Сборник тренировочных материалов для подготовки к государственной итоговой аттестации по МАТЕМАТИКЕ для слепых и поздноослепших обучающихся по образовательным программам СРЕДНЕГО общего образования

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Тренировочные материалы предназначены для подготовки к единому государственному экзамену базового и профильного уровней и государственному выпускному экзамену по математике. Задания подобраны таким образом, чтобы охватить значительную и представительную часть открытого банка заданий по математике, а также все основные разделы школьного курса математики.

Задания с кратким ответом подразумевают только числовой ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Частным случаем задания с кратким ответом является задание на установление соответствия. Ответом в таком задании служит последовательность, составленная из цифр 1, 2, 3 и 4, которая записывается в виде четырёхзначного числа (без пробелов, запятых и других вспомогательных символов), например 1342 или 3241.

Другой частный случай задания с кратким ответом – задание с множественным выбором, где требуется указать одно или несколько верных утверждений из предложенного перечня. Ответом в данном случае являются номера верных утверждений, записанные в любом порядке без пробелов и других вспомогательных символов. Например, если верные утверждения имеют номера 1) и 3), то ответ может быть записан в виде 13 или 31. Каждая задача с кратким ответом снабжена полем «Ответ».

Задания с кратким ответом имеют базовый или повышенный уровень сложности.

Задания с развёрнутым ответом подразумевают полное обоснованное решение и запись ответа в произвольной форме. При выполнении заданий с развёрнутым ответом следует уделять внимание полноте и грамотности математической записи. При этом можно пользоваться без ссылок и обоснований всеми фактами, утверждениями, теоремами курса математики основной и полной средней школы (содержащихся в учебниках и учебных пособиях, допущенных или рекомендованных Министерством образования и науки РФ). Задания с развёрнутым ответом имеют повышенный или высокий уровень сложности.

Верное выполнение каждого из заданий с кратким ответом оценивается 1 баллом. Верное решение каждого из заданий с развёрнутым ответом оценивается в соответствии с критериями оценивания, разработанными для каждого задания. Критерии оценивания, а также ответы опубликованы в сопроводительных материалах к настоящему сборнику.

Задания с кратким ответом выбраны из открытых банков математических заданий для проведения итоговой аттестации и могут включаться как в экзаменационные материалы ГВЭ-11, так и в КИМ базового или профильного уровня ЕГЭ по математике.

Сборник тренировочных материалов состоит из трёх крупных тематических разделов. Внутри разделов «Алгебра и начала анализа» и «Геометрия» задания группируются в основном по возрастанию уровня сложности.

Раздел 1 «Алгебра и начала анализа» содержит задачи по арифметике, алгебре и началам математического анализа по курсу основной и средней школы. Раздел содержит 65 заданий с кратким ответом, а также 25 заданий с развёрнутым ответом.

Раздел 2 «Геометрия» содержит задания по курсу геометрии (планиметрии и стереометрии) основной и средней школы. Раздел содержит 21 задание различного уровня сложности, из которых 7 заданий требуют развёрнутого ответа.

Раздел 3 «Примеры вариантов экзаменационных работ» содержит три примерных варианта экзаменационных работ: ГВЭ-11 (со справочными материалами, ответами, решениями и критериями оценивания), ЕГЭ базового уровня (со справочными материалами и ответами) и ЕГЭ профильного уровня (со справочными материалами, ответами, решениями и критериями оценивания).

РАЗДЕЛ 1
Алгебра и начала анализа

Ответом к заданиям 1–65 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы. Единицы измерений писать не нужно.

1 На бензоколонке 1 литр бензина стоит 34 руб. 20 коп. Водитель залил в бак 15 литров бензина и взял бутылку воды за 29 рублей. Сколько рублей сдачи он получит с 1000 рублей?

Ответ: ____________________________.

2 В квартире установлен прибор учёта расхода холодной воды (счётчик). Показания счётчика 1 апреля составляли 127 куб. м воды, а 1 мая — 143 куб. м. Сколько нужно заплатить за холодную воду за апрель, если стоимость 1 куб. м холодной воды составляет 20 руб. 20 коп.? Ответ дайте в рублях.

Ответ: ____________________________.

3 В летнем лагере 168 детей и 26 воспитателей. В одном автобусе можно перевозить не более 45 пассажиров. Какое наименьшее количество таких автобусов понадобится, чтобы за один раз перевезти всех из лагеря в город?

Ответ: ____________________________.

4 Шоколадка стоит 40 рублей. В воскресенье в супермаркете действует специальное предложение: заплатив за две шоколадки, покупатель получает три (одну в подарок). Сколько шоколадок можно получить на 170 рублей в воскресенье?

Ответ: ____________________________.

5 Летом килограмм клубники стоит 75 рублей. Маша купила 1 кг 200 г клубники. Сколько рублей сдачи она должна была получить со 100 рублей?

Ответ: ____________________________

6 В доме, в котором живёт Тамара, 5 этажей и несколько подъездов. На каждом этаже в каждом подъезде находится по шесть квартир. Тамара живёт в квартире 41. В каком подъезде живёт Тамара?

Ответ: ____________________________.

7 Футболка стоила 900 рублей. После снижения цены она стала стоить 684 рубля. На сколько процентов была снижена цена футболки?

Ответ: ___________________________.

8 После уценки телевизора его новая цена составила 0,96 от старой цены. На сколько процентов уменьшилась цена телевизора в результате уценки?

Ответ: ___________________________.

9 Пачка сливочного масла стоит 80 рублей. Пенсионерам магазин делает скидку 10%. Сколько рублей стоит пачка масла для пенсионера?

Ответ: ___________________________

10 Площадь земель фермерского хозяйства, отведённых под посадку сельскохозяйственных культур, составляет 42 га и распределена между зерновыми и техническими культурами в отношении $3:4$ соответственно. Сколько гектаров занимают технические культуры?

Ответ: ___________________________.

11 Длины двух рек относятся как 7 : 8, при этом одна из них длиннее другой на 15 км. Найдите длину большей реки. Ответ дайте в километрах.

Ответ: ___________________________.

12 Найдите значение выражения $4{,}5\cdot 5{,}4-6{,}1$.

Ответ: ___________________________.

13 Найдите значение выражения $\left(\frac{17}{15}-\frac{1}{12}\right)\cdot\frac{20}{3}$.

Ответ: ___________________________.

14 Найдите значение выражения $\left(2\cdot 10^{2}\right)\cdot\left(1{,}1\cdot 10^{-2}\right)$.

Ответ: ___________________________.

15 Найдите значение выражения $(-10)^4+(-10)^2+(-10)^1$.

Ответ: ____________________________.

16 Семья из трёх человек планирует поехать из Москвы в Чебоксары. Можно ехать поездом, а можно — на своей машине. Билет на поезд на одного человека стоит 1840 рублей. Автомобиль расходует 15 литров бензина на 100 километров пути, расстояние по шоссе равно 700 километров, а цена бензина равна 36 рублей за литр. Сколько рублей придётся заплатить за наиболее дешёвую поездку на троих?

Ответ: ____________________________.

17 При строительстве дома фирма использует один из двух типов фундамента: каменный или бетонный. Для каменного фундамента необходимо 9 тонн природного камня и 8 мешков цемента. Для бетонного фундамента необходимо 6 тонн щебня и 60 мешков цемента. Тонна камня стоит 1700 рублей, щебень стоит 770 рублей за тонну, а мешок цемента стоит 240 рублей. Сколько рублей будет стоить материал для фундамента, если выбрать наиболее дешёвый вариант?

Ответ: ____________________________.

18 Вычеркните в числе 53164185 три цифры так, чтобы получившееся число делилось на 12. В ответе укажите какое-либо одно такое число.

Ответ: ____________________________.

19 Найдите чётное четырёхзначное натуральное число, сумма цифр которого на 1 меньше их произведения. В ответе укажите какое-либо одно такое число.

Ответ: ____________________________.

20 Во всех подъездах дома одинаковое число этажей, и на всех этажах одинаковое число квартир. При этом число этажей в доме больше числа квартир на этаже, число квартир на этаже больше числа подъездов, а число подъездов больше одного. Сколько этажей в доме, если всего в нём 455 квартир?

Ответ: ____________________________.

21 В обменном пункте можно совершить одну из двух операций:

- за 3 золотых монеты получить 4 серебряных и 1 медную;
- за 6 серебряных монет получить 4 золотых и 1 медную.

У Николая были только серебряные монеты. После нескольких посещений обменного пункта серебряных монет у него стало меньше, золотых не появилось, зато появилось 35 медных. На сколько уменьшилось количество серебряных монет у Николая?

Ответ: ___________________________.

22 Чтобы перевести температуру из шкалы Цельсия в шкалу Фаренгейта, пользуются формулой $t_F = 1{,}8t_C + 32$, где t_C — температура в градусах по шкале Цельсия, t_F — температура в градусах по шкале Фаренгейта. Скольким градусам по шкале Фаренгейта соответствует 30 градусов по шкале Цельсия?

Ответ: ___________________________.

23 Среднее геометрическое чисел a, b и c вычисляется по формуле $g = \sqrt[3]{abc}$. Вычислите среднее геометрическое чисел 9, 12, 16.

Ответ: ___________________________.

24 Для нагревательного элемента некоторого прибора экспериментально была получена зависимость температуры (в кельвинах) от времени работы: $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t — время в минутах, $T_0 = 1400$ К, $a = -10$ К/мин^2, $b = 200$ К/мин. Известно, что при температуре нагревательного элемента свыше 1760 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Найдите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ дайте в минутах.

Ответ: ___________________________.

25 Наблюдатель находится на высоте h, выраженной в метрах. Расстояние от наблюдателя до наблюдаемой им линии горизонта, выраженное в километрах, вычисляется по формуле $l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли. На какой высоте находится наблюдатель, если он видит линию горизонта на расстоянии 4 километров? Ответ выразите в метрах.

Ответ: ___________________________.

26 Двигаясь со скоростью $v = 3$ м/с, трактор тащит сани с силой $F = 50$ кН, направленной под острым углом α к горизонту. Мощность, развиваемая трактором, вычисляется по формуле $N = Fv\cos\alpha$. Найдите, при каком угле α (в градусах) эта мощность будет равна 75 кВт (кВт — это $\frac{\text{кН} \cdot \text{м}}{\text{с}}$).

Ответ: ___________________________.

27 Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ЗНАЧЕНИЯ
А) масса футбольного мяча	1) 18 кг
Б) масса дождевой капли	2) 2,8 т
В) масса взрослого бегемота	3) 20 мг
Г) масса стиральной машины	4) 750 г

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

Ответ:

А	Б	В	Г

28 Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ЗНАЧЕНИЯ
А) площадь города Санкт-Петербурга	1) 420 кв. м
Б) площадь одной стороны монеты	2) 300 кв. мм
В) площадь поверхности тумбочки	3) 1439 кв. км
Г) площадь баскетбольной площадки	4) 0,2 кв. м

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

Ответ:

А	Б	В	Г

29 В таблице приведены размеры штрафов за превышение максимальной разрешённой скорости, зафиксированное с помощью средств автоматической фиксации, установленных на территории России с 1 сентября 2013 года.

Превышение скорости, км/ч	21–40	41–60	61–80	81 и более
Размер штрафа, руб.	500	1000	2000	5000

Какой штраф должен заплатить владелец автомобиля, зафиксированная скорость которого составила 103 км/ч на участке дороги с максимальной разрешённой скоростью 60 км/ч. Ответ дайте в рублях.

Ответ: ___________________________.

30 В таблице представлены налоговые ставки на автомобили в Москве с 1 января 2013 года.

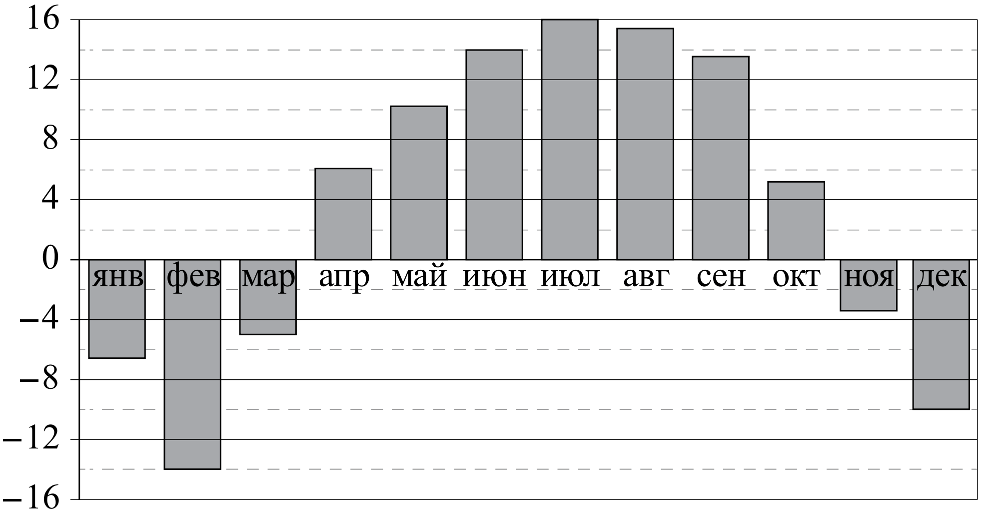
Мощность автомобиля (в л. с.*)	Налоговая ставка (руб. за 1 л. с.* в год)
не более 70	0
71–100	12
101–125	25
126–150	35
151–175	45
176–200	50
201–225	65
226–250	75
свыше 250	150

* л. с. — лошадиная сила.

Какова налоговая ставка (в рублях за 1 л. с.) на автомобиль мощностью 178 л. с.?

Ответ: ___________________________.

31 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Нижнем Новгороде за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указаны месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наибольшую среднемесячную температуру в 1994 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.



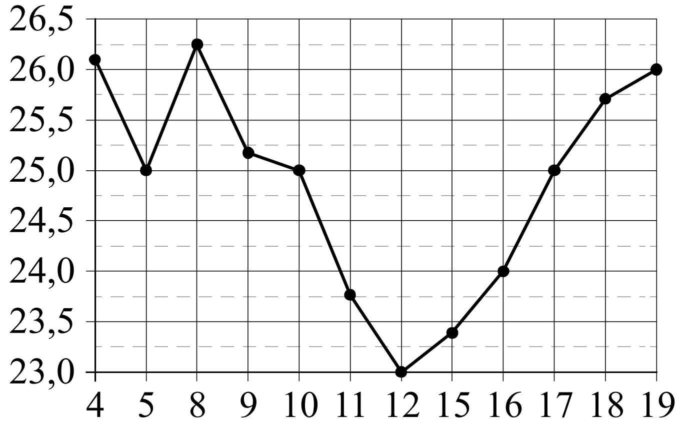
Ответ: ____________________________.

32 На графике изображена зависимость атмосферного давления (в миллиметрах ртутного столба) от высоты над уровнем моря (в километрах). Определите по графику, чему равно атмосферное давление на высоте 2 км. Ответ дайте в миллиметрах ртутного столба.

Ответ: ____________________________.

33

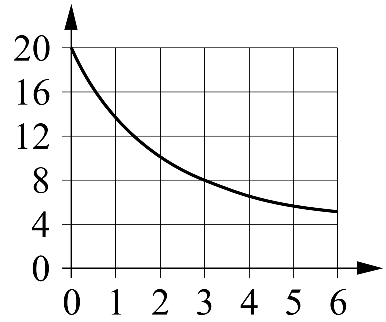
На рисунке жирными точками показана цена нефти на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 4 по 19 апреля 2002 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена барреля нефти в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода цена нефти на момент закрытия торгов была больше 25,5 долларов США за баррель.



Ответ: ___________________________

34

В ходе химической реакции масса исходного вещества (реагента), которое ещё не вступило в реакцию, постепенно уменьшается. На графике показана зависимость массы реагента от времени. На горизонтальной оси отмечено время, прошедшее с начала реакции, в минутах, на вертикальной оси — масса реагента, который ещё не вступил в реакцию, в граммах. Определите по графику, сколько граммов реагента было изначально.



Ответ: ___________________________.

35

Найдите значение выражения $\dfrac{7\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$.

Ответ: ___________________________.

36

Найдите $\sin x$, если $\cos x = -\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ и $90^\circ < x < 180^\circ$.

Ответ: ___________________________.

37 Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{8}{\sqrt{89}}$ и $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ответ: ____________________________.

38 Найдите значение выражения $7^{\frac{4}{9}} \cdot 49^{\frac{5}{18}}$.

Ответ: ____________________________.

39 Найдите значение выражения $(1-\log_2 12)(1-\log_6 12)$.

Ответ: ____________________________.

40 Найдите корень уравнения $2(3-2x)-7=-3x+8$.

Ответ: ____________________________.

41 Найдите корень уравнения $3(x+1)=5x-7$.

Ответ: ____________________________

42 Решите уравнение $x^2+11x=-28$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

Ответ: ____________________________.

43 Найдите корень уравнения $9^{x-5}=729$.

Ответ: ____________________________.

44 Найдите корень уравнения $16^{x-12}=\frac{1}{4}$.

Ответ: ____________________________.

45 Найдите корень уравнения $\log_2(4-x)=7$.

Ответ: ____________________________.

46 Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

А) $\frac{(x-3)^2}{x-2} > 0$

Б) $(x-2)(x-3) < 0$

В) $\frac{x-2}{x-3} > 0$

Г) $(x-2)^2(x-3) < 0$

РЕШЕНИЯ

1) $x < 2$ или $x > 3$

2) $2 < x < 3$ или $x > 3$

3) $2 < x < 3$

4) $x < 2$ или $2 < x < 3$

Впишите в приведённую в ответе таблицу под каждой буквой соответствующий номер решения.

Ответ:

А	Б	В	Г

47 Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

А) $\log_2 x < -2$

Б) $\log_2 x > 2$

В) $\log_2 x > -2$

Г) $\log_2 x < 2$

РЕШЕНИЯ

1) $0 < x < 4$

2) $0 < x < \frac{1}{4}$

3) $x > \frac{1}{4}$

4) $x > 4$

Впишите в приведённую в ответе таблицу под каждой буквой соответствующий номер решения.

Ответ:

А	Б	В	Г

48 Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

А) $\dfrac{(x-2)^2}{x-1}<0$

Б) $2^{-x}<0{,}5$

В) $\log_2 x>1$

Г) $(x-1)(x-2)<0$

РЕШЕНИЯ

1) 1) $1<x<2$
2) 2) $x>1$
3) 3) $x>2$
4) 4) $x<1$

Впишите в приведённую в ответе таблицу под каждой буквой соответствующий решению номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

49 Конкурс исполнителей длится в 5 дней. Всего заявлено 50 выступлений — по одному от каждой страны, участвующей в конкурсе. Исполнитель из России участвует в конкурсе. В первый день запланировано 14 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что выступление исполнителя из России состоится в третий день конкурса?

Ответ: ___________________________.

50 На семинар приехали 7 учёных из Норвегии, 3 из России и 5 из Испании. Каждый учёный подготовил один доклад. Порядок докладов определяется случайным образом. Найдите вероятность того, что восьмым окажется доклад учёного из России.

Ответ: ___________________________.

51 В сборнике билетов по математике всего 20 билетов, в 5 из них встречается вопрос по теме «Производная». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по теме «Производная».

Ответ: ___________________________

52 Вероятность того, что новый электрический чайник прослужит больше года, равна 0,97. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,89. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

Ответ: ___________________________.

53 Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,02. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,99. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

Ответ: ___________________________.

54 Хозяйка к празднику купила морс, мороженое, крабовые палочки и рыбу. Мороженое стоило дороже крабовых палочек, но дешевле рыбы, морс стоил дешевле мороженного. Выберите утверждения, которые верны при указанных условиях.

1) Морс стоил дешевле рыбы.
2) За морс заплатили больше, чем за мороженое.
3) Рыба самая дорогая из покупок.
4) Среди указанных четырёх покупок есть три, стоимость которых одинакова.

Ответ: ___________________________.

55 Двадцать выпускников одного из одиннадцатых классов сдавали ЕГЭ по обществознанию. Самый низкий полученный балл был равен 36, а самый высокий — 75. Выберите утверждения, которые верны при указанных условиях.

1) Среди этих выпускников есть человек, который получил 75 баллов за ЕГЭ по обществознанию.
2) Среди этих выпускников есть двадцать два человека с равными баллами за ЕГЭ по обществознанию.
3) Среди этих выпускников есть человек, получивший 20 баллов за ЕГЭ по обществознанию.
4) Баллы за ЕГЭ по обществознанию любого из этих двадцати человек не ниже 35.

Ответ: ___________________________.

56 Первый и второй насосы наполняют бассейн за 9 минут, второй и третий — за 14 минут, а первый и третий — за 18 минут. За сколько минут эти три насоса заполнят бассейн, работая вместе?

Ответ: ____________________________.

57 Смешали 4 кг 25-процентного раствора вещества и 6 кг 40-процентного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Ответ: ____________________________.

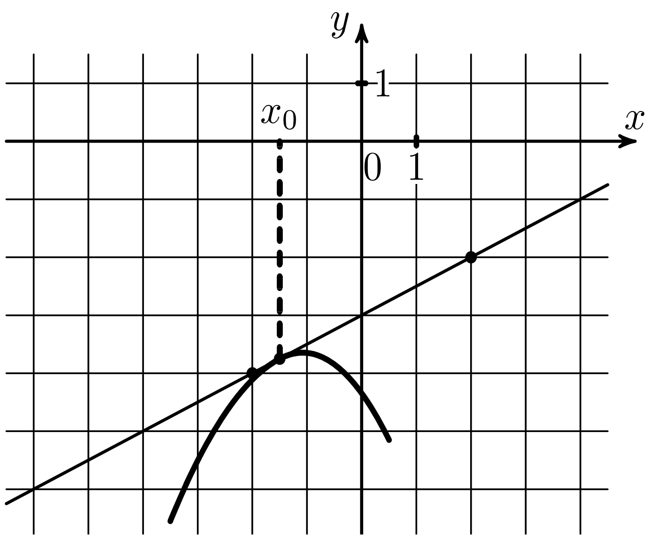
58 Смешав 30-процентный и 60-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 36-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 41-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 30-процентного раствора использовали для получения смеси?

Ответ: ____________________________.

59 Моторная лодка прошла против течения реки 165 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 4 часа меньше. Найдите скорость течения, если скорость лодки в неподвижной воде равна 13 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ____________________________

60 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ: ____________________________

61 Прямая $y = 7x - 5$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 6x - 8$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ: ____________________________.

62 Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{2}t^3 - 3t^2 + 2t$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 6$ с.

Ответ: ____________________________.

63 Найдите наименьшее значение функции $y = 5\operatorname{tg} x - 5x + 6$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Ответ: ____________________________.

64 Найдите точку минимума функции $y = 2x^2 - 5x + \ln x - 3$.

Ответ: ____________________________.

65 Найдите наибольшее значение функции

$$y = \ln(x+8)^3 - 3x$$

на отрезке $[-7{,}5; 0]$.

Ответ: ____________________________.

Запишите полное обоснованное решение и ответ к каждому из заданий 66–80.

66 а) Решите уравнение $6\cos^2 x + 5\sin x - 2 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

67 а) Решите уравнение $\cos 2x + \sin^2 x = 0{,}75$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

68 а) Решите уравнение $\sin 2x + \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

69 Решите неравенство $\frac{3^x - 1}{3^x - 3} \le 1 + \frac{1}{3^x - 2}$.

70 Решите неравенство $\left(\log_2^2 x - 2\log_2 x\right)^2 + 36\log_2 x + 45 < 18\log_2^2 x$.

71 Решите неравенство $(-6 - 5x) \cdot \log_{x^2 + 2x + 2}(4x + 5) \le 0$.

72 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 9 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.
Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наименьший годовой платёж составит 1,25 млн рублей?

73 Григорий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $3t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $4t$ единиц товара.
За каждый час работы (на каждом из заводов) Григорий платит каждому рабочему 500 рублей.
Григорий готов выделять 5 000 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

74 Вклад в размере 10 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вклад ежегодно пополняется на одну и ту же фиксированную сумму, равную **целому** числу миллионов рублей. Найдите наибольший возможный размер такой суммы, при котором через четыре года вклад останется не больше 25 млн рублей.

75 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\left(y^2 - xy + 3x - y - 6\right)\sqrt{x+2}}{\sqrt{6-x}} = 0, \\ x + y - a = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

76 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x-2y-2=\left|x^2+y^2-1\right|, \\ y=a(x-1) \end{cases}$$

имеет более двух решений.

77 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{xy^2-3xy-6y+18}{\sqrt{6-y}}=0, \\ y=x+a \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

78 а) Приведите пример четырёхзначного числа, произведение цифр которого в 10 раз больше суммы цифр этого числа.
б) Существует ли такое четырёхзначное число, произведение цифр которого в 175 раз больше суммы цифр этого числа?
в) Найдите все четырёхзначные числа, произведение цифр которых в 50 раз больше суммы цифр этого числа.

79 Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 16 произвольно делят на три группы так, чтобы в каждой группе было хотя бы одно число. Затем вычисляют значение среднего арифметического чисел в каждой из групп (для группы из единственного числа среднее арифметическое равно этому числу).
а) Могут ли быть одинаковыми два из этих трёх значений средних арифметических в группах из разного количества чисел?
б) Могут ли быть одинаковыми все три значения средних арифметических?
в) Найдите наименьшее возможное значение наибольшего из получаемых трёх средних арифметических.

80 Вася сложил несколько различных натуральных чисел из отрезка $[53;84]$. Петя увеличил некоторые из Васиных чисел вдвое и сложил все числа.
а) Может ли Петин результат быть ровно на 100 больше Васиного?
б) Может ли Петин результат быть ровно на 150 больше Васиного?
в) Известно, что Петя удвоил четверть чисел Васи, а сумма от этого увеличилась на треть. При каком наибольшем количестве чисел в наборе Васи это возможно?

Ответы к заданиям с кратким ответом

Алгебра и начала анализа

№ задания	Ответ
1	458
2	323,2
3	5
4	6
5	10
6	2
7	24
8	4
9	72
10	24
11	120
12	18,2
13	7
14	2,2
15	10090
16	3780
17	17220
18	51648; 53148
19	1152; 1512; 5112; 1222; 2122; 2212
20	13
21	10
22	86
23	12
24	2
25	1,25
26	60
27	4321
28	3241
29	1000
30	50
31	16
32	660
33	4
34	20
35	35
36	0,25
37	1,6
38	7

39	1
40	–9
41	5
42	–7
43	8
44	11,5
45	–124
46	2314
47	2431
48	4231
49	0,18
50	0,2
51	0,25
52	0,08
53	0,0296
54	13
55	14
56	8,4
57	34
58	60
59	2
60	0,5
61	0,5
62	20
63	6
64	1
65	21

Решения и критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

1. Алгебра и начала анализа

66 а) Решите уравнение

$$6\cos^2 x + 5\sin x - 2 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

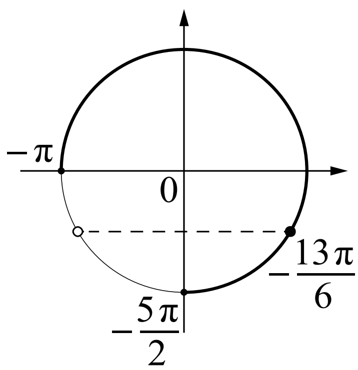
$$6 - 6\sin^2 x + 5\sin x - 2 = 0;\ (2\sin x + 1)(3\sin x - 4) = 0.$$

Значит, $\sin x = -\frac{1}{2}$, откуда $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, или $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Уравнение $\sin x = \frac{4}{3}$ корней не имеет.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Получим число $-\frac{13\pi}{6}$.



Ответ: а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$;

б) $-\frac{13\pi}{6}$.

67 а) Решите уравнение

$$\cos 2x + \sin^2 x = 0{,}75.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

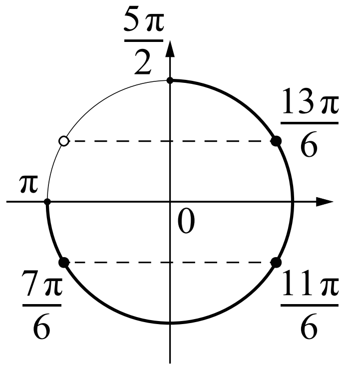
Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$1 - 2\sin^2 x + \sin^2 x = 0{,}75;\ \left(\sin x - \frac{1}{2}\right)\left(\sin x + \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Значит, или $\sin x = -\frac{1}{2}$, откуда $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, или $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$, или $\sin x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, или $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.



Получим числа: $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{11\pi}{6}$; $\frac{13\pi}{6}$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $-\frac{5\pi}{6}+2\pi l$, $l\in\mathbb{Z}$;

$\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$;

б) $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{11\pi}{6}$; $\frac{13\pi}{6}$.

68 а) Решите уравнение $\sin 2x+\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=0$.

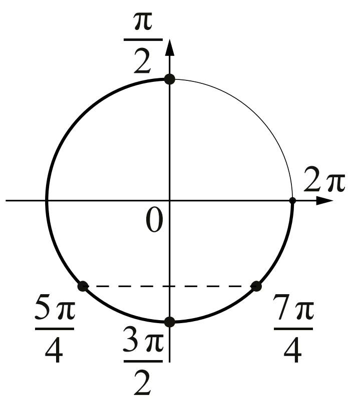
б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$2\sin x\cos x+\sqrt{2}\cos x=0;$$
$$\cos x\left(2\sin x+\sqrt{2}\right)=0;$$
$$\cos x=0 \text{ или } \sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2};$$
$$x=\frac{\pi}{2}+\pi n;\ x=-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

б) Используя тригонометрическую окружность, отберём корни, лежащие на промежутке $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.



Получим числа: $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{4}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{4}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$;

$-\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$;

б) $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{4}$.

Критерии оценивания заданий 66–68

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*, ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов — пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

69 Решите неравенство $\dfrac{3^x-1}{3^x-3}\le 1+\dfrac{1}{3^x-2}$.

Решение.

Пусть $t=3^x$, тогда неравенство примет вид:

$$\frac{t-1}{t-3}\le 1+\frac{1}{t-2};\ \frac{t-1}{(t-2)(t-3)}\le 0,$$

откуда $t\le 1$; $2<t<3$.

При $t\le 1$ получим: $3^x\le 1$, откуда $x\le 0$.

При $2<t<3$ получим: $2<3^x<3$, откуда $\log_3 2<x<1$.

Решение исходного неравенства: $x\le 0$; $\log_3 2<x<1$.

Ответ: $(-\infty;0]$; $(\log_3 2;1)$.

70 Решите неравенство $\left(\log_2^2 x-2\log_2 x\right)^2+36\log_2 x+45<18\log_2^2 x$.

Решение.

Пусть $t=\log_2 x$, тогда неравенство примет вид:

$$\left(t^2-2t\right)^2-18\left(t^2-2t\right)+45<0;\ \left(t^2-2t-3\right)\left(t^2-2t-15\right)<0;$$

$$(t-3)(t+1)(t-5)(t+3)<0,$$

откуда $-3<t<-1$; $3<t<5$.

При $-3<t<-1$ получим: $-3<\log_2 x<-1$, откуда $\dfrac{1}{8}<x<\dfrac{1}{2}$.

При $3<t<5$ получим: $3<\log_2 x<5$, откуда $8<x<32$.

Решение исходного неравенства: $\dfrac{1}{8}<x<\dfrac{1}{2}$; $8<x<32$.

Ответ: $\left(\dfrac{1}{8};\dfrac{1}{2}\right)$; $(8;32)$.

Критерии оценивания заданий 69 и 70

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного включением / исключением граничных точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

71 Решите неравенство $\left(-6-5x\right)\cdot\log_{x^2+2x+2}\left(4x+5\right)\le 0$.

Решение.

Заметим, что $x^2+2x+2=\left(x+1\right)^2+1\ge 1$ при любых значениях x. Значит, выражение $\log_{x^2+2x+2}\left(4x+5\right)$ положительно при $x>-1$, отрицательно при $-\frac{5}{4}<x<-1$ и не определено при $x\le -\frac{5}{4}$ и $x=-1$.

При $x>-1$ выражение $-6-5x$ отрицательно, а при $-\frac{5}{4}<x<-1$ исходное неравенство равносильно неравенству $-6-5x\ge 0$, откуда $x\le -\frac{6}{5}$.

Таким образом, решение исходного неравенства:

$$-\frac{5}{4}<x\le -\frac{6}{5};\ x>-1.$$

Ответ: $\left(-\frac{5}{4};-\frac{6}{5}\right];\ \left(-1;+\infty\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки $-\frac{6}{5}$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

72 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 9 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.
Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наименьший годовой платёж составит 1,25 млн рублей?

Решение.
Пусть кредит планируется взять на n лет. Долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$9,\ \frac{9(n-1)}{n},\ \ldots,\ \frac{9\cdot 2}{n},\ \frac{9}{n},\ 0.$$

По условию, каждый январь долг возрастает на 25%, значит, последовательность размеров долга (в млн рублей) в январе такова:

$$11{,}25,\ \frac{11{,}25(n-1)}{n},\ \ldots,\ \frac{11{,}25\cdot 2}{n},\ \frac{11{,}25}{n}.$$

Следовательно, выплаты (в млн рублей) должны быть следующими:

$$2{,}25+\frac{9}{n},\ \frac{2{,}25(n-1)+9}{n},\ \ldots,\ \frac{2{,}25\cdot 2+9}{n},\ \frac{2{,}25+9}{n}.$$

Получаем: $\frac{11{,}25}{n}=1{,}25$, откуда $n=9$. Значит, всего следует выплатить:

$$9+2{,}25\left(1+\frac{8}{9}+\ldots+\frac{2}{9}+\frac{1}{9}\right)=9+2{,}25\cdot 5=20{,}25 \text{ (млн рублей).}$$

Ответ: 20,25 млн рублей.

73 Григорий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $3t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $4t$ единиц товара.

За каждый час работы (на каждом из заводов) Григорий платит рабочему 500 рублей.

Григорий готов выделять 5 000 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Решение.

Допустим, что на заводе, расположенном в первом городе, рабочие трудятся x^2 часов, а на заводе, расположенном во втором городе, — y^2 часов. Тогда в неделю будет произведено $3x+4y$ единиц товара, а затраты на оплату труда составят $500\left(x^2+y^2\right)$ рублей. В этом случае нужно найти наибольшее значение $Q=3x+4y$ при условии $500\left(x^2+y^2\right)=5\,000\,000$.

Выразим y через x:

$$x^2+y^2=10\,000;\ y^2=10\,000-x^2;\ y=\sqrt{10\,000-x^2}.$$

Значит, нам нужно найти наибольшее значение функции

$$Q(x)=3x+4\sqrt{10\,000-x^2}$$

при $0\le x\le 100$. Для этого найдём производную функции $Q(x)$:

$$Q'(x)=3-\frac{4x}{\sqrt{10\,000-x^2}}.$$

Найдём точки экстремума:

$$Q'(x)=0;\ 3=\frac{4x}{\sqrt{10\,000-x^2}};$$

$$3\sqrt{10\,000-x^2}=4x;\ 90\,000-9x^2=16x^2;\ x^2=3600,$$

то есть $x=60$ — единственная точка экстремума, удовлетворяющая условию $0\le x\le 100$. Найдём значения функции в найденной точке и на концах отрезка:

$$Q(60)=500,\ Q(100)=300,\ Q(0)=400.$$

Наибольшее значение $Q(x)$ равно 500, значит, наибольшее количество единиц товара равно 500.

Ответ: 500.

74 Вклад в размере 10 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вклад ежегодно пополняется на одну и ту же фиксированную сумму, равную **целому** числу миллионов рублей. Найдите наибольший возможный размер такой суммы, при котором через четыре года вклад останется не больше 25 млн рублей.

Решение.

В конце первого года вклад составит 11 млн рублей, а в конце второго — 12,1 млн рублей. Пусть искомая сумма равна x (млн рублей). Тогда в начале третьего года вклад составит $12{,}1+x$, а в конце — $13{,}31+1{,}1x$. В начале четвёртого года вклад составит $13{,}31+2{,}1x$, а в конце — $14{,}641+2{,}31x$.

По условию, нужно найти наибольшее целое x, для которого выполнено неравенство

$$14{,}641+2{,}31x \le 25;\ x \le 4\frac{1119}{2310}.$$

Наибольшее целое решение этого неравенства — число 4. Значит, искомая сумма — 4 млн рублей.

Ответ: 4 млн рублей.

Критерии оценивания заданий 72–74

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

75 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\left(y^2-xy+3x-y-6\right)\sqrt{x+2}}{\sqrt{6-x}}=0, \\ x+y-a=0 \end{cases}$$

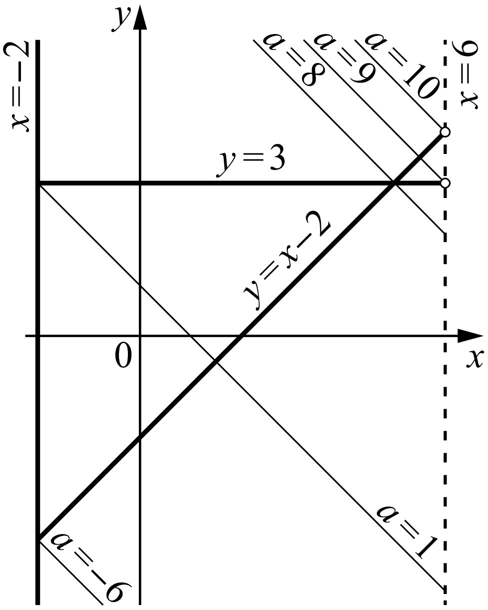
имеет ровно два различных решения.

Решение.

Запишем первое уравнение в виде

$$\frac{(y-3)(y+2-x)\sqrt{x+2}}{\sqrt{6-x}}=0.$$

При $x<-2$ и $x\ge 6$ левая часть не имеет смысла. При $-2\le x<6$ уравнение задаёт прямые $y=3$, $y=x-2$, $x=-2$ (см. рисунок).



При каждом значении a уравнение $x+y-a=0$ задаёт прямую, параллельную прямой $x+y=0$ или совпадающую с ней. При $-2\le x<6$ такая прямая пересекает прямую $y=3$ при $1\le a<9$, пересекает прямую $y=x-2$ при $-6\le a<10$, пересекает прямую $x=-2$ при любом значении a. При этом прямые $x+y-a=0$ проходят через точки пересечения прямых $x=-2$, $y=3$ и $y=x-2$ при $a=-6$, $a=1$ и $a=8$.

Число решений исходной системы равно числу точек пересечения прямых $y=3$, $y=x-2$, $x=-2$ с прямой $x+y-a=0$ при условии $-2\le x<6$. Таким образом, исходная система имеет ровно два решения при $-6<a\le 1$; $a=8$; $9\le a<10$.

Ответ: $-6<a\le 1$; $a=8$; $9\le a<10$.

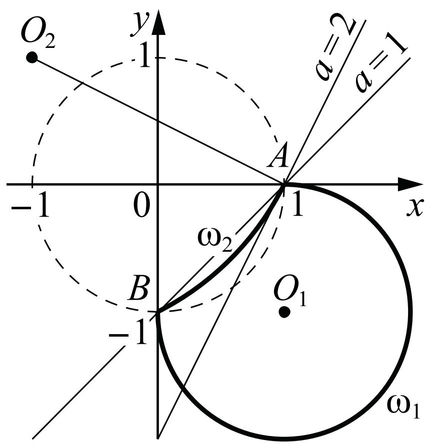
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением/исключением точек $a=10$ и/или $a=9$	3
С помощью верного рассуждения получен один из промежутков множества значений a: $(-6;1]$ или $[9;10)$, возможно, с включением/исключением граничных точек	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения прямых (аналитически или графически), ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

76 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x-2y-2=\left|x^2+y^2-1\right|, \\ y=a(x-1) \end{cases}$$

имеет более двух решений.

Решение.



Изобразим на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют первому уравнению системы.

Рассмотрим два случая.

1) Если $x^2+y^2\geq 1$, то получаем уравнение

$$2x-2y-2=x^2+y^2-1;$$
$$x^2-2x+y^2+2y+1=0;$$
$$(x-1)^2+(y+1)^2=1.$$

Полученное уравнение задаёт окружность с центром в точке $O_1(1;-1)$ и радиусом 1.

2) Если $x^2+y^2\leq 1$, то получаем уравнение

$$2x-2y-2=1-x^2-y^2;\ x^2+2x+y^2-2y-3=0;\ (x+1)^2+(y-1)^2=5.$$

Полученное уравнение задаёт окружность с центром в точке $O_2(-1;1)$ и радиусом $\sqrt{5}$.

Полученные окружности пересекаются в двух точках — $A(1;0)$ и $B(0;-1)$, лежащих на окружности $x^2+y^2=1$, поэтому в первом случае получаем дугу ω_1 с концами в точках A и B, во втором — дугу ω_2 с концами в тех же точках (см. рисунок).

Рассмотрим второе уравнение системы. Оно задаёт прямую m, которая проходит через точку A и угловой коэффициент которой равен a.

При $a=1$ прямая m проходит через точки A и B, то есть исходная система имеет два решения.

При $a=2$ прямая m перпендикулярна прямой O_2A, угловой коэффициент которой равен $-\dfrac{1}{2}$, значит, прямая m касается дуги ω_2 в точке A и пересекает дугу ω_1 в двух точках (одна из которых — точка A), то есть исходная система имеет два решения.

При $1<a<2$ прямая m пересекает каждую из дуг ω_1 и ω_2 в точке A и ещё в одной точке, отличной от точки B, то есть исходная система имеет три решения.

При $0 \le a < 1$ прямая m не пересекает дуги ω_1 и ω_2 в точках, отличных от точки A, то есть исходная система имеет одно решение.

При $a < 0$ или $a > 2$ прямая m пересекает дугу ω_1 в двух точках и не пересекает дугу ω_2 в точках, отличных от точки A, то есть исходная система имеет два решения.

Значит, исходная система имеет более двух решений при $1 < a < 2$.

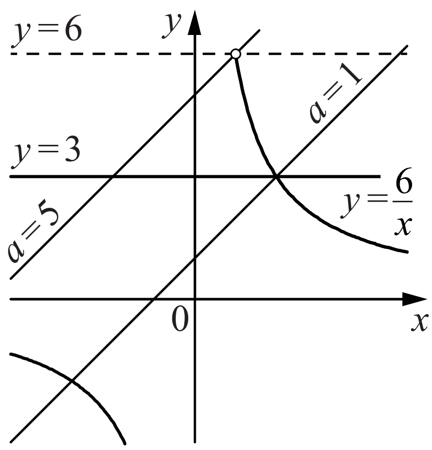
Ответ: $1 < a < 2$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением точки $a = 1$	3
При всех значениях a верно найдено количество решений системы в одном из двух случаев, возникающих при раскрытии модуля	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения дуг окружностей и прямых (аналитически или графически), ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

77

Запишем первое уравнение в виде

$$\frac{(y-3)(xy-6)}{\sqrt{6-y}} = 0.$$



При $y \ge 6$ левая часть не имеет смысла. При $y < 6$ уравнение задаёт прямую $y = 3$ и гиперболу $y = \frac{6}{x}$ (см. рисунок).

При каждом значении a уравнение $y = x + a$ задаёт прямую, параллельную прямой $y = x$ или совпадающую с ней.

При $y < 6$ такая прямая пересекает прямую $y = 3$ при любом значении a, пересекает правую ветвь гиперболы $y = \frac{6}{x}$ при $a < 5$, пересекает левую ветвь гиперболы $y = \frac{6}{x}$ при любом значении a. При этом прямая $y = x + a$ проходит через точку пересечения прямой $y = 3$ и гиперболы $y = \frac{6}{x}$ при $a = 1$.

Число решений исходной системы равно числу точек пересечения прямой $y=3$ и гиперболы $y=\frac{6}{x}$ с прямой $y=x+a$ при условии $y<6$.

Таким образом, исходная система имеет ровно три решения при

$$a<1;\ 1<a<5.$$

Ответ: $a<1$; $1<a<5$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений *a*, отличающееся от искомого только включением точки $a=5$	3
С помощью верного рассуждения получен один из промежутков множества значений *a*: $(-\infty;1)$ или $(1;5)$, возможно, с включением граничных точек	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения гиперболы и прямых (аналитически или графически), ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

78 а) Приведите пример четырёхзначного числа, произведение цифр которого в 10 раз больше суммы цифр этого числа.

б) Существует ли такое четырёхзначное число, произведение цифр которого в 175 раз больше суммы цифр этого числа?

в) Найдите все четырёхзначные числа, произведение цифр которых в 50 раз больше суммы цифр этого числа.

Решение.

а) Произведение цифр числа 2529 равно 180, а сумма цифр равна 18, то есть в 10 раз меньше.

б) Предположим, что такое число n существует и a, b, c, d — его цифры. Заметим, что среди этих цифр не может быть нулей, так как иначе их произведение было бы равно нулю. Имеем: $abcd=175(a+b+c+d)$. Правая часть этого равенства делится на 25, поэтому среди цифр найдутся две цифры «5». Так как при перестановке местами цифр числа n равенство $abcd=175(a+b+c+d)$ остаётся верным, то без ограничения общности можно считать, что в числе n цифры c и d равны 5.

Тогда $ab=7(a+b+10)\geq 7\cdot 12>9\cdot 9\geq ab$. Получаем противоречие.

в) Предположим, что такое число n существует и a, b, c, d — его цифры. Как и выше, заметим, что среди этих цифр не может быть нулей, так как иначе их произведение было бы равно нулю. Имеем: $abcd = 50(a+b+c+d)$. Правая часть этого равенства делится на 25, поэтому среди цифр найдутся две цифры «5». Без ограничения общности будем считать, что $c = d = 5$.
Тогда $ab = 2(a+b+10)$. Так как правая часть последнего равенства делится на 2, то либо a, либо b делится на 2. Будем считать, что на 2 делится b.
Если $b = 2$, то $a = a + 12$, что невозможно.
Если $b = 4$, то $2a = a + 14$; $a = 14$, что невозможно.
Если $b = 6$, то $3a = a + 16$; $2a = 16$; $a = 8$. Число $n = 8655$ и все числа, получаемые из него перестановкой цифр, удовлетворяют условию задачи.
Если $b = 8$, то $4a = a + 18$; $3a = 18$; $a = 6$. Этот вариант также получается из предыдущего перестановкой цифр.

Ответ: а) например, 2529; б) нет; в) число 8655 и все числа, получаемые из него перестановкой цифр (всего 12 чисел).

79 Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 16 произвольно делят на три группы так, чтобы в каждой группе было хотя бы одно число. Затем вычисляют значение среднего арифметического чисел в каждой из групп (для группы из единственного числа среднее арифметическое равно этому числу).
а) Могут ли быть одинаковыми два из этих трёх значений средних арифметических в группах из разного количества чисел?
б) Могут ли быть одинаковыми все три значения средних арифметических?
в) Найдите наименьшее возможное значение наибольшего из получаемых трёх средних арифметических.

Решение.
а) Например, для групп $\{2, 3, 16\}$ и $\{6, 8\}$ средние значения совпадают и равны 7.
б) Допустим, что это возможно. Пусть все средние значения равны c. В каждой группе от 1 до 8 натуральных чисел, поэтому $c = \frac{a}{b}$, где a — натуральное число и $b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Пусть группы состоят из n, m и k чисел. Тогда суммы чисел в группах равны nc, mc и kc соответственно, а общая сумма всех 10 чисел равна 61 и равна $(n+m+k)c = 10c$. Поэтому $10c = 61$; $c = \frac{61}{10}$. Это противоречит тому, что знаменатель числа c не превосходит 8.
в) Пусть группы состоят из n, m и k чисел, а средние значения равны c_1, c_2 и c_3 соответственно. Если $c_1 < 6{,}1$, $c_2 < 6{,}1$, $c_3 < 6{,}1$, то

$$nc_1 + mc_2 + kc_3 < (n+m+k)\cdot 6{,}1 = 61,$$

что противоречит условию. Значит, хотя бы одно из чисел c_1, c_2, c_3 не меньше 6,1. Поэтому максимальное из этих чисел не меньше 6,1. При этом каждое из этих чисел имеет вид $c=\frac{a}{b}$, где a — натуральное число и $b\in\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, поэтому максимальное из этих чисел не меньше $6\frac{1}{8}$.

Покажем, что максимальное из этих чисел не может равняться $6\frac{1}{8}$. Пусть $c_1=6\frac{1}{8}$. Тогда первая группа состоит из 8 чисел, сумма которых равна $49=61-12$. Значит, каждая из других двух групп состоит из одного числа, причём сумма двух чисел из второй и третьей групп равна 12. Но тогда одно из этих чисел больше 6, поэтому максимальное среднее больше $6\frac{1}{8}$. Получаем, что максимальное из чисел c_1, c_2, c_3 не меньше $6\frac{1}{7}$.

Покажем, что максимальное из чисел c_1, c_2, c_3 может равняться $6\frac{1}{7}$. Например, для разбиения на группы $\{6\}$, $\{4,8\}$, $\{1,2,3,5,7,9,16\}$ получаем: $c_1=c_2=6$, $c_3=6\frac{1}{7}$.

Ответ: а) да; б) нет; в) $6\frac{1}{7}$.

Критерии оценивания заданий 78 и 79

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта *а*; — обоснованное решение пункта *б*; — искомая оценка в пункте *в*; — пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

80 Вася сложил несколько различных натуральных чисел из отрезка $[53; 84]$. Петя увеличил некоторые из Васиных чисел вдвое и сложил все числа.

а) Может ли Петин результат быть ровно на 100 больше Васиного?

б) Может ли Петин результат быть ровно на 150 больше Васиного?

в) Известно, что Петя удвоил четверть чисел Васи, а сумма от этого увеличилась на треть. При каком наибольшем количестве чисел в наборе Васи это возможно?

Решение.

а) Разность чисел Пети и Васи равна сумме удвоенных чисел. Если было удвоено одно число, то эта сумма не превосходит 84, а если – более одного, то эта сумма больше 106. Поэтому Петин результат не может быть ровно на 100 больше Васиного.

б) Сумма чисел 74 и 76 равна 150, а сумма удвоенных чисел 148 и 152 равна 300, то есть на 150 больше, так что ответ положителен.

в) Сумма чисел выросла на треть, значит, сумма удвоенных чисел составляет треть суммы всех чисел, то есть в два раза меньше суммы остальных чисел.

Пусть всего было $4n$ чисел. Тогда сумма n чисел не больше суммы n наибольших чисел из отрезка $[53; 84]$, равной $84n - \frac{n(n-1)}{2}$, а сумма $3n$ чисел не меньше суммы $3n$ наименьших чисел из отрезка $[53; 84]$, равной $53 \cdot 3n + \frac{3n(3n-1)}{2}$. Получаем:

$$2\left(84n - \frac{n(n-1)}{2}\right) \geq 159n + \frac{3n(3n-1)}{2};\ 9 \geq \frac{11n-5}{2};\ n \leq \frac{23}{11} < 3.$$

Значит, число n не превосходит 2, а количество чисел в наборе Васи не более 8.

Для восьми чисел: 53, 54, 55, 56, 57, 59, 83, 84, – из которых удваиваются числа 83 и 84, условие выполняется.

Ответ: а) нет; б) да; в) 8.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта *а*; — обоснованное решение пункта *б*; — в пункте *в* доказано, что чисел в наборе не более восьми; — в пункте *в* построен пример для восьми чисел	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

РАЗДЕЛ 2
Геометрия

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы. Единицы измерений писать не нужно.

1 Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты (1; 6), (9; 6), (9; 9).

Ответ: ___________________________.

2 Найдите длину диагонали прямоугольника, вершины которого имеют координаты (2; 1), (2; 4), (6; 1), (6; 4).

Ответ: ___________________________.

3 В равнобедренном треугольнике ABC боковые стороны $AB = BC = 15$, медиана $BM = 9$. Найдите $\cos\angle BAC$.

Ответ: ___________________________.

4 Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна $\sqrt{13}$, а один из катетов равен 3.

Ответ: ___________________________.

5 В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\operatorname{tg} A = \frac{7}{24}$. Найдите $\cos B$.

Ответ: ___________________________.

6 Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 8 и 12, а угол между ними равен 30°.

Ответ: ___________________________.

7 Острый угол B прямоугольного треугольника ABC равен $77°$. Найдите угол между высотой CH и биссектрисой CD, проведёнными из вершины прямого угла C. Ответ дайте в градусах.

Ответ: ___________________________.

8 На плане указано, что прямоугольная комната имеет площадь 20 кв. м. Точные измерения показали, что ширина комнаты равна 4,1 м, а длина — 5 м. На сколько квадратных метров площадь комнаты отличается от значения, указанного на плане?

Ответ: ___________________________.

9 Колесо имеет 36 спиц. Углы между соседними спицами равны. Найдите величину угла (в градусах), который образуют две соседние спицы.

Ответ: ___________________________

10 Аквариум размерами 80 см × 30 см × 40 см имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Сколько литров составляет объём аквариума, если в одном литре 1000 $см^3$?

Ответ: ___________________________.

11 Уровень воды в сосуде цилиндрической формы достигает $h = 10$ см. На каком уровне окажется вода, если её перелить в другой цилиндрический сосуд, у которого радиус основания вдвое меньше, чем у первого? Ответ дайте в сантиметрах.

Ответ: ___________________________.

12 Два ребра прямоугольного параллелепипеда равны 8 и 5, а объём параллелепипеда равен 280. Найдите площадь поверхности этого параллелепипеда.

Ответ: ___________________________.

13 Даны два шара с радиусами 5 и 1. Во сколько раз объём большего шара больше объёма другого?

Ответ: ___________________________.

14 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SO = 72$, $SB = 90$. Найдите длину отрезка BD.

Ответ: ___________________________.

Запишите полное обоснованное решение и ответ к каждому из заданий 15–21.

15 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 4. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 3$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что $A_1P : PB_1 = 2:1$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1.

б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани BB_1C_1C.

16 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 60, а боковое ребро SA равно 37. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении $5:1$, считая от точки C.

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости α.

17 Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом B, катеты которого равны 6. Боковые рёбра призмы равны 6. На рёбрах AA_1 и CC_1 отмечены точки M и N соответственно, причём $AM = 2$, $CN = 1$.

а) Докажите, что плоскость MNB_1 разбивает призму на два многогранника, объёмы которых равны.

б) Найдите объём тетраэдра $MNBB_1$.

18 В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит правильный треугольник со стороной 2. Высота призмы равна 3. Точка D — середина ребра AB, точка E — середина ребра B_1C_1. Через точки D и E проведена плоскость α, параллельная ребру BB_1.

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью α — прямоугольник.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью α.

19 Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Окружность с центром O, построенная на боковой стороне AB как на диаметре, касается боковой стороны CD и второй раз пересекает большее основание AD в точке H, точка Q — середина CD.

а) Докажите, что четырёхугольник $DQOH$ — параллелограмм.

б) Найдите AD, если $\angle BAD = 75°$ и $BC = 1$.

20 Точка M лежит на стороне BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$, причём B и C — вершины равнобедренных треугольников с основаниями AM и DM соответственно, а прямые AM и MD перпендикулярны.

а) Докажите, что биссектрисы углов при вершинах B и C четырёхугольника $ABCD$ пересекаются на стороне AD.

б) Пусть N — точка пересечения этих биссектрис. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $BM:MC=1:3$, а площадь четырёхугольника, стороны которого лежат на прямых AM, DM, BN и CN, равна 18.

21 Точки A_1, B_1 и C_1 — середины сторон соответственно BC, AC и AB остроугольного треугольника ABC.

а) Докажите, что отличная от A_1 точка пересечения окружностей, описанных около треугольников A_1CB_1 и A_1BC_1, лежит на окружности, описанной около треугольника B_1AC_1.

б) Известно, что $AB=AC=13$ и $BC=10$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника, вершинами которого являются центры окружностей, вписанных в треугольники A_1CB_1, A_1BC_1 и B_1AC_1.

Ответы к заданиям с кратким ответом

Геометрия

№ задания	Ответ
1	12
2	5
3	0,8
4	3
5	0,28
6	24
7	32
8	0,5
9	10
10	96
11	40
12	262
13	125
14	108

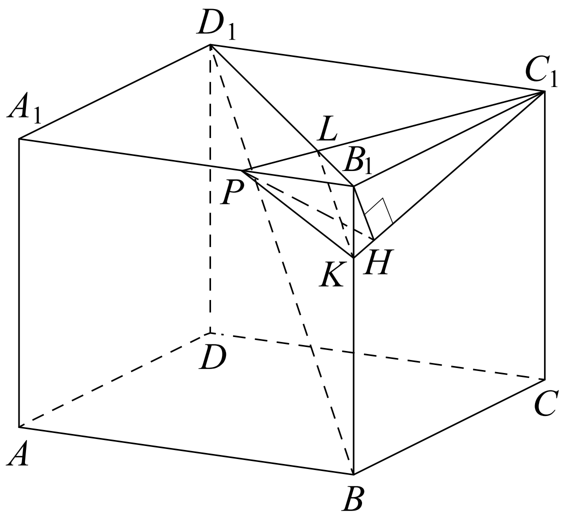
Решения и критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

15 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 4. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 3$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что $A_1P : PB_1 = 2:1$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1.

б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани BB_1C_1C.

Решение.



а) Проведём через точку K прямую, параллельную BD_1. Пусть эта прямая пересекает плоскость грани $A_1B_1C_1D_1$ в точке L. Прямая KL лежит в плоскости BB_1D_1, значит, точка L лежит на диагонали B_1D_1. Более того, $B_1L : LD_1 = B_1K : KB = 1:3$.

Прямая C_1L пересекает ребро A_1B_1 в точке P, принадлежащей плоскости α. Треугольники B_1LP и D_1LC_1 подобны, поэтому $B_1P : D_1C_1 = B_1L : D_1L = 1:3$. Значит, $A_1P : PB_1 = 2:1$.

б) Опустим из точки B_1 перпендикуляр B_1H на C_1K. По теореме о трёх перпендикулярах прямые PH и C_1K перпендикулярны. Значит, угол B_1HP искомый. Поскольку $A_1P : PB_1 = 2:1$, получаем $PB_1 = \frac{4}{3}$. В прямоугольном треугольнике B_1C_1K:

$$B_1H = \frac{B_1C_1 \cdot B_1K}{C_1K} = \frac{4}{\sqrt{17}}.$$

Значит, $\operatorname{tg} \angle B_1HP = \frac{PB_1}{B_1H} = \frac{\sqrt{17}}{3}$.

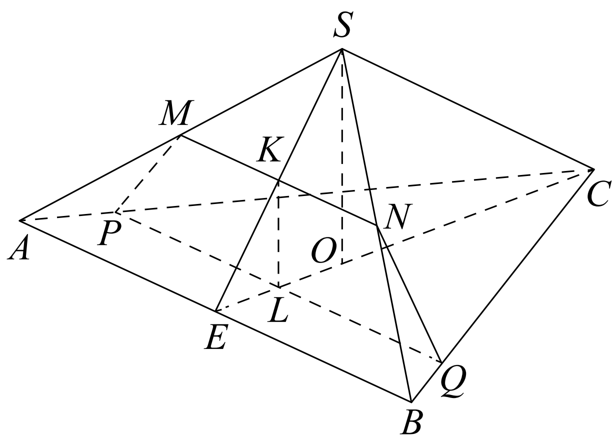
Ответ: б) $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{17}}{3}$.

