

الأنظمة العددية (Numerical Systems)

1.1 مقدمة :

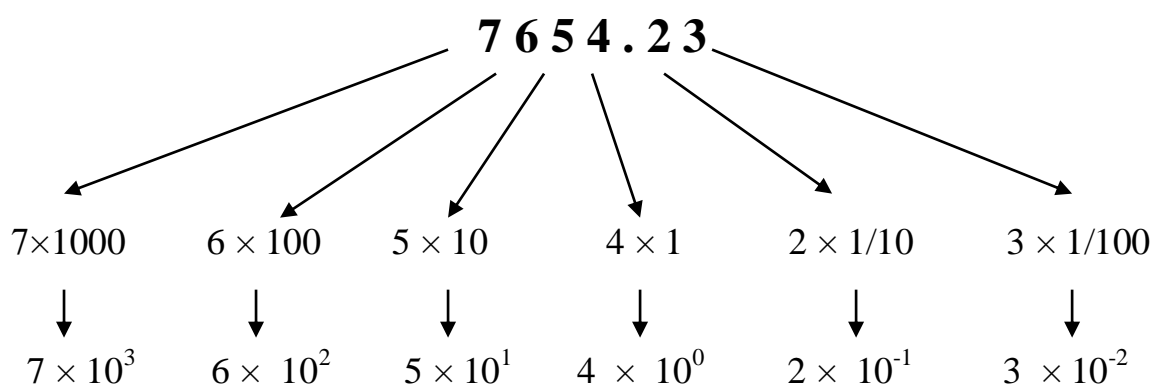
يعد استخدام الأرقام كوسيلة للعد والحساب من الإنجازات الهامة التي حققها الإنسان عبر التاريخ والتي ساهمت في تسهيل كافة العمليات الحسابية وتسريعها. فقد استخدم الإنسان منذ القدم الكثير من الأدوات لتمثيل عمليات العد والحساب ومنها استخدامه لأصابع يده العشرة والتي كانت الأساس للنظام العددي والذي لا يزال معمول به حتى يومنا هذا والمسمى **بالنظام العشري (Decimal System)**. في المراحل الدراسية السابقة وعند دراستك للنظام العشري لابد أنك لاحظت أن القيمة الحقيقية للرقم تعتمد على قيمته المكانية في العدد , وهذا يعني أن الرقم يمكن أن يأخذ أكثر من قيمة والذي يحدد ذلك مكانه داخل العدد (والذي يسمى بالمرتبة), تزداد قيمة العدد إذا حركته باتجاه اليسار وتقل قيمته إذا حركته باتجاه اليمين. فمثلاً العدد (937) نجد أن القيمة الحقيقية للرقم 7 هي سبعة فقط أما قيمة الرقم 3 فهي (30) وقيمة الرقم 9 هي (900).

وهناك أنظمة عددية أخرى غير النظام العشري , وأكثرها شيوعاً هي **النظام الثنائي, النظام الثماني, النظام السادس عشري**. وتكون هذه الأنظمة مفيدة في الأنظمة الرقمية مثل الحاسبات الالكترونية , المعالجات الدقيقة , وغيرها من الأنظمة الرقمية. ولهذا السبب فإنه من الضروري الإطلاع على كل من هذه الأنظمة العددية لغرض استخدامها في دراستنا للأنظمة الرقمية.

2.1 النظام العشري : Decimal System

وهو النظام العددي المتعارف عليه والمستخدم في كافة المجالات وفي كل انحاء العالم وجاءت تسمية النظام ب(العشري) لان عدد الرموز الداخلة في تركيبه أي عدد في هذا النظام هي عشرة رموز وهي (0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9) وفي حالة استخدام اكثر من رمز فان القيمة العددية تعتمد على موقع الرمز ضمن سلسلة الرموز , ان عدد الرموز الداخلة في تركيب النظام العددي تسمى بأساس النظام , لذلك فان اساس النظام العشري هو العدد (10) وسمي بأساس العدد لان كل عدد مكتوب بهذا النظام يعتمد بالاساس على هذا العدد .

مثال: العدد العشري 7654.23 يمكن تحليله إلى المراتب التالية



3.1 النظام الثنائي: Binary System

وهو نظام عددي أساسه العدد (2) مقارنة بالنظام العشري الذي أساسه العدد (10) , أي ان عدد الرموز المستخدمة في النظام هي رمزين فقط وهي (0 , 1) لتمثيل كافة الاعداد . ويعتبر النظام الثنائي اساس اللغة التي تتعامل بها الحاسبة الالكترونية والأنظمة الرقمية , مثال على اعداد بهذا النظام :

1001 , 10111.101 , 10.1101 , 0.1011

من خلال ملاحظتنا الاعداد اعلاه نلاحظ بان الاعداد بالنظام الثنائي ولكن توجد اعداد شبيهه بها في النظام العشري , فلتمييز العدد المكتوب بالنظام المعين , تكتب الاعداد داخل اقواس مع كتابة رمز اسفل القوس يمثل اساس النظام المكتوب به العدد .

فمثلا : العدد 110 يكتب بالثنائي $(110)_2$ وبالعشري $(110)_{10}$

مثال: لتحليل العدد $(110.101)_2$ الى مراتبه :

$$(110.101)_2 = 0 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3}$$

4.1 النظام الثماني : Octal System

وهو من الانظمة المستخدمة في الحاسبات الالكترونية أساسه العدد (8) , الرموز المستخدمة في

هذا النظام هي (0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7) مثال على إعداد النظام الثماني

$$(110.013)_8 , (203.62)_8 , (721.5)_8 , (0.513)_8$$

مثال: حلل العدد $(203.65)_8$ الى مراتبه

$$\begin{aligned} (203.65)_8 &= 3 \times 8^0 + 0 \times 8^1 + 2 \times 8^2 + 6 \times 8^{-1} + 5 \times 8^{-2} \\ &= 3 \times 1 + 0 \times 8 + 2 \times 64 + 6 \times 1/8 + 5 \times 1/64 \end{aligned}$$

5.1 النظام السادس عشري : Hexadecimal System

وهو من الانظمة المهمة المستخدمة في الحاسبات الالكترونية أساسه العدد (16) أي إن عدد

الرموز المستخدمة في تشكيل أعداد النظام هي 16 رمز وهي :

$$(F, E, D, C, B, A, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0)$$

ومثال على أعداد بالنظام السادس عشري :

$$(2D6.F3)_{16} , (10011.1)_{16} , (FFF)_{16} , (0.257)_{16}$$

مثال: حلل العدد $(3A1.7F)_{16}$ إلى مراتبه :

$$\begin{aligned} (3A1.7F)_{16} &= 1 \times 16^0 + 10 \times 16^1 + 3 \times 16^2 + 7 \times 16^{-1} + 15 \times 16^{-2} \\ &= 1 \times 1 + 10 \times 16 + 3 \times 256 + 7 \times 1/16 + 15 \times 1/256 \end{aligned}$$

ملاحظة: عند مقارنة الرموز السادس عشرية بالنظام العشري فان الرموز (A ← 10) العشري (← 15) العشري

6.1 التحويلات بين الأنظمة العددية

أن عملية التحويل بين الأنظمة العددية من العمليات المهمة والتي يجب إن يتعرف عليها الشخص الذي يدرس عملية تصميم الأنظمة الرقمية . ولتسهيل عملية فهم هذه التحويلات سيتم تقسيمها إلى مجاميع كل مجموعة تتشابه بطريقة التحويل .

1.6.1 التحويل من الأنظمة (غير العشرية) إلى النظام العشري :

لتحويل أي عدد من أي نظام عددي إلى نظام العشري يتم تحليل العدد إلى مراتبه اعتمادا على أساس ذلك النظام ثم إيجاد ناتج جمع الحدود ، والعدد الناتج من الجمع سيكون هو العدد في النظام العشري .

مثال: حول العدد $(1101.01)_2$ إلى النظام العشري :

$$\begin{aligned}(1101.01)_2 &= 1 \times 2^0 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} \\ &= 1 \times 1 + 0 \times 2 + 1 \times 4 + 1 \times 8 + 0 \times 1/2 + 1 \times 1/4 \\ &= 1 + 0 + 4 + 8 + 0 + 0.25 \\ &= (13.25)_{10}\end{aligned}$$

مثال: حول العدد $(125.4)_8$ إلى النظام العشري :

$$\begin{aligned}(125.4)_8 &= 5 \times 8^0 + 2 \times 8^1 + 1 \times 8^2 + 4 \times 8^{-1} \\ &= 5 \times 1 + 2 \times 8 + 1 \times 64 + 4 \times 1/8\end{aligned}$$

$$= 5 + 16 + 64 + 0.5$$

$$= (85.5)_{10}$$

مثال: حول العدد $(A15.C)_{16}$ إلى النظام العشري :

$$(A15.C)_{16} = 5 \times 16^0 + 1 \times 16^1 + 10 \times 16^2 + 12 \times 16^{-1}$$

$$= 5 \times 1 + 1 \times 16 + 10 \times 256 + 12 \times 1/16$$

$$= 5 + 16 + 2560 + 0.75$$

$$= (2581.75)_{10}$$

2.6.1 التحويل من النظام العشري إلى الأنظمة الأخرى :

لتحويل أي عدد عشري إلى أي نظام آخر يجب تجزئته إلى جزء صحيح وجزء كسري وتحويل كل جزء بطريقة خاصة ثم جمع ناتج التحويل للجزئين للحصول على الناتج النهائي .

أولاً: تحويل الجزء الصحيح :

لتحويل الجزء الصحيح للعدد العشري لأي نظام نقوم بتقسيم العدد العشري على أساس النظام المطلوب التحويل إليه ونحتفظ بباقي القسمة ، ثم نأخذ ناتج القسمة ونقسمه مرة أخرى على أساس النظام ونحتفظ بالباقي وهكذا نستمر بتكرار العملية إلى أن نحصل على ناتج قسمة يساوي صفر . فيكون ناتج التحويل في عمود باقي القسمة بقراته من الأسفل إلى الأعلى وكتابته من اليسار إلى اليمين

ثانياً: تحويل الجزء الكسري :

لتحويل الجزء الكسري من العدد العشري إلى نظيره في الأنظمة الأخرى نقوم بضرب العدد الكسري في أساس النظام المطلوب التحويل إليه ثم اخذ الجزء الكسري فقط من ناتج الضرب وضربه

مرة أخرى في الأساس وهكذا تستمر عملية الضرب إلى أن نتوقف في إحدى الحالات التالية :

- إما أن يكون الجزء الكسري الناتج في الضرب يساوي صفر .

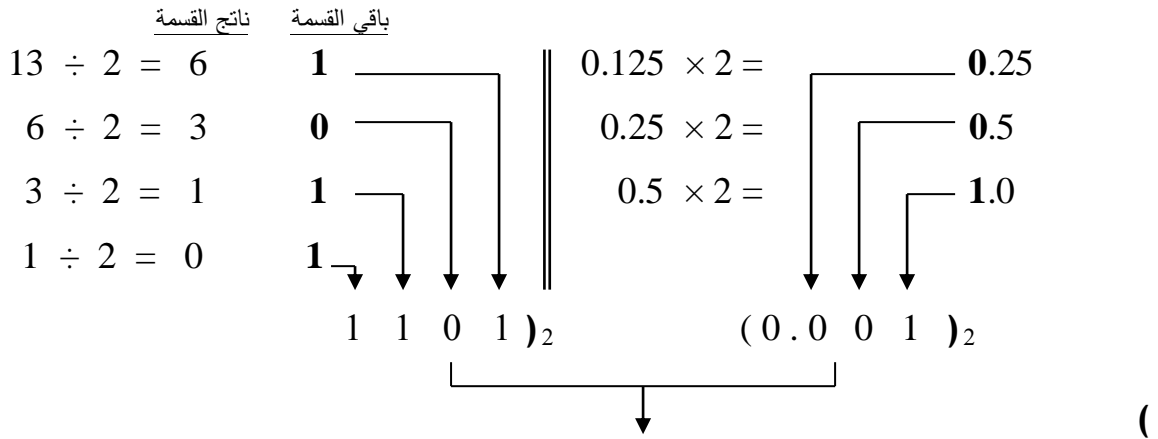
- تكرار الجزء الكسري أكثر من مرة .

- تعقيد الجزء الكسري أكثر مع استمرار عملية الضرب .

بعد توقف عملية الضرب يتم قراءة ناتج التحويل في عمود الجزء الصحيح من الضرب بقراءته من

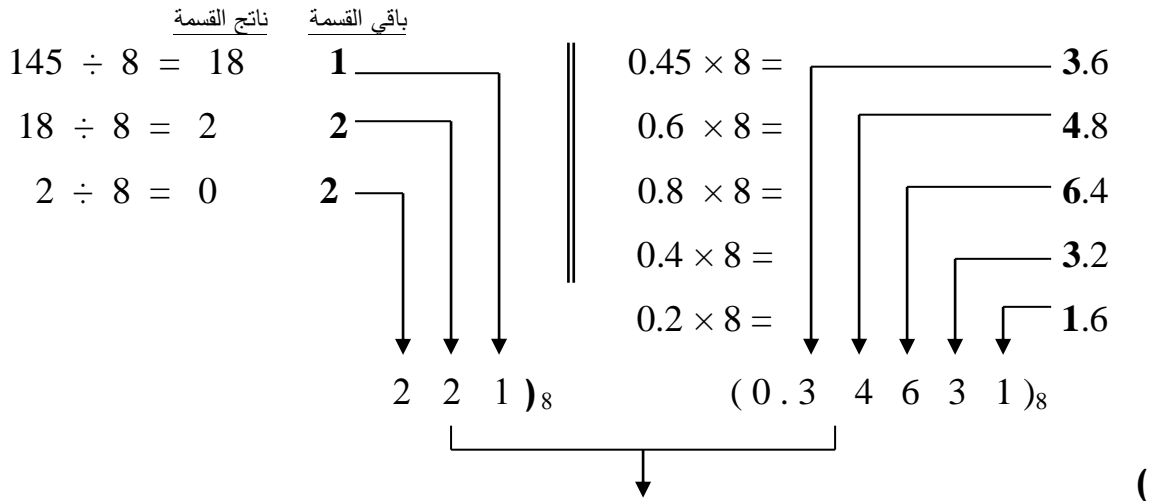
الأعلى إلى الأسفل وكتابته بعد الفارزة من اليسار إلى اليمين .

مثال: حول العدد $(13.125)_{10}$ إلى النظام الثنائي :



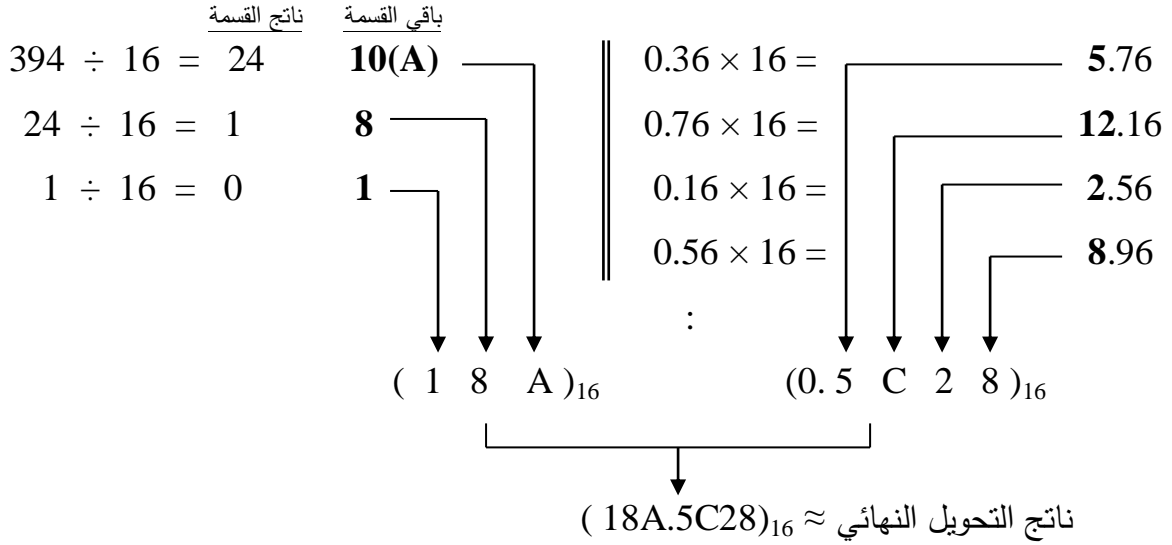
ناتج التحويل النهائي $(1101.001)_2 =$

مثال: حول العدد $(145.45)_{10}$ إلى النظام الثماني :



ناتج التحويل النهائي $(221.34631)_8 =$

مثال: حول العدد $(394.36)_{10}$ إلى النظام السادس عشري :



3.6.1 التحويل من النظام الثنائي إلى الثماني وبالعكس :

لتحويل العدد من النظام الثنائي إلى الثماني يقسم العدد الثنائي إلى مجاميع من ثلاثة مراتب ابتداءً من الفارزة باتجاه اليسار للجزء الصحيح وبتجاه اليمين للجزء الكسري , وإذا انتهت الأطراف بمراتب أقل من ثلاثة تكمل باصفار , ثم تحول كل مجموعة ثلاثية في النظام الثنائي إلى ما يقابلها في النظام الثماني كما في الجدول أدناه , والعدد الناتج هو العدد بالنظام الثماني .

الثماني	الثنائي		
	2 ²	2 ¹	2 ⁰
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1

مثال: حول العدد $(11010111.1101)_2$ إلى النظام الثماني :

$$\begin{array}{ccccccccc} \underline{011} & \underline{010} & \underline{111} & . & \underline{110} & \underline{100} & & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & & \\ 3 & 2 & 7 & . & 6 & 4 & & & \end{array}$$

$$(11010111.1101)_2 = (327.64)_8$$

ولتحويل أي عدد من النظام الثماني إلى الثنائي فنكون العملية عكسية نسبة للتحويل السابق حيث يحول كل رمز ثماني إلى ما يعادله في النظام الثنائي من ثلاثة رموز وحسب الجدول السابق , ثم نحذف الأصفار التي في الطرف الأيمن والأيسر من التحويل إن وجدت والعدد الباقي هو ناتج التحويل .

مثال: حول العدد $(321.64)_8$ إلى النظام الثنائي :

$$\begin{array}{ccccccccc} 3 & 2 & 1 & . & 6 & 4 & & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & & \\ 011 & 010 & 001 & . & 110 & 100 & & & \end{array}$$

$$(321.64)_8 = (11010001.1101)_2$$

4.6.1 التحويل من النظام الثنائي إلى النظام السادس عشري وبالعكس :

إن التحويل بين النظام السادس عشري و الثنائي هو شبيه بطريقة التحويل الثنائي والثماني الفرق

فقط هو إن المجاميع الثنائية في التحويل هي أربعة مراتب وجدول التحويل هو المبين أدناه

السادس عشري	الثنائي			
	2^3	2^2	2^1	2^0
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
A	1	0	1	0
B	1	0	1	1
C	1	1	0	0
D	1	1	0	1
E	1	1	1	0
F	1	1	1	1

مثال: حول العدد $(1111011.10101)_2$ إلى النظام السادس عشري :

$\begin{array}{cccc} \underline{0111} & \underline{1011} & \cdot & \underline{1010} & \underline{1000} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ 7 & B & \cdot & A & 8 \end{array}$

$$(1111011.10101)_2 = (7B.A8)_{16}$$

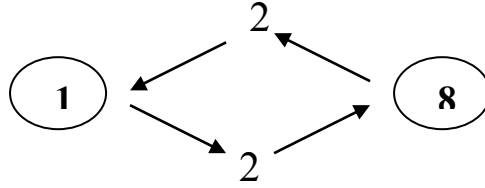
مثال: حول العدد $(8D.9)_{16}$ إلى النظام الثنائي :

$\begin{array}{ccc} 8 & D & 9 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1000 & 1101 & \cdot & 1001 \end{array}$

$$(8D.9)_{16} = (10001101.1001)_2$$

5.6.1 التحويل من النظام الثماني إلى السادس عشري وبالعكس :

للتحويل بين النظام الثماني و السادس عشري يتم الاستفادة من التحويلات السابقة لانجاز التحويل النهائي , مثلا إذا أردنا التحويل من الثماني إلى السادس عشري , يتم تحويل الثماني الثنائي ومن ثم تحويل الثنائي (الناتج) إلى السادس عشري , والعكس صحيح .



مثال: حول العدد $(670.25)_8$ إلى النظام السادس العشري :

6	7	0	.	2	5	الثماني
↓	↓	↓		↓	↓	↓
⏟				⏟		الثنائي
0001	10	111	.	010	10100	↓
↓	↓	↓		↓	↓	السادس عشري
1	B	8	.	5	4	

$(670.25)_8 = (1B8.54)_{16}$

تمارين:

1. حول العدد $(82.01)_{10}$ إلى النظام الثنائي ؟
 2. حول العدد $(540.12)_{10}$ إلى النظام الثماني ؟
 3. حول العدد $(260.42)_{10}$ إلى النظام السادس عشري ؟
 4. حول العدد $(101101.001)_2$ إلى النظام العشري ؟
 5. حول العدد $(17E.2A)_{16}$ إلى النظام الثماني ؟
 6. اوجد قيمة X في كل مما يأتي :
- $(X)_8 = (35.875)_{10}$, $(X)_{16} = (10001010.101)_2$, $(X)_{10} = (804.1C)_{16}$

7.1 العمليات الحسابية في النظام الثنائي

كلنا يعلم العمليات الحسابية التي تتم باستخدام الأعداد العشرية مثل الجمع والطرح والضرب والقسمة ، كل هذه العمليات يمكن إجرائها في الأنظمة العددية الأخرى ، ولأهمية النظام الثنائي في دراستنا لموضوع الدوائر الرقمية ، فسنعوم بدراسة تلك العمليات الحسابية في النظام الثنائي .

1.7.1 الجمع في النظام الثنائي : Binary Addition

إن أبسط عملية جمع في النظام الثنائي هي التي تتم بين عددين كل عدد يتكون من رمز (مرتبة) ثنائي واحد . ولو أخذنا كافة الاحتمالات لهذه العملية فستكون الاحتمالات المبينة في أدناه . وبالاعتماد على هذه الاحتمالات يمكن تنفيذ أي عملية جمع ثنائية لأي عدد من المراتب.

$$0 + 0 = 0$$

$$0 + 1 = 1$$

$$1 + 0 = 1$$

$$1 + 1 = 0 \longrightarrow 1 \text{ محمل (Carry)}$$

مثال: . اجمع العددين $(1011.01)_2$, $(11010.1)_2$:

$$\begin{array}{r} 11010.10 \\ 01011.01 \\ \hline 100101.11 \end{array} +$$

مثال: ما ناتج جمع العددين $(11011.101)_2$, $(1110.11)_2$:

$$\begin{array}{r} 11011.101 \\ 01110.110 \\ \hline 101010.011 \end{array} +$$

ملاحظة: ناتج جمع $1 = 1 + 1 + 1 \longleftarrow 1$ محمل

2.7.1 الطرح في النظام الثنائي : Binary Subtraction

كما في عملية الجمع , تكون احتمالات ابط عملية طرح بين عددين ثنائيين , وهي أربع

احتمالات, وكما مبينة :

$$0 - 0 = 0$$

$$0 - 1 = 1 \longrightarrow 1 \text{ (استعارة (Borrow))}$$

$$1 - 0 = 1$$

$$1 - 1 = 0$$

مثال: ا طرح العدد $(1011)_2$ من العدد $(1101.1)_2$:

$$\begin{array}{r} 1101.1 \\ - 1011.0 \\ \hline 0010.1 \end{array}$$

تمرين / ا طرح العدد $(110.1)_2$ من العدد $(1000.01)_2$.

3.7.1 الضرب في النظام الثنائي : Binary Multiplication

إن احتمالات عملية الضرب في النظام الثنائي هي :

$$0 \times 0 = 0$$

$$0 \times 1 = 0$$

$$1 \times 0 = 0$$

$$1 \times 1 = 1$$

مثال: اوجد ناتج ضرب العددين $(101)_2$, $(1010)_2$:

$$\begin{array}{r} 1010 \\ \times 101 \\ \hline 1010 \\ 0000 \\ 1010 \\ \hline 110010 \end{array}$$

4.7.1 القسمة في النظام الثنائي : Binary Division

إن احتمالات عملية القسمة في النظام الثنائي هي :

$$0 \div 0 = ?$$

$$0 \div 1 = 0$$

$$1 \div 0 = ?$$

$$1 \div 1 = 1$$

مثال: اوجد ناتج قسمة العدد $(11000)_2$ على العدد $(100)_2$

$$\begin{array}{r} 110 \\ 100 \overline{) 11000} \\ \underline{100} \\ 0100 \\ \underline{100} \\ 0000 \end{array}$$

8.1 المتتمات Complements

يستخدم مفهوم المتتمات في الحاسبة في خزن الاعداد السالبة وسنبين ذلك في المواضيع القادمة، والاستخدام الثاني هو للتعويض عن عملية الطرح بعملية جمع متكرر والذي يؤدي بدوره إلى جعل الدوائر الالكترونية المسؤولة عن عملية الجمع بتنفيذ عملية الطرح مع بعض الإضافات للدائرة .

1.8.1 المتتمات في النظام الثنائي :

هنالك نوعان من المتتمات في النظام الثنائي .

1. المتتم لـ 1 (1's Complement) : مقلوب العدد (أي جعل كل واحد صفر وكل صفر واحد) .
2. المتتم لـ 2 (2's Complement) : هو المتتم لـ 1 مضافا إليه 1 .

<u>المتتم لـ 2</u>	<u>المتتم لـ 1</u>	<u>العدد</u> : مثال:
001001	001000	110111
01110	01101	10010

2.8.1 الطرح الثنائي باستخدام المتمم لـ 1 :

أولا . الطرح باستخدام المتمم لـ 1 :

لطرح عددين ثنائيين باستخدام المتمم لـ 1 نتبع الخطوات التالية :

1. إكمال مراتب العدد الأقل عددا بالمراتب (المطروح أو المطروح منه) .
2. إيجاد المتمم لـ 1 للعدد المطروح .
3. جمع المتمم لـ 1 للمطروح مع المطروح منه .
4. نلاحظ نتيجة الجمع للخطوة 3 وكما يلي :

أ. إذا كان هنالك واحد ظاهر في المرتبة الإضافية ، فنقوم بجمعه مع بقية العدد والناجح من عملية

الجمع هو ناتج الطرح ويكون موجب .

ب. إذا لم يظهر واحد في المرتبة الإضافية (وهو دلالة إن ناتج الطرح سالب) ويكون ناتج الطرح

بأخذ المتمم لـ 1 لناتج الجمع للخطوة 3 ويكون ناتج العملية هو ناتج الطرح ويكون سالب.

مثال: اطرح العدد $(110)_2$ من العدد $(1010)_2$ باستخدام طريقة المتمم لـ 1 :

المطروح منه	1 0 1 0	
المطروح	1 1 0 —	
	<hr/>	
تكملة مراتب المطروح	0 1 1 0	الخطوة 1
المتمم لـ 1 للمطروح	1 0 0 1	الخطوة 2
	<hr/>	
المتمم لـ 1 للمطروح	1 0 0 1	الخطوة 3
المطروح منه	1 0 1 0 +	
	<hr/>	
المرتبة الإضافية	→ 1 0 0 1 1	الخطوة 4
	<hr/>	
	1 +	
	<hr/>	
ناتج الطرح	→ 0 1 0 0	

مثال: اطرح العدد $(10101)_2$ من العدد $(1011)_2$ باستخدام المتمم لـ 1 :

$$\begin{array}{r}
 \text{المطروح منه} \quad 01011 \\
 \text{المطروح} \quad 10101 \quad - \\
 \hline
 \text{المتمم لـ 1 للمطروح} \quad 01010 \\
 \text{المطروح منه} \quad 01011 \quad + \\
 \hline
 \text{المرتبة الإضافية خالية إذن النتيجة سالبة} \rightarrow 10101 \\
 \text{ناتج الطرح} \quad 01010 \quad -
 \end{array}$$

ثانياً. الطرح باستخدام المتمم لـ 2 :

لطرح عددين ثنائيين باستخدام المتمم لـ 2 تتبع الخطوات التالية :

1. إكمال مراتب العدد الأقل مراتب .
2. إيجاد المتمم لـ 2 للعدد المطروح .
3. جمع المتمم لـ 2 للعدد المطروح مع المطروح منه .
4. نلاحظ نتيجة الجمع للخطوة 3 :

أ. إذا كان هنالك واحد ظاهر في المرتبة الإضافية ، فنقوم بحذف هذا الواحد والباقي هو ناتج

الطرح (موجب) .

ب. إذا لم يظهر واحد في المرتبة الإضافية ، فنقوم بأخذ المتمم لـ 2 لناتج الجمع ويكون هو ناتج

الطرح (سالِب) .

مثال: اطرح العدد $(110)_2$ من العدد $(1010)_2$ باستخدام المتمم لـ 2 :

$$\begin{array}{r}
 \text{المطروح منه} \quad 1010 \\
 \text{المطروح} \quad 0110 \quad - \\
 \hline
 \text{المتمم لـ 1 للمطروح} \quad 1001 \\
 \hline
 \text{المتمم لـ 2 للمطروح} \quad 1010 \\
 \text{المطروح منه} \quad 1010 \quad + \\
 \hline
 \text{المرتبة الإضافية تحذف} \rightarrow 0100
 \end{array}$$

ناتج الطرح _____ ↑

مثال: اطرح العدد $(10101)_2$ من العدد $(1011)_2$ باستخدام المتمم لـ 2 :

$$\begin{array}{r} \text{المطروح منه} \quad 01011 \\ \text{المطروح} \quad \underline{10101 -} \\ \text{المتمم لـ 1 للمطروح} \quad 01010 \\ \hline \quad \quad \quad \quad \quad 1 + \\ \text{المتمم لـ 2 للمطروح} \quad 01011 \\ \text{المطروح منه} \quad \underline{01011 +} \end{array}$$

10110 ? → المرتبة الإضافية خالية إذن النتيجة سالبة

ونتيجة الطرح هو بأخذ المتمم لـ 2 لآخر نتيجة

$$\begin{array}{r} 01001 \\ \hline \quad \quad \quad \quad \quad 1 + \\ 01010 \end{array}$$

إذن ناتج الطرح هو العدد (- 1010)