GUÍA 1

Semana 1

LOS NÚMEROS IRRACIONALES

Historia de las matemáticas

En el siglo V a.c., los griegos pitagóricos descubrieron con gran sorpresa que, además de los números Naturales y de los Números fraccionarios, existía otro tipo de número: el Número Irracional.

Hasta entonces pensaban que todo el universo se regía por los números naturales y las fracciones, pero se dieron cuenta que hay pares de segmentos, como la diagonal y el lado de un pentágono regular o como la diagonal de el lado de un cuadrado, cuyo cociente de longitud no es una fracción. Les pareció que el caos asomaba a su mundo y llamaron a tal relación ahogos o irracional.

CLASIFICACIÓN DE LOS NÚMEROS DECIMALES

Atendiendo al número de cifras decimales, podemos clasificar los números decimales de la siguiente forma:

- ***<u>Decimales exactos</u>***: los que tienen un **número finito** de cifras decimales.
- ***<u>Decimales no exactos</u>***: los que tienen un **número infinito** de cifras decimales. Estos se clasifican a su vez en:
  - ***<u>Periódicos</u>***: cuando una cifra o un grupo de cifras se repite indefinidamente a partir de un cierto lugar después de la coma. A la cifra o al grupo de cifras que se repite se le llama **período**, y a la parte decimal que no se repite, **anteperíodo**. Teniendo en cuenta la existencia o no del anti-período, los decimales periódicos se clasifican a su vez en:

    * ***<u>Periódicos puros</u>***: el período empieza inmediatamente después de la coma (luego, no existe el anti-período).

    * ***<u>Periódicos mixtos</u>***: el período no comienza inmediatamente después de la coma (luego existe el ante período)

  - ***<u>Ilimitados no periódicos</u>***: cuando ninguna cifra o grupo de cifras se repite indefinidamente**.**

ACTIVIDAD DE EXPLORACIÓN:

Usando calculadora, completa la siguiente tabla. Analiza los resultados y clasifícalos según su desarrollo decimal

(finitos, infinito periódico y semiperiódico)

1.- $\sqrt{1,21}$ = 1,1	decimal finito	2.- $\sqrt{7}$ =	
3.- $\sqrt{1}$ =		4.- $\sqrt{99}$ =	
5.- $\sqrt{100}$ =		6.- $\sqrt{11}$ =	
7.- $\sqrt{4}$ =		8.- $\sqrt{13}$ =	
9.- $\sqrt{4,9}$ =		10.- $\sqrt{0,64}$ =	
11.- $\sqrt{1,44}$ =		12.- $\sqrt{6,4}$ =	

Responde:

1) ¿Cuáles representan desarrollos decimales finitos?

2) ¿Cuáles representan desarrollos decimales infinitos periódicos o semiperiódicos?

3) ¿Cuáles no pertenecen a ninguna de las clasificaciones anteriores?

4) ¿Qué características tienen los números que no son racionales?

Observando los desarrollos decimales anteriores podemos darnos cuenta de que existen números que no pertenecen a ninguna de las clasificaciones anteriores, es decir, su desarrollo decimal es infinito sin período, por tanto, no son números racionales**,** como los números decimales infinitos no periódicos no se pueden escribir de la forma $\frac{a}{b}$ surgió la necesidad de crear los **Números Irracionales.**

"Los números irracionales son aquellos números que no se pueden escribir como fracción y que tienen infinitas cifras decimales que no presentan período. El conjunto de los números irracionales se representa por I."

Según esto, responde y justifica:

¿Un número racional puede ser un número irracional? ¿Un número irracional puede ser un número racional? ___

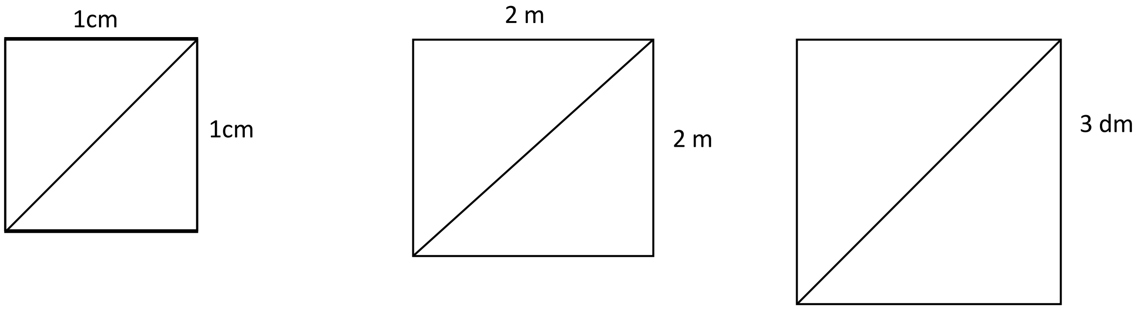
Historietas de Mafalda para reflexionar

"Mafalda es el personaje principal de esta historieta. Sus comentarios y ocurrencias son el espejo de las inquietudes sociales y políticas de los años 60. Se preocupa por la situación mundial, por lo que está constantemente actualizándose a través de la radio. Mafalda representa el inconformismo de la humanidad, pero con fe en su generación. Mundialmente conocida, se transformó en una insignia de las costumbres y la personalidad argentina"

¿Consideras que la historieta refleja situaciones de la generación actual? Explica

EJEMPLOS DE NÚMEROS IRRACIONALES:

1) Calcula la medida de la diagonal en los siguientes cuadrados:



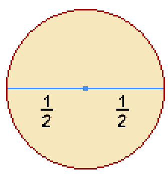
$\sqrt{2} = 1{,}414213562\ldots$ representa la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1.

$\sqrt{8} = 2{,}828427124\ldots$ representa la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 2.

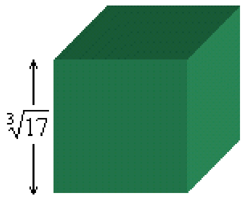
$\sqrt{18} = 4{,}24264068\ldots$ representa la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 3.

Con esto, ¿podemos decir que toda raíz cuadrada de un número que no es cuadrado perfecto es un número irracional? ¿Por qué? _________

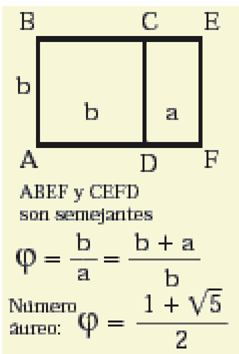
2) $\pi = 3{,}1415926535\,897\ldots$: Número que representa la longitud de una circunferencia de diámetro 1, y el área de una circunferencia de radio 1.



3) $\sqrt[3]{17} = 2{,}5712815906\,582\ldots$: Representa la longitud de la arista de un cubo de volumen 17

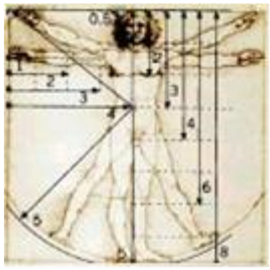


4) $\phi = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = 1{,}6180339887\,498\ldots$: Número que según los griegos era la proporción perfecta desde un punto de vista estético; por ejemplo, el rectángulo más hermoso para ellos era aquel cuyos lados estaban en dicha proporción. Por tal motivo, a este número se le conoce como la **razón áurea** o **número de oro**.



5) $e = 2{,}7182818284\ldots$: Cuyo nombre se debe a su descubridor Leonhard Euler (matemático suizo del siglo XVIII) que aparece en diversas aplicaciones como economía, crecimiento de poblaciones, etc.

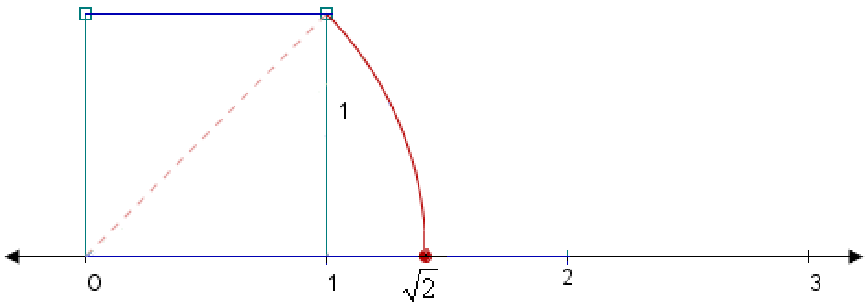
Una forma de encontrar el valor de e es realizar la siguiente suma. Analízala e intenta continuar y calcular aproximaciones con ayuda de la calculadora:



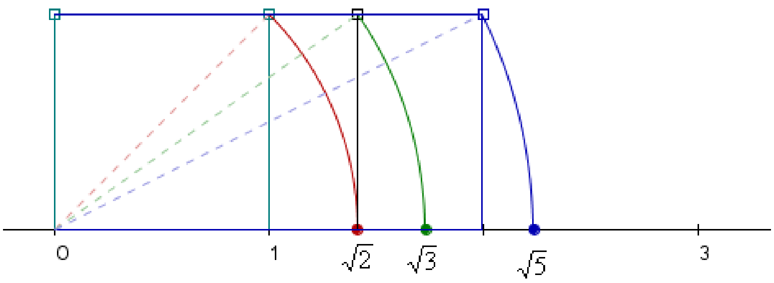
$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \ldots$$

Ubicándolo en la recta numérica:

En este caso con ayuda de una escuadra y compás, construimos un triángulo rectángulo de lado 1 unidad sobre la recta numérica, cuya diagonal medirá $\sqrt{2}$, por el teorema de Pitágoras. Luego, con el compás de abertura igual a la diagonal marcamos sobre la recta numérica, este punto es $\sqrt{2}$.