16 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 60, а боковое ребро SA равно 37. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении $5:1$, считая от точки C.

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости α.

Решение.



а) Прямая MN параллельна плоскости ABC, поэтому сечение пересекает плоскость ABC по прямой PQ, параллельной MN. Рассмотрим плоскость SCE. Пусть K — точка пересечения этой плоскости и прямой MN, L — точка пересечения этой плоскости и прямой PQ, O — центр основания пирамиды. Плоскости SCE и MNQ перпендикулярны плоскости ABC, поэтому прямая KL перпендикулярна плоскости ABC, а значит, параллельна прямой SO. Поскольку MN — средняя линия треугольника ASB, точка K является серединой ES. Следовательно, L — середина EO. Медиана CE треугольника ABC делится точкой O в отношении $2:1$. Значит, $CL:LE = 5:1$.

б) Прямая CE перпендикулярна KL и PQ, поэтому прямая CE перпендикулярна плоскости MNQ. Прямые AB и PQ параллельны, значит, расстояние от вершины A до плоскости сечения равно расстоянию от точки E до плоскости сечения, то есть $EL = \frac{CE}{6} = 5\sqrt{3}$.

Ответ: б) $5\sqrt{3}$.

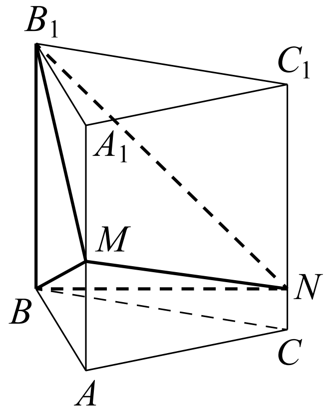
17 Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом B, катеты которого равны 6. Боковые рёбра призмы равны 6. На рёбрах AA_1 и CC_1 отмечены точки M и N соответственно, причём $AM = 2$, $CN = 1$.

а) Докажите, что плоскость MNB_1 разбивает призму на два многогранника, объёмы которых равны.

б) Найдите объём тетраэдра $MNBB_1$.

Решение.

а) Площадь основания призмы равна 18, а объём призмы равен 108.



В четырёхугольной пирамиде $B_1A_1C_1NM$ высота совпадает с высотой основания призмы $A_1B_1C_1$, опущенной на сторону A_1C_1, и равна $3\sqrt{2}$. Основание A_1C_1NM пирамиды $B_1A_1C_1NM$ является трапецией, площадь которой равна $27\sqrt{2}$. Значит, объём пирамиды $B_1A_1C_1NM$ равен 54, то есть составляет половину объёма призмы. Поэтому объёмы многогранников $B_1A_1C_1NM$ и $ABCMB_1N$ равны.

б) В четырёхугольной пирамиде $BACNM$ высота совпадает с высотой основания призмы ABC, опущенной на сторону AC, и равна $3\sqrt{2}$. Основание пирамиды $BACNM$ является трапецией, площадь которой равна $9\sqrt{2}$. Объём пирамиды $BACNM$ равен 18.

Многогранник $ABCMB_1N$ состоит из двух частей: $BACNM$ и $MNBB_1$. Значит, объём тетраэдра $MNBB_1$ равен 36.

Ответ: б) 36.

Критерии оценивания заданий 15–17

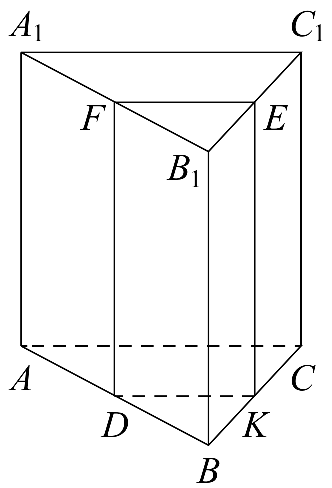
Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

18 В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит правильный треугольник со стороной 2. Высота призмы равна 3. Точка D — середина ребра AB, точка E — середина ребра B_1C_1. Через точки D и E проведена плоскость α, параллельная ребру BB_1.

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью α — прямоугольник.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью α.

Решение.



а) Обозначим точки пересечения плоскости α с ребрами BC и A_1B_1 буквами F и K (см. рис.). Плоскость α пересекает грани ABB_1A_1 и BCC_1B_1 по прямым DF и EK соответственно, параллельным ребру BB_1. Отрезки DF и EK параллельны и равны друг другу. Значит, четырёхугольник $EFDK$ — параллелограмм. Прямая DF перпендикулярна плоскости ABC, поэтому прямая DF перпендикулярна прямой DK.

Следовательно, у параллелограмма $EFDK$ прямые углы, а значит, четырёхугольник $EFDK$ — прямоугольник.

б) Точка D — середина ребра AB, а точка K — середина ребра BC. Значит, отрезок KD — средняя линия треугольника ABC, поэтому $KD = 1$. Поскольку $EK = BB_1 = 3$, площадь сечения равна $EK \cdot KD = 1 \cdot 3 = 3$.

Ответ: б) 3.

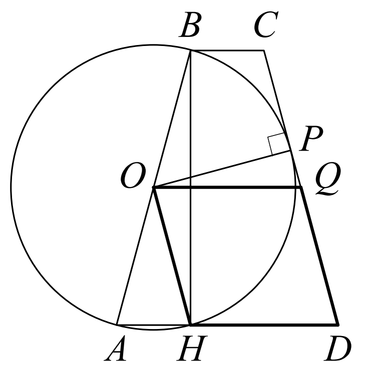
Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

19 Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Окружность с центром O, построенная на боковой стороне AB как на диаметре, касается боковой стороны CD и второй раз пересекает большее основание AD в точке H, точка Q — середина CD.

а) Докажите, что четырёхугольник $DQOH$ — параллелограмм.

б) Найдите AD, если $\angle BAD = 75°$ и $BC = 1$.

Решение.



а) Треугольник AOH равнобедренный, и трапеция $ABCD$ равнобедренная, поэтому

$$\angle AHO = \angle OAH = \angle CDA.$$

Значит, прямые OH и CD параллельны, а так как OQ — средняя линия трапеции, то параллельны прямые OQ и AD. Противоположные стороны четырёхугольника $DQOH$ попарно параллельны, следовательно, $DQOH$ — параллелограмм.

б) Пусть окружность с центром в точке O радиусом R касается стороны CD в точке P. В прямоугольных треугольниках OPQ и AHB:

$$OQ = \frac{OP}{\sin\angle OQP} = \frac{R}{\sin 75°},\ AH = AB\cos\angle BAH = 2R\cos 75°.$$

Поэтому

$$\frac{AH}{DH} = \frac{AH}{OQ} = \frac{2R\cos 75°}{\dfrac{R}{\sin 75°}} = 2\sin 75°\cdot\cos 75° = \sin 150° = \frac{1}{2}.$$

Пусть $AH = x$. Поскольку трапеция $ABCD$ равнобедренная,

$$AD = 2AH + BC;\ DH = AH + BC = x + 1.$$

Тогда

$$\frac{AH}{DH} = \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2},$$

откуда $x = 1$. Значит, $AD = 2x + 1 = 3$.

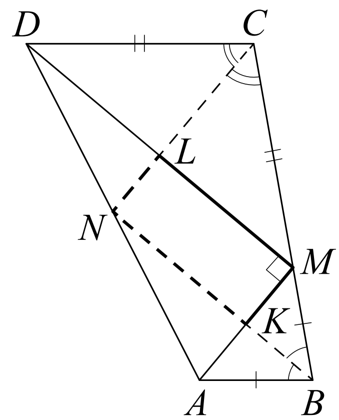
Ответ: б) 3.

20 Точка M лежит на стороне BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$, причём B и C — вершины равнобедренных треугольников с основаниями AM и DM соответственно, а прямые AM и MD перпендикулярны.

а) Докажите, что биссектрисы углов при вершинах B и C четырёхугольника $ABCD$ пересекаются на стороне AD.

б) Пусть N — точка пересечения этих биссектрис. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $BM:MC=1:3$, а площадь четырёхугольника, стороны которого лежат на прямых AM, DM, BN и CN, равна 18.

Решение.



а) Пусть K — середина отрезка AM. Треугольник AMB равнобедренный, поэтому отрезок BK является в нём медианой, биссектрисой и высотой. Поскольку прямые DM и AM перпендикулярны, прямая KB содержит среднюю линию треугольника AMD, то есть проходит через середину стороны AD. Аналогично, биссектриса угла MCD тоже проходит через середину стороны AD. Следовательно, биссектрисы углов B и C четырёхугольника $ABCD$ пересекаются на стороне AD.

б) Пусть прямые AM и BN пересекаются в точке K, а прямые DM и CN — в точке L. Тогда четырёхугольник $KMLN$ — прямоугольник. Площадь треугольника AMB

$$S_{ABM}=BK\cdot KM=\frac{BM}{MC}\cdot NK\cdot KM=\frac{1}{3}S_{KMLN}=6.$$

Аналогично, $S_{DCM}=54$. Площадь треугольника DMA

$$S_{DMA}=\frac{1}{2}\cdot AM\cdot DM=2\cdot KM\cdot LM=2S_{KMLN}=36.$$

Тогда

$$S_{ABCD}=S_{DMA}+S_{AMB}+S_{DMC}=36+6+54=96.$$

Ответ: б) 96.

21 Точки A_1, B_1 и C_1 — середины сторон соответственно BC, AC и AB остроугольного треугольника ABC.

а) Докажите, что отличная от A_1 точка пересечения окружностей, описанных около треугольников A_1CB_1 и A_1BC_1, лежит на окружности, описанной около треугольника B_1AC_1.

б) Известно, что $AB = AC = 13$ и $BC = 10$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника, вершинами которого являются центры окружностей, вписанных в треугольники A_1CB_1, A_1BC_1 и B_1AC_1.

Решение.

а) Пусть O — отличная от A_1 точка пересечения окружностей, описанных около треугольников A_1CB_1 и A_1BC_1 (рис. 1). Тогда

$$\angle A_1OB_1 = 180° - \angle A_1CB_1,$$
$$\angle A_1OC_1 = 180° - \angle A_1BC_1,$$

откуда

$$\angle B_1OC_1 = 360° - \angle A_1OB_1 - \angle A_1OC_1 = \\ = \angle ABC + \angle ACB.$$

Значит,

$$\angle B_1OC_1 + \angle B_1AC_1 = 180°,$$

следовательно, точки A, B_1, O и C_1 лежат на одной окружности.

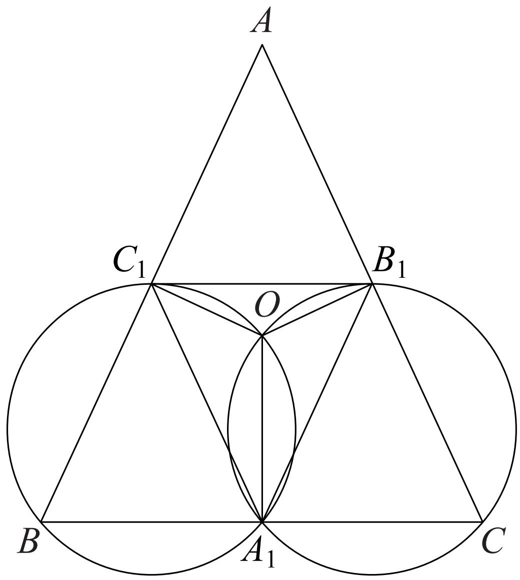


Рис. 1

б) Пусть O_1, O_2 и O_3 — центры окружностей, вписанных в треугольники B_1AC_1, A_1BC_1 и A_1CB_1 соответственно (рис. 2). Заметим, что $AO_1 = C_1O_2$, $C_1O_1 = BO_2$ как одинаковые элементы в равных треугольниках. Значит, треугольники AO_1C_1 и C_1O_2B равны. Кроме того, треугольник $O_2C_1O_1$ также равен этим треугольникам, поскольку

$$\angle AO_1C_1 = \angle C_1O_2B = \angle O_2C_1O_1.$$

Таким образом, $O_1O_2 = AC_1 = \dfrac{AB}{2}$.

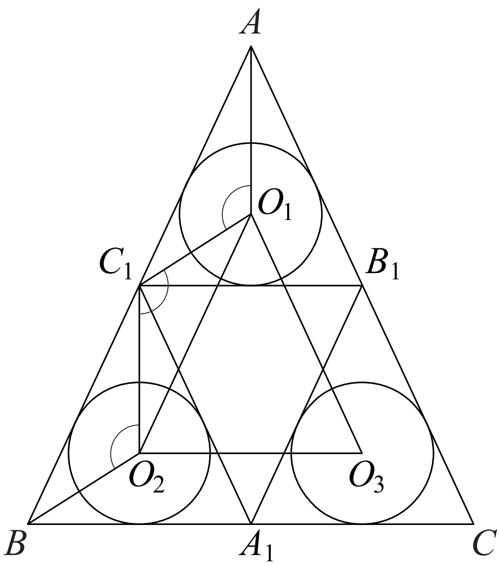


Рис. 2

Аналогично, $O_1O_3 = \dfrac{AC}{2}$, $O_2O_3 = \dfrac{BC}{2}$, поэтому треугольник $O_1O_2O_3$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом $\dfrac{1}{2}$ и радиус описанной около него окружности равен половине радиуса окружности, описанной около треугольника ABC.

Пусть M — середина BC, а O и R соответственно центр и радиус окружности, описанной около треугольника ABC (рис. 3). Тогда высота равнобедренного треугольника ABC равна $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = 12$, поэтому из прямоугольного треугольника BOM получаем:

$$BO^2 = BM^2 + MO^2;\ R^2 = 5^2 + (12 - R)^2;$$

$$R^2 = R^2 - 24R + 169;\ R = \frac{169}{24}.$$

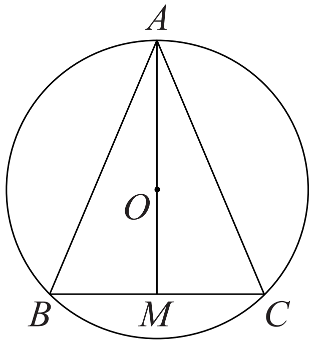


Рис. 3

Искомый радиус равен $\dfrac{R}{2} = \dfrac{169}{48}$.

Ответ: б) $\dfrac{169}{48}$.

Критерии оценивания заданий 19–21

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*, ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

РАЗДЕЛ 3
Примеры вариантов экзаменационных работ

ВАРИАНТ ГОСУДАРСТВЕННОГО ВЫПУСКНОГО ЭКЗАМЕНА

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из 12 заданий, из которых 9 заданий базового уровня сложности с кратким ответом, 1 задание повышенного уровня сложности с кратким ответом и 2 задания повышенного уровня сложности с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–10 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Запишите ответы в поле ответов в тексте работы. В случае записи неверного ответа зачеркните его и запишите рядом новый.

