CLASE VIRTUAL DE GEOMETRÍA ANALÍTICA
GRUPO 3RO. L
JUEVES 26 DE NOVIEMBRE DE 2020

SEMESTRE: SEPTIEMBRE/2020 – ENERO/2021

CETIS 115

SOLUCIÓN DE EJERCICIO DE CIRCUNFERENCIA CON CENTRO EN EL ORIGEN Y RADIO CONOCIDO.

Encontrar la ecuación de la circunferencia, que tiene su centro en el origen, y que su radio vale 7/4, realizar la gráfica de la circunferencia.

Tenemos como dato $r = \frac{7}{4}$; la ecuación para esta circunferencia es:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Sustituyendo: $x^2 + y^2 = \left(\frac{7}{4}\right)^2$

La ecuación de la circunferencia es: $x^2 + y^2 = \frac{49}{16}$

ó $16x^2 + 16y^2 = 49$

Para gráficar la circunferencia despejamos y:

$$y^2 = \frac{49}{16} - x^2$$

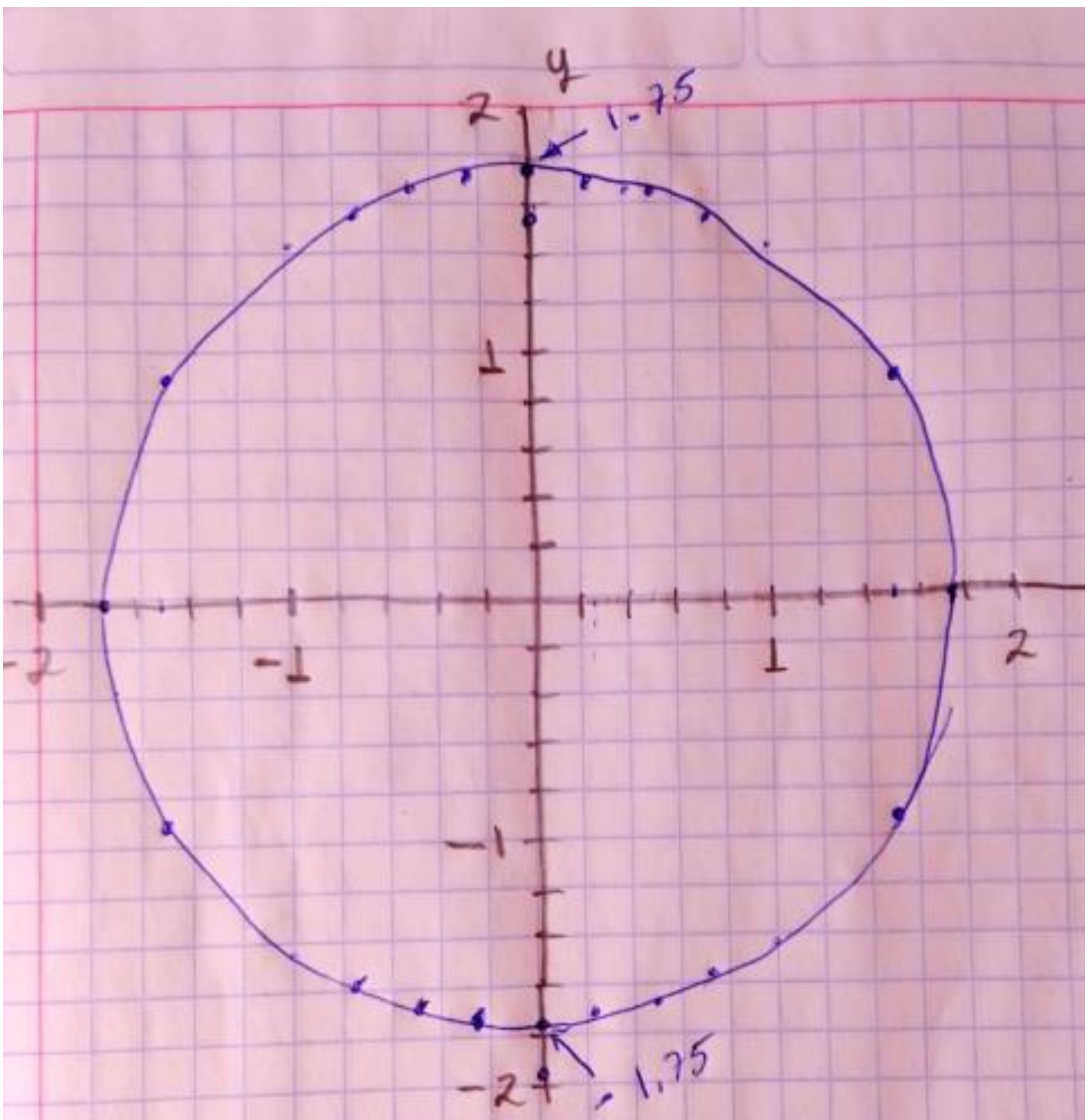
$$y = \pm\sqrt{\frac{49}{16} - x^2}$$

$$y = \pm\sqrt{3.0625 - x^2}$$

Tabla de valores

x	y
-1.75	0
-1.5	± 0.901
-1.25	± 1.2257
-1	± 1.436
-0.75	± 1.5811
-0.5	± 1.677
-0.25	± 1.73
0	± 1.75
0.25	± 1.73
0.5	± 1.677
0.75	± 1.58
1	± 1.436

GRAFICA DEL EJERCICIO RESUELTO.



OTROS EJEMPLOS RELACIONADOS CON ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA.

- Una cuerda de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ está sobre la recta es $x - 7y + 25 = 0$; determina la longitud de la cuerda.

Solución

Geométricamente, una cuerda es el segmento que está limitado por dos puntos de la circunferencia; por lo anterior es necesario determinar las intersecciones entre la circunferencia y la cuerda.

De la ecuación de la cuerda $x - 7y + 25 = 0$ se despeja a x y el resultado se eleva al cuadrado, es decir:

$$\begin{aligned} x - 7y + 25 &= 0 \\ (x)^2 &= (7y - 25)^2 \\ x^2 &= 49y^2 - 350y + 625 \\ x^2 - 49y^2 + 350y &= 625 \end{aligned}$$

Al resolver simultáneamente las ecuaciones $x^2 + y^2 = 25$ (1) de la circunferencia y $x^2 - 49y^2 + 350y = 625$ (2) de la cuerda, se debe multiplicar la ecuación (1) por -1, es decir:

$$\begin{array}{r} \cancel{-x^2} - y^2 = -25 \\ \underline{\cancel{x^2} - 49y^2 + 350y = 625} \\ -50y^2 + 350y = 600 \end{array}$$

Al simplificar y factorizar, se tiene:

$$\begin{aligned} 50y^2 - 350y + 600 &= 0 \\ y^2 - 7y + 12 &= 0 \\ (y-4)(y-3) &= 0 \end{aligned}$$

$$y - 4 = 0 \qquad\qquad y - 3 = 0$$

$$y_1 = 4 \qquad\qquad y_2 = 3$$

CONTINUANDO CON LA SOLUCIÓN DEL MISMO EJERCICIO.

Al sustituir los valores de y en la ecuación (1), se tiene:

Para $y = 4$

$$\begin{aligned} x - 7y + 25 &= 0 \\ x - 7(4) + 25 &= 0 \\ x - 28 + 25 &= 0 \\ x - 3 &= 0 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Para $y = 3$

$$\begin{aligned} x - 7y + 25 &= 0 \\ x - 7(3) + 25 &= 0 \\ x - 21 + 25 &= 0 \\ x + 4 &= 0 \\ x &= -4 \end{aligned}$$

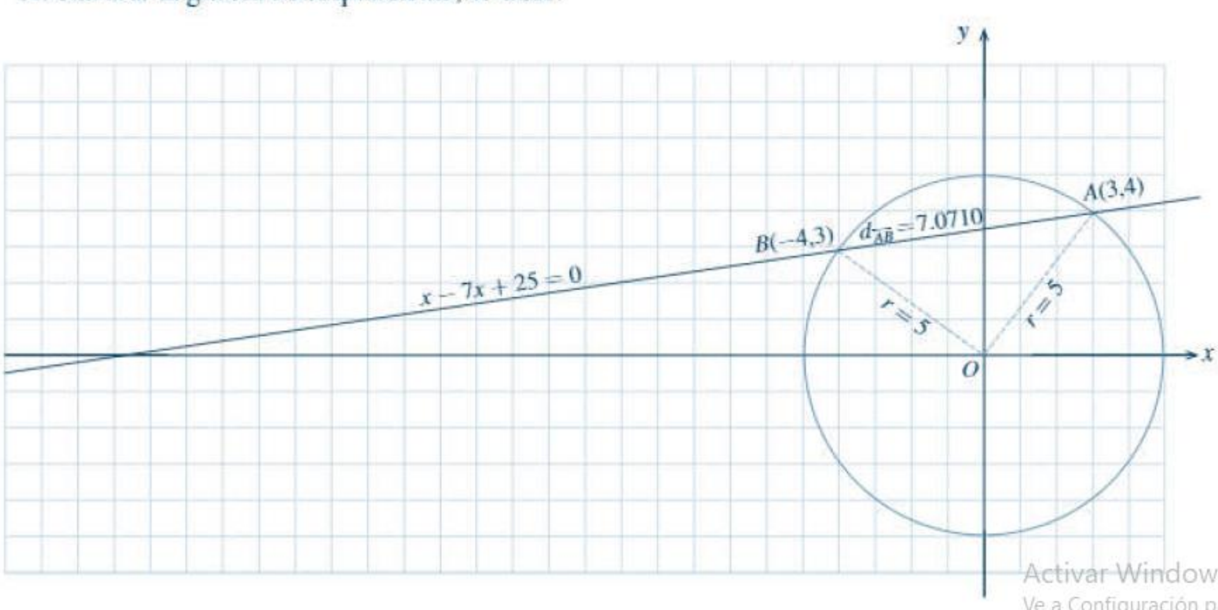
Los puntos de intersección entre la circunferencia y la cuerda son $A(3,4)$ y $B(-4,3)$.

Al determinar la distancia entre los dos puntos de intersección, se tiene:

$$\begin{aligned} d_{\overline{AB}} &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \\ d_{\overline{AB}} &= \sqrt{(3+4)^2 + (4-3)^2} \\ d_{\overline{AB}} &= \sqrt{(7)^2 + (1)^2} \\ d_{\overline{AB}} &= \sqrt{49+1} \\ d_{\overline{AB}} &= \sqrt{50} \\ d_{\overline{AB}} &\approx 7.0710 \end{aligned}$$

La longitud de la cuerda es $d_{\overline{AB}} \approx 7.0710$.

Al elaborar la gráfica correspondiente, se tiene:



EJEMPLO CON ECUCACION DE LA CIRCUNFERENCIA CON CENTRO FUERA DEL ORIGEN Y CONOCIENDO EL RADIO.

Determina la ecuación de la circunferencia con centro en $C(5,-3)$ y radio $\sqrt{19}$; construye la gráfica correspondiente.

Solución

Al sustituir los datos dados en la ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria, se tiene:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$
$$(x-5)^2+(y+3)^2=\left(\sqrt{19}\right)^2$$
$$(x-5)^2+(y+3)^2=19 \quad \Big\} \text{ Ecuación de la circunferencia con centro en } C(5,-3) \text{ y radio } \sqrt{19}.$$

Para elaborar la gráfica, se despeja a y de la ecuación $(x-5)^2+(y+3)^2=19$, es decir:

$$(x-5)^2+(y+3)^2=19$$
$$(y+3)^2=19-(x-5)^2$$

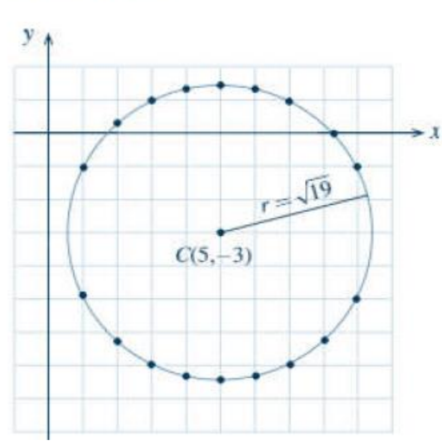
Al aplicar raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación, se tiene:

$$y+3=\pm\sqrt{19-(x-5)^2}$$
$$y=-3\pm\sqrt{19-(x-5)^2}$$

Dando valores a la variable independiente x, se obtienen los valores de la variable dependiente y, los cuales se registran en el siguiente tabulador:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	−1.26 −4.73	0.1 6 −6.1 6	0.87 −6.87	1.24 −7.24	1.35 −7.35	1.24 −7.24	0.87 −6.87	0.16 −6.16	−1.26 −4.73

Al elaborar la gráfica correspondiente, se tiene:



UN EJEMPLO MÁS DE ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA.

- La ecuación de una circunferencia es $(x-4)^2+(y-3)^2=20$; determina la ecuación de la tangente a dicho círculo en el punto $A(6,7)$.

Solución

De la ecuación de la circunferencia, se sabe que su centro es el punto $C(4,3)$; al determinar la pendiente de la recta que pasa por el centro y el punto A, resulta:

$$m_{\overline{CA}}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{3-7}{4-6}=\frac{-4}{-2}=2$$

La pendiente de la recta $\overrightarrow{CA}$ tomada recíprocamente y de signo contrario, es la pendiente de la recta tangente a la circunferencia, ya que son perpendiculares entre sí.

$$m_{\tan}=-\frac{1}{m_{\overline{CA}}}=-\frac{1}{2}$$

Al aplicar la ecuación punto-pendiente de la recta para los datos $A(6,7)$ y $m_{\tan}=-\frac{1}{2}$, se tiene:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-7=-\frac{1}{2}(x-6)$$

$$x+2y-20=0$$

La ecuación de la recta tangente a la circunferencia $(x-4)^2+(y-3)^2=20$ en el punto $A(6,7)$ es $x+2y-20=0$.

Al elaborar la gráfica, se tiene: