

$\square$

5.6 Inclusions différentielles impulsives non résonnantes

On considère le problème résonnant associé à une inclusion différentielle impulsive (voir [57])

$$y'(t) - \lambda y(t) \in F(t, y_t),\quad t \in J = [0, b],\ t \neq t_k,\quad k = 1, \dots, m, \tag{5.41}$$

$$\Delta y|_{t=t_k} = I_k(y(t_k^-)),\quad k = 1, \dots, m, \tag{5.42}$$

$$y(0) = y(b), \tag{5.43}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$, $F : J \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ est une multi-application à valeurs compactes, convexes, $\mathcal{D} = \{\psi : [-r, 0] \to E \mid \psi$ est continue p.p. sauf en nombre fini de points s en lesquels $\psi(s)$ et la limite à droite $\psi(s^+)$ existe et $\psi(s^-) = \psi(s)\}$, $\phi \in D$, $(0 < r < \infty)$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m < t_{m+1} = b$, $I_k \in C(E, E)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, sont bornés, $\Delta y|_{t=t_k} = y(t_k^+) - y(t_k^-)$, $y(t_k^-)$ et $y(t_k^+)$ représente les limites respectives à gauche et à droite $y(t)$ aux points $t = t_k$, et E est un espace de Banach normé par $|\cdot|$ et $J' = J \setminus \{t_1, \ldots, t_k\}$.

Pour toute fonction y définie sur intervalle $[-r, b] \setminus \{t_1, \ldots, t_m\}$ et tout $t \in J$, notons par y_t l'élement de $\mathcal{D}$ défini par

$$y_t(\theta) = y(t + \theta), \quad \theta \in [-r, 0].$$

Ici $y_t(\cdot)$ représente l'histoire de l'état $t-r$, à l'état actuel t. $\mathcal{D}$ est l'espace de Banach normé par

$$\|y\|_{\mathcal{D}} = \sup\{|\psi(\theta)|, \theta \in [-r, 0]\}.$$

Nous rappelons l'sepace $PC(J, E) = \{y : J \to E$ tel que $y(t)$ est continue sauf aux points t_k en lesquels $y(t_k^-)$ et $y(t_k^+)$ existent et $y(t_k^-) = y(t_k)$ $k = 1, 2, \ldots, m\}$. En effet, $PC(J, E)$ est un espace de Banach normé par

$$\|y\|_{PC} = \sup\{|y(t)| : t \in J\}.$$

Posons

$$\Omega = \{y : [-r, b] \to E : y \in \mathcal{D} \cap PC(J, E)\}$$

and

$$\|y\|_{\Omega} = \max\{\|y\|_{\mathcal{D}}, \|y\|_{PC}\}.$$

Définition 5.5 *Une fonction $y \in \Omega \cap AC(J', E)$ est solution du problème (5.41)–(5.43) si y vérifie l'inclusion $y'(t) - \lambda y(t) \in F(t, y_t)$ p.p. sur $J \setminus \{t_1 \ldots, t_m\}$ ainsi que les conditions $\Delta y|_{t=t_k} = I_k(y(t_k^-))$, $k = 1, \ldots, m$, et $y(0) = y(b)$.*

5.6.1 Le cas convexe

Considérons le problème (5.44), (5.42), (5.43), où (5.44) est l'équation

$$y'(t) - \lambda y(t) = g(t), \quad t \neq t_k, \ k = 1, \ldots, m, \tag{5.44}$$

et $g \in L^1(J_k, E),\ k = 1, \ldots, m$. Le problème (5.44), (5.42), (5.43) sera noté par la suite (LP). Notons que si les fonctions $I_k,\ k = 1, \ldots, m$ sont linéaires, le problème (LP) est un problème impulsif linéaire.

Nous utiliserons alors le résultat suivant :

Lemme 5.7 *[19] $y \in \Omega \cap AC(J', E)$ est solution de (LP) si et seulement si $y \in \Omega \cap AC(J', E)$ est solution de l'équation intégrale impulsive suivante :*

$$y(t) = \int_0^b H(t,s)g(s)ds + \sum_{k=1}^{m} H(t,t_k)I_k(y(t_k)), \tag{5.45}$$

where

$$H(t,s) = (e^{-\lambda b} - 1)^{-1} \begin{cases} e^{-\lambda(b+s-t)}, & 0 \le s \le t \le b, \\ e^{-\lambda(s-t)}, & 0 \le t < s \le b. \end{cases} \tag{5.46}$$

Le résultat principal de cette section est le suivant :

Théorème 5.11 *Supposons que*

(5.11.1) $F : J \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ est de Carathéodory et pour chaque $u \in \mathcal{D}$ l'ensemble $S_{F,u}$ est non vide ;

(5.11.2) Il existe des constantes c_k telles que $|I_k(y)| \le c_k,\ k = 1, \ldots, m$ pour chaque $y \in E$;

(5.11.3) Il existe $m \in L^1(J, E)$ telle que

$$\|F(t, y_t)\| = \sup\{|v| : v \in F(t, y_t)\} \le m(t)$$

pour p.p. $t \in J$ et tout $y \in \Omega$;

(5.11.4) Pour tout borné $B \subseteq \Omega$ et tout $t \in J$ l'ensemble

$$\Big\{\int_0^b H(t,s)g(s)ds + \sum_{k=1}^{m} H(t,t_k)I_k(y(t_k)) : g \in S_{F,B}\Big\}$$

est relativement compacte in E où $S_{F,B} = \cup\{S_{F,y} : y \in B\}$.

Alors le problème (5.41)–(5.43) possède au moins un solution définie sur $[-r, b]$.

Démonstration. Afin de transformer le problème (5.41)–(5.43) en un problème de point fixe, considérons l'opérateur multivoque $N : \Omega \longrightarrow \mathcal{P}(\Omega)$ défini par

$$N(y) = \left\{ h \in \Omega : h(t) = \begin{cases} \phi(t), & \text{si } t \in [-r, 0], \\ \displaystyle\int_0^b H(t,s)g(s)ds & \\ \displaystyle + \sum_{k=1}^{m} H(t,t_k)I_k(y(t_k)), & \text{si } t \in J, \end{cases} \right\}$$

où $g \in S_{F,y}$, est l'ensemble de sélection.

On peut vérifier que l'opérateur N est complètement continu. Nous allons établir à présent des estimations a priori. Soit y solution possible du problème (5.41)–(5.43), alors il existe $g \in S_{F_1,y}$ tel que pour tout

$$y(t) = \int_0^b H(t,s)g(s)ds + \sum_{k=1}^m H(t,t_k)I_k(y(t_k)).$$

D'après (5.11.2)-(5.11.3), cela implique que pour chaque $t \in J$ on a

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leq \int_0^b |H(t,s)g(s)|ds + \sum_{k=1}^m |H(t,t_k)||I_k(y(t_k))| \\ &\leq \sup_{(t,s)\in J\times J} |H(t,s)| \int_0^T m(s)ds + \sum_{k=1}^m \sup_{t\in J} |H(t,t_k)|c_k =: M, \end{aligned}$$

où M dépend uniquement de b et de la fonction m. Posons

$$U := \{y \in \Omega : \|y\|_\Omega < M+1\}.$$

$N : \overline{U} \to \mathcal{P}(\Omega)$ es complètement continu. Par définition de U, il n'existe pas de $y \in \partial U$ tel que $y \in \lambda N(y)$, pour $\lambda \in (0,1)$. L'alternative non linéaire de Leray-Schauder implique que N admet un point fixe y solution du problème (5.41)–(5.43). $\square$

5.6.2 Le cas non convexe

Dans le cas où f n'est pas forcément à valeurs convexes, l'alternative non linéaire de Leray Schauder combinée avec le théorème de sélection de Bressan et Colombo 2.8 pour les opérateurs mulivoques s.c.i. peut être appliqué. On obtient le résultat qu'on va démontrer est le suivant :

Théorème 5.12 *Supposons (5.11.2), (5.11.3), (5.11.4) ainsi que les conditions suivantes :*

(5.12.1) $F : [0,b] \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ *est une multi-application à valeurs compactes satisfaisant :*

a) $(t,u) \mapsto F(t,u)$ *est* $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$ *mesurable ;*

b) $u \mapsto F(t,u)$ *est s.c.i. pour p.p.* $t \in [0,b]$, *où* E *est un espace de Banach.*

Alors le problème impulsif (5.41)–(5.43) admet au moins une solution.

Démonstration. Les hypothèses (5.11.2) et (5.12.1) entraînent que F de type s.c.i. En vertu du théorème 2.8, il existe une sélection continue $f : \Omega \to L^1([0,b],E)$ telle que $f(y) \in \mathcal{F}(y)$ pour tout $y \in \Omega$. Considérons alors le problème pour l'équation différentielle impulsive du premier ordre

$$y'(t) = f(y_t), \quad t \in [0,b], \ t \neq t_k, \quad k = 1,\ldots,m \tag{5.47}$$

$$\Delta y|_{t=t_k} = I_k(y(t_k^-)), \ k = 1,\ldots,m \tag{5.48}$$

$$y(0) = y(b), \ y(t) = \phi(t), \quad t \in [-r,0]. \tag{5.49}$$

Il est clair que toute solution $y \in \Omega$ du problème (5.47)–(5.49) est solution du problème (5.41)–(5.43). Considérosns alors l'opérateur de point fixe $N : \Omega \to \Omega$ défini par

$$(Ny)(t) = \begin{cases} \phi(t), & \text{if } t \in [-r,0], \\ \displaystyle\int_0^b H(t,s)f(y_s)ds & \\ \displaystyle+\sum_{k=1}^{m} H(t,t_k)I_k(y(t_k)), & \text{si } t \in J, \end{cases}$$

L'existence de point fixe à l'opérateur N se montre alors comme dans le chapitre précédent. $\square$

5.7 Inclusions différentielles fonctionnelles impulsives à retards infinis

Contrairement aux problèmes étudiés dans les sections précédentes, on supposer ici que le retard peut être infini (voir [57])

$$y'(t) \in F(t,y_t), \quad \text{p.p. } \ t \in J =: [0,b]\backslash\{t_1,\ldots,t_m\}, \tag{5.50}$$

$$y(t_k^+) - y(t_k) = I_k(y(t_k^-)), \quad k = 1,\ldots,m, \tag{5.51}$$

$$y(t) = \phi(t), \quad t \in (-\infty,0], \tag{5.52}$$

où $F : J \times B \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ est une multi-application et I_k $(k = 1,\ldots,m)$ les fonctions d'impulsion ; B est l'espace des phases. D'abord donnons la

Définition 5.6 *Une fonction $y \in B_b$ est solution du problème (5.50)-(5.52) s'il existe une fonction $v \in L^1([0,b],\mathbb{R}^n)$ telle que $v(t) \in F(t,y_t)$ p.p. $t \in [0,b]$ et v satisfait $y'(t) = v(t)$ p.p. sur J, et les conditions* (5.51) $-$ (5.52) *sont vérifiees.*

5.7.1 Le cas convexe

Théorème 5.13 *Supposons que*

(5.13.1) La fonction $F : [0,b] \times B \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ *est une multi-application compacte à valeurs convexes telle que :*

(a) $(t,.) \mapsto F(t,.)$ *est mesurable ;*

(b) $x \mapsto F(t,x)$ *est s.c.s. p.p.* $t \in [0,b]$;

(5.13.2) Il existe une fonction croissante $\psi : [0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ *et une fonction* $p \in L^1([0,b],\mathbb{R}_+)$ *telle que*

$$\|F(t,x)\| \leq p(t)\psi(\|x\|_B) \quad \textit{p.p. } t \in [0,b] \textit{ et tout } x \in B,$$

avec

$$K_b \int_0^b p(s)ds < \int_0^\infty \frac{dx}{\psi(x)},$$

Alors le problème (5.50)–(5.52) admet au moins une solution sur $(-\infty,b]$.