Este procedimiento, lo podemos utilizar para ubicar cualquier número irracional en la recta numérica. Observa los ejemplos de la figura:



EJERCICIOS

1) Determina si los siguientes números pertenecen a Q (nº racionales) o a I (nº irracionales). Marca con una cruz donde según la clasificación que corresponda.

Número	Racional	Irracional	Número	Racional	Irracional
3,14			$\sqrt{4}$		
3,14444 …			2π		
3,14141414 …			0,11121314…		
0,25			0,11121313…….		
$-\sqrt{5}$			3,010010001……		
5			$-3\sqrt{25}$		

2. Determinar por acortamiento, en tu cuaderno, el valor de los siguientes números reales (con dos decimales):

$a)\sqrt{10}$, $b)\sqrt{50}$, $c)\ \sqrt{58}$, $d)\ \sqrt{72}$, $e)\ \sqrt{73}$

3. Ubica en tu cuaderno los siguientes números irracionales en la recta numérica:

$\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}$, $\sqrt{17}$, $3\sqrt{2}$, $-2\sqrt{10}$, $2\sqrt{5}$, $-3\sqrt{2}$, $\sqrt{10}$

REFUERZO DE CONTENIDOS

Propiedades de la potenciación

- ***Producto de potencias de igual base****: el producto de potencias de igual base, es otra potencia de la misma base y de exponente igual a la suma de los exponentes de los términos factores.*

Simbólicamente: $a^m \bullet a^n = a^{m+n}$

- ***Cociente de potencias de igual base****: El cociente de dos potencias de igual base, es otra potencia de la misma base y cuyo exponente es igual a la resta de los exponentes del término dividendo menos el del divisor.*

Simbólicamente: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ *con a ≠ 0 y m>n*

- ***Potencia de una potencia****: La potencia de una potencia es otra potencia de la misma base y de exponente igual al producto de los exponentes que haya en la expresión*

Simbólicamente: $\left(a^n\right)^m = a^{m\bullet n}$

- ***Potencia de un producto****: La potencia de un producto es igual al producto de dichas potencias.*

Simbólicamente: $(a \times b)^n = a^n \times b^n$

- ***Potencia de un cociente****: La potencia de un cociente es igual al cociente de dichas potencias.*

Simbólicamente: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ *b ≠ 0*

- ***Exponente cero****: toda cantidad con exponente cero es igual a 1*

Simbólicamente: $a^0 = 1$ *a ≠ 0; La expresión* 0^0 *no está definida*

- ***Exponentes enteros negativos:*** *si* ***n*** *es cualquier entero negativo y* ***a*** *un número real diferente de cero se cumple que:*

  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ *o que* $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$

- *En caso de que la base sea un número racional se tiene que* $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

PROPIEDADES DE LOS RADICALES.

- ***Raíz enésima de un número real elevado a la potencia n***: *para cualquier* $n \in Z^+$, *se cumple que:* $\sqrt[n]{a^n} = \left(a^n\right)^{1/n} = a^{\frac{n}{n}} = a$
- ***Raíz enésima de un producto:*** *la raíz enésima de un producto es igual al producto de las raíces enésimas de los factores. Para cualquier* $n \in Z^+$, *se cumple que* $\sqrt[n]{a \bullet b} = \sqrt[n]{a} \bullet \sqrt[n]{b}$
- ***Raíz enésima de un cociente:*** *la raíz enésima de un cociente es igual al cociente de las raíces enésimas del dividendo y del divisor. Para todo* $n, a, b, \in Z^+$, *se cumple que:* $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
- ***Raíz enésima de una raíz:*** *la raíz enésima de una raíz es igual a otra raíz, cuyo índice es el producto de los índices. Para todo* $m, n, b, \in Z^+$, *se cumple que:* $\sqrt[n]{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m\times n]{b}$
- ***Propiedad fundamental de los radicales:*** *Se puede multiplicar o dividir el índice de la raíz y el exponente del radicando por un mismo número y el valor de la raíz no cambia, por tanto* $\sqrt[kn]{b^{km}} = b^{km/kn} = b^{m/n} = \sqrt[n]{b^n}$*, donde* $k \in N$

  Se debe tener en cuenta que, si n es par, entonces el radicando debe ser positivo para que exista una raíz real.

Investigación de Refuerzo

Consulta y escribe en tu cuaderno

1. ¿qué es un logaritmo? 2. ¿qué relación existe entre los logaritmos y la potenciación?

3. escriba y de ejemplos de las propiedades de los logaritmos. 4. ¿qué es un logaritmo neperiano? 5. En donde se aplican los logaritmos en la vida cotidiana?