CIUDADELA EDUCATIVA DEL MAGDALENA MEDIO
"EDUCACIÓN CON CALIDAD Y COMPROMISO HUMANO"

PLAN DE APOYO – RECUPERACIONES DEL PERIODO

En cumplimiento de la Directiva Ministerial Nº 29, en concordancia con el Decreto 1290/2009 y el Artículo 5 del Sistema Institucional de Evaluación de la I. E. CIUDADELA EDUCATIVA DEL MAGDALENA MEDIO, por haber obtenido, como valoración final del Período, Desempeño Bajo en el Área o Asignatura.

OBJETIVO: Posibilitar la autonomía, eficacia y responsabilidad en los estudiantes, mediante la realización de las actividades propuestas, que le permitan superar los estándares en los que presenta bajo desempeño durante el presente período académico**,** previa comprobación y/o sustentación del **PLAN DE APOYO**, durante el proceso de recuperación, ante el docente responsable de la asignatura.

ÁREA/ASIGNATURA	GRADO	JOR.	DOCENTE
MATEMATICAS	11	MAÑANA	ROLANDO OROZCO RIERO

ESTÁNDARES EN LOS QUE EL ESTUDIANTE PRESENTA DESEMPEÑO BAJO
Resuelvo y propongo situaciones matemáticas que tengan solución a través de la modelación de funciones matemáticas.
CRITERIOS PARA LA EVALUACIÓN **(Aspectos y porcentajes a tener en cuenta en la evaluación del Plan de Apoyo)**
INDICADORES: 1. Identifico y grafico funciones de R en R. 2. Determino el dominio y rango de una función real 3. Realizo operaciones con funciones
20% Solución del taller propuesto- aclaración de dudas
10% consulta y socialización de los puntos del taller
70% sustentación: Evaluación escrita

ACTIVIDADES COGNITIVAS, PROCEDIMENTALES, DE CONSULTA, PRODUCTIVAS, DE INVESTIGACIÓN, ETC. SUGERIDAS PARA QUE SEAN DESARROLLADAS POR EL ESTUDIANTE, EN FORMA PERSONAL Y/O EN ASOCIO CON SU ACUDIENTE. (Incluye la evaluación de las actividades propuestas, la cual debe presentar en la semana programada por la Institución)
Adjunto: Guía 2 funciones y sus graficas de aplicación (10 pág) Adjunto : ejercicios resueltos dominio y rango (16 pág) material apoyo para evaluación escrita
El desarrollo de la guía 2 se debe presentar en trabajo de presentación con sus respectivos soportes como procedimientos y desarrollo de la graficas.

CIUDADELA EDUCATIVA DEL MAGDALENA MEDIO
"EDUCACIÓN CON CALIDAD Y COMPROMISO HUMANO"

ACTIVIDADES DE PROFUNDIZACIÓN

En cumplimiento de la Directiva Ministerial Nº 29, en concordancia con el Decreto 1290/2009

OBJETIVO: Ejercitar al estudiante en la **autonomía, la trascendencia y la responsabilidad** para que, mediante estas prácticas, aborde el proceso de **Profundización** del área/asignatura.

ASIGNATURA	GRADO	JOR.	DOCENTE
MATEMATICAS	11	MAÑANA	ROLANDO OROZCO RIVERO

ACTIVIDADES COGNITIVAS, PROCEDIMENTALES, DE CONSULTA, PRODUCTIVAS, DE INVESTIGACIÓN, ETC. SUGERIDAS PARA QUE SEAN DESARROLLADAS POR EL ESTUDIANTE, EN FORMA PERSONAL Y/O EN ASOCIO CON SU ACUDIENTE. (Incluye la evaluación de las actividades propuestas, la cual debe presentar en la semana programada por la Institución)
Adjunto: Guía 2 funciones y sus graficas de aplicación (10 pág) Adjunto : ejercicios resueltos dominio y rango (16 pág) material apoyo para evaluación escrita
El desarrollo de la guía 2 se debe presentar en trabajo de presentación con sus respectivos soportes como procedimientos y desarrollo de la graficas.
CRITERIOS PARA LA EVALUACIÓN **(Aspectos y porcentajes a tener en cuenta en la evaluación del Plan de Profundización)**
La resolución de la Guía 2, aportes y colaboración en la consecución del logro.
El 80% elaboración y desarrollo guía 2 de funciones y sus graficas de aplicación
El 20% sustentación verbal al profesor -aclaración de dudas

CIUDADELA EDUCATIVA DEL MAGDALENA MEDIO
"EDUCACIÓN CON CALIDAD Y COMPROMISO HUMANO"

ASIGNATURA	GRADO	JOR.	DOCENTE
MATEMATICAS	11	MAÑANA	ROLANDO OROZCO RIVERO

FECHA DE ENTREGA DEL PLAN A LOS ESTUDIANTES	FECHA DE PRESENTACIÓN

GRUPO	NOMBRE DEL ESTUDIANTE	FIRMA RECIBIDO	FIRMA PRESENTACIÓN

Ciudadela Educativa del Magdalena Medio
Refuerzo y Recuperación

GUIA Nº 2: FUNCIONES Y SUS GRÁFICAS. APLICACIONES

GRADO: 11º **AREA: MATEMÁTICAS** **PROFESOR : Rolando Orozco**.

ESTUDIANTE: ____________________________PERIODO: II **DURACIÓN: 24** Hrs

LOGRO: Resuelve problemas de tipo matemático mediante la modelación de funciones matemáticas.

INDICADORES DE LOGRO:

Identifico y grafico funciones de R en R.

Determino el dominio y rango de una función real

Realizo operaciones con funciones

COMPETENCIA: Resuelvo y propongo situaciones matemáticas que tengan solución a través de la modelación de funciones matemáticas.

CONCEPTO DE FUNCIÓN

Intuitivamente una **función** es una regla que asocia elementos de un conjunto con elementos de otro conjunto, de modo que elemento del primer conjunto se asocia con uno y sólo un elemento del segundo conjunto. Visto de otro modo, una función es una máquina que transforma elementos en otros elementos, y cada elemento puede transformarse en un único elemento.

- ***Definición:*** Una función f es una relación definida de A en B que cumple las siguientes condiciones:

- Todos los elementos del conjunto de partida están relacionados Dom (f) = A
- Cada elemento del conjunto de partida se relaciona una y solo una vez con los elementos del conjunto de llegada, es decir:

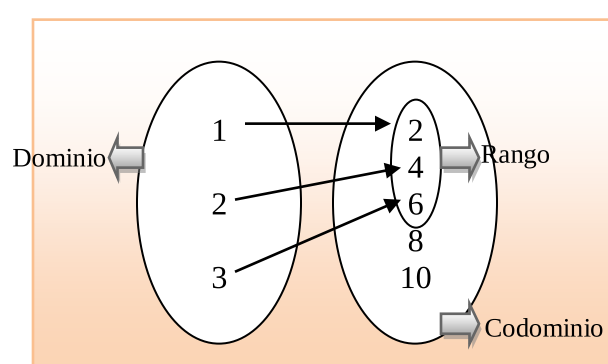
  Si $(a,b) \in f$ y $(a,c) \in f \Rightarrow b = c$.

- **Elementos de una Función:**

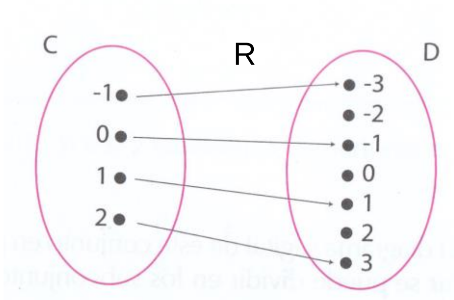
Dominio: Es el conjunto de valores que toma la variable x.

Codominio: Es el conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente y.

Rango: Es el conjunto de valores que efectivamente toma la variable dependiente y.



- **EJEMPLO Nº 1**:



La relación R que va desde C a D es una función porque: Dom (R) = C y además cada elemento de C está relacionado solo una vez con los elementos de D.

EJEMPLO Nº 2:

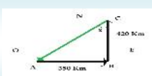
- Consideremos la relación $R = \{(x, y) \in C \times D \mid y = 2x - 1\}$ con $C = \{-1, 0, 1, 2\}$ y $D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.
  Probemos que es una función.

Solución

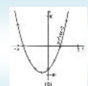
La relación R, por extensión, es el conjunto $R = \{(-1, -3), (0, -1), (1, 1), (2, 3)\}$
Veamos por qué cumple las condiciones:

1. Las primeras componentes de R son:
   $Dom(R) = \{-1, 0, 1, 2\} = C$ (conjunto de partida).
2. Tenemos que, efectivamente, cada elemento del conjunto de partida C, se relaciona una sola vez.

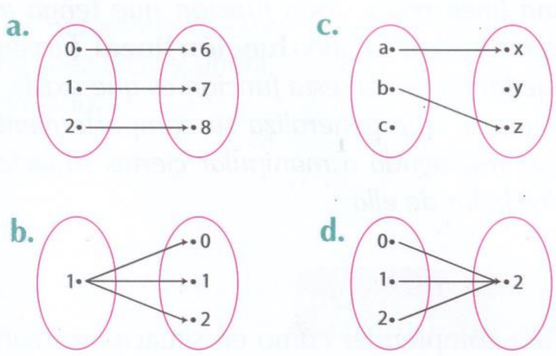
A estas relaciones especiales se les suele nombrar con la letra f.



ACTIVIDAD Nº 1



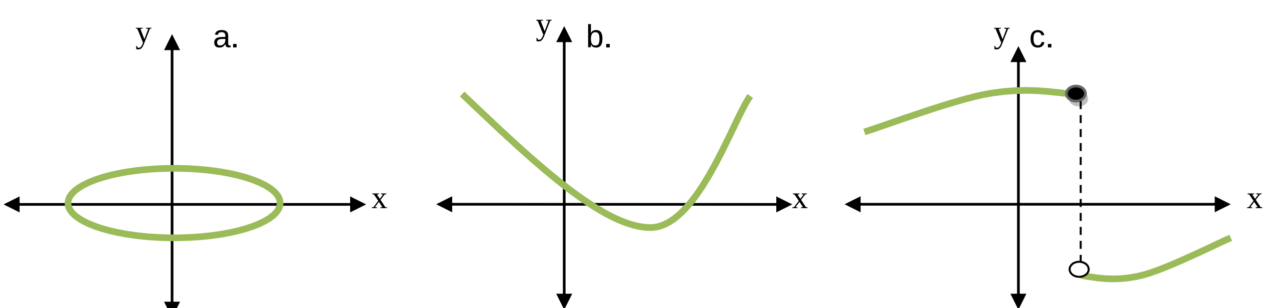
1 Indica cuáles de las gráficas dadas a continuación son funciones. Justifica tu respuesta.



2 Sean $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y f la relación de A en B definida por: $f(x) = x^2$

a. Expresa f como un conjunto de pares ordenados.
b. Construye el diagrama sagital de f.
c. Realiza el diagrama cartesiano de f.
d. Mostrar que f es una función de A en B.
e. Encuentra $f(-1)$ y $f(2)$.

3 Observa las gráficas y determina cuáles de éstas representan funciones:



Ten en cuenta que: **una recta vertical intersecta la gráfica de una función a lo más en un punto. De no ser así, la gráfica no correspondería a una función.**

Funciones Reales

Si f = {(x,y) e **R×R:** y = f(x)} es una función de variable real, entonces *x* es la variable **independiente** y *Y* es la variable **dependiente**.

Ejemplos:

a. $f(x) = x - 1$
b. $g(x) = -2x^3 + 7x^2 - 5x + 8$
c. $h(x) = 1/x^2$

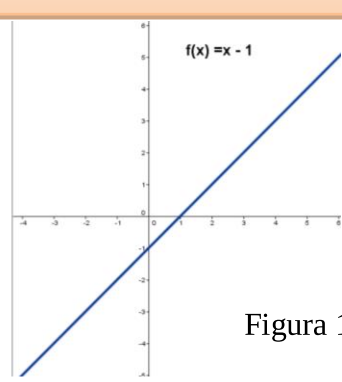


Figura 1

Son funciones de variable real. En el primer caso tenemos una función llamada *Lineal*, cuya gráfica corresponde a una línea recta (Figura 1). En el segundo caso, g(x) es una función llamada cúbica (Figura 2). Y, en el tercer caso h(x) es una función de tipo *Racional* (***Graficarla***).

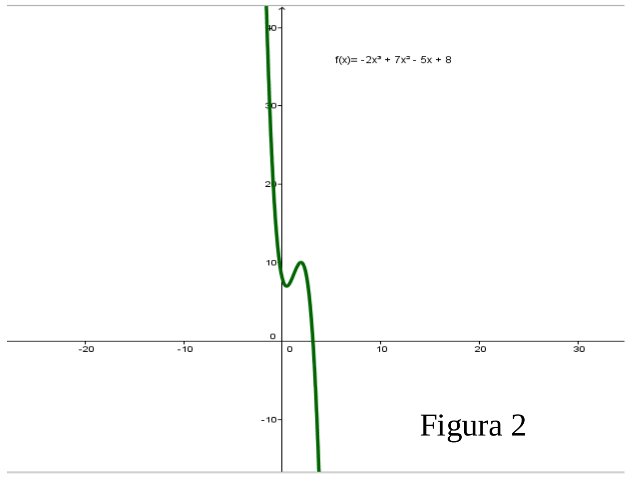


Figura 2

Antes de comenzar el análisis sobre funciones reales, tengamos en cuenta los siguientes conceptos:

Una función f es **creciente** en un intervalo si para cualquier par de números x_1, x_2 del intervalo, $x_1 < x_2$, implica que $f(x_1) < f(x_2)$.
Una función f es **decreciente** en un intervalo si para cualquier par de números x_1, x_2 del intervalo, $x_1 < x_2$, implica que $f(x_1) > f(x_2)$.

Intuitivamente, una función **continua es la que puede** ser representada de un solo trazo, sin levantar el lápiz del papel. Cuando una función no es continua en un punto se dice que presenta una **discontinuidad.**

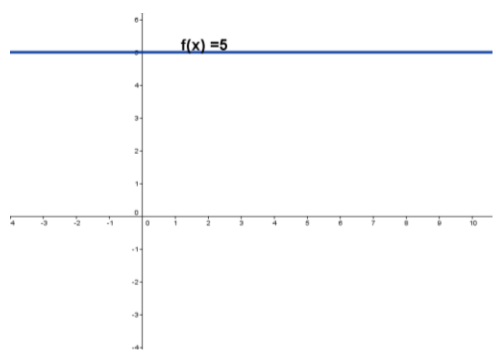
Una función f es una función **par** si para cada x del dominio de f, f(- x) = f(x).
Una función f es una función **impar** si para cada x del dominio de f, f(- x) = - f(x).

Función Constante

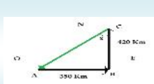
La función constante se define como:

$$f : \Re \rightarrow \Re$$
$$x \rightarrow c$$

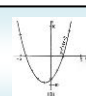
Es decir, f(x) = c, para todo x e $\Re$.



Donde c es un número real constante. La representación gráfica de una función constante es una recta horizontal, paralela al eje x. El dominio de esta función serían todos los números reales, $\Re$ y el rango, es el conjunto unitario conformado por c, Ran f = {c}.



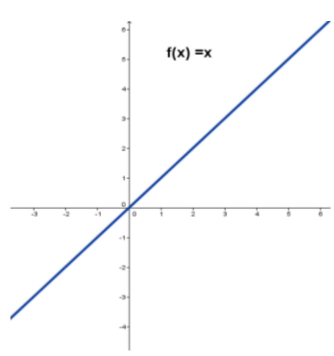
ACTIVIDAD Nº 2



Grafica en tu cuaderno o con la ayuda de Geogebra la función f(x) = 8 y responde:

a. Cuál es el dominio y rango de f?
b. Cómo se escribiría por comprensión el conjunto de valores de f.
c. ¿Cuál es la imagen para x = 5?
d. ¿Pertenece al dominio el número 7?
e. ¿Pertenece al rango el valor y = 4?
f. ¿Qué se puede afirmar acerca del crecimiento o decrecimiento de la función?
g. ¿Las funciones constantes son funciones continuas? ¿por qué?
h. ¿La función constante para cualquier valor de c, es par o impar?

Función Idéntica



La función idéntica se define como:

$$f : \Re \rightarrow \Re$$
$$x \rightarrow x$$

Es decir, f(x) = x, para todo x e $\Re$.