Démonstration. On définit l'opérateur $N : B_b \to \mathcal{P}(B_b)$ par

$$N(y) = \left\{ h \in B_b : h(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \phi(t), & \text{si } \ t \in (-\infty,0]; \\ \phi(0) + \displaystyle\int_0^t v(s)ds & \\ + \displaystyle\sum_{0<t_k<t} I_k(y(t_k^-)), & \text{si } t \in [0,b], \end{array} \right. \right\}$$

où

$$v \in S_{F,y} = \{v \in L^1([0,b],\mathbb{R}^n) : v(t) \in F(t,y_t) \ \text{ p.p. } \ t \in [0,b]\}.$$

Montrons que N admet un point fixe. Soit $x(\cdot) : (-\infty,b] \to \mathbb{R}^n$ la fonction définie par

$$x(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \phi(0), & \text{si } \ t \in [0,b], \\ \phi(t), & \text{si } \ t \in (-\infty,0]. \end{array} \right.$$

Alors $x_0 = \phi$. Pour chaque $z \in B \cap PC$ avec $z_0 = 0$, notons par $\bar{z}$ la fonction définie par

$$\bar{z}(t) = \left\{ \begin{array}{ll} z(t), & \text{si } t \in [0,b], \\ 0, & \text{si } t \in (-\infty,0]. \end{array} \right.$$

L'équation intégrale

$$y(t) = \phi(0) + \int_0^t v(s)ds + \sum_{0<t_k<t} I_k(y(t_k^-)),$$

peut se décomposer en $y(t) = z(t) + x(t), 0 \leq t \leq b$, ce qui entraîne que $y_t = \bar{z}_t + x_t$, pour chaque $0 \leq t \leq b$ et la fonction $z(.)$ satisfait

$$z(t) = \int_0^t v(s)ds + \sum_{0<t_k<t} I_k(\bar{z}(t_k^-) + x(t_k^-)), \tag{5.53}$$

où $v(t) \in F(t, \overline{z}_t + x_t)$ p.p. $t \in [0, b]$. Considérons l'opérateur $P : C_0 \to \mathcal{P}(C_0)$ défini par

$$P(z) = \left\{ h \in C_0 : h(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si} \quad t \in (-\infty, 0]; \\ \displaystyle\int_0^t v(s)ds + \sum_{0<t_k<t} I_k(\bar{z}(t_k^-) + x(t_k^-)), & \text{si} \quad t \in [0, b] \end{array} \right. \right\},$$

où

$$v \in S_{F,z} = \{v \in L^1([0, b], \mathbb{R}^n) : v(t) \in F(t, \overline{z}_t + x_t) \text{ p.p.} \, t \in [0, b]\}.$$

pour lequel on va chercher des points fixes éventuels. La démonstration se fait en quelques étapes :

Étape 1 : $P(z)$ est convexe pour chaque $z \in C_0$.

En effet, si $h_1,\ h_2$ appartient à $P(z)$, alors il existe $v_1, v_2 \in S_{F,\bar{z}+x}$ tel que pour tout $t \in J$ on a

$$h_i(t) = \int_0^t v_i(s)ds + \sum_{0<t_k<t} I_k(\bar{z}(t_k^-) + x(t_k^-)), \quad i = 1, 2.$$

Soit $0 \leq d \leq 1$. Pour chaque $t) \in J$ on a que

$$(dh_1 + (1 - d)h_2)(t) = \int_0^t [dv_1(s) + (1 - d)v_2(s)]ds + \sum_{0<t_k<t} I_k(\bar{z}(t_k^-) + x(t_k)).$$

Comme $S_{F,\bar{z}+x}$ est convexe (car F est à valeurs convexes), alors

$$dh_1 + (1 - d)h_2 \in P(z).$$

Étape 2 : P envoie les bornés en des bornés de C_0 Il suffit, pour cela, de démontrer l'existence d'une constante ℓ telle que pour chaque $w \in \mathcal{B}_q = \{z \in C_0 : \|z\|_0 \leq q\}$ on a $\|P(z)\|_0 \leq \ell$. Soit $h \in N(u)$; alors il existe $v \in S_{F,\bar{z}+x}$ tel que

$$h(t) = \int_0^t v(s)ds + \sum_{0<t_k<t} I_k(\bar{z}(t_k^-) + x(t_k^-)).$$

De (5.13.1), on a que $t \in J$

$$\begin{aligned}|h(t)| &\leq \psi(q_*)\int_0^b p(s)ds + \sum_{0<t_k<t}|I_k(\bar{z}(t_k^-)+x(t_k^-))|\\ &\leq \psi(q_*)\|p\|_{L^1} + \sum_{k=1}^{m}\sup\{|I_k(u)| : |u|\leq \bar{q}\} := \ell,\end{aligned}$$

où

$$\|\bar{z}_s + x_s\|_B \leq K_b q + M_b\|\phi\|_B + K_b|\phi(0)| := q_*$$

et

$$\begin{aligned}|\overline{z}(t_k)+x(t_k)| &\leq |\overline{z}(t_k)| + |x(t_k)\|\\ &\leq q + |\phi(0)| := \bar{q}, \text{ pour chaque } t_k \in J,\end{aligned}$$

Étape 3 : P envoie les bornés en des ensembles équicontinues de C_0. Soit $\bar{t}_1,\ \bar{t}_2 \in J,\ \bar{t}_1 < \bar{t}_2$ et $\mathcal{B}_q$ un borné de C_0, comme dans la deuxième étape. Alors

$$\begin{aligned}|h(\bar{t}_2) - h(\bar{t}_1)| &\leq \psi(q_*)\int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} p(s)ds\\ &\quad + \sum_{0<t_k<\bar{t}_2-\bar{t}_1}|I_k(\bar{z}(t_k^-,x)+x(t_k^-))|.\end{aligned}$$

Le terme de droite tend vers zéro quand $\bar{t}_2 - \bar{t}_1 \to 0$.
D'après les étapes 2 et 3 avec le lemme d'Arzela-Ascoli, on déduit que $P : C_0 \longrightarrow C_0$ est complètement continu.

Étape 4 : P est à graphe fermée. Soit $z_n \longrightarrow z_*,\ h_n \in P(z_n)$ et $h_n \longrightarrow h_*$. montrons que $h_* \in P(z_*)$. Comme $h_n \in P(z_n)$, il existe $v_n \in S_{F,\overline{z}_n+x}$ tel que pour chaque $t \in J$

$$h_n(t) = \int_0^t v_n(s)ds + \sum_{0<t_k<t} I_k(\overline{z}(t_k)+x(t_k)).$$

Montrons l'existence de $v_* \in S_{F,\overline{z}_*+x}$ telle que pour chaque $t \in J$

$$h_*(t) = \int_0^t v_*(s)ds + \sum_{0<t_k<t} I_k(\overline{z}(t_k)+x(t_k)).$$

Comme les fonctions I_k sont continues, on que lorsque $n \to \infty$,

$$\left\|\Big(h_n - \sum_{0<t_k<t} I_k(\overline{z}_n(t_k)+x(t_k))\Big) - \Big(h_* - \sum_{0<t_k<t} I_k(\overline{z}_*(t_k)+x(t_k))\Big)\right\|_\infty \to 0.$$

Considérons l'opérateur linéaire continu

$$\Gamma : L^1(J,\mathbb{R}^n) \longrightarrow C_0$$

$$v \longmapsto \Gamma(v)(t) = \int_0^t v(s)dsd\tau.$$

Du lemme 1.11, il s'ensuit que $\Gamma \circ S_F$ est un opérateur à graphe fermé. De plus

$$\left(h_n(t) - \sum_{0<t_k<t} I_k(\overline{z}_n(t_k) + x(t_k))\right) \in \Gamma(S_{F,\overline{z}_n+x}).$$

Comme $z_n \longrightarrow z_*$, alors

$$h_*(t) = \int_0^t v_*(s)ds + \sum_{0<t_k<t} I_k(\overline{z}(t_k) + x(t_k)).$$

pour $v_* \in S_{F,z_*+x}$. L'application $P : \overline{U}_0 \to \mathcal{P}(C_0)$ est complètement continue. D'après le choix de U_0, il n'existe pas de $u \in \partial U_0$ tel que $z \in \lambda P(z)$ pour $\lambda \in (0,1)$. L'alternative non linéaire de Leray et Schauder assure que P admet un point fixe z dans $\overline{U}_0$. Donc N possède un point fixe y solution du problème (5.50)–(5.52). $\square$

5.7.2 Le cas non convexe

On a le

Théorème 5.14 *Supposons que*

(5.14.1) $F : J \times B \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ *est une application multivoque compacte, à valeurs non vides telle que :*

(a) $t \mapsto F(t,x)$ *est* $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$ *mesurable ;*

(b) $x \mapsto F(t,x)$ *est s.c.i. p.p.* $t \in J$;

Alors le problème impulsif (5.50)–(5.52) admet au moins une solution.

Démonstration. Soit $P : C_0 \to \mathcal{P}(C_0)$ où la multi-application P est définie comme dans le théorème précedent. Montrons que P admet au moins un point fixe. Considérons l'opérateur de Nemytskii associé à F,

$$\mathcal{F} : C_0 \to \mathcal{P}(L^1(J,\mathbb{R}^n)$$

en posant

$$\mathcal{F}(z) = \{v \in L^1(J,\mathbb{R}^n) : v(t) \in F(t, \bar{z}_t + x_t) \ \text{ p.p.} \quad t \in J\},$$

est une sélection de N. Le lemme 2.7 entraîne alors que F est de type s.c.i. Alors le théorème 2.8 entraîne l'existence d'une fonction continue $f : C_0 \to L^1(J, \mathbb{R}^n)$ telle que $f(z) \in \mathcal{F}(\bar{z} + x)$ pour tout $y \in C_0$. Soit le problème

$$z'(t) = f(\bar{z}_t + x_t), \quad \text{p.p. } t \in J \ t \neq t_k \ k = 1, \ldots, m \tag{5.54}$$

$$\Delta z(t_k) = I_k(\bar{z}(t_k) + x(t_k)), \quad k = 1, \ldots, m, \tag{5.55}$$

$$z(t) = 0, \ \ t \in (-\infty, 0]. \tag{5.56}$$

Définissons l'opérateur $P_1 : C_0 \to C_0$ par

$$(P_1 z)(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \in (-\infty, 0] \\ \displaystyle\int_0^t f(\overline{z}_s + x_s)ds + \sum_{0<t_k<t} I_k(\overline{z}(t_k) + x(t_k)). & \end{cases}$$

Tout point fixe de P_1 est point fixe de P. Comme por les théorèmes précédents, on peut vérifier que P_1 est complètement continu et qu'il existe $M > 0$ telle que pour chaque solution $z = \lambda P_1(z)$, for some $\lambda \in (0, 1)$, on a $\|z\|_0 \leq M$. Posons

$$U = \{z \in C_0 : \|z\|_0 < M + 1\},$$

où U est un ouvert de C_0. Il n'existe donc pas de $z \in \partial U$ tel que $z = \lambda P_1(z)$ pour $\lambda \in (0, 1)$. L'alternative non linéaire de Leray Schauder type entraîne que P_1 admet au moins un point fixe $z \in \overline{U}$. Par suite N admet un point fixe y solution du problème (5.50)–(5.52). □

Un autre résultat d'existence est basé sur le théorème des multi-applications contractantes de Covitz et Nadler [27].

Théorème 5.15 *Supposons que*

(5.15) $F : J \times B \longrightarrow \mathcal{P}_{cp}(\mathbb{R}^n)$ *;* $(t, u) \longmapsto F(t, u)$ *est mesurable pour chaque* $u \in B$.

(5.15) Il existe une fonction $l \in L^1(J, \mathbb{R}^+)$ *telle que p.p.* $t \in J$ *et tout* $u, \overline{u} \in B$,

$$H_d(F(t, u), F(t, \overline{u})) \leq l(t)\|u - \overline{u}\|_B,$$

et

$$d(0, F(t, 0)) \leq l(t) \ \ \textit{p.p.} \ \ t \in J,$$

Alors le problème (5.50)–(5.52) possède au moins une solution.

Démonstration. Étape 1 : Considérons le problème

$$y'(t) \in F(t, y_t), \quad \text{p.p. } t \in [0, t_1], \tag{5.57}$$

$$y(t) = \phi(t), \quad t \in (-\infty, 0] \tag{5.58}$$

que nous allons transformer en un problème de point fixe en introduisant l'opérator $N : B \cap C([0, t_1], \mathbb{R}^n) \to \mathcal{P}(B \cap C([0, t_1], \mathbb{R}^n))$ defined by :

$$N(y) = \left\{ h \in B \cap C([0, t_1], \mathbb{R}^n) | h(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \phi(t), & \text{si } t \in (-\infty, 0]; \\ \phi(0) + \displaystyle\int_0^t v(s)ds, & \text{si } t \in [0, b], \end{array} \right. \right\}$$

où

$$v \in S_{F,y} = \{v \in L^1([0, t_1], \mathbb{R}^n) : v(t) \in F(t, y_t) \text{ p.p.} \, t \in [0, t_1]\}.$$

Montrons que N possède un point fixe. Soit $x(\cdot) : (-\infty, t_1] \to \mathbb{R}^n$ la fonction définie par

$$x(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \phi(0), & \text{si } t \in [0, t_1], \\ \phi(t), & \text{si } t \in (-\infty, 0]. \end{array} \right.$$

Alors $x_0 = \phi$. Pour chaque $z \in B \cap C([0, t_1], \mathbb{R}^n)$ avec $z_0 = 0$, notons par $\bar{z}$ la fonction définie par

$$\bar{z}(t) = \left\{ \begin{array}{ll} z(t), & \text{si } t \in [0, t_1], \\ 0, & \text{si } t \in (-\infty, 0]. \end{array} \right.$$

On peut décomposer

$$y(t) = \phi(0) + \int_0^t v(s)ds,$$

en somme $y(t) = z(t) + x(t), 0 \le t \le b$, ce qui implique que $y_t = \bar{z}_t + x_t$, pour chaque $0 \le t \le t_1$ et la fonction $z(.)$ vérifie

$$z(t) = \int_0^t v(s)ds, \tag{5.59}$$

où $v(t) \in F(t, \overline{z}_t + x_t)$ p.p. $t \in [0, t_1]$. Posons

$$C_0 = \{z \in B \cap C([0, t_1], \mathbb{R}^n) : z_0 = 0\}.$$

Posons $\| \cdot \|_0$ la norme dans C_0 définie par

$$\|z\|_0 = \|z_0\|_B + \sup\{|z(t)| : 0 \le t \le b\} = \sup\{|z(t)| : 0 \le t \le t_1\}, \; z \in C_0.$$

On considère l'opérateur $P : C_0 \to \mathcal{P}(C_0)$ définie par

$$P(z) = \left\{ h \in C_0 : \; h(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } \; t \in (-\infty, 0]; \\ \displaystyle\int_0^t v(s)ds, & \text{si } \; t \in [0, t_1], \end{array} \right. \right\}$$

avec

$$v \in S_{F,z} = \{v \in L^1([0, t_1], \mathbb{R}^n) : v(t) \in F(t, \overline{z}_t + x_t) \text{ p.p.} \, t \in [0, t_1]\}.$$

Montrons que P est une contraction multivoque.

(a) $P(z) \in \mathcal{P}_{cl}(C_0)$ pour chaque $z \in C_0$. En effet, soit $(z_n)_{n \geq 0} \in P(z)$ tel que $z_n \longrightarrow \tilde{z}$ est dans C_0. Il existe alors $v_n \in S_{F,\overline{w}+z}$ tel que pour chaque $t \in [0, t_1]$

$$z_n(t) = \int_0^t v_n(s)ds.$$

Comme F est à valeurs compactes, alors quite à passer à une sous-suite, v_n converge vers v in $L^1([0, t_1], \mathbb{R}^n)$ et donc $v \in S_{F,\overline{z}+x}$. Alors pour chaque $t \in [0, t_1]$

$$z_n(t) \longrightarrow \tilde{z}(t) = \int_0^t v(s))ds.$$

Ainsi $\tilde{z} \in P(z)$.

(b) Il existe $\gamma < 1$ tel que

$$H_d(P(z), P(z_*)) \leq \gamma \|z - z_*\|_0 \;\text{ for each }\; z, z_* \in C_0.$$

Soit $z, z_* \in C_0$ et $h \in P(z)$. Alors il existe $v(t) \in F(t, \overline{z}_t + x_t)$ tel que pour chaque $t \in [0, t_1]$

$$h(t) = \int_0^t v(s)ds.$$

Alors, on en déduit que

$$H_d(F(t, \overline{z}_t + x_t), F(t, \overline{z}_{*t} + x_t) \leq l(t)\|\overline{z}_t - \overline{z_{*t}}\|_B.$$

Donc il existe $u \in F(t, \overline{z}_t + x_t)$ tel que

$$\|v(t) - u| \leq l(t)\|\overline{z}_t - \overline{z}_{*t}\|_B, \quad t \in [0, t_1].$$

Soit $U : [0, t_1] \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ définie par

$$U(t) = \{u \in C_0 : |v(t) - u| \leq l(t)\|z_t - z_{*t}\|_B\}.$$

Comme l'opérateur multivoque $V(t) = U(t) \cap F(t, \overline{z}_{*t} + x_t)$ est mesurable (voir Proposition III.4 dans [26]), il existe une sélection mesurable $\overline{v}(t)$ de V. Ainsi, $\overline{v}(t) \in F(t, z_{*t})$ et

$$v(t) - \overline{v}(t)| \leq l(t)\|z_t - z_{*t}\|_B, \quad \text{pour chaque} \quad t \in [0, t_1].$$

Pour chaque $t \in [0, t_1]$, on définit

$$\overline{h}(t) = \int_0^t \overline{v}(s)ds.$$

Alors

$$\begin{aligned}
|h(t) - \overline{h}(t)| &\leq \int_0^t l(s)\|z_s - z_{*s}\|_B\, ds \\
&\leq \int_0^t \frac{1}{\tau}\widetilde{l}(s)e^{\tau\widehat{l}(s)}e^{-\tau\widehat{l}(s)} \sup_{s\in[0,t]} |z(s) - z^*(s)|ds \\
&\leq \int_0^t \frac{1}{\tau}\widetilde{l}(t)e^{\tau\widehat{l}(t)}ds\|z - z^*\|_{B_*} \\
&\leq \frac{1}{\tau}\int_0^t (e^{\tau\widehat{l}(s)})'ds\|z - z^*\|_{B_*} \\
&\leq \frac{1}{\tau}e^{\tau\widehat{l}(t)}ds\|z - z^*\|_{B_*}.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$e^{-\tau\widehat{l}(t)}|h_1(t)(t) - h_2(t)| \quad \leq \quad \frac{1}{\tau}\|z - z^*\|_{B_*}.$$

Par conséquent,

$$\|h - \overline{h}\|_{B_*} \leq \frac{1}{\tau}\|z - z_*\|_{B_*},$$

où $\widehat{l}(t) = \displaystyle\int_0^t \widetilde{l}(s)ds$, $\widetilde{l}(t) = K_b l(t)$ et $\|\cdot\|_{B_*}$ est une norme de type Bielecki-type sur C_0 définie par

$$\|z\|_{B_*} = \sup\{e^{-\tau\widehat{l}(t)}|z(t)| : t \in [0, t_1]\}.$$

En interchangeant les rôles de h and h_*, on obtient une relation analogue pour aboutir à

$$H_d(P(z), P(z_*)) \leq \frac{1}{\tau}\|z - z_*\|_{B_*}.$$

Alors P est une contraction et admet donc au moins un point fixe z, solution du problème (5.57)–(5.58) que l'on note par y_0.