При выполнении заданий 11 и 12 требуется записать полное решение и ответ.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, в котором они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

Алгебра

Таблица квадратов целых чисел от 0 до 99

Десятки	Единицы									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Свойства арифметического квадратного корня

$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ при $a\geq 0$, $b\geq 0$ $\qquad$ $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ при $a\geq 0$, $b>0$

Корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\quad \text{при}\quad b^2-4ac>0$$

$$x=-\frac{b}{2a}\quad \text{при}\quad b^2-4ac=0$$

Формулы сокращенного умножения

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

Степень и логарифм

Свойства степени
при $a > 0,\ b > 0$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$\left(a^n\right)^m = a^{nm}$$

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Свойства логарифма
при $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ x > 0,\ y > 0$

$$a^{\log_a b} = b$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a 1 = 0$$

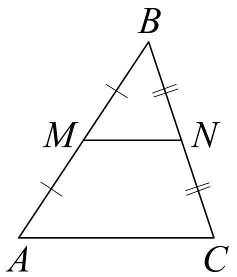
$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a b^k = k \log_a b$$

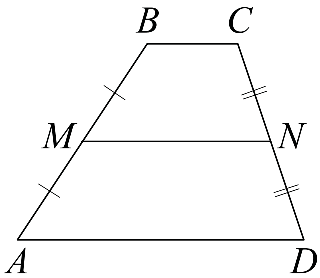
Геометрия

Средняя линия треугольника и трапеции



MN — ср. лин.
$MN \parallel AC$

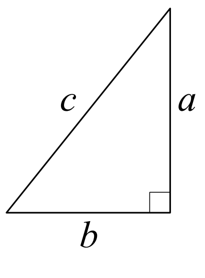
$$MN = \frac{AC}{2}$$



$BC \parallel AD$
MN — ср. лин.
$MN \parallel AD$

$$MN = \frac{BC + AD}{2}$$

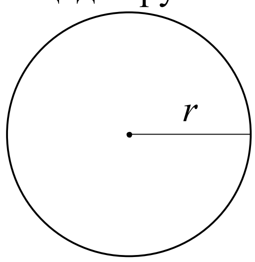
Теорема Пифагора



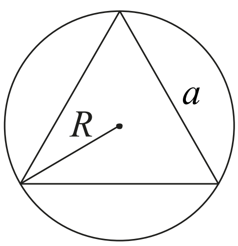
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Длина окружности $C = 2\pi r$

Площадь круга $S = \pi r^2$

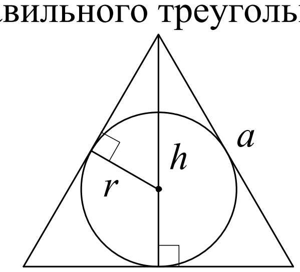


Описанная и вписанная окружности правильного треугольника



$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

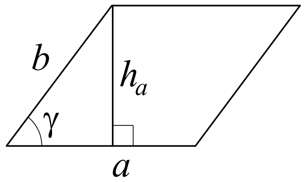


$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Площади фигур

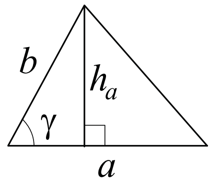
Параллелограмм



$S = ah_a$

$S = ab\sin\gamma$

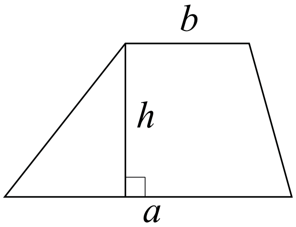
Треугольник



$S = \frac{1}{2}ah_a$

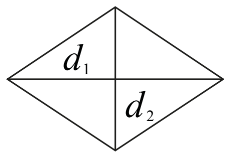
$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$

Трапеция



$S = \frac{a+b}{2}\cdot h$

Ромб

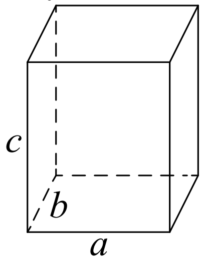


$d_1,\ d_2$ – диагонали

$S = \frac{1}{2}d_1 d_2$

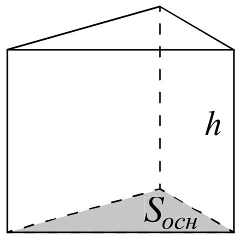
Площади поверхностей и объёмы тел

Прямоугольный параллелепипед



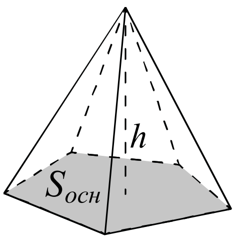
$V = abc$

Прямая призма



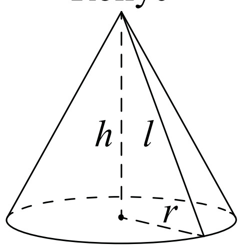
$V = S_{осн}h$

Пирамида



$V = \frac{1}{3}S_{осн}h$

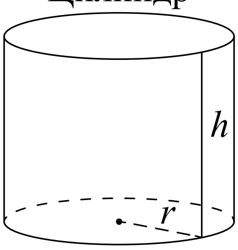
Конус



$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$S_{бок} = \pi rl$

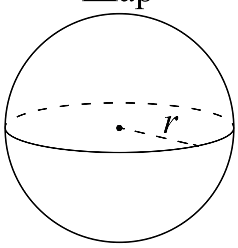
Цилиндр



$V = \pi r^2 h$

$S_{бок} = 2\pi rh$

Шар

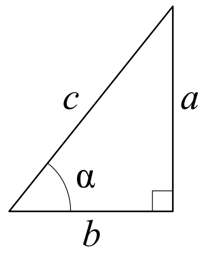


$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$S = 4\pi r^2$

Тригонометрические функции

Прямоугольный треугольник

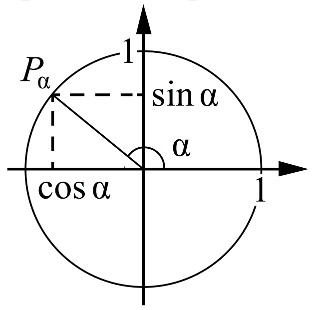


$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

Тригонометрическая окружность



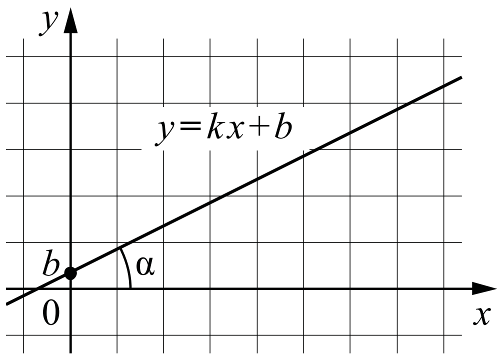
Основное тригонометрическое тождество: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Некоторые значения тригонометрических функций

α									
α	радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	градусы	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin\alpha$		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
$\cos\alpha$		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$		0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0

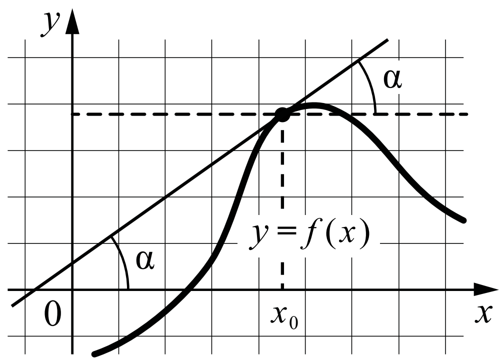
Функции

Линейная функция



$k = \operatorname{tg}\alpha$

Геометрический смысл производной



$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$

Часть 1

Ответом к заданиям* 1–10 *является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите ответ в поле ответа в тексте работы.

1 Теплоход рассчитан на 750 пассажиров и 25 членов команды. Каждая спасательная шлюпка может вместить 70 человек. Какое наименьшее число шлюпок должно быть на теплоходе, чтобы в случае необходимости в них можно было разместить всех пассажиров и всех членов команды?

Ответ: ___________________________.

2 Набор полотенец, который стоил 200 рублей, продаётся со скидкой 3%. Сколько рублей стоят два набора полотенец со скидкой?

Ответ: ___________________________.

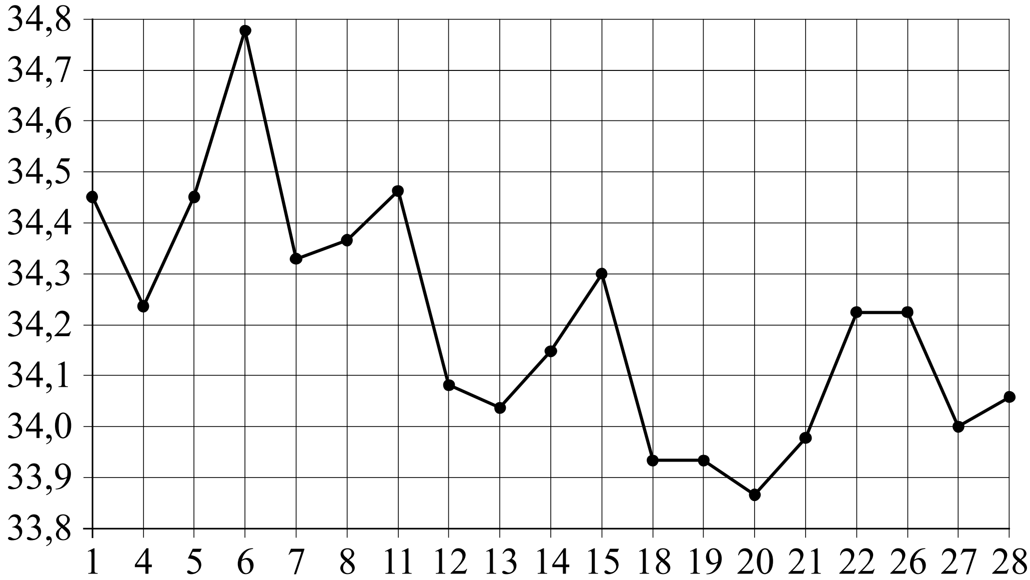
3 Найдите корень уравнения $\log_5(-2x+9)=2$.

Ответ: ___________________________.

4 В чемпионате по гимнастике участвуют 50 спортсменок: 15 из России, 18 из США, остальные из Китая. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Китая.

Ответ: ___________________________.

5 На рисунке жирными точками показан курс евро, установленный Центробанком РФ, во все рабочие дни с 1 февраля по 28 февраля 2003 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена евро в рублях. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линиями.



Определите по рисунку, какого числа курс евро был наименьшим за указанный период.

Ответ: ___________________________.

6 Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА	РЕШЕНИЯ
А) $\dfrac{x-5}{(x-3)^2}<0$	1) $(-\infty;3)\cup(5;+\infty)$
Б) $5^{-x+1}<\dfrac{1}{25}$	2) $(-\infty;3)\cup(3;5)$
В) $x^2-8x+15>0$	3) $(3;5)$
Г) $\log_2(x-3)<1$	4) $(3;+\infty)$

Впишите в приведённую в ответе таблицу под каждой буквой соответствующий решению номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

7 Найдите площадь прямоугольника, вершины которого имеют координаты $(2;3)$, $(2;8)$, $(4;8)$, $(4;3)$.

Ответ: ____________________________.

8 Пол комнаты, имеющей форму прямоугольника со сторонами 5 м и 8 м, требуется покрыть паркетом из прямоугольных дощечек со сторонами 5 см и 40 см. Сколько потребуется таких дощечек?

Ответ: ____________________________.

9 Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=\frac{1}{6}t^2+4$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, прошедшее с начала движения. В какой момент времени (в секундах) её скорость была равна 3 м/с?

Ответ: ____________________________.

10 Два автомобиля одновременно отправляются в 840-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 4 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 1 час раньше второго. Найдите скорость первого автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ____________________________.

Часть 2

Для записи решения заданий* 11 *и* 12 *и ответов к ним используйте отдельный лист. Запишите сначала номер задания, а затем чётко и разборчиво решение и ответ.

11 а) Решите уравнение $\sqrt{2}\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\cos x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$.

12 Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 4. Точка T — середина ребра A_1B_1.

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью AC_1T является прямоугольным треугольником.

б) Найдите угол между плоскостями AC_1T и ABC.

Система оценивания экзаменационной работы государственного выпускного экзамена по математике

Ответы к заданиям 1–10

Каждое из заданий 1–10 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Номер задания	Ответ
1	12
2	388
3	-8
4	0,34
5	20
6	2413
7	10
8	2000
9	9
10	60

Решения и критерии оценивания заданий 11 и 12

Количество баллов, выставляемых за выполнение заданий 11 и 12, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, в частности все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

В критериях оценивания конкретных заданий содержатся общие требования к выставлению баллов.

При выполнении задания можно использовать без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

11 а) Решите уравнение $\sqrt{2}\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\cos x$.

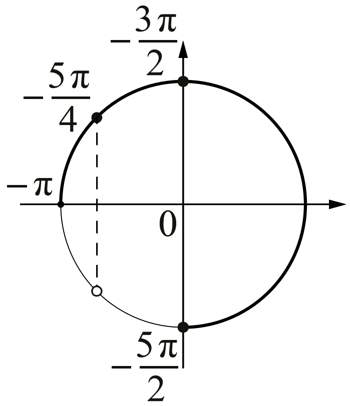
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$.

Решение.
а) Имеем:

$$\sqrt{2}\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\cos x;\quad \sqrt{2}\cos^2 x=-\cos x;\quad \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2},\end{array}\right.$$

откуда $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $x=\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$.

б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$, отберём с помощью единичной окружности.



Получаем: $-\frac{5\pi}{2}$; $-\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{5\pi}{4}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $-\frac{3\pi}{4}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$;

б) $-\frac{5\pi}{2}$; $-\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{5\pi}{4}$.

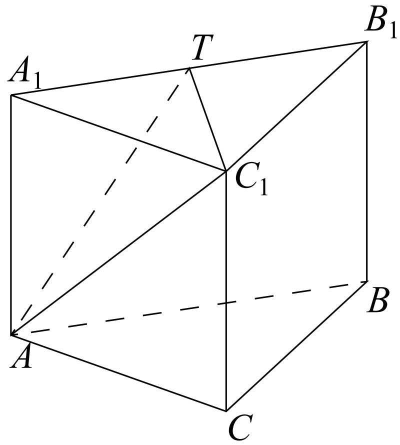
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*, ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов — пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

12 Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 4. Точка T — середина ребра A_1B_1.

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью AC_1T является прямоугольным треугольником.

б) Найдите угол между плоскостями AC_1T и ABC.

Решение.



а) Найдём стороны треугольника ATC_1:

$$AT = \sqrt{16+4} = \sqrt{20},$$
$$TC_1 = \sqrt{16-4} = \sqrt{12},$$
$$AC_1 = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}.$$

Заметим, что

$$AC_1^{\ 2} = 32 = 20 + 12 = AT^2 + TC_1^{\ 2}.$$

Следовательно, по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник ATC_1 является прямоугольным.

б) Так как прямая C_1T перпендикулярна прямым A_1T и AT, угол A_1TA искомый:

$$\operatorname{tg}\angle A_1TA = \frac{AA_1}{A_1T} = \frac{4}{2} = 2.$$

Ответ: б) $\operatorname{arctg} 2$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

ВАРИАНТ ЕДИНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ЭКЗАМЕНА
Базовый уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа включает в себя 20 заданий.

На выполнение работы отводится 3 часа (180 минут).

Ответы к заданиям записываются по приведённым ниже образцам в виде числа или последовательности цифр. Запишите ответы к заданиям сначала в поле ответа в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания.

КИМ Ответ: -0,6.   -0,6   Бланк

Если ответом является последовательность цифр, то запишите эту последовательность в бланк ответов № 1 без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

КИМ   Бланк

Ответ:

А	Б	В	Г
4	3	1	2

4312

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

Алгебра

Таблица квадратов целых чисел от 0 до 99

Десятки	Единицы									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Свойства арифметического квадратного корня

$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ при $a \geq 0$, $b \geq 0$ $\qquad$ $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ при $a \geq 0$, $b > 0$

Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{при} \quad b^2 - 4ac > 0$$

$$x = -\frac{b}{2a} \quad \text{при} \quad b^2 - 4ac = 0$$

Формулы сокращенного умножения

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Степень и логарифм

Свойства степени
при $a > 0$, $b > 0$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$\left(a^n\right)^m = a^{nm}$$

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Свойства логарифма
при $a > 0$, $a \ne 1$, $b > 0$, $x > 0$, $y > 0$

$$a^{\log_a b} = b$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a 1 = 0$$

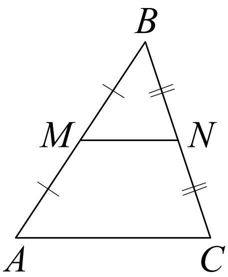
$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a b^k = k \log_a b$$

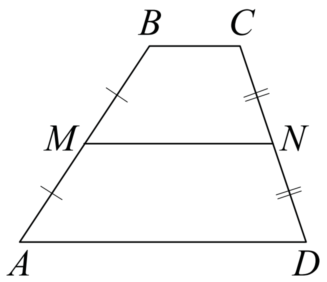
Геометрия

Средняя линия треугольника и трапеции



MN — ср. лин.
$MN \parallel AC$

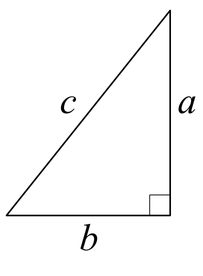
$$MN = \frac{AC}{2}$$



$BC \parallel AD$
MN — ср. лин.
$MN \parallel AD$

$$MN = \frac{BC + AD}{2}$$

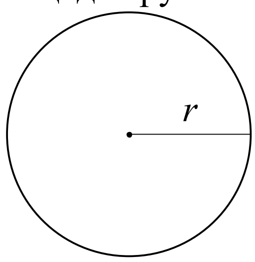
Теорема Пифагора



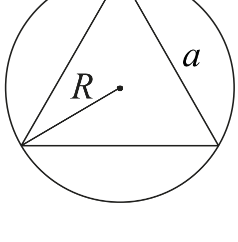
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Длина окружности $C = 2\pi r$

Площадь круга $S = \pi r^2$

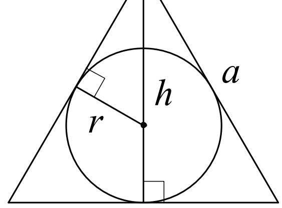


Описанная и вписанная окружности правильного треугольника



$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

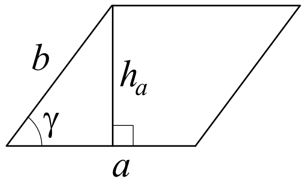


$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Площади фигур

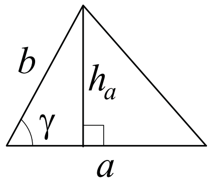
Параллелограмм



$S = ah_a$

$S = ab\sin\gamma$

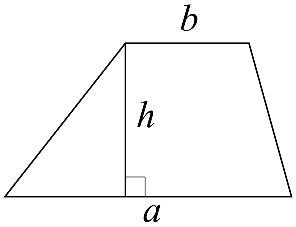
Треугольник



$S = \frac{1}{2}ah_a$

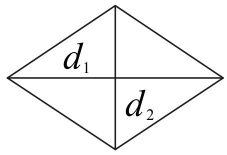
$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$

Трапеция



$S = \frac{a+b}{2}\cdot h$

Ромб

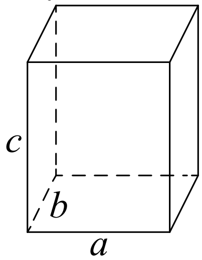


$d_1,\ d_2$ – диагонали

$S = \frac{1}{2}d_1 d_2$

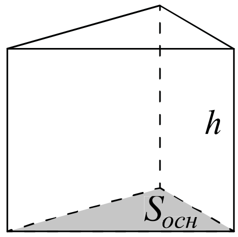
Площади поверхностей и объёмы тел

Прямоугольный параллелепипед



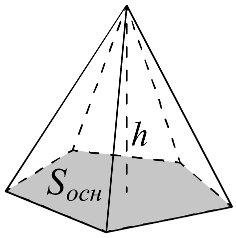
$V = abc$

Прямая призма



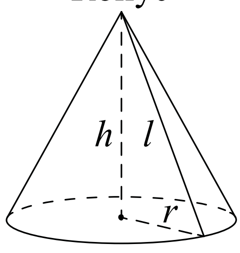
$V = S_{осн}h$

Пирамида



$V = \frac{1}{3}S_{осн}h$

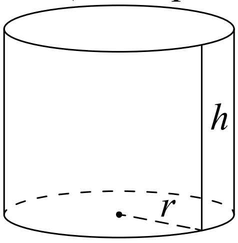
Конус



$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$S_{бок} = \pi rl$

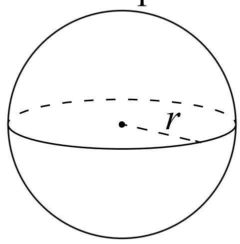
Цилиндр



$V = \pi r^2 h$

$S_{бок} = 2\pi rh$

Шар

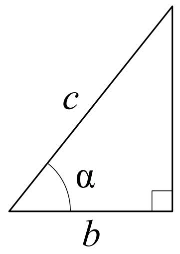


$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$S = 4\pi r^2$

Тригонометрические функции

Прямоугольный треугольник

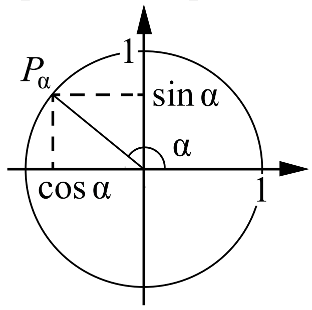


$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

Тригонометрическая окружность



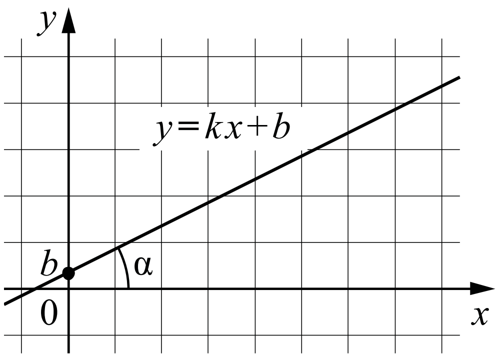
Основное тригонометрическое тождество: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Некоторые значения тригонометрических функций

α									
α	радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	градусы	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin\alpha$		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
$\cos\alpha$		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$		0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0

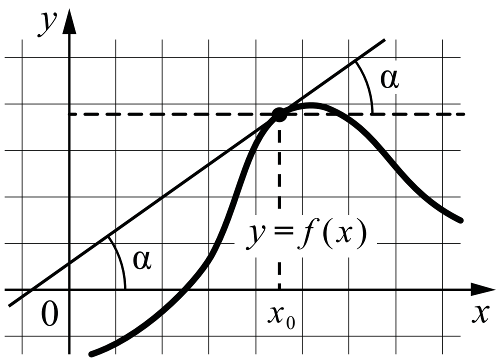
Функции

Линейная функция



$k = \operatorname{tg}\alpha$

Геометрический смысл производной



$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$

Ответом к каждому заданию является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Сначала запишите ответ к заданию в поле ответа в тексте работы, а затем перенесите в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Найдите значение выражения $0,51:\frac{17}{12}+1$.

Ответ: ___________________________.

2 Найдите значение выражения $3\cdot(-1)^4+5\cdot(-1)^6$.

Ответ: ___________________________.

3 В сентябре 1 кг слив стоил 50 рублей. В октябре сливы подорожали на 20%. Сколько рублей стоил 1 кг слив после подорожания в октябре?

Ответ: ___________________________.

4 Площадь треугольника можно вычислить по формуле $S=\frac{abc}{4R}$, где a, b и c — стороны треугольника, а R — радиус окружности, описанной около этого треугольника. Пользуясь этой формулой, найдите S, если $a=11$, $b=13$, $c=20$ и $R=\frac{65}{6}$.

Ответ: ___________________________.

5 Найдите значение выражения $3^{4\log_3 5}$.

Ответ: ___________________________.

6 Для ремонта требуется 66 рулонов обоев. Какое наименьшее количество пачек обойного клея нужно для такого ремонта, если 1 пачка клея рассчитана на 7 рулонов?

Ответ: ____________________________.

7 Найдите корень уравнения $8+7(x+2)=1$.

Ответ: ____________________________.

8 Пол комнаты, имеющей форму прямоугольника со сторонами 4 м и 10 м, требуется покрыть паркетом из прямоугольных дощечек со сторонами 5 см и 20 см. Сколько потребуется таких дощечек?

Ответ: ____________________________.

9 Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ЗНАЧЕНИЯ
А) толщина волоса	1) 40 000 км
Б) рост новорождённого ребёнка	2) 50 см
В) длина футбольного поля	3) 0,1 мм
Г) длина экватора	4) 105 м

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

Ответ:

А	Б	В	Г

10 Найдите вероятность того, что случайно выбранное трёхзначное число делится на 25.

Ответ: ____________________________.

11 В таблице представлены налоговые ставки на автомобили в Москве с 1 января 2013 года.

Мощность автомобиля (в л.с.*)	Налоговая ставка (руб. за 1 л.с.* в год)
не более 70	0
71–100	12
101–125	25
126–150	35
151–175	45
176–200	50
201–225	65
226–250	75
свыше 250	150

* л.с. — лошадиная сила

Какова налоговая ставка (в рублях за 1 л.с. в год) на автомобиль мощностью 280 л.с.?

Ответ: ___________________________.

12 Для того чтобы связать свитер, хозяйке нужно 600 граммов шерстяной пряжи синего цвета. Можно купить синюю пряжу по цене 80 рублей за 100 граммов, а можно купить неокрашенную пряжу по цене 70 рублей за 100 граммов и окрасить её. Один пакетик краски стоит 40 рублей и рассчитан на окраску 300 граммов пряжи. Какой вариант покупки дешевле? В ответ напишите, сколько рублей будет стоить эта покупка.

Ответ: ___________________________.

13 Аквариум имеет форму куба со стороной 40 см. Сколько литров составляет объём аквариума?

В одном литре 1000 кубических сантиметров.

Ответ: ___________________________.

14 В таблице показаны доходы и расходы фирмы за 5 месяцев.

Месяц	Доход, тыс. руб.	Расход, тыс. руб.
Ноябрь	120	85
Декабрь	100	90
Январь	100	95
Февраль	110	100
Март	120	80

Пользуясь таблицей, поставьте в соответствие каждому из указанных месяцев характеристику доходов и расходов в этом месяце.

МЕСЯЦЫ

А) декабрь
Б) январь
В) февраль
Г) март

ХАРАКТЕРИСТИКИ

1) наибольший расход в период с ноября по март
2) наибольшая разница между доходом и расходом
3) доход в этом месяце меньше, чем доход в предыдущем
4) наименьшая разница между доходом и расходом

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

15 В параллелограмме $ABCD$ диагонали делят его углы пополам и равны 80 и 18. Найдите периметр параллелограмма $ABCD$.

Ответ: ____________________________.

16 Даны два шара с радиусами 6 и 3. Во сколько раз площадь поверхности большего шара больше площади поверхности меньшего?

Ответ: ____________________________.

17 Число m равно $\sqrt{6}$.
Каждому из четырёх чисел в левом столбце соответствует отрезок, которому оно принадлежит. Установите соответствие между числами и отрезками из правого столбца.

ЧИСЛА	ОТРЕЗКИ
А) $-\sqrt{m}$	1) $[-2;-1]$
Б) m^2-3	2) $[-1;0]$
В) $-\frac{m}{10}$	3) $[0;1]$
Г) $\frac{1}{m}$	4) $[2;3]$

Впишите в приведённую в ответе таблицу под каждой буквой соответствующий отрезку номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

18 Перед баскетбольным турниром измерили рост игроков баскетбольной команды города N. Оказалось, что рост каждого из баскетболистов этой команды больше 180 см и меньше 195 см. Выберите утверждения, которые верны при указанных условиях.

1) В баскетбольной команде города N обязательно есть игрок, рост которого равен 200 см.
2) В баскетбольной команде города N нет игроков с ростом 179 см.
3) Рост любого баскетболиста этой команды меньше 195 см.
4) Разница в росте любых двух игроков баскетбольной команды города N составляет более 15 см.

В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: ___________________________.

19 Найдите четырёхзначное число, которое в 14 раз меньше куба некоторого натурального числа. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Ответ: ___________________________.

20 Во всех подъездах дома одинаковое число этажей, а на всех этажах одинаковое число квартир. При этом число этажей в доме больше числа квартир на этаже, число квартир на этаже больше числа подъездов, а число подъездов больше одного. Сколько этажей в доме, если всего в нём 357 квартир?

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Ответы к заданиям 1–20

Каждое из заданий 1–20 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Номер задания	Ответ
1	1,36
2	8
3	60
4	66
5	625
6	10
7	-3
8	4000
9	3241
10	0,04
11	150
12	480
13	64
14	3412
15	164
16	4
17	1423
18	23
19	1568; 5292
20	17

ВАРИАНТ ЕДИНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ЭКЗАМЕНА
Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8. -0,8 Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, или капиллярной, или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

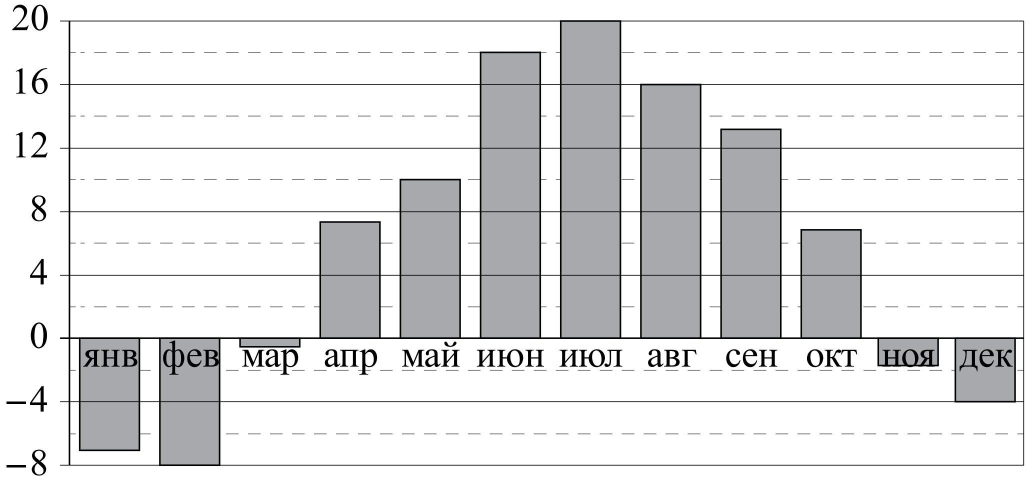
Ответом к заданиям* 1–12 *является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в* БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 *справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 Только 50% из 28 000 выпускников города правильно решили задачу № 7. Сколько выпускников правильно решили задачу № 7?