La variable x puede tomar como valor cualquier número real, por lo tanto, Dom f = $\Re$. De igual modo, Ran f = $\Re$.

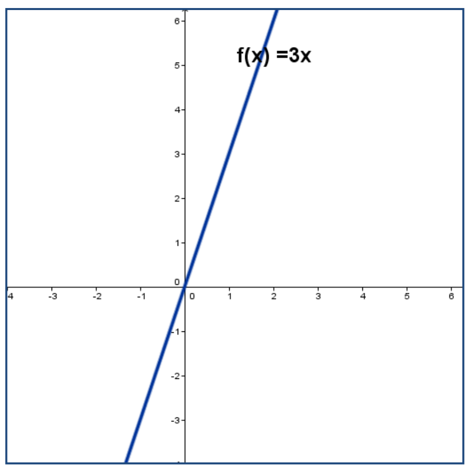
ACTIVIDAD Nº 3

Grafica en tu cuaderno o con la ayuda de Geogebra la función f(x) = x para valores del dominio entre – 5 y 5 y responde:

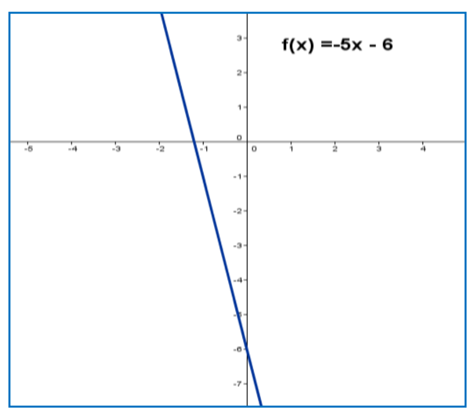
a. Cómo se escribiría por comprensión el conjunto de valores de f.
b. ¿Cuál es la imagen para x = -1?
c. ¿La gráfica corresponde a una recta que biseca a cuáles cuadrantes del plano?
d. ¿Qué se puede afirmar acerca del crecimiento o decrecimiento de la función?
e. ¿La función idéntica es continua? ¿por qué?
f. ¿Esta función es par o impar?

Función Lineal

Las funciones lineales, definidas de $\Re \to \Re$, son las funciones del tipo y = mx, $m \neq 0$, donde m es la pendiente de la recta correspondiente a su gráfica. Ejemplo:



De igual modo, encontramos funciones llamadas afines o de gráficas lineales, las cuales se expresan en la forma y = mx + b, con b e $\Re$, su gráfica también corresponde a una línea recta y el valor de b determina el intercepto de dicha gráfica con el eje y. Ejemplo:



ACTIVIDAD Nº 4

Grafica en tu cuaderno o con la ayuda de Geogebra las funciones f(x) = -3x y g(x) = 3x + 1/5 para valores de sus dominios entre – 5 y 5 y responde:

a. ¿Cuál es el dominio y rango de f(x)?
b. ¿Es posible calcular para todo número real el valor de g(x) = 3x + 1/5?
c. ¿Qué se puede decir entonces del dominio de g(x)?
d. Tomar la expresión y = 3x + 1/5 y despejarla para x. Según la expresión encontrada, qué valores puede tomar la variable y dentro del recorrido de la función?
e. ¿Qué se puede decir entonces del rango de g(x)?
f. ¿Qué se puede afirmar acerca del crecimiento o decrecimiento de cada función? ¿Cómo debe ser el valor de m para que la función crezca o decrezca?
g. ¿Las funciones lineales son continuas? ¿por qué?
h. ¿Qué podemos decir acerca de la paridad de las funciones lineales o afines?

Función Cuadrática

La forma general de la función cuadrática es:

$f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c e $\Re$ y $a \neq 0$.

La gráfica de una función cuadrática (de segundo grado) es una parábola. Para representar gráficamente dicha función se procede así:

1. Se construye una tabla de valores (seis pares de valores son suficientes)
2. Es indispensable hallar las coordenadas del vértice de la parábola. Para hallar la abscisa del vértice se utiliza la fórmula: $x = \frac{-b}{2a}$.
La ordenada o valor de la función en el vértice se halla sustituyendo el valor de x $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$, obtenido mediante la fórmula anterior, en la ecuación y realizar las operaciones indicadas.
3. También es muy útil hallar las coordenadas del punto donde la gráfica corta al eje y, lo cual se consigue sustituyendo la x por 0 y operando. La conclusión final es que la gráfica corta al eje y en c.
4. Se ubican en el plano cartesiano los puntos cuyas coordenadas hemos hallado en los pasos precedentes, y se unen mediante una curva.
5. La solución gráfica de la ecuación de segundo grado (las raíces de la ecuación, esto es, los valores de x para los cuales la ecuación da 0) son los puntos donde la gráfica corta al eje x.

La parábola que se obtiene como representación grafica de una ecuación cuadrática tiene las siguientes características:

- Si **a > 0**: La parábola abre hacia arriba y en este caso, el vértice cumple la condición de ser un mínimo de la función.
- Si **a < 0**: La parábola abre hacia abajo y en este caso, el vértice cumple la condición de ser un máximo de la función.

Ejemplo 1: Graficar, hallar los cortes con el eje x, cortes con el eje y y dominio y rango de la función f(x) = x^2 + 3x - 4:

1. $x^2 + 3x - 4$

Solución:

$$y = x^2 + 3x - 4$$

Hallemos la abscisa del vértice mediante $x = -\frac{b}{2a}$:

$$x = -\frac{3}{2},$$

$$\Rightarrow \quad y = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 3\left(-\frac{3}{2}\right) - 4 = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} - 4,$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{9 - 18 - 16}{4} = -\frac{25}{4};$$

$\therefore$ El vértice de la parábola está en $\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{25}{4}\right)$

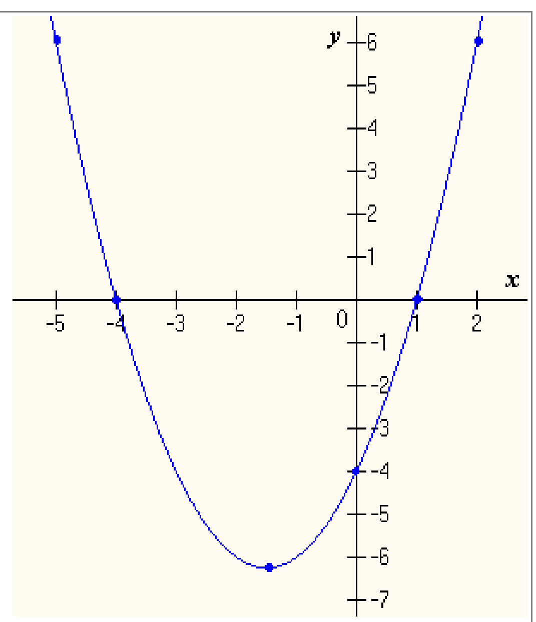
Igualamos la función a 0 para hallar los puntos donde la gráfica corta al eje x:

$$x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x+4)(x-1) = 0;$$

$\therefore \quad x = -4$ ó $x = 1$

La gráfica corta al eje x en -4 y en 1

La gráfica corta el eje y en -4



x	-5	-4	-3/2	1	2
y	6	0	-25/4	0	6

Tomado de: Algebra de Baldor. P. 274

Dominio: Dom f= $\Re$

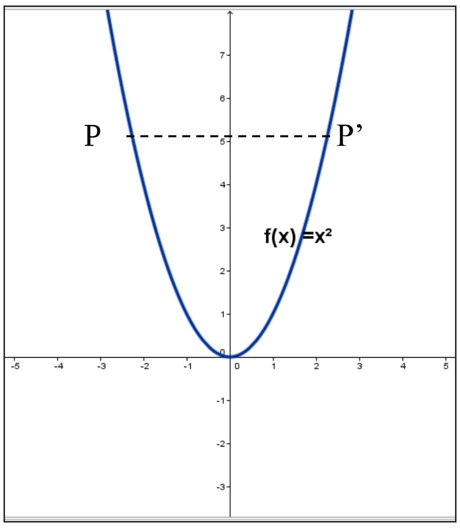
Rango: Ran f = {xe$\Re$ / x ≥ $\frac{-25}{4}$}

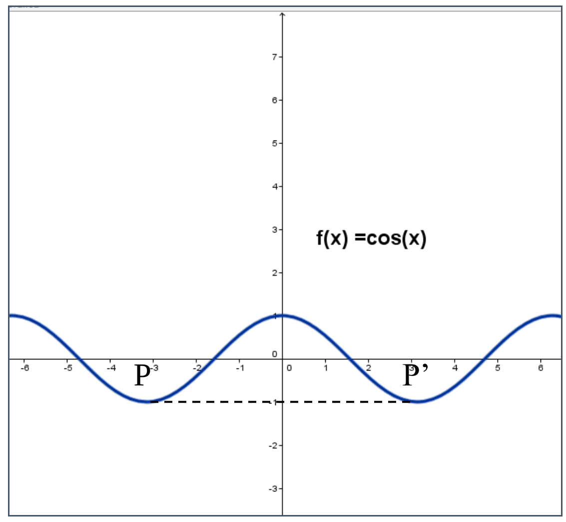
Además podemos afirmar que f es una función **continua** en todo punto, **decreciente** en el intervalo (-∞, -3/2) y **creciente** en el intervalo (-3/2, ∞). ¿Qué se puede decir de su paridad?

