**Introduction**

La démographie est une science sociale qui a pour objet l’étude quantitative et qualitative des caractéristiques des populations et de leurs dynamiques, à partir des termes tels que la natalité, la fécondité, la mortalité, la nuptialité et la migration. Parlant de leurs dynamiques, il faut noter que la population n’est pas statique d’autant plus que le nombre d’individus varie et évolue au cours du temps. Ce comportement est appelé dynamique des populations. Elle constitue une discipline qui s’intéresse à l’étude des changements subit par les populations biologiques (humaines, animales, végétales, …) en termes de tailles, de dimensions physiques de leurs membres, de structures d’âge, de sexe et d’autres paramètres qui les définissent, ainsi que les facteurs qui causent ces changements et les mécanismes par lesquels ils se produisent. Son étude a été rendu effective grâce à la création successive des modèles de l’évolution des populations par certains scientifiques tels que Malthus, Verhulst, Voltka, Gompertz, … ainsi, notre travail portera principalement sur le modèle de Gompertz. Pour mieux cerner ce modèle, le travail suivant s’est construit autour de deux grandes questions : qu’est-ce que le modèle Gompertz et quels est son apport dans la dynamique population ? quels sont ses limites ?

1. **Modèle de Gompertz et dynamique des populations**

Ce modèle a été introduit par mathématicien britannique Benjamin Gompertz en 1825. Modèle de Gompertz ou loi de mortalité établit que le taux de mortalité est la somme de termes indépendants de l’âge et de termes dépendantes de l’âge. Ce modèle suggère également la diminution exponentielle du nombre d’organisations vivantes proportionnellement à l’augmentation linéaire de l’âge. Il permet de modéliser les situations selon lesquelles une population croît d’abord de façon exponentielle puis finis par se stabiliser en s’approchant d’une certaines valeurs plafond.

vv

Probabilité de mortalité

 Age

 0

La loi de Gompertz décrit la dynamique de la mortalité qui appartient à la dynamique des populations. Elle a surtout été utilisé pour représenter la croissance de certains organismes. Ce modèle suggère la diminution exponentielle du nombre d’organisme vivants proportionnellement à l’augmentation linéaire de l’âge.

1. **Le modèle mathématique de Gompertz**

Le modèle de Gompertz permet de modéliser la croissance d’une population régulée. On l’exprime ainsi sous forme d’équation différentielle :

a = une constante

k = capacité limite du milieu

t = le temps

x = la taille, masse

Il est également exprimé sous sa forme intégrée.

La forme intégrée du modèle de Gompertz est souvent utilisée pour le calcul numérique, tandis que la forme différentielle se prête mieux à l’interprétation.

* Point d’équilibre du modèle

Un état d’équilibre de la population est observé quand la population n’évolue pas. Les points d’équilibre sont les valeurs x∗ pour lesquelles :

On trouve deux points d’équilibre x∗1 = 0 et x∗2 = k

* **Calcul des points d’équilibre**
* **Deux solutions sont possibles**

Soit

* **Pour le 1er point :**

, on notera ce point d’équilibre x∗1.

* **Pour le 2ième point :**

donc x = k ; on notera ce point d’équilibre x∗2.

* **Stabilité locale**

On étudie la stabilité au point d’équilibre x∗1 et x∗2. Ce qui veut dire l’on va déterminer pour tout x proche de x\*, si l’on se rapproche ou si l’on s’éloigne de x\*. On observe le signe de

* > 0 alors x∗ est instable
* < 0 alors x∗ est stable.
1. **Comparaison entre le modèle Verhulst et celui de Gompertz**

En dynamique des populations le modèle de Verhulst est un modèle de croissance proposé par Pierre François Verhulst vers 1840. Ce modèle propose que le taux de natalité et le taux de mortalité sont des fonctions affinées respectivement croissant et décroissant de la taille de la population. Autrement dit, plus la taille de la population augmente, plus son taux natalité diminue et son taux mortalité augmente. Verhulst pose d’autre part que, lorsque les populations sont de petites tailles, elles ont tendance à croître.

Lorsque l’on compare le modèle Gompertz au modèle de Verhulst, on observe un comportement similaire (croissance exponentielle de la population) ; mais selon ce modèle, la population croît d’une façon exponentielle et finis par se stabiliser à un niveau donné dû à la force de la mortalité qui augmente également de façon exponentielle avec l’âge.

La courbe de Gompert, lorsqu’elle est strictement croissante, elle croît plus rapidement que celle de Verhulst.

1. **Les limites du modèle de Gompertz**

Pour Gompertz, les causes de décès dépendent directement à l’âge. Cependant se pose le problème de prendre en compte des causes de décès qui ne seraient pas liées à l’âge tels que les accidents de circulation, les catastrophes naturels, …

Il n’a pas aussi tenu compte de l’avancé de la médecine qui influe sur le taux de mortalité en augmentant la durée de vie des indivius.

1. **Les importances du modèle de Gompertz**

Le modèle est largement utilisé en démographie et en gérontologie pour des prévisions adéquates du taux de mortalité chez certaines espèces (non humaines) et pour comparer le taux de vieillissement entre et parmi différentes espèces. Ce modèle a été introduit pour effectuer des calculs en assurances vie. Il est également utilisé comme d’extinction de populations animales ou comme modèle de croissance de tumeurs cancéreuses.

**Conclusion**

En somme, le modèle de Gompertz est un modèle d’étude de l’évolution de la population qui stipule qu’ une population croît d’abord de façon exponentielle puis finis par se stabiliser en s’approchant d’une certaines valeurs plafond. Ce modèle a plusieurs applications ainsi que des limites.