Ответ: ____________________________.

2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Санкт-Петербурге за каждый месяц 1999 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по приведённой диаграмме, сколько было месяцев с положительной среднемесячной температурой.



Ответ: ____________________________.

3 Найдите площадь прямоугольника, вершины которого имеют координаты $(2;3)$, $(2;6)$, $(11;6)$, $(11;3)$.

Ответ: ____________________________.

4 Миша, Олег, Настя и Галя бросили жребий — кому начинать игру. Найдите вероятность того, что начинать игру должна будет Галя.

Ответ: ____________________________.

5 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-5}=\frac{1}{16}$.

Ответ: ____________________________.

6 В треугольнике ABC сторона AB равна 2, угол C равен 150°. Найдите радиус описанной около этого треугольника окружности.

Ответ: ____________________________.

7 Прямая $y=x-24$ параллельна касательной к графику функции $y=x^2+3x-11$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ: ____________________________.

8 Диагональ куба равна $3\sqrt{3}$. Найдите его объём.

Ответ: ____________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9

Найдите значение выражения $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$ и $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Ответ: ___________________________.

10

Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением a (в км/ч^2). Скорость v (в км/ч) вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$, где l — пройденный автомобилем путь (в км). Найдите ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 0,4 км, приобрести скорость 80 км/ч. Ответ дайте в км/ч^2.

Ответ: ___________________________.

11

Два человека одновременно отправляются из одного дома на прогулку одной и той же дорогой до опушки леса, находящейся в 4,5 км от дома. Один идёт со скоростью 2,3 км/ч, а другой — со скоростью 4,6 км/ч. Дойдя до опушки, второй с той же скоростью возвращается обратно. На каком расстоянии от дома произойдёт их встреча? Ответ дайте в километрах.

Ответ: ___________________________.

12

Найдите наибольшее значение функции

$$y = (x-1)^2(x+5) - 8$$

на отрезке $[-10; 0]$.

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания* 13–19 *используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (*13, 14 *и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$$0,4^{\sin x}+2,5^{\sin x}=2\,.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\frac{7\pi}{2}\right]$.

14 Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 6. Точки K, L и M — центры граней $ABCD$, AA_1D_1D и CC_1D_1D соответственно.

а) Докажите, что B_1KLM — правильная пирамида.

б) Найдите объём пирамиды B_1KLM .

15 Решите неравенство $\dfrac{5\log_2^2 x-100}{\log_2^2 x-25}\geq 4$.

16 Точки E и K — соответственно середины сторон CD и AD квадрата $ABCD$. Отрезки BE и CK пересекаются в точке O.

а) Докажите, что около четырёхугольника $ABOK$ можно описать окружность.

б) Найдите AO, если сторона квадрата равна 1.

17 В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на сумму 147 000 рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за два года)?

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases}(a+7x+4)(a-2x+4)\le 0,\\ a+3x\ge x^2\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

19 Саша берёт пять различных натуральных чисел и проделывает с ними следующие операции: сначала вычисляет среднее арифметическое первых двух чисел, затем — среднее арифметическое полученного результата и третьего числа, потом среднее арифметическое полученного результата и четвёртого числа и в конце — среднее арифметическое полученного результата и пятого числа — число A.

а) Может ли число A равняться среднему арифметическому изначальных пяти чисел?

б) Может ли число A быть больше среднего арифметического изначальных пяти чисел в 5 раз?

в) В какое наибольшее целое число раз число A может быть больше среднего арифметического изначальных пяти чисел?

Система оценивания экзаменационной работы единого государственного экзамена по математике

Ответы к заданиям 1–12

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Номер задания	Ответ
1	14000
2	7
3	27
4	0,25
5	7
6	2
7	-1
8	27
9	-0,2
10	8000
11	3
12	24

Решения и критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом 13–19

13 а) Решите уравнение

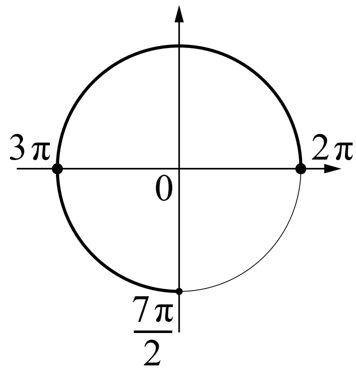
$$0,4^{\sin x}+2,5^{\sin x}=2.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Пусть $t=0,4^{\sin x}$, тогда исходное уравнение запишется в виде $t+\frac{1}{t}=2$; $t=1$; $0,4^{\sin x}=1$, откуда $\sin x=0$; $x=\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.



Получим числа: 2π; 3π.

Ответ: а) πn, $n\in\mathbb{Z}$;

б) 2π; 3π.

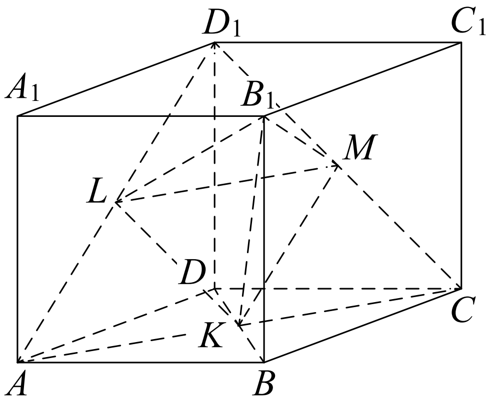
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов — пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 6. Точки K, L и M — центры граней $ABCD$, AA_1D_1D и CC_1D_1D соответственно.

а) Докажите, что B_1KLM — правильная пирамида.

б) Найдите объём пирамиды B_1KLM.

Решение.



а) Рассмотрим правильный тетраэдр B_1AD_1C. В нём B_1K, B_1L и B_1M — медианы боковых граней. Значит, $B_1K = B_1L = B_1M$.

Основание KLM пирамиды B_1KLM является правильным треугольником, поскольку KL, KM и LM — средние линии в правильном треугольнике AD_1C.

Таким образом, B_1KLM — правильная пирамида.

б) Объём пирамиды B_1KLM равен четверти объёма пирамиды B_1AD_1C, поскольку площади треугольников KLM и AD_1C относятся как $1:4$, а высота, проведённая из вершины B_1, — общая для этих пирамид. С другой стороны, куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ составлен из пирамид B_1AD_1C, $AA_1B_1D_1$, $CB_1C_1D_1$, B_1ABC и D_1ACD. Пусть объём куба равен $V = 216$. Тогда объём каждой из пирамид $AA_1B_1D_1$, $CB_1C_1D_1$, B_1ABC и D_1ACD равен $\frac{V}{6}$. Значит, объём пирамиды B_1AD_1C равен $\frac{V}{3}$, а объём пирамиды B_1KLM равен $\frac{V}{12} = 18$.

Ответ: б) 18.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15

Решите неравенство $\dfrac{5\log_2^2 x-100}{\log_2^2 x-25}\geq 4$.

Решение.

Пусть $t=\log_2 x$, тогда неравенство примет вид:

$$\frac{5t^2-100}{t^2-25}\geq 4;\ \frac{t^2}{t^2-25}\geq 0\ \ \frac{t^2}{(t+5)(t-5)}\geq 0,$$

откуда $t<-5$; $t=0$; $t>5$.

При $t<-5$ получим: $\log_2 x<-5$, откуда $0<x<\dfrac{1}{32}$.

При $t=0$ получим: $\log_2 x=0$, откуда $x=1$.

При $t>5$ получим: $\log_2 x>5$, откуда $x>32$.

Решение исходного неравенства:

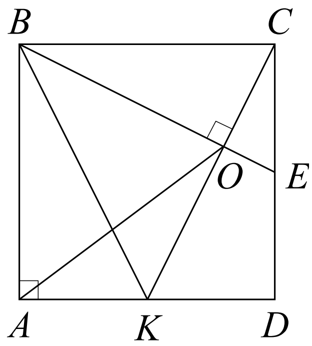
$$0<x<\frac{1}{32};\ x=1;\ x>32.$$

Ответ: $\left(0;\dfrac{1}{32}\right)$; 1; $(32;+\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 1, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Точки E и K — соответственно середины сторон CD и AD квадрата $ABCD$. Отрезки BE и CK пересекаются в точке O.
а) Докажите, что около четырёхугольника $ABOK$ можно описать окружность.
б) Найдите AO, если сторона квадрата равна 1.

Решение.



а) Прямоугольные треугольники BCE и CDK равны по двум катетам. Значит,

$$\angle CBE = \angle DCK = 90° - \angle BCK,$$

то есть прямые BE и CK перпендикулярны. Значит, в четырёхугольнике $ABOK$ углы BAK и BOK прямые, поэтому около него можно описать окружность.
б) Прямоугольные треугольники BCE и BAK равны по двум катетам, значит,

$$\angle BKA = \angle BEC = \angle ABE = \angle ABO,$$

то есть на хорды AO и AB описанной около четырёхугольника $ABOK$ окружности опираются равные углы. Таким образом, $AO = AB = 1$.
Ответ: б) 1.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на сумму 147 000 рублей. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг увеличивается на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.
Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за два года)?

Решение.
Пусть сумма кредита составляет $S = 147000$ рублей, а ежегодные выплаты X рублей. По условию, долг перед банком (в рублях) по состоянию на июль должен уменьшаться следующим образом:
$$S,\ 1{,}1S - X,\ 1{,}1^2 \cdot S - 1{,}1X - X = 0,$$
откуда
$$X = \frac{1{,}1^2 \cdot S}{2{,}1} = \frac{121}{210} \cdot S.$$
Получаем $X = 84700$ (рублей). Значит, банку выплачено 169400 рублей.
Ответ: 169400.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases}(a+7x+4)(a-2x+4)\le 0,\\ a+3x\ge x^2\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение.

Заметим, что $-7x-4\ge 2x-4$ при $x\le 0$ и $-7x-4<2x-4$ при $x>0$. Поэтому первое неравенство системы равносильно двойному неравенству $2x-4\le a\le -7x-4$ при $x\le 0$ и равносильно двойному неравенству $-7x-4\le a\le 2x-4$ при $x>0$. При $x\le 0$ получаем:

$$x^2-3x\le a\le -7x-4;\ x^2+4x+4\le 0;\ (x+2)^2\le 0,$$

откуда $x=-2$. При $x=-2$ исходная система принимает вид:

$$\begin{cases}(a-10)(a+8)\le 0,\\ a\ge 10,\end{cases}$$

откуда $a=10$.

При любом $x>0$ выполнено неравенство $-7x-4<x^2-3x$, поскольку $x^2+4x+4>0$. Поэтому при $x>0$ исходная система равносильна системе

$$\begin{cases}x>0,\\ a\le 2x-4,\\ a\ge x^2-3x.\end{cases}$$

Из этой системы следует, что $x^2-3x\le 2x-4$, откуда $1\le x\le 4$. Заметим, что максимальное значение функции $f(x)=2x-4$ на отрезке $[1;4]$ равно 4, а минимальное значение функции $g(x)=x^2-3x$ равно $-\frac{9}{4}$. Значит, выполнено неравенство $-\frac{9}{4}\le a\le 4$. Кроме того при $-\frac{9}{4}\le a\le 4$ больший корень уравнения $x^2-3x=a$ удовлетворяет системе неравенств, поскольку функция $g(x)=x^2-3x$ принимает на отрезке $[1;4]$ все значения от $-\frac{9}{4}$ до 4, и её значения в каждой точке отрезка $[1;4]$ не превосходят значений функции $f(x)=2x-4$. Таким образом, исходная система неравенств имеет хотя бы одно решение при $-\frac{9}{4}\le a\le 4$ и $a=10$.

Ответ: $-\frac{9}{4}\le a\le 4$; $a=10$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только исключением точек $a=-\frac{9}{4}$ и/или $a=4$	3
С помощью верного рассуждения получен промежуток $\left[-\frac{9}{4};4\right]$ множества значений a, возможно, с исключением граничных точек, или точка $a=10$ ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Верно построено множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств, ИЛИ обоснованно получено множество значений параметра $\left[-\frac{9}{4};+\infty\right)$ или $(-\infty;4]$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Саша берёт пять различных натуральных чисел и проделывает с ними следующие операции: сначала вычисляет среднее арифметическое первых двух чисел, затем — среднее арифметическое полученного результата и третьего числа, потом среднее арифметическое полученного результата и четвёртого числа и в конце — среднее арифметическое полученного результата и пятого числа — число A.

а) Может ли число A равняться среднему арифметическому изначальных пяти чисел?

б) Может ли число A быть больше среднего арифметического изначальных пяти чисел в 5 раз?

в) В какое наибольшее целое число раз число A может быть больше среднего арифметического изначальных пяти чисел?

Решение.

а) Например, для чисел 1, 3, 8, 11 и 2 число A равно их среднему арифметическому.

б) Пусть изначальные числа равны a, b, c, d и e. Тогда $A=\dfrac{a+b+2c+4d+8e}{16}$, а среднее арифметическое этих чисел равно $\dfrac{a+b+c+d+e}{5}$. Если число A больше среднего арифметического в 5 раз, то

$$\frac{a+b+2c+4d+8e}{16}=5\cdot\frac{a+b+c+d+e}{5};$$
$$a+b+2c+4d+8e=16\left(a+b+c+d+e\right),$$

откуда $15a+15b+14c+12d+8e=0$, что невозможно.

в) Предположим, что число A в k раз больше среднего арифметического пяти чисел, тогда

$$\frac{a+b+2c+4d+8e}{16}=k\cdot\frac{a+b+c+d+e}{5};$$
$$5a+5b+10c+20d+40e=16k\left(a+b+c+d+e\right),$$

откуда $(16k-5)a+(16k-5)b+(16k-10)c+(16k-20)d+(16k-40)e=0$, что невозможно при $k\ge 3$.

Для чисел 1, 3, 4, 7 и 35 число A вдвое больше их среднего арифметического.

Таким образом, число A может быть вдвое больше среднего арифметического, но не может быть больше в большее целое число раз.

Ответ: а) да; б) нет; в) 2.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта *а*; — обоснованное решение пункта *б*; — искомая оценка в пункте *в*; — пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4