Para continuar con el análisis sobre funciones cuadráticas, tengamos en cuenta las simetrías que puede presentar una función en el plano:

- ***SIMETRIA RESPECTO A UNA RECTA***:

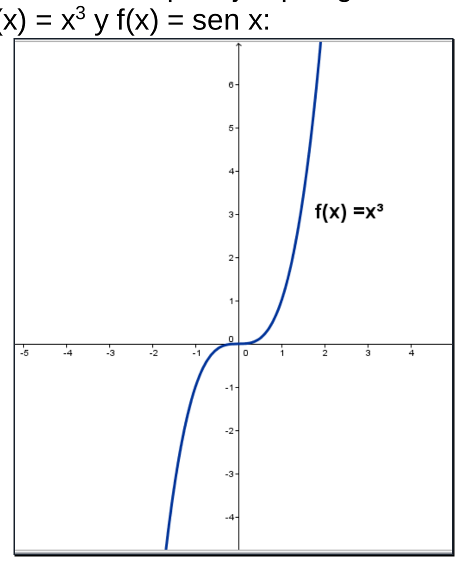
La curva de una función es simétrica respecto a una recta L, si para cada punto P de la curva, es posible encontrar al otro lado de la recta, otro punto P', también perteneciente a la curva, tal que P y P' equidistan de la recta L. De este modo encontramos por ejemplo, gráficas que son simétricas respecto al eje y como lo son $f(x) = x^2$ y $f(x) = \cos x$:

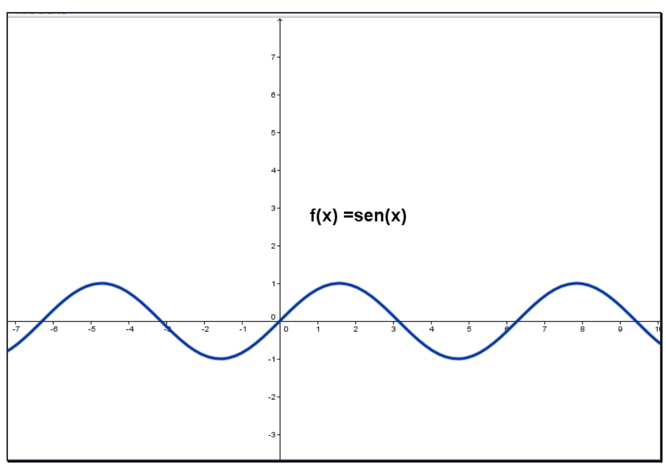


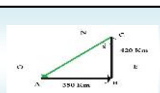


- ***SIMETRÍA RESPECTO A UN PUNTO:***

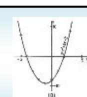
La curva de una función es simétrica respecto a un punto O, si dado un punto P, se puede encontrar otro punto P' sobre la recta OP, tal que P y P' equidistan del punto O. Encontramos por ejemplo, gráficas que son simétricas respecto al origen (0,0), tales como $f(x) = x^3$ y $f(x) = \text{sen } x$:







ACTIVIDAD Nº 5



1. ¿Qué se puede decir acerca de la simetría de la función presentada en el ejemplo 1 ($f(x) = x^2 + 3x - 4$)?
2. Grafica la función determinada por la expresión $y - 9 = -(x - 2)^2$ y determina:
   a. Su vértice e interceptos con los ejes.
   b. Dominio y Codominio.
   c. Rango teniendo en cuenta su vértice.
   d. Intervalos de crecimiento y decrecimiento
   e. Su vértice es un valor máximo o un valor mínimo de la función?
   f. Paridad
   g. Continuidad
   h. ¿Es una parábola que abre hacia arriba o hacia abajo?

Función Valor Absoluto

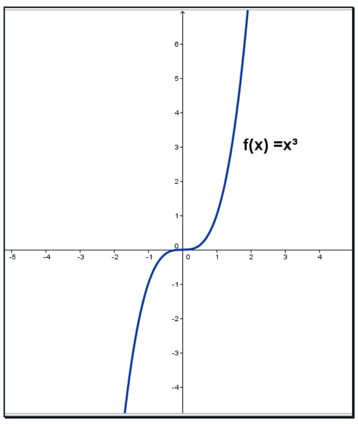
Sea $f(x)=|x|$, por la definición de valor absoluto, tenemos que:

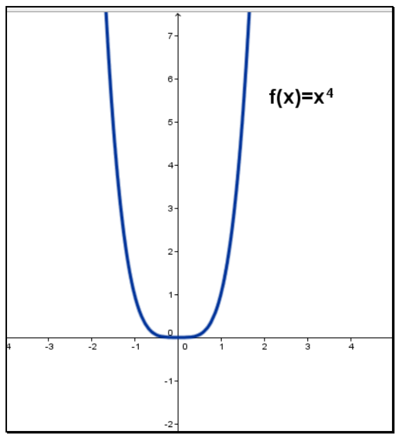
$$f(x)=\begin{cases} x \Leftrightarrow x \geq 0 \\ -x \Leftrightarrow x < 0 \end{cases}$$

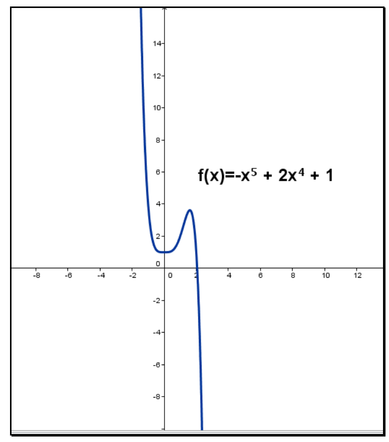
Todo número real tiene su valor absoluto, por lo tanto su dominio es $\Re$, por ser siempre $|x| \geq 0$, el rango de la función sería el intervalo [0, ∞).

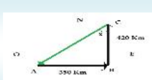
Funciones Polinómicas de Orden Superior

Las funciones de orden superior son funciones donde la variable x posee un grado mayor a 2, por ejemplo:

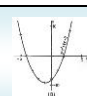








ACTIVIDAD Nº 6



1. Realizar la gráfica de la función valor absoluto
2. Realizar el análisis de la función valor absoluto
3. Determinar el dominio y rango de las funciones presentadas en las graficas: $f(x) = x^3$, $f(x) = x^4$, $f(x) =-x^5+2x^4 + 1$
4. ¿Qué podríamos generalizar acerca de las funciones de orden superior que son monómicas y cuyos exponentes son pares (x^2, x^4, x^6…)?
5. ¿Qué se puede decir del dominio y rango de las funciones polinómicas superiores con exponente par y qué sucede cuando el coeficiente de x^{2n} es un número negativo? Ejemplo: $f(x) = -5x^6 -8x^3 -5x^2+1$
6. ¿Qué podríamos generalizar acerca de las funciones de orden superior que son monómicas y cuyos exponentes son impares (x^3, x^5, x^7…)?
7. ¿Qué se puede decir del dominio y rango de las funciones polinómicas superiores con exponente impar y qué sucede cuando el coeficiente de x^{2n+1} es un número negativo? Ejemplo: $f(x) = -2x^7 +6$.

Funciones Racionales

Una función racional es el cociente de dos funciones polinómicas:

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}, \text{ con } q(x) \neq 0$$

Para graficar las funciones racionales se debe tener en cuenta que:

- La expresión del denominador nunca puede ser cero, por lo tanto hay que **restringir su dominio** excluyendo de los números reales aquellos puntos críticos donde el denominador sea cero.

