**UNIVERSITE DE LOME**

**FACULTÉ DES SCIENCES DE L’HOMME ET DE LA SOCIETE (FSHS)**

**DÉPARTEMENT DE SOCIOLOGIE**

**POPULATION DYNAMIQUE, DEMOGRAPHIQUE ET DEVELOPPEMENT**

**PRESENTATION DU MODELE DE LOTKA-VOLTERRA**

**Présenté par :**

**AFENYIVE Kodzo Désiré**

**ETIKO Têtê Mlaasesa**

**NADOR Edoh Denis-Prosper**

**SOGAN Abra Benjamine**

**Année académique : 2018-2019**

**SOMMAIRE**

**INTRODUCTION**

1. **MODELE DE LOTKA-VOLTERRA**
2. **DIFFERENCE ENTRE LE MODELE DE MALTHUS ET LOTKA VOLTERRA**
3. **LES LIMITES DE MODELE MALTHUS ET VOLTERRA**
4. **APPLICATIONS POSSIBLE DE LOTKA VOLTERRA**

**CONCLUSION**

**BIBLIOGRAPHIE**

**INTRODUCTION**

La dynamique de population est la science qui explique la variation au cours du temps, du nombre d’individus dans une population. L’importance de la dynamique des populations en sociologie, est aujourd’hui incontestable, car elle décrit les variations d’une ou plusieurs populations occupant un milieu et interagissant ensemble. Elle est de ce fait une composante essentielle des problématiques du développement durable. Le développement durable est la capacité « de répondre aux besoins du présent sans compromettre la possibilité pour les générations à venir de satisfaire les leurs » (Notre avenir à tous, rapport Brundtland, 1987). De cette définition, il est remarquable que les hommes peuvent provoquer l'épuisement des ressources surtout quand elles ne sont pas renouvelables. Les dynamiques de population exercent une influence sur l'aménagement des territoires en termes de durabilité dont le but est de trouver le bon équilibre entre développement urbain et rural, tout en y intégrant les problématiques sociales, environnementales et économiques du territoire et de la population qui y vit. Par-là, l’aménagement du territoire répartit les hommes et les activités au sein d’un territoire. On pourrait vouloir estimer, à conditions techniques, économiques et culturelles constantes, un "optimum de peuplement". Il tiendra compte de l'état des techniques et des équipements, du volume des ressources utilisables, des possibilités des échanges avec l'objectif d'aboutir à un état d'équilibre idéal entre une population et son territoire (théories malthusiennes). Au nom du développement durable, tout particulièrement soucieux d'économies d'énergie, certains seraient tentés de renouer avec des théories néo-malthusiennes prônant une "croissance zéro", voire une décroissance généralisée. A partir de ces modèles nous connaitrons l’évolution des populations. Ces tentations conservatrices ne vont pas dans le sens de la recherche de solutions innovantes. Les premiers auteurs ont commencé par la modélisation d’une seule population et on a comme exemple de ce dernier, le modèle de Malthus et le modèle logistique de Verhulst ; la différence entre ces modèles est basée sur la modification de la fonction croissance c'est-à dire l’interaction entre les individus de l’espèce qui est linéaire (malthusienne) dans le premier modèle, et logistique dans le deuxième. Le modèle de Lotka - Volterra décrit l’évolution d’une population proie et d’une population prédateur en interaction. Ce modèle est considéré comme la base des systèmes d’interaction proies prédateurs.

1. **MODELE DE LOTKA-VOLTERRA « Equation de prédation »**

***Présentation du modèle***

Il est important de mettre d’emblée de jeu une différence entre « les équations de prédation » et « les équations de compétition » tous de ces mêmes auteurs.

En mathématiques les « équations de prédation » de LOTKA-VOLTERRA que l’on désigne sous le nom de « modèle proie-prédateur », sont un couple d’équations différentielles de premier ordre, et sont couramment utilisées pour décrire la dynamique des systèmes biologiques dans lequel une proie et un prédateur interagissent. Elles ont été indépendamment proposées par A. j. LOTKA et V. VOLTERRA.

***Les équations de Lotka-Volterra***

 ***dx(t)/dt = x(t) (a – by(t))***

***dy(t)/dt = y(t) ( cx(t)- d)***

***Ou***

* ***t*** *est le temps*
* ***x(t)*** *est l’effectif des proies en fonction du temps*
* ***y(t)*** *est l’effectif des prédateurs en fonction du temps*
* *les dérivées dx(t)/dt et dy(t)/dt représentent la variation des deux populations au cours du temps*

*Les facteurs suivants caractérisent les interactions entre les deux espèces****:***

* ***a*** *taux de reproduction intrinsèque des proies (constant, indépendant du nombre de prédateurs)*
* ***b*** *taux de mortalités proies dû aux prédateurs rencontrés*
* ***c*** *taux de reproduction des prédateurs en fonction des proies rencontrées et mangées*
* ***d*** *taux de mortalité intrinsèque des prédateurs (constant, indépendant du nombre de proies)*

***Signification réelle ou physique des équations***

Une fois développée les équations prennent une forme plus utile pour une interprétation

* Equation de proies

L’équation de la proie est :

***dx(t)/dt = ax(t) – bx(t)y(t)***

Les proies sont supposées avoir une source illimitée de nourriture donc en l’absence de prédateur se reproduisent de façon exponentielle. Cette croissance exponentielle est représentée par ***ax(t)***. Le taux de prédation sur les proies est supposé proportionnel à la fréquence de rencontre entre les prédateurs et les proies ; il est représenté ci-dessus par ***bx(t)y(t)***. Si l’un des termes ***x(t) ou y(t)*** est nul alors i ne peut y avoir aucune prédation.

**Equation de Prédateurs**

L’équation du prédateur est :

***Dy(t)/dt = cx(t)y(t) – dy(t)***

Cette équation, ***cx(t)y(t)*** représente la croissance de la population prédatrice. (Notons la similarité avec le taux de prédation, cependant, une constante différente est utilisée car la vitesse à laquelle il consomme la proie) de plus, ***dy(t)*** représente la mort naturelle des prédateurs ; c’est une décroissance exponentielle.

L’équation représente donc la variation de la population de prédateurs en tant que croissance de cette population, diminuée du nombre de morts naturelles.

***Modèle de Volterra***

### Le modèle que nous étudions a été proposé par Volterra (et indépendamment par Lotka) en 1926 dans un ouvrage intitulé ‘*’Théorie mathématique de la lutte pour la vie*” qui est probablement le premier traité d’écologie mathématique. Volterra avait été consulté par le responsable de la pêche italienne `a Trieste qui avait remarqué que, juste après la première guerre mondiale (période durant laquelle la pêche avait été nettement réduite) la proportion de requins et autres prédateurs impropres à la consommation que l’on pêchait parmi les poissons consommables était nettement supérieure à ce qu’elle était avant-guerre et à ce qu’elle redevint ensuite.

### **L’évolution des prédateurs et des proies**

****

Sur le graphique à droite on voit l’évolution des proies (en vert) et des prédateurs (en rouge). Les proies augmentent d’abord ce qui, en conséquence augmente le nombre des prédateurs. À un certain niveau le nombre croissant de prédateurs entraîne une diminution des proies, ce qui, à son tour, implique une diminution des prédateurs. Lorsque la population de requins aura suffisamment diminué, celle des sardines pourra croître de nouveau. C’est un nouveau cycle d’un certain équilibre dynamique. Cette évolution se retrouve sur les graphiques des fonctions S(t)S(t) et R(t). R(t). Ici, la population initiale de sardines est de 2000 et celle des requins est de 1000.

*(Source : http//accromah.uqam.ca/213/04/des-predateurs-et-leurs-proies/)*

1. **DIFFERENCE ENTRE LE MODELE DE MALTHUS ET LOTKA VOLTERRA**

Les modèles de A.J. Lotka et V. Volterra renouent avec l’approche initiée par Malthus et Verhulst, notamment avec le concept de croissance exponentielle, mais à vitesse variable, d’une population. Ils améliorent le facteur correctif de la population ce qui se révèle insuffisant chez Verhust qui pense que la croissance de la population de base ne varie pas. Alors ces modèles prônent la variation de la population en terme ‘’interspécifique’’ c’est-à-dire l’interaction entre deux populations. Ces modèles sont basés donc sur une représentation des interactions entre espèces par des systèmes d’équations différentielles ordinaires (Proie-Prédateurs), ce qui fait naitre une certaine compétitivité, de concurrence.

1. **LES LIMITES DE MODELE MATHUS ET VOLTERRA**

Le modèle de Lotka-Volterra apporte des fluctuations cycliques dans les populations des proies et des prédateurs : cela n'est pas réaliste et ne correspond pas vraiment à la réalité, plus subtile. L'hypothèse de croissance malthusienne des proies en l'absence de prédateurs n'est pas réaliste non plus, et ainsi les prédateurs ont intérêt à ne rien faire : il leur suffit d'attendre passivement que les proies, qui croissent de façon exponentielle, remplissent tout l'espace pour les dévorer.

L'hypothèse très forte qu'aucun facteur externe ne vient limiter la croissance des proies peut être nuancée, par exemple en utilisant un modèle de croissance de type logistique pour la croissance des proies :

X' = a X( 1− X K ) −b XY

Y' =−c Y+d XY

où K est la capacité limite du milieu pour les proies.

En réalité, le modèle de Lotka-Volterra a vite été amélioré. Volterra traite le cas où « deux espèces se disputant la même nourriture ». La compétition qui a lieu pour les ressources entre deux populations est appelée compétition interspécifique.

Un modèle dérivé de celui étudié ici, et proposé par Volterra, est alors :

{X'=aX(1−X+αY K1 )

Y'=cY(1−Y+βX K2 ).

Autrement dit, on suppose que chaque population X et Y suit une croissance de type logistique en l'absence de l'autre espèce, mais on ajoute un terme modélisant l'interaction entre les deux populations. Les coefficients α et β caractérisent la force de compétition exercée par une population sur l'autre. Il est facile de montrer que ce système s'écrit aussi sous la forme :

{X'= aX−bXY−eX2

Y'=cY−dXY− f Y2 .

Dans le modèle de Lotka-Volterra, l'interaction entre les deux espèces est modélisée par un terme proportionnel au produit XY des rencontres possibles : −bXY et d XY. Mais si la population des proies est beaucoup plus grande que celle des prédateurs (ce qui arrive souvent), alors l'interaction est faussée. Par exemple, un prédateur mangera quand il a faim et ignorera les proies le reste du temps (satiété) ! Le modèle de Lotka-Volterra, qui suppose que les prédateurs sont insatiables, n'est donc pas très réaliste sur ce point.

En 1963, les écologues américains Robert MacArthur (1930-1972) et Michael L. Rosenzweig (né en 1941) ont alors proposé de reprendre le modèle de Lotka-Volterra avec une croissance logistique des proies, et de remplacer le terme XY par

 XY λ+X ,

ce qui donne : { X'=aX(1−X K)− bXY λ+X

Y'=−cY+ dXY λ+X ,

où ***K*** est la capacité limite du milieu pour les proies.

***b*** représente toujours la proportion des rencontres proie-prédateur qui conduisent à la mort d'une proie.

Avec Lotka-Volterra, bXY représentait le nombre de proies tuées à l'instant t. Si X était très grand à cet instant, alors le nombre de proies tuées bXY était aussi très grand (tend vers l'infini)... Avec ce modèle plus réaliste, le nombre de proies tuées est bXY λ+X , ce qui tend vers bY si X est très grand. Pour Y fixé, la fonction X → bXY λ+X est croissante, donc plus X est grand, plus le nombre de proies tuées est grand. Mais selon la valeur de λ , la vitesse à laquelle la valeur limite bY est atteinte (satiété des prédateurs) est plus ou moins grande : plus la valeur de λ est petite, plus la satiété arrive vite.

*(MacArthur V. Modèle de Rosenzweig-MacArthur : satiété des prédateurs (1963))*

1. **APPLICATIONS POSSIBLE DE LOTKA VOLTERRA**



**Commentaire :**

 Un modèle proie-prédateur très simple peut présenter des fluctuations périodiques. C'est un résultat très important du point de vue biologique :

« En l'absence de toute perturbation extérieure il peut très bien arriver que les populations fluctuent grandement ».

**-L’espace des phases pour le modèle Lotka-Volterra**

 Traçons maintenant les trajectoires dans le plan (x1, x2) pour différentes valeurs initiales des populations de proies et de prédateurs



**Commentaire:**

 Les trajectoires tournent toutes autour d'un même centre qui le point d’équilibre.

**Le modèle de Lotka-Volterra Stochastique**

 Ce modèle est très récent car il utilise des bruits de nature brownienne pour construire une adaptation de modèle classique de Lotka-Volterra, et qui dit brownien dit forcément **Diffusion**.

 Par la suite les équations de ce système stochastique :

$$\left\{\begin{array}{c}dx=\left(ax- bxy\right)dt + sigma\*dW\_{1}\left(t\right)\\dy=\left(cxy-dy\right)dt + sigma\*dW\_{2}(t)\end{array}\right.$$

Avec x & y : Proies & Prédateurs.

 a,b,c,d : des paramètres positifs (paramètres de modèle LV).

 W1(t),W2(t) : Mouvements Browniens.

 sigma : coefficient de diffusion.

 En utilisant le package **"Sim.DiffProcGUI"[[1]](#footnote-1)** sous R pour simuler le modèle Proie Prédateur Lotka-Volterra Stochastique,

* **L’évolution de la taille des deux populations (proie & prédateur) dans le plan (x, y)**



**Commentaire:**

 Le point rouge au milieu représente les valeurs initiales (x0=1, y0=1) des deux populations à l’instant t=0.

Dans le temps, on constate la formation d’une courbe irrégulière due à l’influence de bruit et de la diffusion (mouvement brownien) dans le processus.

Les quatre phases précédemment citées sont respectées par ce modèle aussi, car on remarque qu’il y a une succession entre l’augmentation et la diminution des proies et des prédateurs respectivement avec le temps.

*(Source : Bachir, 2014, p7)*

**CONCLUSION**

A la lumière de cet exposé, nous voulons montrer qu’une bonne utilisation des méthodes mathématiques peut permettre la description qualitative et quantitative du comportement des populations de différentes espèces dans la nature. Cette technique peut être utilisée comme un outil numérique puissant pour l’analyse paramétrique de la stabilité de certains phénomènes biologiques. Autrement dit, elle peut confirmer et assurer les rôles et les effets de la prédation. Dès lors, les modèles « proie prédateurs » peuvent montrer les propriétés dynamiques des populations qui n’ont été jamais observées dans les modèles simples.

**BIBLIOGRAPHIE**

[Notre avenir à tous, rapport Brundtland, 1987 (PDF, 2 MB, 14.03.2013)](https://www.are.admin.ch/dam/are/fr/dokumente/nachhaltige_entwicklung/dokumente/bericht/our_common_futurebrundtlandreport1987.pdf.download.pdf/notre_avenir_a_tousrapportbrundtland1987.pdf) consulté le 12.02.2019.

[http://www.vedura.fr/economie/amenagement-territoire consulté le 12.02.2019](http://www.vedura.fr/economie/amenagement-territoire%20consult%C3%A9%20le%2012.02.2019).

<http://accromah.uqam.ca/213/04/des-predateurs-et-leurs-proies/> consulté le 12.02.2019.

[http://ginoux.univ-tln.fr/HDS/Le%20paradoxe%20du%20mod%E8le%20pr%E9dateur-proie%20de%20Vito%20Volterra.pdf](http://ginoux.univ-tln.fr/HDS/Le%20paradoxe%20du%20mod%EF%BF%BDle%20pr%EF%BF%BDdateur-proie%20de%20Vito%20Volterra.pdf) consulté le 10.02.2019.

<https://interstices.info/modelisation-en-dynamique-des-populations/> consulté le 11.02.2019.

[https://fr.wikipedia.org/wiki/Aménagement\_du\_territoire consulté le 11.02.2019](https://fr.wikipedia.org/wiki/Am%C3%A9nagement_du_territoire%20consult%C3%A9%20le%2011.02.2019).

[file:///C:/Users/ACER/Downloads/notre\_avenir\_a\_tousrapportbrundtland1987.pdf](file:///C%3A/Users/ACER/Downloads/notre_avenir_a_tousrapportbrundtland1987.pdf) consulté le 11.02.2019.

[https://theses.univ-oran1.dz/document/TH3868.pdf consulté le 10.02.2019](https://theses.univ-oran1.dz/document/TH3868.pdf%20consult%C3%A9%20le%2010.02.2019).

[https://www.univ-tlemcen.dz/~benouaz/memoires/Chiali.pdf consulté le 10.02.2019](https://www.univ-tlemcen.dz/~benouaz/memoires/Chiali.pdf%20consult%C3%A9%20le%2010.02.2019).

<http://accromath.uqam.ca/2013/04/des-predateurs-et-leurs-proies/> consulté le 09.02.2019.

[https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00460361/document consulté le 09.09.2019](https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00460361/document%20consult%C3%A9%20le%2009.09.2019).

<http://culturemath.ens.fr/maths/html/lotka/lotka.html> consulté le 09.09.2019.

Fatiha MADANI, Présentation d’un modèle mathématique de la thérapie génique du cancer, Algérie, 2013.

Walid ABID, Analyse de la Dynamique de Certains Modèles Proie Prédateur et Applications, Thèse de doctorat présenté à l’université du Havre, 2016.

Zahia KHALDI, Systèmes dynamiques et applications à la dynamique de populations Mémoire de Master, Algérie 2014.

Anis BACHIR, Modélisation stochastique et statistique de la dynamique des populations dans un processus migratoire, Résumé du mémoire de magister en mathématiques, 2014.

Mebrouk RAHMANE, Sur les systèmes de LOTKA VOLTERRA, Mémoire pour l’obtention du Magister en mathématiques, Algérie 2012.

1. Sim.DiffProcGUI (Boukhetala K, Guidoum A)(2011).: Graphical User Interface for Simulation of Diffusion Processes. R package version 2.0. [↑](#footnote-ref-1)