Étape 2 : Considérons le probème

$$y'(t) \in F(t, y_t),\ p.p.\ t \in (t_1, t_2], \tag{5.60}$$

$$y(t_1^+) = y_0(t_1^-) + I_1(y_0(t_1)),\quad y(t) = y_0(t),\, t \in (-\infty, t_1]. \tag{5.61}$$

Soit

$$C_1 = \{y \in C((t_1, t_2], \mathbb{R}^n) : y(t_1^+) \text{ existe}\}.$$

Posons $C_* = B \cap C([0, t_1], \mathbb{R}^n) \cap C_1$ et considérons l'opérateur $N_1 : C_* \to \mathcal{P}(C_*)$ défini par

$$N_1(y) = \left\{ h \in C_* | h(t) = \left\{ \begin{array}{ll} y_0(t), & (-\infty, t_1], \\ \\ y_0(t_1^-) + I_1(y_0(t_1^-)) + \displaystyle\int_{t_1}^{t} v(s)ds, & t \in (t_1, t_2]. \end{array} \right. \right\}$$

où

$$v \in S_{F,y} = \{v \in L^1([0, t_1], \mathbb{R}^n) | v \in F(t, y_t),\ \text{ p.p. }\ t \in [t_1, t_2]\}.$$

Soit $x(\cdot) : (-\infty, t_2] \to \mathbb{R}^n$ la fonction définie par

$$x(t) = \left\{ \begin{array}{ll} y(t_1^-) + I_1(y_0(t_1)), & \text{si }\ t \in (t_1, t_2], \\ \\ y_0(t), & \text{si }\ t \in (-\infty, t_1]. \end{array} \right.$$

Alors $x_{t_1} = y_0$. Pour chaque $z \in C_*$ avec $z(t_1) = 0$, notons par $\bar{z}$ la fonction définie par

$$\bar{z}(t) = \left\{ \begin{array}{ll} z(t), & \text{si } t \in [t_1, t_2], \\ \\ 0, & \text{si } t \in (-\infty, t_1]. \end{array} \right.$$

Si $y(\cdot)$ vérifie l'équation intégrale

$$y(t) = y(t_1^-) + I_1(y_0(t_1^-)) + \int_{t_1}^{t} v(s)ds,$$

elle peut être décomposée en une somme $y(t) = \bar{z}(t) + x(t),\ t_1 \le t \le t_2$. Il en résulte que $y_t = \bar{z}_t + x_t$ pour tout $t_1 \le t \le t_2$, et la fonction $z(\cdot)$ satisfait

$$z(t) = \int_{t_1}^{t} v(s)ds. \tag{5.62}$$

Posons

$$C_{t_1} = \{z \in C_* : z_{t_1} = 0\}.$$

Considérons l'opérateur $P_1 : C_{t_1} \to \mathcal{P}(C_{t_1})$ défini par

$$P_1(z) = \left\{ h \in C_{t_1} | h(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & t \in (-\infty, t_1], \\ \displaystyle\int_{t_1}^{t} v(s)ds, & t \in [t_1, t_2], \end{array} \right. \right\}$$

où

$$v \in S_{F,\bar{z}+x} := \{v \in L^1([t_1, t_2], \mathbb{R}^n) | v \in F(t, \bar{z}_t + x_t), \ \text{ p.p. } ; \ t \in [t_1, t_2]\}.$$

Comme dans la première étape, on montre que le problème (5.60)–(5.61) possède au moins une solution que l'on note par y_1.

Étape 3 : On continue ainsi le processus en tenant en compte le fait que $y_m := y\Big|_{[t_m,b]}$ est solution du problème

$$y'(t) = f(t, y_t), \ \text{ p.p. } \ t \in (t_m, b], \tag{5.63}$$

$$y(t_m^+) = y_{m-1}(t_{m-1}^-) + I_m(y_{m-1}(t_m^-)), \ y(t) = y_{m-1}(t), \ t \in (-\infty, t_{m-1}]. \tag{5.64}$$

La solution y du problème (5.50)-(5.52) est donc définie par

$$y(t) = \begin{cases} y_0(t), & \text{si } t \in (-\infty, t_1], \\ y_1(t), & \text{si } t \in (t_1, t_2], \\ \ldots & \\ y_m(t), & \text{si } t \in (t_m, b]. \end{cases}$$

□

5.8 Inclusions différentielles sur les intervalles infinis

Considérons le problème posé sur la demi-droite réelle positive

$$y'(t) \in F(t, y_t), \ a.e. \ t \in J := [0, \infty), \ t \neq t_k, \ k = 1, \ldots, \tag{5.65}$$

$$y(t_k^+) - y(t_k^-) = I_k(y(t_k^-)), \quad t = t_k, \ k = 1, \ldots, \tag{5.66}$$

$$Ay(t) - y_\infty = \phi(t), \quad t \in (-\infty, 0], \tag{5.67}$$

où $I_k, B, \phi, A, y_\infty, F$ sont comme dans la section précédentes. Donnons tout d'abord la notion de solution.

Définition 5.7 *Une fonction $y \in B_b$ est solution du problème (5.50)-(5.52) s'il existe une fonction $v \in L^1([0,\infty),\mathbb{R}^n)$ telle que $v(t) \in F(t, y_t)$ p.p. $t \in [0,\infty)$ et v satisfait $y'(t) = v(t)$ p.p. sur $[0,\infty)$ ainsi que les conditions* (5.66) − (5.67).

5.8.1 Le cas convexe

Le résultat d'existence s'énonce comme suit :

Théorème 5.16 *Supposons que*

(5.16.1) La fonction multivoque $F : [0,b] \times B \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ est compacte, à valeurs convexes, et

(a) $(t,.) \mapsto F(t,.)$ est mesurable ;

(b) $x \mapsto F(t,x)$ est s.c.c. p.p. $t \in [0,b]$;

(5.16.2) Il existe une fonction continue croissante $\psi : [0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ et $p \in L^1([0,b],\mathbb{R}_+)$ telles que

$$\|F(t,x)\| \leq p(t)\psi(\|x\|_B) \quad p.p.\, t \in [0,b] \quad \text{et chaque} \quad x \in B,$$

avec

$$K_b \int_0^b p(s)ds < \int_0^\infty \frac{dx}{\psi(x)},$$

(5.16.2) (a) Il existe des constantes positives $c_k,\ k = 1,\dots$ telles que

$$|I_k(y)| \leq c_k, \quad \text{for all} \ y \in \mathbb{R}^n, \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k < \infty;$$

(b) Il existe $p \in L^1([0,+\infty),\mathbb{R}_+)$ telle que

$$|f(t,y)| \leq p(t) \quad p.p.\ t \in [0,\infty) \quad \text{et chaque} \quad y \in B.$$

(5.16.3) Il existe une fonction $p \in L^1([0,\infty),\mathbb{R}_+)$ telle que

$$\|F(t,x)\| \leq p(t) \quad p.p.\ t \in [0,\infty) \quad \text{et chaque} \quad x \in B.$$

Alors le problème (5.65)–(5.67) possède au moins une solution sur $(-\infty,\infty)$.

Démonstration. On définit l'opérateur $N : B_0 \longrightarrow \mathcal{P}(B_0)$ par

$$N(y) = \left\{ h \in B_0 \colon\ h(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\phi(0)}{A(A-1)} + \dfrac{\phi(t)}{A} & \\ +\dfrac{1}{A-1}\left[\displaystyle\int_0^\infty v(s)ds + \sum_{k=1}^{\infty} I_k(y(t_k))\right], & t \in (-\infty, 0], \\ & \\ \dfrac{\phi(0)}{A-1} + \dfrac{1}{A-1}\left[\displaystyle\int_0^\infty v(s)ds + \sum_{k=1}^{\infty} I_k(y(t_k))\right] & \\ +\displaystyle\int_0^t v(s)ds + \sum_{0<t_k<t} I_k(y(t_k)), & t \in [0, \infty), \end{array} \right. \right\}$$

où

$$B_0 = \{y \in B_* : \sup_{t \in J} |y(t)| < \infty\},$$

$$B_* = \{y : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}^n : y \in PC_* \cap B\},$$

$$\begin{aligned} PC_* \ &= \Big\{ y : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}^n :\ y(t_k^-),, y(t_k^+) \text{ existent et } \ y(t_k) = y(t_k^-), \\ &\quad y(t) = \phi(t),\ t \in (-\infty, 0] \text{ et } y_k \in C(J_k, \mathbb{R}^n),\ k = 1, \ldots \Big\}, \end{aligned}$$

et

$$v \in S_{F,y} := \{v \in L^1([0, \infty), \mathbb{R}^n) :\ v(t) \in F(t, y_t),\ \text{a.e} t \in [0, \infty)\}.$$

Soit $x(\cdot) : (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ la fonction définie par

$$x(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\phi(0)}{A-1} + \dfrac{1}{A-1}\left[\displaystyle\int_0^\infty v(s)ds + \sum_{k=1}^{\infty} I_k(x(t_k))\right], & \text{si } \ t \in [0, \infty), \\ \dfrac{\phi(0)}{A(A-1)} + \dfrac{1}{A-1}\left[\displaystyle\int_0^\infty v(s)ds + \sum_{k=1}^{\infty} I_k(x(t_k))\right] + \dfrac{\phi(t)}{A}, & \text{si } \ t \in (-\infty, 0]. \end{array} \right.$$

Alors $x_0 = \dfrac{\phi(0)}{A-1} + \dfrac{1}{A-1}\left[\displaystyle\int_0^\infty v(s)ds + \sum_{k=1}^{\infty} I_k(x(t_k))\right]$. Pour chaque $z \in B \cap C([0, \infty), \mathbb{R}^n)$ avec $z(0) = 0$, notons par $\bar{z}$ la fonction définie par

$$\bar{z}(t) = \left\{ \begin{array}{ll} z(t), & \text{si } t \in [0, \infty), \\ & \\ 0, & \text{si } t \in (-\infty, 0]. \end{array} \right.$$

Si $y(\cdot)$ vérifie l'équation intégrale

$$y(t) = \frac{\phi(0)}{A-1} + \frac{1}{A-1}\left[\int_0^\infty v(s)ds + \sum_{k=1}^{\infty} I_k(y(t_k))\right] + \int_0^t v(s)ds + \sum_{0<t_k<t} I_k(y(t_k)),$$

elle peut se décomposer en une somme $y(t) = \bar{z}(t) + x(t),\ 0 \le t < \infty$; cela entraîne que $y_t = \bar{z}_t + x_t$ pour chaque $0 \le t < \infty$, et la fonction $z(\cdot)$ satisfait

$$z(t) = \int_0^t v(s)ds + \sum_{0<t_k<t} I_k(\bar{z}(t_k) + x(t_k)), \tag{5.68}$$

où

$$S_{F,\bar{z}+x} := \{v \in L^1([0,\infty), \mathbb{R}^n) |\ v(t) \in F(t, \bar{z}_t + x_t),\ \text{a.e}t \in [0,\infty)\}.$$

Définissons l'opérateur $P : C_0 \to \mathcal{P}(C_0)$ par

$$P(z) = \left\{ h \in C_0 | h(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & t \in (-\infty, 0], \\ \displaystyle\int_0^t v(s)ds + \sum_{0<t_k<t} I_k(\bar{z}(t_k) + x(t_k)), & t \in [0,\infty), \end{array} \right. \right\}$$

où $v \in S_{F,\bar{z}+x}$ et, rappellons-le

$$C_0 = \{z \in B \cap C([0,t_1], \mathbb{R}^n) : z_0 = 0\}.$$

On peut alors montrer que cet opérateur admet au moins un point fixe, solution du problème (5.65)–(5.67). □

5.8.2 Le cas non convexe

Pour ce cas, on a

Théorème 5.17 *Outre (5.16.1), supposons que*

(5.17.1) (a) Il existe des constantes $c_k,\ k = 1, \ldots,$ telles que

$$|I_k(y)| \le c_k, \quad \textit{for all } y \in \mathbb{R}^n, \quad \textit{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k < \infty;$$

(b) Il existe $p \in L^1([0,+\infty), \mathbb{R}_+)$ telle que

$$|f(t,y)| \le p(t) \quad \textit{p.p. } t \in [0,\infty) \ \textit{ et chaque } y \in B.$$

(5.17.2) $F : [0,\infty) \times B \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ est une multi-application compacte telle que
a) $t \mapsto F(t,x)$ est $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$ mesurable ;
b) $x \mapsto F(t,x)$ est s.c.i. p.p. $t \in [0,\infty)$,

Alors le problème (5.65)–(5.67) admet au moins une solution.

Démonstration. On peut montrer l'existence d'une fonction continue $f : C_0 \to L^1([0,\infty),\mathbb{R}^n)$. Considérons alors le problème impulsif

$$z'(t) = f(\bar{z}_t + x_t), \quad \text{p.p. } t \in [0,\infty)\backslash\{t_1,\dots,\}, \tag{5.69}$$

$$\Delta z(t_k) = I_k(\bar{z}(t_k) + x(t_k)), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{5.70}$$

$$z(t) = 0, \;\; t \in (-\infty, 0] \tag{5.71}$$

et l'opérateur $P : C_0 \to C_0$ défini par

$$(Pz)(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \in (-\infty,0] \\ \displaystyle\int_0^t f(\overline{z}_s + x_s)ds + \sum_{0<t_k<t} I_k(\overline{z}(t_k,x) + x(t_k)) & \text{si } t \in [0,\infty). \end{cases}$$

On peut vérifier que P est complètement continu et qu'il existe $M > 0$ telle que pour chaque solution de l'équation $z = \lambda P(z)$, pour $\lambda \in (0,1)$, on a $\|z\|_0 \le M$. Posons

$$U = \{z \in C_0 : \|z\|_0 < M+1\},$$

où U est un ouvert de C_0. Alors il n'existe pas de $z \in \partial U$ tel que $z = \lambda P(z)$ pour $\lambda \in (0,1)$. En vertu de l'alternative non linéaire de Lera-Schauder, on déduit que P possède un point fixe $z \in \overline{U}$. Par conséquent N possède un point fixe y, solution du problème (5.65)–(5.67). □

5.9 Inclusions différentielles impulsives semi-linéaires

Dans cette section, on s'intéresse à l'existence de solutions "mild" pour des inclusions différentielles impulsives semilinéaire du premier ordre de la forme (voir [57])

$$y' - Ay \in F(t, y_t), \quad t \in J = [0,b], \; t \ne t_k, \quad k = 1,\dots,m, \tag{5.72}$$

$$y(t_k^+) = I_k(y(t_k^-)), \quad k = 1,\dots,m, \tag{5.73}$$

$$y(t) = \phi(t), \;\; t \in [-r, 0], \tag{5.74}$$

où A est le générateur infinitésimal d'un semigroupe fortement continu d'opérateurs linéaires bornés $T(t)$ dans E, $F : J \times \mathcal{D} \to \mathcal{P}(E)$ est une multi-application à valeurs convexes, fermées, bornées, $\phi \in \mathcal{D}$, $(0 < r < \infty)$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m < t_{m+1} = b$, $I_k \in C(E,E)$ $(k = 1,2,\dots,m)$, sont des fonctions bornées, $\Delta y|_{t=t_k} =$

$y(t_k^+) - y(t_k^-)$, $y(t_k^-)$ et $y(t_k^+)$ représente les limites à droite et à gauche $y(t)$ aux points $t = t_k$, respectivement et E est un espace de Banach réel normé par $|\cdot|$. Commençons par donner la

Définition 5.8 *Une fonction $y \in \Omega$ est dite solution "mild" su problème (5.72)–(5.74) s'il existe une fonction $v \in L^1(J, E)$ telle que $v(t) \in F(t, y(t))$ p.p. sur J et*

$$y(t) = \begin{cases} \phi(t), & t \in [-r, 0] \\ T(t)\phi(0) + \displaystyle\int_0^t T(t-s)v(s)ds, & t \in [0, t_1], \\ +T(t-t_k)I_k(y(t_k^-)) + \displaystyle\int_{t_k}^t T(t-s)v(s)ds, & t \in J_k,\ k = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

5.9.1 Le cas convexe

On se propose de montrer le

Théorème 5.18 *Supposons satisfaites les hypothèses suivantes :*

(5.18.1) Il existe des constantes c_k, telles que $|I_k(y)| \leq c_k,\ k = 1, \ldots, m$ pour chaque $y \in E$.

(5.18.2) Il existe une constante M telle que $\|T(t)\|_{B(E)} \leq M$ pour cahque $t \geq 0$ et $A : D(A) \subset E \to E$ est le générator infinitésimal d'un semi-groupe groupe $\{T(t) : t > 0\}$.

(5.18.3) Il existe une fonction continue croissante $\psi : [0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ et $p \in L^1(J, \mathbb{R}_+)$ telles que

$$|f(t, y)| \leq p(t)\psi(|y|) \quad \text{p.p. } t \in J \text{ ; et chaque } y \in E,$$

avec

$$\int_0^b m(s)ds < \int_c^\infty \frac{du}{u + \psi(u)},$$

où

$$m(s) = \max\{M\|B\|_{B(E)}, Mp(s)\} \quad \text{et} \quad c = M\left[|y_0| + \sum_{k=1}^m c_k\right].$$

(5.18.4) Pour tout borné $\mathcal{B} \subseteq C(J_k, E)$ et $t \in J$, l'ensemble

$$\Big\{T(t)y_0 \quad + \quad \int_0^t T(t-s)B(y(s))ds + \int_0^t T(t-s)f(s, y(s))ds$$

$$+ \sum_{0<t_k<t} T(t-t_k)I_k(y(t_k^-)) : y \in \mathcal{B}\Big\},$$

est relativement compacte in E.

(5.18.2) Il existe une fonction continue croissante $\psi : [0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ et $p \in L^1(J,\mathbb{R}_+)$ telle que

$$\|F(t,u)\| := \sup\{|v| : v \in F(t,u)\} \le p(t)\psi(\|u\|_{\mathcal{D}})$$

p.p. $t \in J$ et chaque $u \in \mathcal{D}$ avec

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} p(s)ds < \int_{N_{k-1}}^{\infty} \frac{d\tau}{\psi(\tau)}, \quad k = 1,\dots,m+1,$$

où $N_0 = M\|\phi\|_{\mathcal{D}}$, et pour $k = 2,\dots,m+1$,

$$N_{k-1} = \sup_{y\in[-t_{k-1},t_k]} M|I_{k-1}(y(t))|, \quad y \in \Omega$$

$$M_{k-2} = \Gamma_{k-1}^{-1}\left(M\int_{t_{k-2}}^{t_{k-1}} p(s)ds\right)$$

avec

$$\Gamma_l(z) = \int_{N_{l-1}}^{z} \frac{d\tau}{\psi(\tau)}, \quad z \ge N_{l-1}, \quad l \in \{1,\dots,m+1\}.$$

Alors le problème (5.72)–(5.74) possède au moins une solution $y \in \Omega$.

Démonstration. Étape 1. Considérons le problème (5.72)–(5.74) sur $[-r,t_1]$

$$y' - Ay \in F(t,y_t), \quad t \in J = [0,t_1], \tag{5.75}$$

$$y(t) = \phi(t) \ \ t \in [-r,0] \tag{5.76}$$

et montrons des estimations a priori sur les solutions intégrales dites de type "mild". Soit y une telle solution. Alors pour chaque $t \in [0,t_1]$

$$y(t) - T(t)\phi(0) \in \int_0^t T(t-s)F(s,y_s)ds.$$

Á partir de (5.18.1), on obtient que

$$|y(t)| \le M\|\phi\|_{\mathcal{D}} + M\int_0^t p(s)\psi(\|y_s\|_{\mathcal{D}})ds, \ t \in [0,t_1].$$

Considérons la fonction μ_0 définie par

$$\mu_0(t) = \sup\{|y(s)| : -r \le s \le t\}, \quad 0 \le t \le t_1.$$

Soit $t^* \in [-r, t]$ tel que $\mu_0(t) = |y(t^*)|$. Si $t^* \in [0, t_1]$, alors on a par l'inégalité précédente $t \in [0, t_1]$

$$\mu_0(t) \le M\|\phi\|_{\mathcal{D}} + M \int_0^t p(s)\psi(\mu_0(s))ds.$$

Si $t^* \in [-r, 0]$, alors $\mu_0(t) = \|\phi\|_{\mathcal{D}}$ d'où l'inégalité puisque $M \ge 1$. Soit $v_0(t)$ le terme de droite de cette inégalité. Alors

$$v_0(0) = M\|\phi\|_{\mathcal{D}} = N_0, \quad \mu_0(t) \le v_0(t), \quad t \in [0, t_1]$$

et

$$v_0'(t) = Mp(t)\psi(\mu_0(t)), \quad t \in [0, t_1].$$

Comme ψ est croissante, alors

$$v_0'(t) \le Mp(t)\psi(v_0(t)), \quad t \in [0, t_1].$$

Ceci implique que pour chaque $t \in [0, t_1]$

$$\int_{N_0}^{v_0(t)} \frac{d\tau}{\psi(\tau)} \le M \int_0^{t_1} p(s)ds.$$

D'après (5.18.1), on a

$$|v_0(t^*)| \le \Gamma_1^{-1}\Big(M \int_0^{t_1} p(s)ds\Big) := M_0.$$

Comme pour tout $t \in [0, t_1]$, $\|y_t\|_{\mathcal{D}} \le \mu_0(t)$, on a

$$\sup_{t\in[-r,t_1]} |y(t)| \le \max(\|\phi\|_{\mathcal{D}}, M_0) = b_0.$$

Une solution "mild" du problème (5.75)–(5.76) est un point fixe de l'opérateur $G : \Omega \longrightarrow \mathcal{P}(\Omega)$ défini par

$$G(y) := \left\{ h \in \Omega : h(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \phi(t), & \text{si } t \in J_0 \\ \\ T(t)\phi(0) & \\ + \displaystyle\int_0^t T(t-s)v(s)ds, & \text{si } t \in J_0 \end{array} \right. \right\}$$

où

$$v \in S^1_{F,y} := \{v \in L^1([0, t_1], E) : v(t) \in F(t, y_t), \text{ p.p. } t \in [0, t_1]\}.$$

Montrons que G vérifie les conditions de l'Alternative non linéaire de Schauder.

(a) : *$G(y)$ est convexe pour chaque $y \in \Omega([-r,t_1],E)$.* En effet, si h, $\overline{h}$ est dans $G(y)$, alors il existe $v \in S^1_{F,y}$ et $\overline{v} \in S^1_{F,y}$ tel que

$$h(t) = T(t)\phi(0) + \int_0^t T(t-s)v(s)ds, \quad t \in J_0$$

et

$$\overline{h}(t) = T(t)\phi(0) + \int_0^t T(t-s)\overline{v}(s)ds, \quad t \in J_0.$$

Soit $0 \leq l \leq 1$. Alors pour chaque $t \in [0,t_1]$ on a

$$[lh + (1-l)\overline{h}](t) = T(t)\phi(0) + \int_0^t T(t-s)[lv(s) + (1-l)\overline{v}(s)]ds.$$

Comme $S^1_{F,y}$ est convexe (car F est à valeurs convexes), alors

$$lh + (1-l)\overline{h} \in G(y).$$

(b) : *G transforme les bornés en des bornés de $\Omega([-r,t_1],E)$.* Soit $B_q := \{y \in \Omega([-r,t_1],E) : \|y\|_\Omega = \sup_{t\in[-r,t_1]} |y(t)| \leq q\}$ un borné de $\Omega([-r,t_1],E)$ et $y \in B_q$, alors pour chaque $h \in G(y)$ il existe $v \in S^1_{F,y}$ tel que

$$h(t) = T(t)\phi(0) + \int_0^t T(t-s)v(s)ds, \quad t \in J_0.$$

Ainsi pour chaque $t \in [-r,t_1]$, on a

$$\begin{aligned} |h(t)| &\leq M\|\phi\|_{\mathcal{D}} + M\int_0^t |v(s)|ds \\ &\leq M\|\phi\|_{\mathcal{D}} + M\|\varphi_q\|_{L^1}. \end{aligned}$$

(c) : *G envoie les bornés de $\Omega([-r,t_1],E)$ dans des ensembles équicontinuous.* Soit $r_1, r_2 \in [-r,t_1]$, $r_1 < r_2$, $B_q := \{y \in \Omega([-r,t_1],E) : \|y\|_\Omega \leq q\}$ un borné de $\Omega([-r,t_1],E)$ et $y \in B_q$. Pour chaque $h \in G(y)$, il existe $v \in S^1_{F,y}$ tel que

$$h(t) = T(t)\phi(0) + \int_0^t T(t-s)v(s)ds, \quad t \in J_0.$$

Alors

$$\begin{aligned} |h(r_2) - h(r_1)| \;&\leq\; |(T(r_2)\phi(0) - T(r_1)\phi(0)| \\ &\quad + \Big|\int_0^{r_2} [T(r_2-s) - T(r_1-s)]v(s)ds\Big| \\ &\quad + \Big|\int_{r_1}^{r_2} T(r_1-s)v(s)ds\Big| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq |(T(r_2)\phi(0) - T(r_1)\phi(0)| \\
&\quad +\Big|\int_0^{r_2}[T(r_2-s) - T(r_1-s)]v(s)ds\Big| \\
&\quad + M\int_{r_1}^{r_2}|v(s)|ds \\
&\leq |(T(r_2)\phi(0) - T(r_1)\phi(0)| \\
&\quad +\Big|\int_0^{r_2}[T(r_2-s) - T(r_1-s)]\varphi_r(s)ds\Big| \\
&\quad + M\int_{r_1}^{r_2}\varphi_r(s)ds.
\end{aligned}$$

Le terme de droite tend vers zéro quand $r_1 \to r_2$, car $T(t)$ est un opérateur fortement continu et la compacité de $T(t)$ pour $t > 0$ entraîne la continuité dans la topologie de la convergence uniforme des opérateurs. L'équicontinuité pour les cas $r_1 < r_2 \leq 0$ et $r_1 \leq 0 \leq r_2$ résultent de la continuité uniforme de ϕ sur l'intervalle $[-r, 0]$. (a)-(b) et le lemme d'Arzelá-Ascoli, il suffit de montrer que G transforme B_q dans un précompact de E. Soit $0 < t \leq b$ et ε un réel vérifiant $0 < \varepsilon < t$. Pour $y \in B_q$, on définit

$$h_\varepsilon(t) \quad = \quad T(t)\phi(0) + T(\varepsilon)\int_0^{t-\varepsilon} T(t-s-\varepsilon)v(s)ds$$

où $v \in S^1_{F,y}$. Comme $T(t)$ est un opérateur compact, l'ensemble $H_\varepsilon(t) = \{h_\varepsilon(t) : h_\varepsilon \in G(y)\}$ est précompact dans E pour chaque ε, $0 < \varepsilon < t$. De plus, pour chaque $h \in G(y)$ on a

$$|h(t) - h_\varepsilon(t)| \quad \leq \quad \int_{t-\varepsilon}^{t} |T(t-s)|\varphi_q(s)ds.$$

Il existe donc des ensembles précompacts arbitrairement proches de l'ensemble $H(t) = \{h_\varepsilon(t) : h \in G(y)\}$. Par suite, l'ensemble $H = \{h_\varepsilon(t) : h \in G(y)\}$ est précompact dans E. On en déduit que $G : \Omega([-r, t_1], E) \longrightarrow \mathcal{P}(\Omega([-r, t_1], E))$ est complètement continue. Posons

$$U = \{y \in \Omega([-r, t_1], E) : \|y\|_\Omega < b_0 + 1\}.$$

Les parties (b), (c) avec le lemme d'Arzelá-Ascoli montrent que $G : \overline{U} \longrightarrow \mathcal{P}(\Omega([-r, t_1], E)$ est une application multivoque compacte.

(d) : *G est à graphe fermée.* Soit $y_n \longrightarrow y_*$, $h_n \in G(y_n)$ et $h_n \longrightarrow h_*$. Montrons que $h_* \in G(y_*)$. $h_n \in G(y_n)$ signifie qu'il existe $v_n \in S_{F,y_n}$ tel que

$$h_n(t) = T(t)\phi(0) + \int_0^t T(t-s)v_n(s)ds, \quad t \in [-r, t_1].$$

Montrons qu'il existe $v_* \in S^1_{F,y_*}$ tel que

$$h_*(t) = T(t)\phi(0) + \int_0^t T(t-s)v_*(s)ds, \quad t \in [-r, t_1].$$

Considérons l'opérateur linéaire continu $\Gamma : L^1([0,t_1],E) \longrightarrow C([0,t_1],E)$ défini par

$$(\Gamma v)(t) = \int_0^t T(t-s)v(s)ds.$$

On a

$$\|(h_n - T(t)\phi(0)) - (h_* - T(t)\phi(0))\|_\Omega \longrightarrow 0 \ \text{ as } \ n \longrightarrow \infty.$$

Le lemme 1.11 entraîne que $\Gamma \circ S^1_F$ est à graphe fermé. De la définition Γ, on a que

$$h_n(t) - T(t)\phi(0) \in \Gamma(S^1_{F,y_n}).$$

Comme $y_n \longrightarrow y_*$, on en déduit que

$$h_*(t) = T(t)\phi(0) + \int_0^t T(t-s)v_*(s)ds, \quad t \in J_0$$

pour $v_* \in S^1_{F,y_*}$. D'après la définition de l'ouvert U, il n'existe pas de $y \in \partial U$ tel que $y \in \lambda G(y)$ pour tout $\lambda \in (0,1)$. L'Alternative non linéaire de Leray-Schauder entraîne donc que G possède un point fixe $y_0 \in \overline{U}$ solution du problème (5.75)–(5.76)

Étape 2. Considrons le problème sur $J_1 := [t_1, t_2]$

$$y' - Ay \in F(t, y_t), \quad t \in J = (t_1, t_2], \tag{5.77}$$

$$y(t_1^+) = I_1(y(t_1^-)), \qquad y(t) = y_0(t), \ t \in [t_1 - r, t_1] \tag{5.78}$$

et soit y une solution possible du problème (5.77)–(5.78). Pour chaque $t \in [t_1, t_2]$, on

$$y(t) - T(t-t_1)I_1(y(t_1^-)) \in \int_{t_1}^t T(t-s)F(s, y_s)ds.$$

Par conséquent

$$|y(t)| \leq M \sup_{t \in [-r, t_1]} |I_1(y_0(t))| + M \int_{t_1}^t p(s)\psi(\|y_s\|_{\mathcal{D}})ds, \ t \in [t_1, t_2].$$

Considérons la fonction μ_1 définie par

$$\mu_1(t) = \sup\{|y(s)| : t_1 \leq s \leq t\}, \quad t_1 \leq t \leq t_2.$$

Soit $t^* \in [t_1, t]$ tel que $\mu_1(t) = |y(t^*)|$. Alors pour tout $t \in [t_1, t_2]$,

$$\mu_1(t) \leq N_1 + M \int_{t_1}^{t} p(s)\psi(\mu_1(s))ds.$$

Soit $v_1(t)$ le terme du second membre dans cette inégalité ; alors

$$v_1(t_1) = N_1, \quad \mu_1(t) \leq v_1(t), \quad t \in [t_1, t_2]$$

et

$$v_1'(t) = Mp(t)\psi(\mu_1(t)), \quad t \in [t_1, t_2].$$

La fonction ψ étant croissante, on a

$$v_1'(t) \leq Mp(t)\psi(v_1(t)), \quad t \in [t_1, t_2].$$

Pour tout $t \in [t_1, t_2]$, on en déduit que

$$\int_{N_1}^{v_1(t)} \frac{d\tau}{\psi(\tau)} \leq M \int_{t_1}^{t_2} p(s)ds.$$

De plus

$$|v_1(t^*)| \leq \Gamma_2^{-1}\Big(M \int_{t_1}^{t_2} p(s)ds\Big) := M_1.$$

Comme pour chaque $t \in [t_1, t_2]$, $\|y_t\|_{\mathcal{D}} \leq \mu_1(t)$, on a

$$\sup_{t\in[t_1,t_2]} |y(t)| \leq M_1.$$

Une solution "mild" du problème (5.77)-(5.78) est un point fixe de l'opérateur $G : \Omega([t_1 - r, t_2], E) \to \mathcal{P}(\Omega([t_1 - r, t_2], E))$ défini par

$$G(y) := \{h \in \Omega([t_1 - r, t_2], E)\}$$

avec

$$h(t) = \begin{cases} y_0(t), & \text{si } t \in [t_1 - r, t_1], \\ T(t - t_1)I_1(y(t_1^-)) & \\ + \displaystyle\int_{t_1}^{t} T(t - s)v(s)ds, t \in [t_1, t_2], & \text{si } v \in S^1_{F,y}. \end{cases}$$

Posons

$$U = \{y \in \Omega([t_1, t_2], E) : \|y\|_\Omega < M_1 + 1\}.$$

Comme dans la première étape, on montre que $G : \overline{U} \longrightarrow \mathcal{P}_{cv}(\Omega)$ est un opérateur multivoque compact et s.c.s. De plus, il n'existe pas de $y \in \partial U$ tel que $y \in \lambda G(y)$ pour tout $\lambda \in (0, 1)$.

Par l'Alternative non linéaire de Leray-Schauder, G possède un point fixe $y_1 \in \overline{U}$ solution "mild" du problème (5.77)–(5.78).

Étape 3. En continuant ainsi le processus, on construit une solution $y_k \in \Omega(J_k, E), k = 2, \ldots, m$ au problème

$$y' - Ay \in F(t, y_t), \quad \text{p.p.} \;\; t \in J_k, \tag{5.79}$$

$$y(t_k^+) = I_k(y(t_k^-)), \;\; y(t) = y_{k-1}(t), \;\; t \in [t_{k-1} - r, t_k]. \tag{5.80}$$

Alors

$$y(t) = \begin{cases} y_0(t), & t \in [-r, t_1] \\ y_1(t), & t \in [t_1, t_2], \\ \vdots & \\ y_{m-1}(t), & t \in [t_{m-1}, t_m], \\ y_m(t), & t \in [t_m, b] \end{cases}$$

est solution "mild" du problème (5.72)–(5.74). □

5.9.2 Le cas non convexe

Le même problème que dans la section précédente est maintenant étudié lorsque le terme non linéaire est non convexe.

Théorème 5.19 *Admettons les hypothèses suivantes :*

(5.19.1) $F : [0, b] \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ *est une application à valeurs compactes, non vides telles que :*

(a) $(t, u) \mapsto F(t, u)$ *est* $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$ *mesurable ;*

(b) $u \mapsto F(t, u)$ *est s.c.i. p.p.* $t \in [0, b]$,

(5.19.2) Pour chaque borné $B \subseteq \Omega$ *et* $t \in J$ *l'ensemble*

$$\Big\{\phi(0) + \int_0^t f(s, y_s)ds + \sum_{0<t_k<t} I_k(y(t_k^-)) : y \in B\Big\}$$

est relativement compacte dans E,

(5.19.2) Il existe des constantes $c_k > 0$ *et des fonctions continues* $\psi_k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *telles que*

$$|I_k(x)| \leq c_k \psi_k(|x|), \;\; \textit{pour chaque} \;\; x \in E, \;\; k = 1, \ldots, m.$$

(5.19.3) Il existe une fonction continue croissante $\psi : [0,\infty) \to (0,\infty)$ *et* $p \in L^1([0,b],\mathbb{R}_+)$ *telles que que*

$$\|F(t,u)\| \leq p(t)\psi(\|u\|_{\mathcal{D}}) \ \ p.p.\ t \in [0,b] \ \text{et chaque}\ u \in D,$$

avec

$$M\int_0^b p(s)ds < \int_c^\infty \frac{d\tau}{\psi(\tau)}, \quad c = M\|\phi\|_{\mathcal{D}} + \sum_{k=1}^m c_k.$$

(5.19.3) Pour chaque ensemble borné $B \subseteq \Omega$ *et* $t \in [0,b]$, *l'ensemble*

$$\Big\{T(t)\phi(0) + \int_0^t T(t-s)v(s)ds + \sum_{0<t_k<t} T(t-t_k)I_k(y(t_k^-)) : \ v \in \mathcal{F}(B)\Big\},$$

est relativement compact dans E *où* $\mathcal{F}(B) = \cup\{\mathcal{F}(y) : y \in B\}$ *et* E *un espace de Banach séparable.*

Alors le problème impulsif (5.72)–(5.74) admet au moins une solution.

Démonstration. Il est clair, d'après les hypothèses que F est de type s.c.i. Alors d'après le théorème 2.8, il existe une fonction continue $f : \Omega \to L^1([0,b],E)$ telle que $f(y) \in \mathcal{F}(y)$ pour tout $y \in \Omega$. Soit le problème

$$y'(t) - Ay(t) = f(y_t), \quad t \in [0,b], \ t \neq t_k, \quad k = 1,\ldots,m, \tag{5.81}$$

$$\Delta y|_{t=t_k} = I_k(y(t_k^-)), \quad k = 1,\ldots,m, \tag{5.82}$$

$$y(t) = \phi(t), \quad t \in [-r,0]. \tag{5.83}$$

Si $y \in \Omega$ est solution du problème (5.81)–(5.83), alors y est solution du problème (5.72)–(5.74). Afin de transformer le problème (5.81)–(5.83) en un problème de point fixe, considérons l'opérateur $N : \Omega \to \Omega$ défini par

$$N(y)(t) = \begin{cases} \phi(t), & \text{si } t \in [-r,0], \\ T(t)\phi(0) + \displaystyle\int_0^t T(t-s)f(y_s)ds & \\ 0.3cm] + \displaystyle\sum_{0<t_k<t} T(t-t_k)I_k(y(t_k^-)), & \text{si } t \in [0,b]. \end{cases}$$

Montrons que N est complètement continu.

Étape 1 : *L'opérateur* N *transforme les boréns en des bornés de* Ω. Pour cela, il suffit de montrer que pour $q > 0$ il existe une constante positive l telle que pour chaque $y \in B_q := \{y \in \Omega : \|y\|_\Omega \leq q\}$, on a $\|N(y)\|_\Omega \leq l$. Soit $y \in B_q$. Alors pour chaque $t \in [0,b]$

$$N(y)(t) = T(t)\phi(0) + \int_0^t T(t-s)f(y_s)ds + \sum_{0<t_k<t} T(t-t_k)I_k(y(t_k^-)), \quad t \in [0,b].$$

Pour chaque $t \in [0,b]$, on a

$$\begin{aligned} |N(y)(t)| &\leq M|\phi(0)| + M\int_0^t |f(y_s)|ds + M\sum_{k=1}^m c_k \\ &\leq M\|\phi\|_{\mathcal{D}} + M\|\varphi_q\|_{L^1} + M\sum_{k=1}^m c_k := l. \end{aligned}$$

Étape 2. *N envoie les bornés de Ω sur des ensembles équicontinus.* Soit $u_1, u_2 \in J$ et $\varepsilon > 0$. Alors si $0 < \varepsilon < u_1 < u_2$, on a

$$\begin{aligned} |N(y)(u_2) - N(y)(u_1)| \quad \leq \quad & |[T(u_2)\phi(0) - T(u_1)\phi(0)| \\ & +M\int_{u_1}^{u_2} \varphi_q(s)ds \\ & +\int_0^{u_1-\varepsilon} |[T(u_1-s) - T(u_2-s)]\varphi_q(s)|ds \\ & +\int_{u_1-\varepsilon}^{u_1} |[T(u_1-s) - T(u_2-s)]\varphi_q(s)|ds \\ & +M\sum_{0<t_k<u_2-u_1} c_k \\ & +\sum_{0<t_k<u_1} c_k|T(u_2-t_k) - T(u_1-t_k)|. \end{aligned}$$

Lorsque u_2 tend vers u_1 et ε est suffisemment petit, le terme de droite tend vers zéro car la compacité de $T(t)$ pour $t > 0$ implique la continuité dans la topologie de la convergence uniforme des opérateurs. Enfin, l'équicontinuité pour les cas $u_1 < u_2 \leq 0$ et $u_1 \leq 0 \leq u_2$ se montre de la même manière.

Étape 3. *L'opérateur N est continu.* Soit $\{y_n\}$ une suite telle que $y_n \longrightarrow y$ in Ω. Alors

$$\begin{aligned} |N(y_n(t)) - N(y(t))| \quad \leq \quad & M\int_0^t |f(y_{n,s}) - f(y_s)|ds \\ & +M\sum_{0<t_k<t} |I_k(y_n(t_k)) - I_k(y(t_k^-))| \\ \leq \quad & M\int_0^b |f(y_{n,s}) - f(y_s)|ds \end{aligned}$$

$$+M \sum_{0<t_k<t} |I_k(y_n(t_k)) - I_k(y(t_k^-))|.$$

Comme les fonctions f et $I_k,\ k = 1, \dots, m$ sont continues, on a

$$\begin{aligned}\|N(y_n) - N(y)\|_\Omega &\leq M\|f(y_{n_{(.)}}) - f(y_{(.)})\|_{L^1} \\ &\quad + M\sum_{k=1}^{m} |I_k(y_n(t_k^-)) - I_k(y(t_k^-))| \to 0\end{aligned}$$

quand $n \to \infty$. Des étapes 2, 3 et le lemme d'Ascoli-Arzelá, on endéduit que $N : \Omega \longrightarrow \Omega$ is compeletely continuous.

Étape 4. *L'ensemble*

$$\mathcal{E}(N) := \{y \in \Omega : y = \lambda N(y), \quad pour \ \ 0 < \lambda < 1\}$$

est borné. Soit $y \in \mathcal{E}(N)$. Alors $y = \lambda N(y)$ pour $0 < \lambda < 1$. Ainsi, pour chaque $t \in [0, b]$,

$$y(t) = \lambda \left[T(t)\phi(0) + \int_0^t T(t-s) f(y_s)\, ds + \sum_{0<t_k<t} T(t-t_k) I_k(y(t_k^-)) \right].$$

Cela implique que, pour chaque $t \in [0, b]$, on a

$$|y(t)| \leq M\|\phi\|_{\mathcal{D}} + M \int_0^t p(s)\psi(\|y_s\|_{\mathcal{D}})ds + M\sum_{k=1}^{m} d_k. \tag{5.84}$$

Considérons la fonction μ définie par

$$\mu(t) = \sup\{|y(s)| : -r \leq s \leq t\}, \quad 0 \leq t \leq b. \tag{5.85}$$

Soit $t^* \in [-r, t]$ tel que $\mu(t) = |y(t^*)|$. Si $t^* \in J$, d'après l'inégalité (5.84), on a que pour tout $t \in [0, b]$

$$\mu(t) \leq M\|\phi\|_{\mathcal{D}} + M \int_0^t p(s)\psi(\mu(s))ds + M\sum_{k=1}^{m} d_k. \tag{5.86}$$

Si $t^* \in [-r, 0]$, alors $\mu(t) = \|\phi\|_{\mathcal{D}}$ et l'inégalité (5.86) a lieu. Dans le terme de droite de l'inégalité (5.86), prenons $v(t)$. Alors

$$c = v(0) = M\|\phi\|_{\mathcal{D}} + M\sum_{k=1}^{m} c_k, \quad \mu(t) \leq v(t), \quad t \in [0, b],$$

et

$$v'(t) = Mp(t)\psi(\mu(t)), \ \ t \in [0,b].$$

La fonction ψ étant croissante, on a

$$v'(t) \ \ \leq Mp(t)\psi(v(t)), \ \ t \in [0,b].$$

Alors pour tout $t \in [0,b]$, on a

$$\int_{v(0)}^{v(t)} \frac{d\tau}{\psi(\tau)} \leq M \int_0^b p(s)ds < \int_{v(0)}^{\infty} \frac{d\tau}{\psi(\tau)}.$$

De plus, il existe une constante K telle que $v(t) \leq K, \ t \in [0,b]$, et donc $\mu(t) \leq K, \ t \in [0,b]$. Comme pour tout $t \in [0,b]$, $\|y_t\|_{\mathcal{D}} \leq \mu(t)$, on a

$$\|y\|_{\Omega} \leq \max\{\|\phi\|_{\mathcal{D}}, K\} := K',$$

où K' dépend uniquement de b, M et des fonctions p et ψ. Par suite $\mathcal{E}(N)$ est borné. Posons $X := \Omega$. En vertu du théorème du point fixe de Schaefer, l'opérateur N admet un point fixe y solution du problème (5.81)–(5.83). Par conséquent y est solution du problème (5.72)–(5.74). $\square$

Bibliographie

[1] R.P. Agarwal, M. Meehan and D. O'Regan *Fixed Point Theory and Applications,* Cambridge University Press, **141** (2001).

[2] N.U. Ahmed, *Semigroup Theory with Applications to Systems and Control,* Pitman Res. Notes in Math. Ser. 246, Longman Scientific and Technical and John Wiley, London, New York, 1991.

[3] R.R. Akhmerov, M.I. Kamenskii, A.S. Potapov, A.E. Rodkina and B.N. Sadovskii, *Measures of Noncompactness and Condensing Operators,* Bikhäuser, Boston-Basel-Berlin, 1992.

[4] W. Arendt, *Resolvent positive operators and integrated semigroup, Proc. London Math. Soc.* **3** (54) (1987), 321-349.

[5] W. Arendt, *Vector valued Laplace transforms and Cauchy problems, Israel J. Math.* **59** (1987), 327–352.

[6] J.P. Aubin, *Impulse Differential Inclusions and Hybrid Systems : a Viability Approach, Lecture Notes,* Université Paris-Dauphine (2002).

[7] J.P. Aubin and A. Cellina, *Differential Inclusions,* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, New York, 1984.

[8] J.P. Aubin and H. Frankowska, *Set-Valued Analysis,* Birkhauser, Boston, 1990.

[9] J.P. Aubin and G. Haddad, *Impulse capture basins of sets under impulse control systems, J. Mathematical Analysis and Applications*, **275** (2004), 676–692.

[10] J.P. Aubin, J. Lygeros, M. Quincampoix, S. Sastry and N. Seube, *Impulse differential inclusions : a viability approach to hybrid systems, IEEE Transactions on Automatic Control*, **47** (2002), 2–20.

[11] N.B. Azbelev and V.P. Maximov, and L.F. Rakhmatulina, *Introduction to the Functional Differential Equations*, (Russian), Nauka, Moscouw, 1991.

[12] R. Bader, *A Topological fixed point index theory for evolution inclusions, Z. Anal. Anwendunge,* **20** (2000), 3–15.

[13] D.D. Bainov and P.S. Simeonov, *Systems with Impulse Effect*, Ellis Horwood Ltd., Chichister, 1989.

[14] J. Banas and K. Goebel, *Measure of noncompactness in Banach spaces,* Marcel Dekker, New York, 1980.

[15] A. Belarbi and M. Benchohra, *Existence results for nonlinear boundary-value problems with integral boundary conditions, Electronic Journal of Differential Equations,* **6**(2005), 1–10.

[16] A. Belarbi, M. Benchohra and S. Djebali, *Existence Theory for Perturbed Boundary Value Problems for First Order Multivalued Differential Systems, PanAmerican Mathematical Journal,* **17(4)** (2007,) 89–100

[17] M. Benchohra, L. Górniewicz and S.K. Ntouyas, *Controllability of some Nonlinear Systems in Banach Spaces (The fixed point theory approch),* Plock University Press, 2003.

[18] M. Benchohra, J. Henderson and S.K. Ntouyas, *Impulsive Differential Equations and Inclusion,* Contemporary Mathematics and Its Applications. Vol 2, Hindawi Publishing Corporation, 2006.

[19] M. Benchohra, J. Henderson, S. K. Ntouyas and A. Ouahab, *A note on multiple solutions for impulsive functional differential equations, Comm. Appl. Nonlin. Anal.*, **12** (2005), 61–70.

[20] M. Benchohra and A. Ouahab, *Impulsive neutral functional differential inclusions with variable times, Electronic Journal of Differential Equations*, (67)(2003), 1–12.

[21] A. Benmezaï, S. Djebali and T. Moussaoui, *Positive solutions for ϕ-Laplacian Dirichlet BVPs, Fixed point Theory* **8(2)** (2007) 167–186.

[22] A. Benmezaï, S. Djebali and T. Moussaoui, *Existence Results for One-dimensional Dirichlet ϕ-Laplacian BVPs : a fixed point approach, Dyn. Syst. and Appli.,* **17** (2008) 149–166.

[23] H.F. Bohnenblust and S. Karlin, *On a theorem of Ville. Contributions to the theory of games, Annals of Mathematics Studies*, . Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., **24** (1950), 155–160.

[24] Yu. G. Borisovich, B. D. Gelman, A. D. Myshkis and V. V. Obukhovskii, *Introduction to the Theory of Multimap and Differential Inclusions,* Moscow : KomKnhiga, 2005, 216 pp. (Russian)

[25] A. Bressan and G. Colombo, *Extensions and selections of maps with decomposable values, Studia Math.* **90** (1988), 69–86.

[26] C. Castaing and M. Valadier, *Convex Analysis and Measurable multifonctions, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York,* **580**, (1977).

[27] H. Covitz and S.B. Nadler Jr., *Multivalued contraction mappings in generalized metric spaces, Israel J. Math.,* **8** (1970), 5-11.

[28] Dang Dinh Hai, *Positive Solutions For a Class of Singular Boundary-Valued Problem,* Electron. J. of Diff. Eqns. **13** (2005), 1–6.

[29] K. Deimling, Nonlinear functional analysis, Springer Verlag, Berli-Tokyo, 1985.

[30] K. Deimling, *Multivalued Differential Equations*, De Gruyter, Berlin-New York, 1992.

[31] B.C. Dhage, *Multivalued mappings and fixed points II, Tamkang J. Math.* **37** (2006), 27–46.

[32] S. Djebali and A. Ouahab, *Existence results for ϕ-Laplacian Dirichlet BVPs of Differential Inclusions with Application to Control Theory*, submitted

[33] L. Erbe and W. Krawcewicz, *Nonlinear boundary value problems for differential inclusions $y''(t) \in F(t, y, y')$, Ann. Polon. Math.* **54** (1991), 195–226.

[34] M. Frigon, *Théorèmes d'existence de solutions d'inclusions différentielles,* Topological Methods in Differential Equations and Inclusions (edited by A. Granas and M. Frigon), NATO ASI Series C, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, **472** (1995), 51–87.

[35] M. Frigon, A. Granas and Z.E.A. Guennoun, *Alternative non linéaire pour les applications contractantes,* Ann. Sci. Math. Québec 19 (1995), No 1, 65-68.

[36] L. Górniewicz, *Homological methods in fixed point theory of multivalued maps, Dissertations Math.,* **129** (1976), 1–71.

[37] L. Górniewicz, *On the solution sets of differential inclusions, J. Math. Anal. Appl.,* **113** (1986), 235–244.

[38] L. Górniewicz, *Topological Fixed Point Theory of Multi-valued Mappings*, Mathematics and its Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, **495** 1999.

[39] A. Granas and J. Dugundji, *Fixed Point Theory*, Springer-Verlag, New York, 2003.

[40] D.D.h Hai, *Positive Solutions For a Class of Singular Boundary-Valued Problem, Electron. J. of Diff. Eqns.,* **13** (2005), 1–6.

[41] A. Halanay and D. Wexler, *Teoria calitativa a systeme cu impulduri*, Editura Republicii Socialiste Romania, Bucharest, 1968.

[42] J.K. Hale and S.M. Verduyn Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations*, *Applied Mathematical Sciences,* 99, Springer-Verlag, New York, 1993.

[43] J. Henderson and A. Ouahab, *Global existence results for impulsive functional differential inclusions with multiple delay in Fréchet Spaces, PanAmerican Math. Journal* **15** (2005), 73–89.

[44] J. Henderson and A. Ouahab, *Local and global existence and uniqueness results for second and higher Order impulsive functional differential equations with infinite delay,* Submitted.

[45] N.T. Hoai, N.V. Loi, *Positive solutions and continuous branches for boundary-value problems of differential inclusions,* **98** (2007), 1–8

[46] Sh. Hu and N. Papageorgiou, *Handbook of Multivalued Analysis, Volume I : Theory*, Kluwer, Dordrecht, 1997.

[47] M. Kamenskii, V. Obukhovskii and P. Zecca, *Condensing Multi-valued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces*, Walter de Gruyter & Co. Berlin, 2001.

[48] D. Kandilakis and N.S. Papageorgiou, *Existence theorem for nonlinear boundary value problems for second order differential inclusions, J. Diff. Eqns.* **132** (1996), 107–125.

[49] H. Kellermann and M. Hieber, *Integrated semigroup, J. Funct. Anal.* **84** (1989), 160–180.

[50] M. Kisielewicz, *Differential Inclusions and Optimal Control*, Kluwer, Dordrecht, The Netherlands, 1991.

[51] V. Lakshmikantham, D.D. Bainov and P.S. Simeonov, *Theory of Impulsive Differential Equations*, World Scientific, Singapore, 1989.

[52] J.M. Larsry and R. Robert, *Analyse Non-Linéaire Multivoque*, *Centre de Recherche de Mathématiques de la Décision,* Université de Dauphine, Paris, **7611**, 1–190.

[53] A. Lasota and Z. Opial, *An application of the Kakutani-Ky Fan theorem in the theory of ordinary differential equations, Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys.* **13** (1965), 781–786.

[54] M. Martelli, *A Rothe's type theorem for non compact acyclic-valued maps, Boll. Un. Mat. Ital.* **4(11)** (Suppl. Fasc. 3) (1975), 70–76.

[55] E. Michael, *Continuous Selections,* I. Ann. Math. **63(2)** (1956), 361–381.

[56] A. Ouahab, *Local and global existence and uniqueness results for impulsive functional differential equations with multiple delay, J. Math. Anal. Appl.*, **323** (2006), 456-472.

[57] A. Ouahab, *Some Contributions in Impulsives differential equations and inclusions with fixed and variable times*, *PhD Dissertation,* University of Sidi-Bel-Abbès (Algeria), 2006.

[58] S.G. Pandit and S.G. Deo, *Differential systems Involving Impulses,* Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, **954**, 1982.

[59] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations,* Springer-Verlag, New York, 1983.

[60] A. Petrusel, *Operatorial Inclusions,* House of the Book of Science, Cluj-Napoca, 2002.

[61] R. Precup, *Fixed point theorems for decomposable multi-valued maps ans applications, J. for Anal. and Appli.* **22(4)** (2003,) 843–861.

[62] A.M. Samoilenko and N.A. Perestyuk, *Impulsive Differential Equations,* World Scientific, Singapore, 1995.

[63] D.R. Smart, *Fixed point theorems,* Cambridge University Press, Cambridge, (1980).

[64] G.V. Smirnov, *Introduction to the Theory of Differential Inclusions,* Graduate Studies in Mathematics 41, American Mathematical Society, Providence, 2002.

[65] A.A. Tolstonogov, *Differential Inclusions in a Banach Space*, Kluwer, Dordrecht, 2000.

[66] K. Yosida, *Functional Analysis,* 6th ed. Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[67] D. Yujun, *Periodic boundary value problems for functional differential equations with impulses, J. Math. Anal. Appl.* **210** (1997), 170–181.

[68] D. Yujun and Z. Erxin, *An application of coincidence degree continuation theorem in existence of solutions of impulsive differential equations, J. Math. Anal. Appl.* **197**

[69] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and Applications. Vol. I, Fixed Point Theorems,* Springer-Verlag, New York, 1986.