- Los ***ceros de una función*** son los valores de x en los cuáles su gráfica intersecta al eje x.

- Una recta x = a es una ***asíntota vertical*** de la gráfica de la función y = f(x) cuando a es un punto crítico del denominador de la función y el resto de valores de la función crecen o decrecen indefinidamente a medida que el valor de x se aproxima al valor de a.

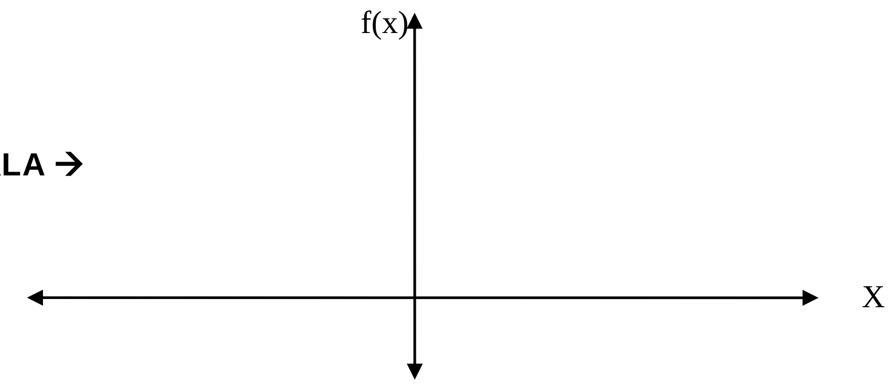
EJEMPLO: Graficar en el plano cartesiano la función racional $f(x)=\frac{1}{5x+1}$, encontrar su dominio y rango.

SOLUCIÓN:

LA TABLA DE VALORES DE LA FUNCIÓN F(X) ESTA DADA POR:

X	**-3**	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**
F(X)	**-0.07**	**-0.11**	**-0.25**	**1**	**0.16**	**0.09**	**0.06**

GRAFICARLA →



DOMINIO: Para hallar el dominio de cualquier función hay que tener en cuenta que la función debe estar definida en **R** para todos los puntos de dicho dominio. Se debe considerar que:

- En este caso 5 x + 1 no puede ser cero, por tanto buscamos cuál es el número real (punto crítico) que elimina o hace cero este denominador así:

  → 5x + 1 = 0
  - 5x = - 1
  - x = - 1/5

  De manera que el Dom (f) = **R – { -1/5}**

  En ese punto de la gráfica se debe trazar una asíntota vertical: x = -1/5

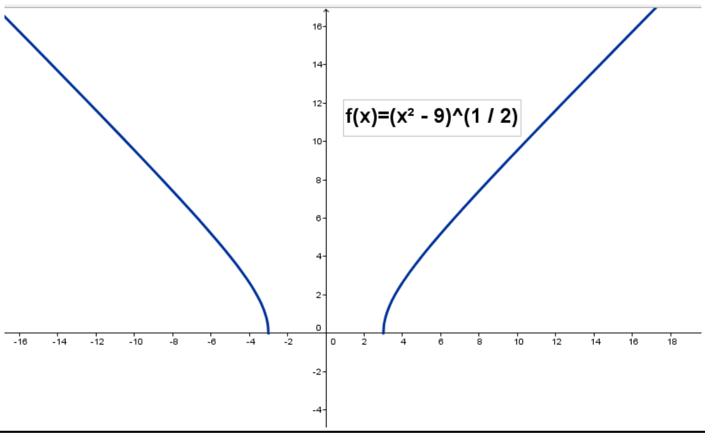
RANGO: Para hallar el rango, se hace y = f(x) y se despeja x para expresarla en términos de y, y así saber el recorrido de la función. De modo que:

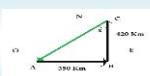
- y = 1 / (5x + 1)
- y . (5x + 1) = 1
- $5x+1=\frac{1}{y}$
- $5x=\frac{1}{y}-1$
- $5x=\frac{1-y}{y}$
- $x=\frac{1-y}{5y}$ De aquí se observa que Ran (f)= **R –** {0}

El análisis del crecimiento o decrecimiento de la función racional se examina luego de representar gráficamente la función. Sin embargo, un método más práctico, se aprenderá al estudiar la derivada de una función y sus correspondientes aplicaciones. Mientras tanto, sigamos analizando estas funciones mediante el trazo de las curvas.

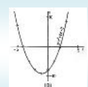
Funciones con Radicales

Si la función es la raíz de una expresión algebraica, el radicando nunca debe ser negativo. Para hallar el dominio en este caso se coloca el radicando o expresión mayor o igual que cero y así resultan los valores reales que sí puede tomar x. ejemplo: $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

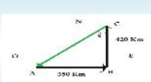




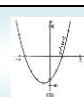
ACTIVIDAD Nº 7



1. Grafica y determina el dominio y rango de la función racional $f(x) = \frac{1}{x+2}$.
2. Determina el dominio y rango de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$
3. Grafica y determina el rango de la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x-2}}$
4. Realiza un ejemplo de función exponencial y uno de función logarítmica con su gráfica y respectivo análisis.
5. Graficar la función a trozos: $f(x) = \begin{cases} x-1 ... si ... x < 3 \\ 5 ..... si ... x = 3 \\ 2x+1 ... si ... x > 3 \end{cases}$ y realizar su análisis.



TALLER N°1



1. Clasifica las funciones como lineales, cuadráticas, constantes, cúbicas, polinómicas, racionales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas o de cualquier otro tipo:
   a. $y = x^2 - x - 2$
   b. $y = |x|$
   c. $y = 3x - 2$
   d. $y = \frac{1}{x}$
   e. $f(x) = x^8 - x^6$
   f. $h(x) = 5$
   g. $f(x) = \text{sen } x$
   h. $g(x) = 2^n$
   i. $p(x) = \sqrt{3 - x^2}$

2. Investiga sobre qué son funciones Inyectivas, sobreyectivas y biyectivas. Ejemplos.

3. Grafica y determina el dominio y rango de las siguientes funciones:

a. **$f(x) = 5 - 3x$**

b. **$q(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 1$**

c. ***r(x)= 2x²-3x + 6***

d. ***g (x) =*** $\frac{1}{x}$

e. ***i (x) =*** $\frac{1}{x+1}$

f. ***j(x) =*** $|x|$

g. ***k(x) =*** $\frac{3}{2x-2}$

h. ***h(x)=*** $\frac{2x^2-1}{x+2}$

i. ***m(x) =*** $\sqrt{x+2}$

4. Investigar sobre algebra de funciones: ¿cómo se suman, cómo se halla el producto y cociente de funciones? Ejemplos en cada caso.
5. Encuentra la suma y resta de las funciones f(x) y r(x) del inciso 1.
6. Halla la suma y resta de las funciones g(x) e i(x).
7. Halla el producto y cociente de las funciones k(x) y h(x).

Funciones Compuestas

Dadas las funciones f y g, la función compuesta, denotada por $f \circ g$, está definida por:

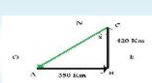
$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Y el dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todos los números x del dominio de g tales que g(x) está en el dominio de f.

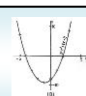
EJEMPLO: Sean f(x) = $\sqrt{x}$ y g(x) = 2x – 3, hallemos $(f \circ g)(x)$:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(2x-3) \\ &= \sqrt{2x-3}\end{aligned}$$

Cuyo dominio es R y rango el intervalo [3/2, ∞)



ACTIVIDAD Nº 8



1. **1.** Dadas las funciones F (x) = x ^{3} – 5x + 6 y g (x) = x – 2, encuentra f + g, f – g, f . g, f/g, g/f, f∘g y g∘f .
2. **2.** Dadas las funciones f (x) = x^2 + 1 y g(x) = √x, encuentra f + g, f – g, f . g, f/g, g/f, f∘g y g∘f .

Fuentes Bibliográficas:

- Louis Leithold. El Cálculo. Ed. Oxford. 1998
- Matemáticas 2000. Grado 11. Editorial Voluntad
- Matemática Progresiva 11°. Ed. Norma
- Baldor. Algebra. P.274.

FUNCIONES

A. Introducción teórica

B. Ejercicios resueltos

A. Introducción teórica

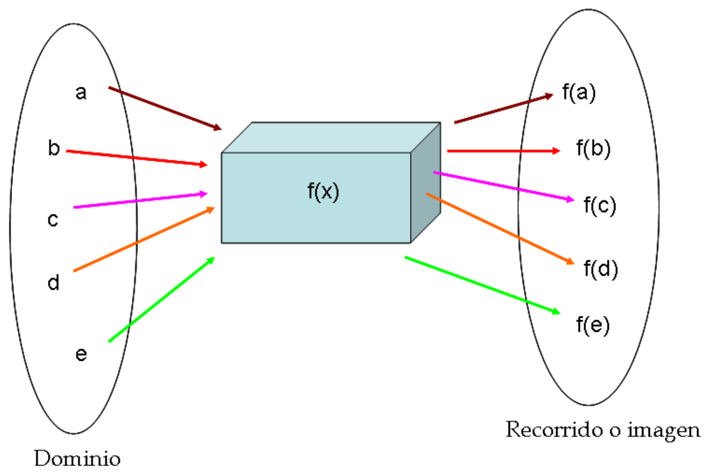
A.1. Definición de función

Una función es una relación entre dos variables numéricas, x e y, de forma que a cada valor de x le corresponde un solo valor de y. La variable x se llama variable independiente. La variable y se llama variable dependiente

A.2. Dominio y recorrido de una función, f(x)

Se llama dominio de una función f(x) a todos los valores de x para los que f(x) existe. El dominio se denota como Dom(f)

Se llama recorrido o imagen de una función f(x) a todos los valores que puede tomar f(x). La imagen se denota como Im(f)



A.3. Crecimiento y decrecimiento de una función en un intervalo

Una función f(x) es creciente en un intervalo (a,b) cuando para dos puntos cualquiera x_1 y x_2 pertenecientes a (a,b) tales que $x_1 < x_2$ se cumple:

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Una función f(x) es decreciente en un intervalo (a,b) cuando para dos puntos cualquiera x_1 y x_2 pertenecientes a (a,b) tales que $x_1 < x_2$ se cumple:

$$f(x_1) > f(x_2)$$

A.4. Funciones polinómicas

a) Función polinómica de grado uno: es de la forma y=ax+b

Para representarlas se siguen los siguiente pasos:

- Hacemos una tabla de valores.
- A partir de ella extraemos dos puntos.
- Representamos los puntos en un plano cartesiano.

b) Función polinómica de grado dos: es de la forma $y= ax^2+bx+c$

Para representarlas se siguen los siguiente pasos:

- Obtención de los puntos de corte con el eje x:
  Se obtienen a partir de la condición y=0. En ese caso:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \end{cases}$$

- Obtención de las coordenadas del vértice:

  Están dadas por $x = -\frac{b}{2a}$; $y = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$.

- Orientación de la parábola:
  Si a>0, entonces la parábola es cóncava hacia arriba, mientras que si a<0 la parábola es cóncava hacia abajo.

- Obtención del punto de corte con el eje y:

  Está dado por la condición x=0. En ese caso, $y = ax^2 + bx + c \Rightarrow y = c$

A.5. Otros tipos de funciones

a) Funciones exponenciales: son de la forma $y = a^x$.
b) Funciones de proporcionalidad inversa: son de la forma $y = \frac{a}{x + b}$
c) Funciones radicales: $y = a\sqrt{\pm x + b}$
d) Funciones logarítmicas: $y = \log_a x$, con $a > 0$

A.6. Composición de funciones

Sean dos funciones f(x) y g(x). La composición de f con g se define como $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$

A.7. Función inversa:

Sea la función $f(x)$. La inversa de $f(x)$ se define como $f^{-1}(x)$. Para hallar la inversa hay que dar una serie de pasos:

a) Estudiamos si f es inyectiva, es decir si la función f toma valores distintos para puntos distintos:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

b) En la ecuación $y = f(x)$ despejamos la variable x.

c) Finalmente intercambiamos la variable x por la y para obtener $f^{-1}(x)$.

B. Ejercicios resueltos

B.1. Estudia el dominio de cada una de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$

Solución:

El Dom(f) está dado por el conjunto de los valores de x para los que f(x) existe. Esta función no tiene sentido cuando el denominador es cero. Dicho de otro modo, la función existe para todos los valores de x para los que el denominador es distinto de cero. En notación matemática:

$Dom(f) = \forall x \in \mathbb{R} \, / \, x+2 \neq 0 \Rightarrow Dom(f) = \forall x \in \mathbb{R} \, / \, x \neq -2$, en donde el símbolo “/” significa “tal que”

2. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

Solución:

El Dom(f) está dado por el conjunto de los valores de x para los que f(x) existe. Esta función existe para los valores de x que hacen que el radicando sea mayor o igual que cero. En notación matemática:

$Dom(f) = \forall x \in \mathbb{R} \, / \, x^2 - 4 \geq 0$, en donde el símbolo “/” significa “tal que”.

Tenemos que resolver la inecuación $x^2 - 4 \geq 0$.

- Resolvemos la ecuación correspondiente:

  $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

- Llevamos las raíces sobre la recta de los números reales:

- Ahora estudiamos el comportamiento de $x^2 - 4 \geq 0$ en las tres zonas que determinan las dos raíces:

  Zona 1:

  Tomamos un x cualquiera de $\mathbb{R}$ comprendido entre $-\infty$ y -2, incluido éste, o lo que es lo mismo en notación matemática: elegimos un $x \in (-\infty, 2]$.

  Así, para x=-3 tenemos que $x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow (-3)^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow 5 \geq 0$, lo cual es cierto. Entonces en este intervalo tenemos una solución.

  Zona 2:

  Tomamos un $x \in (-2, 2)$, por ejemplo el cero. Así, para x=0 tenemos que $x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow 0^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow -4 \geq 0$, lo cual no es cierto. Entonces en este intervalo no hay solución.

  Zona 3:

  Tomamos un $x \in [2, \infty)$, por ejemplo x=3. Así, $x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow 3^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow 5 \geq 0$, lo cual si es cierto. Ello quiere decir que el intervalo estudiado es una solución de la inecuación.

Conclusión final:

$\mathrm{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} / x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \mathrm{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} / x \leq -2$ y $x \geq 2$,
y gráficamente:

3. $f(x) = \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2 + x - 2}}$

Solución:

El Dom(f) está dado por el conjunto de los valores de x para los que f(x) existe. Esta función no tiene sentido cuando el denominador es cero o cuando el radicando es menor que cero.

Así:
$\mathrm{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} / x^2 + x - 2 \geq 0$

La solución de $x^2 + x - 2 \geq 0$ viene dada por $(-\infty, -2] \cup [1, \infty)$

Entonces,
$\mathrm{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} / x^2 + x - 2 \geq 0 \Rightarrow \mathrm{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} / (-\infty, -2] \cup [1, \infty)$

4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2-x}}{x^2 + x + 18}$

Solución:

El Dom(f) está dado por el conjunto de los valores de x para los que f(x) existe. Esta función no tiene sentido en los siguientes casos:

a) El radicando que aparece en el numerador es negativo.
b) El denominador es cero.

Es decir:
$\mathrm{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} / 2 - x \geq 0 \,\cup\, x^2 + x + 18 \neq 0$,

tal que:

- $2 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow (-\infty, 2]$
- $x^2 + x + 18 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq -9 \end{cases}$

Conclusión:
$\mathrm{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} / (-\infty, -9) \cup (-9, -1) \cup (-1, 2)$

B.2. Halla la inversa de cada una de las siguientes funciones

5. $f(x) = 5x - 2$

Solución:

Primero comprobamos que la función es inyectiva:
$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 5x_1 - 2 = 5x_2 - 2 \Rightarrow x_1 = x_2$. Así que es inyectiva, por lo que tendrá inversa.

Escribimos la función como $y = 5x - 2$ y cambiamos x por y:
$x = 5y - 2$

Ahora despejamos y:
$x = 5y - 2 \Rightarrow y = \dfrac{x+2}{5}$

Por último, hacemos el cambio $y \equiv f^{-1}(x)$:
$f^{-1}(x) = \dfrac{x+2}{5}$

6. $f(x) = x^2 - 2$

<u>Solución:</u>

Primero comprobamos que la función es inyectiva:

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 - 2 = x_2^2 - 2 \Rightarrow x_1 = x_2$. Así que es inyectiva, por lo que tendrá inversa.

Escribimos la función como $y = x^2 - 2$ y cambiamos x por y:
$x = y^2 - 2$

Ahora despejamos y:
$x = y^2 - 2 \Rightarrow y = \sqrt{x+2}$

Por último, hacemos el cambio $y \equiv f^{-1}(x)$:
$f^{-1}(x) = \sqrt{x+2}$

7. $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$

<u>Solución:</u>

Primero comprobamos que la función es inyectiva:

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \dfrac{2x_1+3}{x_1-1} = \dfrac{2x_2+3}{x_2-1} \Rightarrow x_1 = x_2$. Así que es inyectiva, por lo que tendrá inversa.

Escribimos la función como $y = \dfrac{2x+3}{x-1}$ y cambiamos x por y:

$x = \dfrac{2y+3}{y-1}$

Ahora despejamos y:

$x = \dfrac{2y+3}{y-1} \Rightarrow y = \dfrac{x+3}{x-2}$

Por último, hacemos el cambio $y \equiv f^{-1}(x)$:

$f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$

8. $f(x) = \sqrt[3]{x-4}$

Solución:

Primero comprobamos que la función es inyectiva:

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \sqrt[3]{x_1 - 4} = \sqrt[3]{x_2 - 4} \Rightarrow x_1 = x_2$. Así que es inyectiva, por lo que tendrá inversa.

Escribimos la función como $y = \sqrt[3]{x-4}$ y cambiamos x por y:

$x = \sqrt[3]{y-4}$

Ahora despejamos y:

$x = \sqrt[3]{y-4} \Rightarrow y = x^3 + 4$

Por último, hacemos el cambio $y \equiv f^{-1}(x)$:

$f^{-1}(x) = x^3 + 4$

B.3. Halla la variación y la tasa de variación media de cada una de las siguientes funciones

9. $f(x) = 5x - 2$ en el intervalo $[-3, 0]$

Solución:

a) La variación viene dada por :
$f(b) - f(a) = f(0) - f(-3) = 5 \cdot 0 - 2 - (5(-3) - 2) = -19$

b) La tasa de variación media viene dada por $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{-19}{3} = -\dfrac{19}{3}$

10. $f(x)=x^2-2$ en el intervalo $[-1,2]$

Solución:

a) La variación viene dada por
$f(b)-f(a)=f(2)-f(-1)=0^2-2-\left(2^2-2\right)=-4$

b) La tasa de variación media viene dada por:
$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{-4}{2-(-1)}=-\dfrac{4}{3}$

11. $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$ en el intervalo $[0,4]$

Solución:

a) La variación viene dada por :
$f(b)-f(a)=f(4)-f(0)=\dfrac{2\cdot 4+3}{4-1}-\dfrac{0+3}{0-1}=\dfrac{20}{3}$

b) La tasa de variación media viene dada por $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{\frac{20}{3}}{4}=\dfrac{5}{3}$

12. $f(x)=\sqrt{x-4}$ en el intervalo $[4,5]$

Solución:

a) La variación viene dada por:
$f(b)-f(a)=f(5)-f(4)=\sqrt{5-4}-\sqrt{4-4}=1$

b) La tasa de variación media viene dada por $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{1}{1}=1$

B.4. Estudia la simetría de cada una de las siguientes funciones

13. $f(x)=x^4+x^2$

Solución:

- La simetría de una función puede ser:

b) Par o simétrica respecto al eje OY, cuando se cumple que $f(x)=f(-x)$

c) Impar o simétrica respecto al origen, cuando se cumple que $-f(x)=f(-x)$
d) No tener simetría, si no se dan ninguno de los dos casos anteriores.

- Estudio de la simetría par:

$f(x)=f(-x)\Rightarrow x^4+x^2=(-x)^4+(-x)^2\Rightarrow x^4+x^2=x^4+x^2$.

Conclusión:

La simetría es par. No hace falta seguir con el estudio, ya que las funciones no pueden tener dos tipos de simetría.

14. $f(x)=x^3-x$

Solución:

- Estudio de la simetría par:

$f(x)=f(-x)\Rightarrow x^3-x=(-x)^3-(-x)\Rightarrow x^3-x\neq -x^3+x$. Conclusión: La simetría no es par.

- Estudio de la simetría impar:

$-f(x)=f(-x)\Rightarrow -x^3+x=(-x)^3-(-x)\Rightarrow -x^3+x=-x^3+x$. Conclusión: La simetría es impar.

15. $f(x)=\dfrac{1}{2x-1}$

Solución:

- Estudio de la simetría par:

$f(x)=f(-x)\Rightarrow \dfrac{1}{2x-1}=\dfrac{1}{2(-x)-1}\Rightarrow \dfrac{1}{2x-1}\neq\dfrac{1}{-2x-1}$, luego la simetría no es par.

- Estudio de la simetría impar:

$-f(x)=f(-x)\Rightarrow -\dfrac{1}{2x-1}=\dfrac{1}{2(-x)-1}\Rightarrow \dfrac{1}{-2x+1}\neq\dfrac{1}{-2x-1}$, luego la simetría no es impar.

- conclusión final: La función no tiene simetría.

B.5. Representa cada una de las siguientes funciones

16. $y = 2x$

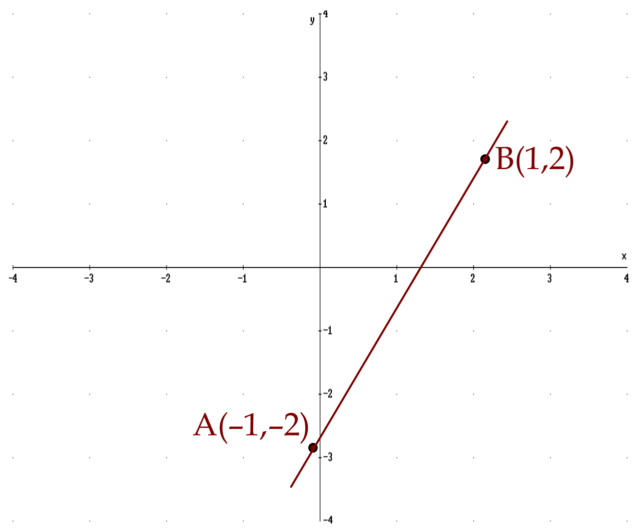
Solución:

La función dada se trata de una linea recta, ya que es de la forma y = mx+n, en dónde m es la pendiente. En nuestro caso, m=2 y n=0. Como n=0 ello quiere decir que la recta cortará al eje y en y=0.

Hacemos una tabla de valores para y=2x

x	y=2x	
–1	2(–1)=–2	$\Rightarrow$ A(–1,–2)
1	$2\cdot 1=2$	$\Rightarrow$ B(1,2)

Ahora representamos los dos puntos sobre el plano cartesiano:



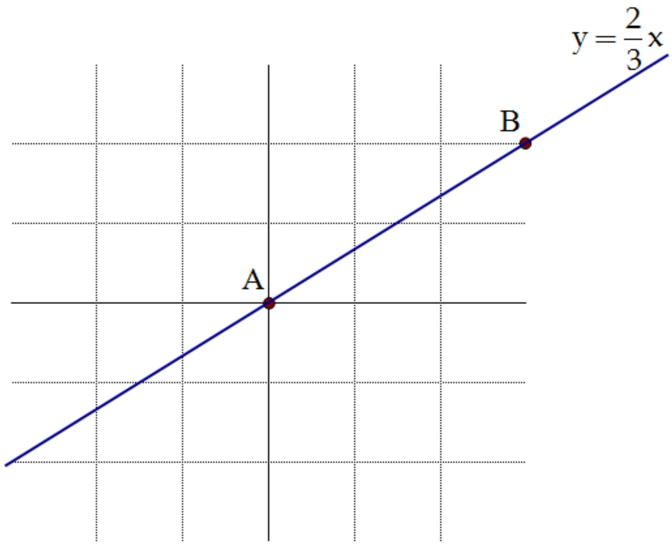
17. $y = \dfrac{2x}{3}$

Solución:

- La función $y = \dfrac{2x}{3}$ se puede escribir también así: $y = \dfrac{2}{3}x$, o si lo prefieres de esta otra forma: $y = 0{,}67x$
- Ahora, como siempre en estos casos, construimos una tabla de valores para obtener dos puntos (para dibujar una línea recta no hacen falta más puntos):

x	$y=\frac{2}{3}x$	
0	0	$\Rightarrow A(0,0)$
3	2	$\Rightarrow B(3,2)$

- Por último, representamos los dos puntos en un plano cartesiano y por ellos trazamos la línea recta que buscamos:



