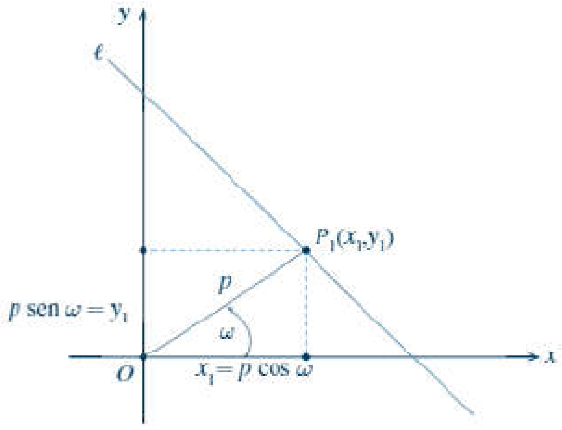
Reducción de la forma general de la ecuación de la recta a la forma normal

Para cualquier valor de p y ω, la recta ℓ trazada por el punto $P_1(x_1, y_1)$ y perpendicular al segmento $\overline{OP}_1$, se determina perfectamente al aplicar la ecuación punto-pendiente de la recta; también por trigonometría, para cualquier posición de la recta ℓ es: $x_1 = p \cos \omega$, $y_1 = p \operatorname{sen} \omega$; por lo que las coordenadas del punto P_1 son: $(p \cos \omega, p \operatorname{sen} \omega)$.

Gráficamente, se tiene:



Reducción de la forma general de la ecuación de una recta a la forma normal

Si las ecuaciones $Ax + By + C = 0$ y $x \cos \omega + y \operatorname{sen} \omega - p = 0$, representan la misma recta en su forma general y normal, respectivamente. Los coeficientes de ambas ecuaciones deben ser iguales o proporcionales, es decir:

$$\cos \omega = kA \qquad \operatorname{sen} \omega = kB \qquad -p = kC$$

Continuación con tema de 5 de Noviembre de 2020, jueves.

Donde k es la constante de proporcionalidad. Si elevamos al cuadrado las expresiones, $\cos\omega = kA$ y $\operatorname{sen}\omega = kB$, se tendrá que $\cos^2\omega = k^2A^2$ y $\operatorname{sen}^2\omega = k^2B^2$, así, al sumar ambas expreciones, resulta:

$$
\begin{array}{r}
\cos^2\omega = k^2A^2 \\
+ \quad \operatorname{sen}^2\omega = k^2B^2 \\
\hline
\cos^2\omega + \operatorname{sen}^2\omega = k^2A^2 + k^2B^2 \\
\cos^2\omega + \operatorname{sen}^2\omega = k^2(A^2 + B^2)
\end{array}
$$

Al aplicar la identidad trigonométrica, $\cos^2\omega + \operatorname{sen}^2\omega = 1$, en la ecuación anterior, resulta:

$$
\begin{aligned}
\cos^2\omega + \operatorname{sen}^2\omega &= k\,(A^2 + B^2) \\
1 &= k^2\,(A^2 + B^2) \\
k^2 &= \frac{1}{(A^2 + B^2)} \\
k &= \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}, \text{ donde } A^2 + B^2 \neq 0
\end{aligned}
$$

Continuación de sesión 5/Noviembre/2020 3L nombre

Al sustituir el valor de k en las siguientes expresiones, se tiene:

$$\cos\omega = kA \qquad \operatorname{sen}\omega = kB \qquad -p = kC$$

$$\cos\omega = \left(\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}\right)A \qquad \operatorname{sen}\omega = \left(\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}\right)B \qquad -p = \left(\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}\right)C$$

$$\cos\omega = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \qquad \operatorname{sen}\omega = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \qquad -p = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

La recta definida por la ecuación $Ax + By + C = 0$ en la forma general, tiene por ecuación en la forma normal:

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = 0$$

Continuación del tema y ejemplo a resolver

La ecuación de la recta en su forma general $Ax + By + C = 0$, puede reducirse a la forma normal $x \cos \omega + y \operatorname{sen} \omega p = 0$, al dividir cada término de $Ax + By + C = 0$ entre el radical $r = \pm\sqrt{A^2 + B^2}$, donde el signo que precede al radical se selecciona de acuerdo con las siguientes condiciones:

1. Si $C \neq 0$, el radical es de signo contrario a C.
2. Si $C = 0$ y $B \neq 0$, el radical y B tienen el mismo signo.
3. Si $C = B = 0$ y $A \neq 0$, el radical y A tienen el mismo signo.

- La ecuación de una recta es $3x - 4y - 24 = 0$, reduce su ecuación a la forma normal y determina los valores de p y ω.

Solución

La ecuación de la recta $3x - 4y - 24 = 0$ está escrita en su forma general, por tanto, sus coeficientes son $A = 3$, $B = -4$ y $C = -24$.

Al conocer los valores de los coeficientes, se determina el valor y signo del radical, es decir:

$$r = \pm\sqrt{A^2 + B^2}$$

$$r = \pm\sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \pm\sqrt{9 + 16} = \pm\sqrt{25}$$

$$r = \pm 5 \quad \left.\right\} \text{Como } C \text{ es negativo, el signo del radical debe ser contrario a } C.$$

$$r = 5$$

Sigue solución de ejemplo.

La recta definida por la forma general $Ax + By + C = 0$, tiene por ecuación en la forma normal:

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$$

Al sustituir los datos encontrados, resulta:

$$\left.\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-\frac{24}{5}=0\ \right\}\ \text{Ecuación de la recta en su forma normal.}$$

El valor de p es:

$$-p=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$-p=\frac{-24}{5}$$

$$p=\frac{24}{5}$$

El valor del ángulo ω es:

$$\cos\omega=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \qquad \operatorname{sen}\omega=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$\cos\omega=\frac{3}{5}=0.6 \qquad \operatorname{sen}\omega=-\frac{4}{5}=-0.8$$

Solución ejemplo continua.

Se hace notar que la función seno es de signo negativo y la función coseno es positiva, por lo que se deduce que el ángulo ω se ubica en el cuarto cuadrante del sistema coordenado.

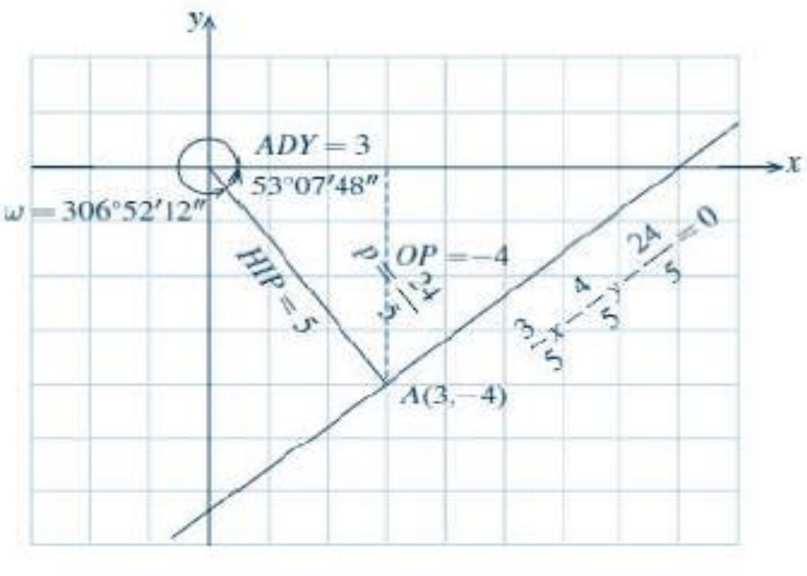
$$\omega = \text{arccos}\,(0.6) \qquad\qquad \omega = \text{arcsen}\,(-0.8)$$

$$\omega = 53^\circ\, 07'\, 48'' \qquad\qquad \omega = -53^\circ\, 07'\, 48''$$

Restando a 360° se determina el valor preciso de ω.

$$\begin{aligned} 360^\circ &= 359^\circ\ 59'\ 60'' \\ &= -53^\circ 07'\ 48'' \\ \hline \omega &= 306^\circ\ 52'\ 12'' \end{aligned}$$

Gráficamente, se tiene:



Otro ejemplo a resolver, 6 de noviembre de 2020.

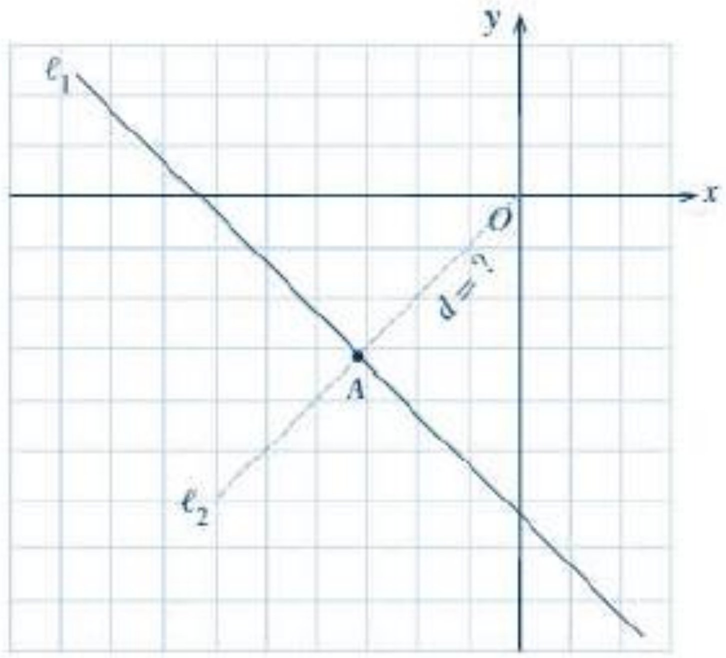
- Calcula la distancia del origen a la recta $4x + 3y + 13 = 0$.

Solución

De la ecuación dada, se determina su pendiente y las intersecciones con los ejes x, y, es decir:

$$m = -\frac{A}{B} = -\frac{4}{3} \qquad x = -\frac{C}{A} = -\frac{13}{4} \qquad y = -\frac{C}{B} = -\frac{13}{3}$$

Gráficamente, se tiene:



Seguimos con solución de ejemplo 2.

La distancia del origen a la recta dada se mide sobre una recta perpendicular, cuya pendiente es recíproca y de signo contrario.

Si $m\ell_1 = -\frac{4}{3}$, la recíproca y de signo contrario es:

$$m\ell_2 = -\frac{1}{m\ell_1} = -\frac{1}{-\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

Al aplicar la ecuación punto-pendiente de la recta, resulta:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{3}{4}(x - 0)$$

$$4y = 3x$$

$$\left.3x - 4y = 0\right\} \text{ Ecuación de la recta } (\ell_2) \text{ perpendicular a } (\ell_1)$$

Al resolver el sistema entre ℓ_1 y ℓ_2, se determina su intersección, es decir:

$$4x + 3y + 13 = 0 \qquad (\ell_1)$$

$$3x - 4y = 0 \qquad (\ell_2)$$

Sigue ejemplo 2, su solución.

Se multiplica ℓ_1 por 4 y ℓ_2 por 3, así:

$$4(4x + 3y + 13 = 0) \longrightarrow 16x + \cancel{12}y + 52 = 0$$

$$3(3x - 4y = 0) \qquad 9x - \cancel{12}y = 0$$

$$25x + 52 = 0$$

$$25x = -52$$

$$x = \frac{-52}{25} = -\frac{52}{25}$$

Al sustituir el valor de x en ℓ_2 se determina el valor de y, es decir:

$$3x - 4y = 0$$

$$3\left(-\frac{52}{25}\right) - 4y = 0$$

$$-\frac{156}{25} - 4y = 0$$

$$-4y = \frac{156}{25}$$

$$y = \frac{\frac{156}{25}}{-4}$$

$$y = -\frac{156}{100} = -\frac{39}{25}$$

El punto de intersección entre ℓ_1 y ℓ_2 es:

$$A\left(-\frac{52}{25}, -\frac{39}{25}\right)$$

Ejemplo 2.

Se determina ahora la distancia entre el origen y el punto de intersección, es decir:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$d = \sqrt{\left(0 + \frac{52}{25}\right)^2 + \left(0 + \frac{39}{25}\right)^2}$$

$$d = \sqrt{\frac{2704}{625} + \frac{1521}{625}}$$

$$d = \sqrt{4.3264 + 2.4336}$$

$$d = \sqrt{6.76}$$

$$d = 2.6$$

La distancia del origen a la recta $4x + 3y + 13 = 0$, es 2.6 unidades.

Otro método más fácil para calcular la distancia del origen a la recta $4x + 3y + 13 = 0$; consiste en determinar el valor de p. ya que es el radio vector de dicha recta.

Sean los coeficientes de la ecuación dada: $A = 4$, $B = 3$ y $C = 13$. Se determina el valor y signo del radical, es decir:

$$r = \pm\sqrt{A^2 + B^2}$$

$$r = \pm\sqrt{(4)^2 + (3)^2} = \pm\sqrt{16 + 9}$$

$$r = \pm\sqrt{25}$$

$$r = \pm 5$$

Como C es positivo, el signo del radical debe ser contrario a C. Así,

$$r = -5$$

Finalización ejemplo 2.

Como C es positivo, el signo del radical debe ser contrario a C. Así,

$$r = -5$$

El valor de p es:

$$-p = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$-p = \frac{13}{-5} = -2.6$$

$$p = 2.6$$

Se confirma que la distancia del origen a la recta
$4x + 3y + 13 = 0$ es 2.6 unidades.