18. $y=-2x+3$

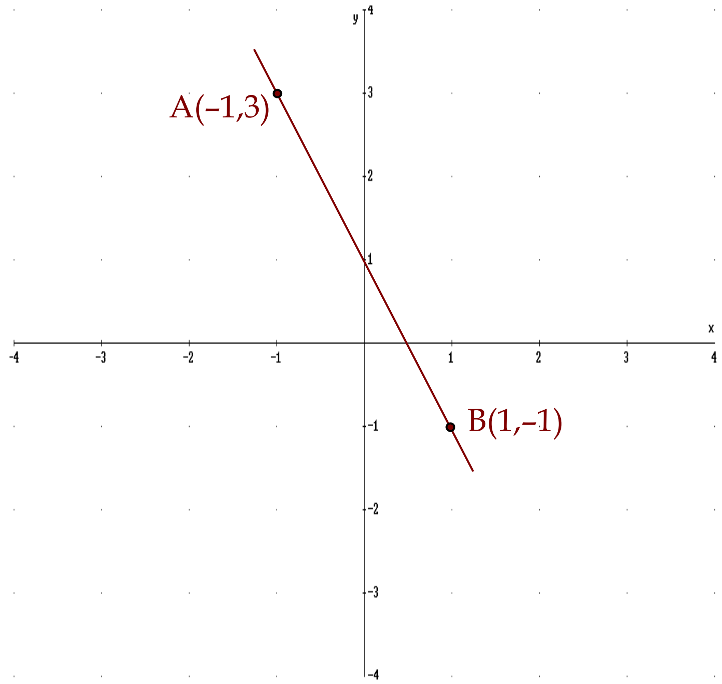
Solución:

La función dada es una línea recta, ya que es de la forma y = mx+n, en dónde m es la pendiente. En nuestro caso, m=–2 y n=1. Como n=1 ello quiere decir que la recta cortará al eje y en y=1.

Hacemos una tabla de valores para y=–2x+1

x	y=–2x+1	
–1	–2(–1)+1=3	$\Rightarrow$ A(–1,3)
1	$-2\cdot 1+1=-1$	$\Rightarrow$ B(1,–1)

Ahora representamos los dos puntos sobre el plano cartesiano:



19. Representa la siguiente función definida a trozos. Estudia también la continuidad, el crecimiento, decrecimiento y los máximos y mínimos de cada una de ellas.

$$f(x)=\begin{cases} x-3, & -\infty < x \le 0 \\ 2, & 0 < x < 3 \\ -x, & 3 \le x < \infty \end{cases}$$

<u>Solución</u>:

El domino de f(x) tiene tres zonas, para una de las cuales corresponde un trazado distinto:

- Para la primera zona, $-\infty < x \le 0$, construimos una tabla de valores con el fin de obtener dos puntos. No necesitamos más puntos, ya que en el presente tramo la función es una línea recta, $f_1(x) = x-3$

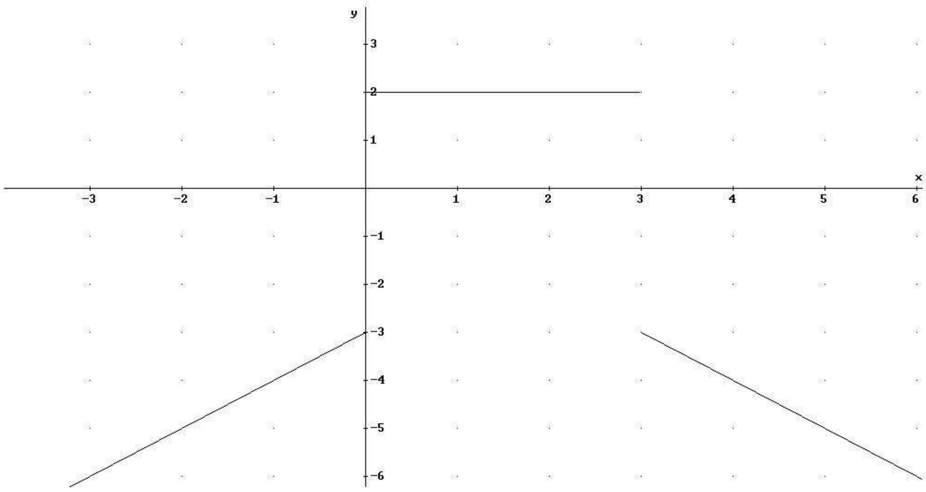
x	x–3	
0	0–3=–3	$\Rightarrow$ A(0,–3)
–2	–2–3=–5	$\Rightarrow$ B(–2,–5)

- Para la segunda zona, $0 < x < 3$, el valor de la función es constante, $f_2(x) = 2$

- Para la tercera zona, $3 \leq x < \infty$, construimos una tabla de valores con el fin de obtener dos puntos. No necesitamos más puntos ya que este tercer tramo se trata de otra recta, $f_3(x) = -x$

x	–x	
3	–3	$\Rightarrow$ D(3,–3)
5	–5	$\Rightarrow$ E(5,–5)

- Sólo nos queda representar los puntos obtenidos:



20. Representa la siguiente función cuadrática: $y = x^2 - 5x + 6$

<u>Solución</u>:

- **Los puntos de corte con el eje x:**
Se obtienen a partir de la condición y=0. En ese caso:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \end{cases}$$

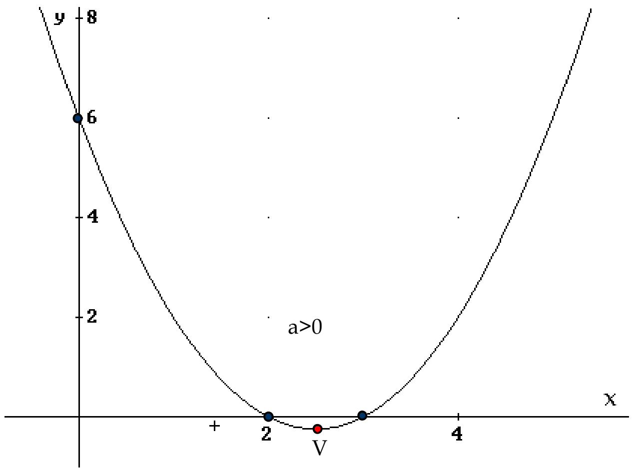
- **Las coordenadas del vértice:**
Están dadas por $x = -\frac{b}{2a}$; $y = \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2}$. Sustituyendo los valores de a y b en estas expresiones obtenemos:

$x=-\frac{(-5)}{2}$; $y=\frac{-(-5)^2+4\cdot 1\cdot 6}{4\cdot 1^2}\Rightarrow x=\frac{5}{2}$; $y=-\frac{1}{4}$, que vamos a expresar como $V\left(\frac{5}{2},-\frac{1}{4}\right)$

- **Orientación de la parábola:**
  Como a>0, entonces la parábola es cóncava hacia arriba.

- **El punto de corte con el eje y:**
  Está dado por la condición x=0. En nuestro caso, cuando x=0 se tiene que y=6.

- **Representación gráfica:**
  plano cartesiano los puntos que hemos conseguido y unirlos.

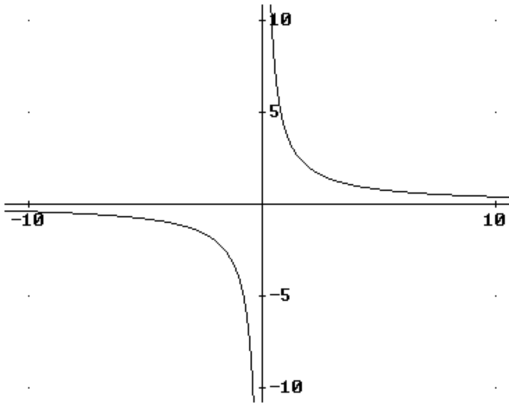


21. $y=\frac{4}{x}+3$

Solución:

Para representar esta parábola hay que dar los siguientes pasos:

a) Paso uno:
Tenemos que saber dibujar $f(x)=\frac{4}{x}$, que es una función de proporcionalidad inversa cuya forma es la que sigue:



b) Paso dos:
$y=\frac{4}{x}+3$, es la anterior función pero desplazada 3 unidades verticales positivas: