حل مسالة شاملة في الأعداد المركبة

الجزء الاول الكتابات المختلفة لعدد مركب وحل المعادلات

1) z عدد مركب حيث $z=x+iy$ ليكن العدد المركب $L(Z)$ حيث

$L(Z)=z\left(\bar{z}-4(1-i\sqrt{3})\right)-4i(x\sqrt{3}-y)+12$ و $\bar{z}$ مرافق z

اثبات ان $L(Z)$ عدد حقيقي

$$L(Z)=(x+iy)\left((x-iy)-4(1-i\sqrt{3})\right)-4i(x\sqrt{3}-y)+12$$

النشر ينتج لنا $L(Z)=x^2-ixy-4x+i4x\sqrt{3}+ixy+y^2$

$-4iy-4y\sqrt{3}-4ix\sqrt{3}+12$

ومنه $\boxed{L(Z)=x^2+y^2-4x-4y\sqrt{3}+12}$

وهو حقيقي لان $(x;y)\in\mathbb{R}^2$

تعيين (C) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث $L(Z)=0$

أي ان $x^2+y^2-4x-4y\sqrt{3}+12=0$ ومنه

اذن $(x+2)^2+(y+2\sqrt{3})^2=4$

(C) دائرة مركزها ذو اللاحقة $\boxed{a=2+2i\sqrt{3}}$ ونصف قطرها $\boxed{r=2}$

2) ليكن $a=2+2i\sqrt{3}$ لاحقة مركز الدائرة (C)

كتابة a على شكله الاسي لدينا : $|a|=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}$

ومنه $\boxed{|a|=4}$ و $\boxed{\theta=\pi/3}$ $\arg(a)\begin{cases}\cos\theta=1/2\\ \sin\theta=\sqrt{3}/2\end{cases}$

وبالتالي الشكل الاسي $\boxed{a=4e^{i\frac{\pi}{3}}}$

اثبات ان $(a)^{2016}=4^{2016}$ لدينا :

$$(a)^{2016}=\left(4e^{i\pi/3}\right)^{2016}=4^{2016}\left(e^{i\pi 2016/3}\right)$$

نبحث عن القيس الرئيسي ل $\frac{2016\pi}{3}$ لدينا $\frac{2016\pi}{3}=672\pi=0+2\pi k$

ومنه $4^{2016}\left(e^{i\pi2016/3}\right)=4^{2016}\left(e^{0}\right)=4^{2016}$ أي $\boxed{(a)^{2016}=4^{2016}}$

3) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z ,:

أ) $z^2=2+2i\sqrt{3}$ ومنه $z^2=a$ نبحث عن جذري العدد المركب a

لدينا $z=x+iy$ وكذلك $a=2+2i\sqrt{3}$ ومنه $x=\sqrt{\frac{2+|a|}{2}}=\sqrt{3}$

نجد $y=\frac{2y}{2x}=\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=1$; $\boxed{z_A=\sqrt{3}+i}$ و $\boxed{z_E=-\sqrt{3}-i}$

ب) حل $\bar{z}-iz^2+3(i-\sqrt{3})=0$ لدينا $z=x+iy$ ومنه

$$\bar{z}=i(x+iy)^2-3(i-\sqrt{3})$$

أي $\bar{z}=(-2xy+3\sqrt{3})+i(x^2-y^2-3)$

ومنه الحل هو $\boxed{z=(-2xy+3\sqrt{3})-i(x^2-y^2-3)}$

بما ان $x=\sqrt{3};y=1$ فان الحل هو $\boxed{z_A=\sqrt{3}+i}$

طريقة 2: لدينا $z^2=2+2i\sqrt{3}$ ومنه

$\bar{z}=i(2+2i\sqrt{3})-3(i-\sqrt{3})=\sqrt{3}-i$ الحل $z=\sqrt{3}+i$

ج) حل المعادلة $z^2+z(\sqrt{3}-2i)-(1+i\sqrt{3})=0$

المميز $\Delta=(\sqrt{3}-2i)^2-4(1)(1+i\sqrt{3})=3$ ومنه الحلين

$$z_C=\frac{-\sqrt{3}+2i+\sqrt{3}}{2}=i \quad \text{و} \quad z_D=\frac{-\sqrt{3}+2i-\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}+i$$

الحلين هما $\boxed{z_C=i}$ و $\boxed{z_D=-\sqrt{3}+i}$

د) p كثير حدود للمتغير المركب z حيث

$$p(z)=z^3+z^2(-4i+\sqrt{3})+z(-5-3i\sqrt{3})-2(\sqrt{3}-i)$$

a. بيان ان $p(z)=p_1(z)+p_2(z)$

لدينا $p_1(z)+p_2(z)=z^3+z^2\sqrt{3}-z5-2\sqrt{3}-4z^2i-z3\sqrt{3}i+2i$

ومنه $p_1(z)+p_2(z)=z^3+z^2(\sqrt{3}-4i)+z(-5-3\sqrt{3}i)$

$-2(\sqrt{3}-i)=p(z)$

اذن $\boxed{p(z)=p_1(z)+p_2(z)}$

b. بيان ان $\overline{p_1(z)}=p_1(\bar{z})$ ؟

لدينا $p_1(z)=z^3+z^2\sqrt{3}-z5-2\sqrt{3}=(x+iy)^3+\sqrt{3}(x+iy)^2$

$-5(x+iy)-2\sqrt{3}$

ومنه $p_1(z)=(x^3+3ix^2y-3xy^2-iy^3)+\sqrt{3}(x^2-y^2+2xiy)-5x$

$-5iy-2\sqrt{3}$

ومنه $p_1(z)=\left[x^3-3xy^2+\sqrt{3}(x^2-y^2)-5x-2\sqrt{3}\right]$

$+i\left[(3x^2y-y^3+2\sqrt{3}xy-5y)\right]$

اخيرا $\boxed{\begin{array}{l}\overline{p_1(z)}=\left(x^3-3xy^2+\sqrt{3}(x^2-y^2)-5x-2\sqrt{3}\right)\\ -i\left(3x^2y-y^3+2\sqrt{3}xy-5y\right)\end{array}}$ ......(1)

وكذلك لدينا $p_1(z)=z^3+z^2\sqrt{3}-z5-2\sqrt{3}$

ومنه $p_1(\bar{z})=\bar{z}^3+\bar{z}^2\sqrt{3}-\bar{z}5-2\sqrt{3}$

ومنه $p_1(\bar{z})=(x-iy)^3+\sqrt{3}(x-iy)^2-5(x-iy)-2(\sqrt{3}-i)$

ومنه $p_1(\bar{z})=(x^3-3ix^2y-3xy^2+iy^3)+\sqrt{3}(x^2-y^2-2xiy)$

$-5x+5iy-2\sqrt{3}+2i$

ومنه $p_1(\bar{z})=\left(x^3-3xy^2+\sqrt{3}(x^2-y^2)-5x-2\sqrt{3}\right)$

$+i\left(-3x^2y+y^3-2xy\sqrt{3}+5y\right)$

اخيرا $\boxed{\begin{array}{l}p_1(\bar{z})=\left(x^3-3xy^2+\sqrt{3}(x^2-y^2)-5x-2\sqrt{3}\right)\\ -i\left(3x^2y-y^3+2xy\sqrt{3}-5y\right)\end{array}}$ ...(2)

من (1) و (2) نستنتج ان $\overline{p_1(z)}=p_1(\bar{z})$

c. هل $\overline{p(z)} = p(\overline{z})$ الجواب لا لان من اجل $z=x+iy$ لدينا

$$p(z)=(x+iy)^3+(x+iy)^2(-4i+\sqrt{3})+(x+iy)(-5-3i\sqrt{3})-2(\sqrt{3}-i)$$

$$p(z)=x^3+3ix^2y-3xy^2-iy^3+(x^2-y^2+2xiy)(-4i+\sqrt{3})-5x-3xi\sqrt{3}-5iy+3y\sqrt{3}-2\sqrt{3}+2i$$

$$p(z)=\left(x^3-3xy^2+\sqrt{3}(x^2-y^2)+8xy-5x+3y\sqrt{3}-2\sqrt{3}\right)+i\left(3x^2y-y^3-4(x^2-y^2)+2xy\sqrt{3}-3x\sqrt{3}-5y+2\right)$$

ومنه (3)

$$\boxed{\overline{p(z)}=\left(x^3-3xy^2+\sqrt{3}(x^2-y^2)+8xy-5x\right)+3y\sqrt{3}-2\sqrt{3}+i\left(-3x^2y+y^3+4(x^2-y^2)-2xy\sqrt{3}+3x\sqrt{3}+5y-2\right)}$$

كذلك

$$p(\overline{z})=(x-iy)^3+(x-iy)^2(-4i+\sqrt{3})+(x-iy)(-5-3i\sqrt{3})-2(\sqrt{3}-i)$$

ومنه

$$p(\overline{z})=(x^3-3ix^2y-3xy^2+iy^3)+(x^2-y^2-2xiy)(-4i+\sqrt{3})-5x-3xi\sqrt{3}+5iy-3y\sqrt{3}-2\sqrt{3}+2i$$

اذن

$$\boxed{p(\overline{z})=\left(x^3-3xy^2+\sqrt{3}(x^2-y^2)-8xy-5x-3y\sqrt{3}\right)-2\sqrt{3}+i\left(-3x^2y+y^3-4(x^2-y^2)-2xy\sqrt{3}-3x\sqrt{3}+5y+2\right)}$$

.....(4) أ)

من (3) و(4) نستنتج ان $\overline{p(z)}\neq p(\overline{z})$

d. تكون العلاقة $\overline{Q(z)}=Q(\overline{z})$ صحيحة حيث Q كثير حدود للمتغير المركب z اذا كانت معاملاته حقيقية فقط

e. بيان ان $2i$ جذر لكثير الحدود p

لدينا $p(2i)=(2i)^3+(2i)^2(-4i+\sqrt{3})+(2i)(-5-3i\sqrt{3})-2(\sqrt{3}-i)$

ومنه $p(2i)=-8i++16i-\boxed{4i\sqrt{3}}-10i+\boxed{6\sqrt{3}}-\boxed{2\sqrt{3}}+2i$

اخيرا $\boxed{p(2i)=0}$

f. ايجاد قيمة العددين المركبين a و b حيث

$$p(z)=(z-2i)\left[z^2+za+b\right]$$

بالنشر والتبسيط نجد

$$p(z)=z^3+az^2+bz-2iz^2-2iza-2ib$$

$$p(z)=z^3+z^2(a-2i)+z(b-2ia)-2ib$$

بالمطابقة مع

$$p(z)=z^3+z^2(-4i+\sqrt{3})+z(-5-3i\sqrt{3})-2(\sqrt{3}-i)=0$$

نجد $a-2i=-4i+\sqrt{3}$ أي ان $\boxed{a=\sqrt{3}-2i}$

ونجد $b-2ia=-5-3i\sqrt{3}$ ومنه

$b=-5-3i\sqrt{3}+2i(\sqrt{3}-2i)$ أي $\boxed{b=-(1+i\sqrt{3})}$

ونكتب $p(z)=(z-2i)\left[z^2+z(\sqrt{3}-2i)-(1+i\sqrt{3})\right]$

g. بيان ان

$$p(z)=(z-2i)\left[z^2+z(\sqrt{3}-2i)-(1+i\sqrt{3})\right]$$

بالنشر والتبسيط

h. استنتاج حلول المعادلة $p(z)=0$ اي نحل المعادلة

$$p(z)=(z-2i)\left[z^2+z(\sqrt{3}-2i)-(1+i\sqrt{3})\right]=0$$

ومنه اما $(z-2i)=0$ نجد $z_F=2i$

و $z^2+z(\sqrt{3}-2i)-(1+i\sqrt{3})=0$ من السؤال 3) ج)

نجد $z_D=-\sqrt{3}+i$ و $z_C=i$

ومنه مجموعة الحلول هي $S\{-\sqrt{3}+i;i;2i\}$

٥) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z:

$$z^2-6iz-8=0$$

ثم استنتج حلول المعادلة:

$$(z+3i+\sqrt{3})^2-6iz-6i\sqrt{3}+10=0$$

حلول المعادلة $z^2-6iz-8=0$ في $\mathbb{C}$

معادلة من الدرجة الثانية ومنه $\Delta=-4$

ومنه نجد $z_F=2i$ ، $z_H=4i$

ب) استنتاج حلول المعادلة $(z+3i+\sqrt{3})^2-6iz-6i\sqrt{3}+10=0$

تكافئ $(z+3i+\sqrt{3})^2-6i(z+\sqrt{3})-6i(3i)-18+10=0$

تكافئ $(z+3i+\sqrt{3})^2-6i(z+3i+\sqrt{3})-8=0$

ومنه $z+3i+\sqrt{3}=2i$ أي $\boxed{z_E=-\sqrt{3}-i}$

ومنه $z+3i+\sqrt{3}=4i$ أي $\boxed{z_D=-\sqrt{3}+i}$

الحلين هما $z_E=-\sqrt{3}-i$ و $z_D=-\sqrt{3}+i$

الجزء الثاني التفسير الهندسي للطويلة والعمدة

في المستوي المركب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A، B، C و E و F لواحقها على الترتيب:

$$z_A=\sqrt{3}+i,\ z_B=\sqrt{3}-i,\ z_C=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2},$$

$$z_E=i\left(2e^{i\frac{2\pi}{3}}\right),\ z_F\left(2;\frac{\pi}{2}\right)$$

1) كتابة z_A على شكله الاسي و z_E و z_F على شكلهما الجبري

لدينا $z_A=\sqrt{3}+i$ ومنه $|z_A|=\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}$ ومنه $|z_A|=2$

$\arg(z_A)=\begin{cases}\cos\theta=\sqrt{3}/2\\ \sin\theta=1/2\end{cases}$ $\boxed{\theta=\pi/6}$

وبالتالي الشكل الاسي هو $\boxed{z_A=2e^{i\frac{\pi}{6}}}$

لدينا $z_E=i\left(2e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)$ ومنه $z_E=2i\left[\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right]$

ومنه $z_E=2i\left(-1/2+\sqrt{3}/2i\right)$ ومنه $\boxed{z_E=-\sqrt{3}-i}$

ملاحظة يمكن ان نكتب $\boxed{z_E=2e^{-i\frac{5\pi}{6}}}$ لان $i=e^{i\frac{\pi}{2}}$

ومنه $z_E=e^{i\frac{\pi}{2}}\left(2e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)=2e^{i\frac{7\pi}{6}}=2e^{i\frac{-5\pi}{6}}$

لدينا الشكل القطبي $z_F\left(2;\frac{\pi}{2}\right)$ ومنه الشكل الاسي $\boxed{z_F=2e^{i\pi/2}}$

الشكل المثلثي $z_F=2\left(\cos\pi/2+i\sin\pi/2\right)$ أي جبريا $\boxed{z_F=2i}$

2) التحقق ان $\left(\frac{z_A}{2}\right)^{2013}+\left(\frac{iz_E}{2}\right)^{2013}=-1-i$

لدينا $\left(\frac{z_A}{2}\right)^{2013}=\left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{2}\right)^{2013}=\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{2013}=e^{i\frac{2013\pi}{6}}$

القيس الرئيسي ل $\frac{2013\pi}{6}$ هو $-\frac{\pi}{2}$

لان $\frac{2013\pi}{6}=\frac{2016\pi-3\pi}{6}=336\pi-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$

ومنه $e^{i\frac{2013\pi}{6}}=e^{-i\frac{\pi}{2}}=-i$ أي ان $\left(\frac{z_A}{2}\right)^{2013}=-i$ و لدينا $\left(\frac{iz_E}{2}\right)^{2013}$

ومنه $\left(\frac{i2e^{i\frac{-5\pi}{6}}}{2}\right)^{2013}=\left(e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{-5\pi}{6}}\right)^{2013}=e^{-i\frac{4026\pi}{6}}$

القيس الرئيسي ل $\frac{-4026\pi}{6}$ هو π لان

$\frac{-4026\pi}{6}=670\pi+\pi=\pi+2\pi k$ ومنه $e^{-i\frac{4026\pi}{6}}=e^{i\pi}=-1$

أي اذن $\left(\frac{iz_E}{2}\right)^{2013}=-1$ ومنه $\left(\frac{z_A}{2}\right)^{2013}+\left(\frac{iz_E}{2}\right)^{2013}=-1-i$

3) ليكن العدد المركب $2\alpha=\left(-1+\sqrt{3}\right)+i\left(1+\sqrt{3}\right)$

a. تعيين العدد المركب z_D لاحقة النقطة D حيث $z_D=\alpha^2$

وكتابته على شكله الاسي $4\alpha^2=\left[\left(-1+\sqrt{3}\right)+i\left(1+\sqrt{3}\right)\right]^2$

ومنه $4\alpha^2=\left(-1+\sqrt{3}\right)^2-\left(1+\sqrt{3}\right)^2+2i\left(-1+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)$

ومنه $4\alpha^2=4-2\sqrt{3}-4-2\sqrt{3}+6i-2i=-4\sqrt{3}+4i$

نجد عندها $\boxed{z_D=\alpha^2=-\sqrt{3}+i}$

لدينا $z_D=-\sqrt{3}+i$ ومنه $|z_D|=2$ ومنه

$\arg(z_D)=\begin{cases}\cos\theta=-\sqrt{3}/2\\ \sin\theta=1/2\end{cases}$ $\boxed{\theta=5\pi/6}$ وبالتالي $\boxed{z_D=2e^{i\frac{5\pi}{6}}}$

b. تعيين العدد الطبيعي n حيث $\left(\frac{z_D}{z_E}\right)^n\in\mathbb{R}$

لدينا $\left(\frac{z_D}{z_E}\right)^n=\left(\frac{2e^{\frac{i5\pi}{6}}}{2e^{\frac{-i5\pi}{6}}}\right)^n=\left(e^{i5\frac{\pi}{3}}\right)^n=\left(e^{-ni\frac{\pi}{3}}\right)$ ومنه

$e^{-ni\frac{\pi}{3}}=\cos\left(-n\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-n\frac{\pi}{3}\right)$

من اجل $\left(\frac{z_D}{z_E}\right)^n\in\mathbb{R}$ حقيقي يعني ان $\sin\left(-n\frac{\pi}{3}\right)=0$

نحل المعادلة $\sin\left(-n\frac{\pi}{3}\right)=0$ نعلم ان $\sin(k\pi)=0$

ومنه $\sin\left(-n\frac{\pi}{3}\right)=\sin(k\pi)$ نجد $-n\frac{\pi}{3}=k\pi$ وبالتالي

$n=-3k\,/\,k\in\mathbb{Z}^-$

لان $-n\frac{\pi}{3}=\pi-k\pi=\pi(1-k)$ أي $n=-3(1-k)=-3k\,/\,k\in\mathbb{Z}^-$

ومنه $(1-k)\in\mathbb{R}$ $\boxed{n=-3k\,/\,k\in\mathbb{Z}^-}$

ملاحظة

حل المعادلات المثلثية $\sin(\alpha)=\sin(\beta)$

هو $\begin{cases}\alpha=\beta+2\pi\\ \alpha=\pi-\beta+2\pi\end{cases}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

4) نضع $\beta=z_A(1+i)$ و $\delta=z_B(1+i)$

a. كتابة العدد δ و β على شكله الأسي

لدينا $z_A=2e^{i\frac{\pi}{6}}$ و $z_B=2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ وبما ان $(1+i)=\sqrt{2}.e^{i\pi/4}$

فان $\delta=z_B(1+i)$ ومنه $\delta=2e^{-i\frac{\pi}{6}}\sqrt{2}.e^{i\pi/4}$ أي $\boxed{\delta=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}}$

وكذلك $\beta=z_A(1+i)$ ومنه $\beta=2e^{i\frac{\pi}{6}}\sqrt{2}.e^{i\frac{\pi}{4}}$ أي $\boxed{\beta=2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}}$

الشكل المثلثي لـــــــ δ و β

$\delta=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ و $\beta=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin5\frac{\pi}{12}\right)$

كتابة العدد $\lambda=\delta+\beta$ على شكله الأسي

لدينا $\lambda=\delta+\beta$ ومنه $\lambda=z_B(1+i)+z_A(1+i)$ ومنه

ومنه $\lambda=(1+i)\left(2\sqrt{3}\right)$ $\boxed{\lambda=2\sqrt{6}.e^{i\frac{\pi}{4}}}$

b. تعيين قيمة مضبوطة لــــ $\sin\frac{5\pi}{12}$ و $\cos\frac{5\pi}{12}$

لدينا $\sin\frac{5\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$ ومنه

طريقة 1 $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}.\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}.\cos\frac{\pi}{4}$

$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}$

اذن $\boxed{\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$ من الدستور

لدينا $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$

ومنه $\cos\frac{5\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$

$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{4}.\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}.\sin\frac{\pi}{4}$

$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}$

اذن $\boxed{\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$ من الدستور

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\beta\sin\alpha$

طريقة 2 $\delta=\left(\sqrt{3}-i\right)(1+i)=2e^{e^{-i\frac{\pi}{6}}}\sqrt{2}.e^{i\pi/4}=\boxed{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}}$

ومنه $\left(\sqrt{3}-i\right)(1+i)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

ومنه $\sqrt{3}-i+i\sqrt{3}+1=2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}+2\sqrt{2}i\sin\frac{\pi}{12}$

ومنه $\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)}{2\sqrt{2}}+i\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)}{2\sqrt{2}}=\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}$

بالمطابقة نجد :

$\boxed{\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$ و $\boxed{\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

c. بيان ان λ^{2020} عدد حقيقي سالب

لدينا $\lambda=2\sqrt{6}.e^{i\frac{\pi}{4}}$ ومنه $\lambda^{2020}=\left(2\sqrt{6}\right)^{2020}.e^{i\frac{2020\pi}{4}}$

القيس الرئيسي ل $\frac{2020\pi}{4}$ هو π لان

$\frac{2020\pi}{4}=504\pi+\pi=\pi+2\pi k$ ومنه $\lambda^{2020}=\left(2\sqrt{6}\right)^{2020}.e^{i\pi}$

نجد $\lambda^{2020}=-\left(2\sqrt{6}\right)^{2020}$ لان $e^{i\pi}=-1$ ومنه λ^{2020} حقيقي سالب

d. التحقق ان $\delta^2=4z_A$

لينا الطرف الاول $\delta^2=\left(z_B(1+i)\right)^2=\left(\left(\sqrt{3}-i\right)(1+i)\right)^2$

ومنه $\delta^2=4e^{-i\frac{\pi}{3}}.2e^{i\frac{\pi}{2}}$ نجد $\delta^2=8e^{\frac{i\pi}{6}}.....(1)$

لدينا الطرف الثاني $4z_A=4\times 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ ومنه $4z_A=8e^{i\frac{\pi}{6}}$

نجد $4z_A=8e^{\frac{i\pi}{6}}......(2)$ من (1) و (2) نستنتج ان $\boxed{\delta^2=4z_A}$

التحقق ان $\beta=i\bar{\delta}$

لدينا الطرف الاول $\beta=\left(z_A(1+i)\right)$ ومنه $\beta=\left(\left(\sqrt{3}+i\right)(1+i)\right)$ أي

نجد $\beta=2e^{i\frac{\pi}{6}}.\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ $\boxed{\beta=2\sqrt{2}e^{\frac{i5\pi}{12}}},,,,(3)$

الطرف الثاني لدينا $i\bar{\delta}=i2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$ وبما ان $i=e^{i\frac{\pi}{2}}$ فان

نجد $i\bar{\delta}=e^{i\frac{\pi}{2}}.2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$ $\boxed{i\bar{\delta}=2\sqrt{2}e^{\frac{i5\pi}{12}}}......(4)$

العلاقة (3) و (4) متطابقتين ومنه $\boxed{\beta=i\bar{\delta}}$

e. الكتابة على الشكل المثلثي للعدد المركب δ^2

لدينا $\boxed{\delta^2=4z_A}$ أي $\delta^2=8e^{i\frac{\pi}{6}}$

الكتابة هي $\boxed{\delta^2=8\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}$

f. بين ان $|\delta|=|\beta|$ و ان $\arg(\delta)+\arg(\beta)=\pi/2+2\pi k$

مما سبق $\delta^2=8e^{\frac{i\pi}{6}}$ أي ان $\delta=2\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{12}}$ ومنه $|\delta|=2\sqrt{2}$

او بما ان $\delta=\left(1+\sqrt{3}\right)-i\left(1-\sqrt{3}\right)$ فان

$|\delta|=\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2+\left(1-\sqrt{3}\right)^2}$ ومنه $|\delta|=\sqrt{12\sqrt{3}-2\sqrt{3}+8}$

ومنه $|\delta|=2\sqrt{2}$ وكذلك $\arg(\delta)=\pi/12+2\pi k$

و $\beta=2\sqrt{2}e^{\frac{i5\pi}{12}}$ وبالتالي $|\beta|=2\sqrt{2}$ وكذلك

$\arg(\beta)=5\pi/12+2\pi k$

ومنه $\arg(\delta)+\arg(\beta)=5\pi/12+\pi/12=\pi/2+2\pi k$

g. قيسا للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{O\delta'};\overrightarrow{O\beta'}\right)$ واستنتج نوع المثلث $O\delta'\beta'$

لدينا $\left(\overrightarrow{O\delta'};\overrightarrow{O\beta'}\right)=\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{O\beta'}\right)-\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{O\delta'}\right)$ ومنه

$\left(\overrightarrow{O\delta'};\overrightarrow{O\beta'}\right)=\arg(\beta)-\arg(\delta)$ ومنه $\left(\overrightarrow{O\delta'};\overrightarrow{O\beta'}\right)=\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{12}$

نجد ان $\left(\overrightarrow{O\delta'};\overrightarrow{O\beta'}\right)=\frac{\pi}{3}$

نعلم ان $\left\|\overrightarrow{O\delta'}\right\|=|\delta|=2\sqrt{2}$ وكذلك $\left\|\overrightarrow{O\beta'}\right\|=|\beta|=2\sqrt{2}$

ومنه المثلث $O\delta'\beta'$ متقايس الاضلاع

5) حساب طويلة الاشعة $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$

لدينا $z_A=\sqrt{3}+i$ $z_B=\sqrt{3}-i$ $z_C=i$

$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=|z_B-z_A|=|-2i|=2$

ومنه $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=|z_A-z_C|=\left|-\sqrt{3}\right|=\sqrt{3}$

$\left\|\overrightarrow{BC}\right\|=|z_C-z_B|=\left|\sqrt{3}+2i\right|=\sqrt{7}$

وبما ان $AB^2+AC^2=BC^2$ اي $4+3=7$

حسب نظرية فيثاغورث ABC قائم في A

6) حساب طويلة وعمدة العدد المركب $\frac{z_B-z_A}{z_F-z_A}$ ثم استنتاج طبيعة المثلث FAB

لدينا $\frac{z_B-z_A}{z_F-z_A}=\frac{-2i}{-\sqrt{3}+i}$ ومنه $\frac{z_B-z_A}{z_F-z_A}=\frac{-2i}{-\sqrt{3}+i}\left(\frac{-\sqrt{3}-i}{-\sqrt{3}-i}\right)$

ومنه $\frac{z_B-z_A}{z_F-z_A}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

ومنه $\left|\frac{z_B-z_A}{z_F-z_A}\right|=1$ ومنه $\left|\frac{z_B-z_A}{z_F-z_A}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

$\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_F-z_A}\right)\begin{cases}\cos\theta=-\frac{1}{2}\\ \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ ومنه $\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_F-z_A}\right)\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$

المثلث FAB متساوي الساقين

7) حساب طويلة وعمدة العدد المركب $\frac{z_F-z_B}{z_E-z_B}$

لدينا $\frac{z_F-z_B}{z_E-z_B}=\frac{2i-\sqrt{3}+i}{-\sqrt{3}-i-\sqrt{3}+i}$ ومنه $\frac{z_F-z_B}{z_E-z_B}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

أي $\left|\frac{z_F-z_B}{z_E-z_B}\right|=1$ و $\arg\left(\frac{z_F-z_B}{z_E-z_B}\right)=-\frac{\pi}{3}+2\pi k$

نستنتج ان المثلث EFB متقايس الاضلاع

طريقة ابسط لأثبات ذلك

$\|\overrightarrow{BE}\|=|z_E-z_B|=|-\sqrt{3}-i-2i|=2\sqrt{3}$

$\|\overrightarrow{FB}\|=|z_B-z_F|=|\sqrt{3}-i-2i|=2\sqrt{3}$

$\|\overrightarrow{EF}\|=|z_F-z_E|=|\sqrt{3}+i+2i|=2\sqrt{3}$

اضلاع المثلث EFB متقايسة

8) لاحقة النقطة H حيث $\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{EB}=0$

لدينا $\overrightarrow{HC}\begin{pmatrix}x\\ y-1\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{EB}\begin{pmatrix}2\sqrt{3}\\ 0\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{EB}=0$ يكافئ ان $x=0$

ولدينا $\|\overrightarrow{HC}\|=3$ يعني ان $\sqrt{(y-1)^2}=3$ يكافئ ان $y=4$

اذن $H(0;4)$ ومنه لاحقة النقطة H هي $\boxed{z_H=4i}$

اثبات ان الرباعي $EFBH$ معين يعني ان قطراه متعامدان ومتناصفان

القطران $EB;FH$ متناصفان يعني ان $\frac{z_F+z_H}{2}=\frac{z_E+z_B}{2}$ أي

$\frac{z_F+z_H}{2}=\frac{2i-4i}{2}=-i$ و $\frac{z_E+z_B}{2}=\frac{-\sqrt{3}-i+\sqrt{3}-i}{2}=-i$

القطران متعامدان يعني ان $\frac{z_F-z_H}{z_E-z_B}=\frac{2i+4i}{-\sqrt{3}-i-\sqrt{3}+i}=\frac{6i}{-2\sqrt{3}}$ ومنه

$\arg\left(\frac{z_F-z_H}{z_E-z_B}\right)=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$ ومنه الرباعي $EFBH$ معين

9) النقطة N لاحقتها -2 كتابة العدد $\frac{z_F-z_O}{z_N-z_O}$ على شكله الجبري ثم الاسي ومنه $\frac{z_F-z_O}{z_N-z_O}=\frac{2i}{-2}=-i=e^{-i\frac{\pi}{2}}$ الطويلة $\left|\frac{z_F-z_O}{z_N-z_O}\right|=1$

العمدة $\arg\left(\frac{z_F-z_O}{z_N-z_O}\right)=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$ المثلث FON قائم في O ومتساوي الساقين

10) الرباعي $DABE$ مستطيل يعني قطراه متناصفان و متقايسان

القطران $DB;AE$ متناصفان أي: $\frac{z_D+z_B}{2}=\frac{\sqrt{3}-i-\sqrt{3}+i}{2}=0$ و $\frac{z_A+z_E}{2}=\frac{\sqrt{3}+i-\sqrt{3}-i}{2}=0$ محققة

القطران $DB;AE$ متقايسان : يعني $\left|\frac{z_D-z_B}{z_A-z_E}\right|=1$ ومنه

$\left|\frac{z_D-z_B}{z_A-z_E}\right|=\left|\frac{-\sqrt{3}+i-\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i+\sqrt{3}+i}\right|$ ومنه $\frac{|-2\sqrt{3}+2i|}{|2\sqrt{3}+2i|}=1$ اي $\left|\frac{z_D-z_B}{z_A-z_E}\right|=1$

طريقة اخرى يمكن اثبات $DABE$ المستطيل بتوازي وتقايس ضلعين متقابلين وتعامد ضلعان مترافقان

توازي وتقايس الضلعين $DA;BE$ متقابلين : $z_A-z_D=2\sqrt{3}$ و $z_B-z_E=2\sqrt{3}$ ومنه أي $\frac{z_B-z_E}{z_A-z_D}=\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=1$

تعامد الضلعين $DA;BA$ المترافقان :

$\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_D-z_A}\right)=\arg\left(\frac{-2}{-2\sqrt{3}}i\right)=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$

11) كتابة $\frac{z_A-z_O}{z_E-z_O}$ على شكله الجبري نجد

$\frac{z_A-z_O}{z_E-z_O}=\frac{\sqrt{3}+i}{-\sqrt{3}-i}=-1$ تستنتج ان النقط AOE في استقامية

12) بيان ان النقط $E;F;B$ تنتمي الى نفس الدائرة (Γ)

يطلب كتابة معادلتها الوسيطية

لدينا $|z_E|=2;|z_F|=2;|z_B|=2$ ومنه (Γ) دائرة مركزها O ونصف قطرها $r=2$ معادلتها $(\Gamma):x^2+y^2=4$

مساحتها هي $S_{(\Gamma)}=\pi\times r^2$ ومنه $S_{(\Gamma)}=12.54..us$

الجزء الثالث التحويلات النقطية

1) F هي صورة E بواسطة انسحاب T تعيين شعاعه

ومنه $Z'=Z+b$ أي $Z_F=Z_E+b$ ومنه $2i=-\sqrt{3}-i+b$ اذن

$b=\sqrt{3}+3i$ هي لاحقة شعاع الأنسحاب $\boxed{Z'=Z+\sqrt{3}+3i}$

2) R الدوران الذي مركزه B وزاويته $-\frac{2\pi}{3}$ اثبات ان صورة H بواسطة الدوران R هي F

لدينا عبارة المركبة للدوران هي $Z'=e^{-i\frac{2\pi}{3}}Z+\left(1-e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right)Z_B$ أي

$$Z'=e^{-i\frac{2\pi}{3}}Z+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sqrt{3}-i\right)$$

نجد حينها $\boxed{R:Z'=e^{-i\frac{2\pi}{3}}Z+2\sqrt{3}}$

صورة H بواسطة الدوران R هي F أي $Z_F=e^{-i\frac{2\pi}{3}}Z_H+2\sqrt{3}$

ومنه $Z_F=\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-4i)+2\sqrt{3}$ أي $Z_F=2i$ محققة

3) اثبات ان العبارة المركبة للتحويل R' حيث $R'=T\circ R$ هي

$$Z'=e^{-i\frac{2\pi}{3}}Z+3\left(\sqrt{3}+i\right)$$

لدينا $R:Z'=e^{-i\frac{2\pi}{3}}Z+2\sqrt{3}$ و $T:Z'=Z+\sqrt{3}+3i$

$R'=T\circ R$ يعني ان $R':Z'=e^{-i\frac{2\pi}{3}}Z+2\sqrt{3}+\sqrt{3}+3i$

ومنه $R':Z'=e^{-i\frac{2\pi}{3}}Z+3\left(\sqrt{3}+i\right)$

طبيعة وخواص التحويل R' هو دوران زاويته $-\frac{2\pi}{3}$ ومركزه

$$Z_\omega=\frac{3\left(\sqrt{3}+i\right)}{2\left(3+\sqrt{3}i\right)}=\sqrt{3} \text{ أي } Z_\omega=\sqrt{3}$$

4) التحويل R'' الذي مركزه O ويحول E الى A

لدينا $\frac{z_A-z_O}{z_E-z_O}=-1$ ومنه $\frac{z_A-z_O}{z_E-z_O}=e^{i\pi}$

أي $\left(z_A-z_O\right)=e^{i\pi}\left(z_E-z_O\right)$ دوران مركزه O وزاويته π

لاحظ ان $z_A=-z_E$ يمكن اعتبار R'' تناظر

5) من خلال السؤال (**1**) و (**4**) F صورة A بواسطة $T\circ R''$ لان

من خلال (**1**): $T(E)=F$ من خلال (**4**): $R''(E)=A$

مركب انسحاب ودوران هو دوران ومنه $R'''(A)=F$

عبارة $T\circ R''$ هي $Z'=\boxed{e^{i\pi}Z}+\sqrt{3}+3i$ ومنه

$Z_F=e^{i\pi}Z_A+\sqrt{3}+3i$ أي $Z_F=-\sqrt{3}-i+\sqrt{3}+3i$

نجد $Z_F=2i$ محققة

6) طبيعة التحويل ℓ الذي مركزه B ويحول E الى F

لدينا $\frac{z_F-z_B}{z_E-z_B}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ومنه $\frac{z_F-z_B}{z_E-z_B}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ أي

$\left(z_F-z_B\right)=e^{-i\frac{\pi}{3}}\left(z_E-z_B\right)$ هي صيغة دوران مركزه B وزاويته $-\frac{\pi}{3}$

7) f تحويل نقطي حيث : $z'=\left(\frac{z_A}{z_C}\right)z$

لدينا $\frac{z_A}{z_C}=\frac{\sqrt{3}+i}{i}$ ومنه $\frac{z_A}{z_C}=-1+\sqrt{3}i$ ومنه $\frac{z_A}{z_C}=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

أي ان $z'=2e^{i\frac{2\pi}{3}}z$ صيغة مركبة لتشابه مباشر مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$ ونسبته 2

8) عين معادلة و سيطية للدائرة (Γ') صورة (Γ) بواسطة الانسحاب T' الذي شعاعه $\vec{u}(0;-2)$ أي $Z'=Z-2i$

(Γ) دائرة مركزها O ونصف قطرها $r=2$ معادلتها

$$(\Gamma):x^2+y^2=4$$

(Γ') صورتها حيث $r=2$ أي $r'=2$ لان الانسحاب تقايس صورة المركز هي $Z'_O=-2i$ معادلتها $(\Gamma'):x^2+(y+2)^2=4$

مساحتها هي $S_{(\Gamma)'}=\pi\times r'^2$ ومنه $S_{(\Gamma)'}=12.54..us$

9)

أ) h تحويل نقطي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z صورتها M' ذات اللاحقة $Z'=-2Z+\sqrt{3}+3i$

طبيعة التحويل h هو تحاكي نسبته $k=-2$ و مركزه ذو اللاحقة Z_ω

حيث $Z_\omega=\frac{\sqrt{3}+3i}{1-(-2)}$ أي $Z_\omega=\frac{\sqrt{3}}{3}+i$ ومنه $Z_\omega=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+i\right)$

استنتاج ان B هي صورة F بواسطة h لدينا $Z_B=-2Z_F+\sqrt{3}+3$

ومنه $Z_B=-4i+\sqrt{3}+3$ أي ان $Z_B=\sqrt{3}-i$ محققة

ب) R_1 تحويل نقطي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z صورتها M' ذات اللاحقة $Z'=e^{i\frac{2\pi}{3}}Z+\sqrt{3}+i$

التحويل R_1 هو دوران زاويته $\theta=\frac{2\pi}{3}$ ومركزه

$$Z'=\frac{2\left(\sqrt{3}+i\right)}{3-\sqrt{3}i}=\frac{\sqrt{3}}{3}+i \text{ أي } Z_\omega=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+i\right)$$

استنتاج ان F هي صورة A بواسطة R_1 لدينا

$Z_F=\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\sqrt{3}+i\right)+\sqrt{3}+i=2i$ محققة

ج) عبارة مركبة للتشابه المباشر S الناتج عن R_1 و h

لدينا $S=h\circ R_1$ يعني ان $Z'=-2\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}Z+\sqrt{3}+i\right)+\sqrt{3}+3i$

ومنه $\boxed{S:Z'=-2e^{i\frac{2\pi}{3}}Z-\sqrt{3}+i}$ نعلم ان $-2=e^{i\pi}$

ومنه $\boxed{S:Z'=2e^{-i\frac{2\pi}{3}}Z-\sqrt{3}+i}$

10)

أ) S تشابه مباشر حيث $x'=x+\sqrt{3}y-\sqrt{3}...\boxed{1}$ و $y'=y-\sqrt{3}x+1....\boxed{2}$ عين عناصره المميزة

لدينا بعد ضرب $\boxed{2}$ في i نجد $iy'=iy-i\sqrt{3}x+i...\boxed{3}$ وبجمع $\boxed{1}$ و $\boxed{3}$ نجد $x'+iy'=x+iy+\sqrt{3}y-i\sqrt{3}x-\sqrt{3}+i$

وبما ان $z'=x'+iy'$ و $z=x+iy$ نجد $z'=z-\sqrt{3}iz-\sqrt{3}+i$

ومنه $z'=\left(1-\sqrt{3}i\right)z-\sqrt{3}+i$

وبالتالي $Z'=2e^{-i\frac{2\pi}{3}}Z-\sqrt{3}+i$ لان $\left(1-\sqrt{3}i\right)=2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

ومنه S تشابه مباشر زاويته $\frac{2\pi}{3}$ ومركزه $Z_\omega=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+i\right)$

العبارة هي $\boxed{S:Z'=2e^{-i\frac{2\pi}{3}}Z-\sqrt{3}+i}$

ب) تعيين A',B',F' صور كل من A,B,F على الترتيب

من العبارة $\begin{cases}x'=x+\sqrt{3}y-\sqrt{3}\\ y'=y-\sqrt{3}x+1\end{cases}$

أي $A\left(\sqrt{3};1\right)$ $\begin{cases}x'=\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{3}=\sqrt{3}\\ y'=1-\sqrt{3}\times\sqrt{3}+1=1-\end{cases}$ ومنه $A'\left(\sqrt{3};-1\right)$

أي $B\left(\sqrt{3};-1\right)$ $\begin{cases}x'=\sqrt{3}-\sqrt{3}-\sqrt{3}=-\sqrt{3}\\ y'=-1-\sqrt{3}\times\sqrt{3}+1=-3\end{cases}$ ومنه $B'\left(-\sqrt{3};-3\right)$

أي $,F\left(0;2\right)$ $\begin{cases}x'=2\sqrt{3}-\sqrt{3}=\sqrt{3}\\ y'=2+1=3\end{cases}$ ومنه $F'\left(\sqrt{3};3\right)$

ج) تعيين p مركز ثقل المثلث ABF

p مركز ثقل المثلث ABF فهي مرجح الجملة $\{(A;1)(B;1)(F;1)\}$

ومنه $z_p=\frac{z_A+z_B+z_F}{3}$ اذن $z_p=\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{2}{3}i$

استنتاج p' مركز ثقل المثلث $A'B'F'$ بطريقتين مختلفتين

طريقة اولى : p' مركز ثقل المثلث $A'B'F'$ فهي مرجح الجملة $\{(A';1)(B';1)(F';1)\}$ ومنه $z_{p'}=\frac{z_{A'}+z_{B'}+z_{F'}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{3}i$

طريقة ثانية : p' هي صورة p بواسطة التشابه S لأنه يحافظ على المرجح

أي $p\left(\frac{2\sqrt{3}}{3};\frac{2}{3}\right)$ اذن $\begin{cases}x'=2\sqrt{3}/3+2/3\sqrt{3}-\sqrt{3}\\ y'=2/3-2+1\end{cases}$ اذن $p'\left(\frac{\sqrt{3}}{3};-\frac{1}{3}\right)$

مساحتي المثلثين: مساحة ABF لدينا $S_{ABF}=\frac{h\times BF}{2}$

نعلم ان ABF متساوي الساقين قاعدته BF نحسب ارتفاعه h

لدينا $\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_F-z_A}\right)\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$ أي $\left(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AB}\right)=\frac{2\pi}{3}$

ومنه $\frac{\left(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AB}\right)}{2}=\frac{\pi}{3}$ أي ان $h=AF\cos\frac{\pi}{3}$ لدينا

$z_F-z_A=-\sqrt{3}+i$ ومنه $AF=2$ ومنه $\boxed{h=1}$

لدينا كذلك $\left\|\overrightarrow{FB}\right\|=\left|z_B-z_F\right|=\left|\sqrt{3}-i-2i\right|$ أي $\boxed{BF=2\sqrt{3}}$

ومنه $S_{ABF}=\frac{h\times BF}{2}$ يكافئ $S_{ABF}=\frac{2\sqrt{3}}{2}$ ومنه $\boxed{S_{ABF}=\sqrt{3}...us}$

مساحة المثلث $A'B'F'$

نعلم ان $A'B'F'$ هو صورة ABF بواسطة التشابه ذو النسبة $k=2$

ومنه $S_{A'B'F'}$ و $S_{A'B'F'}=2^2\times S_{ABF}$ ومنه $\boxed{S_{A'B'F'}=4\sqrt{3}...us}$

11) معادلة و سيطية للدائرة (Γ'') صورة (Γ') بواسطة S

لدينا $\left(\Gamma'\right):x^2+\left(y+2\right)^2=4$

(Γ') دائرة قطرها $r'=2$ لاحقة المركز هي $Z'_O=-2i$ معادلتها

(Γ'') دائرة قطرها r'' حيث $r''=k\times r'$ ومنه $r''=4$ صورة المركز

هي $\begin{cases}x'=-2\sqrt{3}y-\sqrt{3}\\ y'=-2+1\end{cases}$ ومنه $Z'_O=-3\sqrt{3}-i$ اذن معادلتها

$$(\Gamma'):\left(x+3\sqrt{3}\right)^2+\left(y+1\right)^2=16$$

مساحتها هي $S_{(\Gamma)''}=k^2S_{(\Gamma)'}$ ومنه $S_{(\Gamma)}=4\times12.54..us$ ومنه

$S_{(\Gamma)}=50.24..us$

12) ليكن (D) المستقيم الذي معادلته $2x-2\sqrt{3}y+4\sqrt{3}=0$

و ليكن (Δ) المستقيم الذي معادلته $3x+\sqrt{3}y+-2\sqrt{3}=0$.

المستقيمين (D) و (D) متعامدان : لان $\vec{u}_{(D)}\begin{pmatrix}2\sqrt{3}\\2\end{pmatrix}$ شعاع توجيه

المستقيم (D) و $\vec{u}_{(\Delta)}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\3\end{pmatrix}$ شعاع توجيه المستقيم (D) متعامدان

اي $\vec{u}_{(D)}.\vec{u}_{(\Delta)}=0$ ومنه $2\sqrt{3}\times\ -\sqrt{3}\ +3\times2=0$

13) التحقق ان النقطتين $F'\ \sqrt{3};3$ و $D\ -\sqrt{3};1$ ينتميان الى D

$F'\in(D)$ يعني ان $2\ \sqrt{3}\ -2\sqrt{3}\ 3\ +4\sqrt{3}=0$

$D\in(D)$ يعني ان $2\left(-\sqrt{3}\right)-2\sqrt{3}\left(1\right)+4\sqrt{3}=0$

و منه النقطتين D و F' ينتميان الى (D)

التحقق ان النقطتان $A'\left(\sqrt{3};-1\right)$ و $F\left(0;2\right)$ ينتميان الى (Δ)

$A'\in(\Delta)$ يعني ان $3\left(\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}\left(-1\right)+-2\sqrt{3}=0$

$F\in(\Delta)$ يعني ان $3\left(0\right)+\sqrt{3}\left(2\right)+-2\sqrt{3}=0$

ومنه النقطتان A' و F ينتميان الى (Δ)

14) تعيين معادلتي (D') و (Δ') صورتي D و (Δ) بالتحويل S

اولا معادلة (D')

لدينا $\vec{u}_{(D)}\begin{pmatrix}2\sqrt{3}\\2\end{pmatrix}$ شعاع توجيه (D) صورته هي $\vec{u}_{(D)'}\begin{pmatrix}3\sqrt{3}\\-3\end{pmatrix}$

شعاع توجيه المستقيم (D')

ومنه $(D'):-3x-3\sqrt{3}y+c=0$

بما ان $D\in(D)$ نعين صورتها D' بواسطة S : هي $D'\left(-\sqrt{3};5\right)$

نجد $(D'):-3\left(-\sqrt{3}\right)-3\sqrt{3}\left(5\right)+c=0$ ومنه $c=12\sqrt{3}$

اخيرا نجد $\boxed{(D'):-3x-3\sqrt{3}y+12\sqrt{3}=0}$

ثانيا معادلة (Δ')

لدينا $\vec{u}_{(\Delta)}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\3\end{pmatrix}$ شعاع توجيه (Δ) صورته هي $\vec{u}_{(\Delta)}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\7\end{pmatrix}$

شعاع توجيه المستقيم (Δ') ومنه $(\Delta'):7x-\sqrt{3}y+c=0$

بما ان $F\in(\Delta)$ صورتها بواسطة S : هي $F'\left(\sqrt{3};3\right)$

ومنه $(\Delta'):7\left(\sqrt{3}\right)-3\sqrt{3}+c$ ومنه $c=-4\sqrt{3}$

اخيرا نجد $\boxed{(\Delta'):7x-\sqrt{3}y-4\sqrt{3}=0}$

طريقة اخرى

اولا معادلة (D') نعلم ان $D\in(D)$ و $F'\in(D)$

نعين صورة النقطتين F' و D بواسطة : $S\begin{cases}x'=x+\sqrt{3}y-\sqrt{3}\\y'=y-\sqrt{3}x+1\end{cases}$ ومنه

$F'\left(\sqrt{3};3\right)$ و $D\left(-\sqrt{3};1\right)$ نجد $F''\left(3\sqrt{3};1\right)$ و $D'\left(-\sqrt{3};5\right)$

ومنه $\overrightarrow{D'F''}\begin{pmatrix}4\sqrt{3}\\-4\end{pmatrix}$ ومنه $(\Delta'):-4x-4\sqrt{3}y+c=0$

بما ان $F''\in(\Delta)$ فان $c=16\sqrt{3}$ ومنه

$\boxed{(D'):-x-\sqrt{3}y+4\sqrt{3}=0}$

تكافؤ المعادلتين $\boxed{(D'):-3x-3\sqrt{3}y+12\sqrt{3}=0}$

ثانيا معادلة (Δ') نعلم ان $A'\in(\Delta)$ و $F\in(\Delta)$

نعين صورة النقطتين A' و F بواسطة : $S\begin{cases}x'=x+\sqrt{3}y-\sqrt{3}\\y'=y-\sqrt{3}x+1\end{cases}$

ومنه $A'\left(\sqrt{3};-1\right)$ و $F\left(0;2\right)$ نجد $A''\left(\sqrt{3};-3\right)$ و $F'\left(\sqrt{3};3\right)$

ومنه $\overrightarrow{A''F'}\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix}$ ومنه $(\Delta'):6x+c=0$

بما ان $F'\in(\Delta')$ فان $c=-6\sqrt{3}$ ومنه $\boxed{(\Delta'):x-\sqrt{3}=0}$

$\boxed{(\Delta'):7x-\sqrt{3}y-4\sqrt{3}=0}$

15) F هي نقطة تقاطع (D) و (Δ)

يعني ان $F\in(D)$ ومنه $2\left(0\right)-2\sqrt{3}\left(2\right)+4\sqrt{3}=0$

و $F\in(\Delta)$ ومنه $3\left(0\right)+\sqrt{3}\left(2\right)+-2\sqrt{3}=0$ محققة

استنتاج ان F' هي نقطة تقاطع (D') و (Δ')

النقطة $F'\left(\sqrt{3};3\right)$ هي صورة F بواسطة S

يعني ان $F'\in(D')$ ومنه $-3\sqrt{3}-3\sqrt{3}\left(3\right)+12\sqrt{3}=0$

و $F'\in(\Delta')$ ومنه $-\sqrt{3}+\sqrt{3}=0$ محققة

الجزء الرابع مجموعات النقط

1). عيّن (Γ_1) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left\|\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{MB}\right\|=6$. ثم مثلها

2). عيّن (Γ_2) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left\|2\overrightarrow{ME}+2\overrightarrow{MH}+2\overrightarrow{MB}\right\|=12$. ثم مثلها

3). (Γ_3) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $AM^2-4MB^2=0$. ثم مثلها

العلاقة $AM^2-4MB^2=0$ تكافئ $\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right)=0$

الجملة $\{(A,1);(B,2)\}$ مرجحها G

للجملة $\{(A,1);(B,-2)\}$ مرجحها G' و $\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right)=0$

يكافئ ان $\left(3\overrightarrow{MG}\right)\left(-\overrightarrow{MG'}\right)=0$ ومنه $\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{MG'}=0$

(Γ_3) مجموعة النقط M من المستوي هي دائرة قطرها AB

4). عيّن (Δ_1) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left\|\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|2\overrightarrow{ME}+2\overrightarrow{MH}+2\overrightarrow{MB}\right\|$. ثم مثلها

5). عيّن (Δ_2) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{ME}-\overrightarrow{MB}\right)=0$. ثم مثلها

6). بيان ان A مرجح الجملة المثقلة $\{(B,1);(D,1);(E;-1)\}$

مجموع المعاملات يساوي 1غير معدوم ومنه المرجح موجود

ومنه $z_A=\dfrac{z_B+z_D-z_C}{1+1-1}$ ومنه $z_A=\sqrt{3}-i-\sqrt{3}+i+\sqrt{3}+i$

ومنه نجد $z_A=\sqrt{3}+i$ محققة ومنه A مرجح هذه الجملة

حساب كلا من AB و AD و AE

لدينا $AB=|z_B-z_A|$ ومنه $AB=|-2i|$ ومنه $\boxed{AB=2}$

لدينا $AD=|z_D-z_A|$ ومنه $AD=|-2\sqrt{3}|$ ومنه $\boxed{AD=2\sqrt{3}}$

لدينا $AE=|z_E-z_A|$ ومنه $AE=|-2\sqrt{3}-2i|$ ومنه $\boxed{AE=4}$

(Γ_4) مجموعة النقط M من المستوي حيث:

$$2MB^2+2MD^2-ME^2=36$$

يعني ان $2MB^2+2MD^2-ME^2=36$ تكافئ

$MA=\dfrac{\sqrt{36-(AB^2+AD^2-AE^2)}}{1+1-1}$ راجع مجموعات النقط

ومنه $MA=\sqrt{36-(4+12-16)}$ أي $MA=6$

(Γ_4) مجموعة النقط M من المستوي: هي دائرة مركزها A ونصف قطرها يساوي 6

7). عيّن (Δ_1) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق:

$$|z+\sqrt{3}+i|=|z-\sqrt{3}+i|$$

8). عيّن (Γ_5) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق:

$$|z+\sqrt{3}+i|=|z_E-z_B|$$

9). عيّن (Γ_6) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق:

$$|z-z_o|=2$$

10). (Δ_4) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث: $|z-z_E|=|\bar{z}-z_B|$ علما ان $\overline{z_B}=z_A$

ومنه $|z-z_E|=|\bar{z}-z_B|$ يكافئ ان $|z-z_E|=|\overline{z-\overline{z_B}}|$ وبما ان $\overline{z_B}=z_A$ يصبح $|z-z_E|=|\overline{z-z_A}|$ بما ان $|z|=|\bar{z}|$ فان $|z-z_E|=|z-z_A|$ وبالتالي (Δ_4) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z هي مستقيم محور القطعة $[EA]$

11). عين (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z حيث : .

$$arg(Z+\sqrt{3}+i)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

12). لتكن (E_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z حيث : .

$$arg(Z-2i)=-\frac{\pi}{6}+2\pi k$$

أ) تحقق أن النقطة A تنتمي إلى المجموعة (E_1) .

ب) عين طبيعة المجموعة (E_1) ثم أنشئها .

13). لتكن (φ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $z=\sqrt{3}+i+ke^{i\frac{-5\pi}{6}}$.

أ) تحقق أن النقطة O تنتمي إلى المجموعة (φ) .

ب) عين طبيعة المجموعة (φ) ثم أنشئها .

14). لتكن (Γ_7) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $z=\sqrt{3}+i+2e^{i\theta}$.

أ) تحقق أن النقطة F تنتمي إلى المجموعة (Γ_7) .

ب) عين طبيعة المجموعة (Γ_7) ثم أنشئها .

15). عيّن (Ω_1) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق $\arg\left(\dfrac{(z-2i)}{(z+4i)}\right)=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$ ثم مثلها

16). عيّن (Ω_2) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق $\arg\left(\dfrac{(z-2i)}{(z+4i)}\right)=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$ ثم مثلها

17). عيّن (Ω_3) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق $\arg\left(\dfrac{(z-2i)}{(z+4i)}\right)=\pi+2\pi k$ ثم مثلها

18). تعيين (δ) مجموعة النقط M من المستوي (M تختلف عن B وC)

ذات اللاحقة z حيث $\dfrac{z_B-z}{z_C-z}$ حقيقي سالب

$\dfrac{z_B-z}{z_C-z}$ حقيقي سالب يعني ان $\dfrac{z_B-z}{z_C-z}=ke^{i\pi}$

ومنه $\arg\left(\dfrac{z_B-z}{z_C-z}\right)=\pi+2\pi k$ مجموعة النقط (δ) هي القطعة $[BC]$ المستقيمة عدا النقطتين B و C

19). لدينا $z'=\dfrac{z-2i}{z-i}$ ولدينا $z_F=2i$ و $z_C=i$

(δ_1) مجموعة النقط M من المستوي حيث

طريقة 1

M' تنتمي الى محور التراتيب يعني ان $z'=re^{i\frac{\pi}{2}}.....r\in\mathbb{R}_+^*$

لدينا $z'=\dfrac{z-2i}{z-i}$ و $z\neq z_c$ ومنه $\dfrac{z-2i}{z-i}=re^{i\frac{\pi}{2}}$ اي ان

$\arg\left(\dfrac{z-2i}{z-i}\right)=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$ المجموعة هي دائرة مركزها $r=\dfrac{CF}{2}$

اي ان $r=\dfrac{1}{2}$ ومركزها ω منتصف CD اي $z_w=\dfrac{3}{2}i$ باستثناء C

طريقة 2

M' تنتمي الى محور التراتيب يعني ان الجزء الحقيقي ل z' معدوم او z' تخيلي صرف نعلم ان $z\neq z_C$

لدينا $z'=\dfrac{z-2i}{z-i}$ ومنه $z'=\dfrac{z-2i}{z-i}\left(\dfrac{\overline{z-i}}{\overline{z-i}}\right)$ اي ان

$$z'=\frac{(x+iy-2i)(x-i(y-1))}{(x+i(y-1))(x-i(y-1))}$$

ومنه بعد النشر

$$z'=\frac{x^2-ixy+ix+iyx+y^2-y-2xi-2y+2}{x^2+y^2-2y+1}$$

ومنه $z'=\dfrac{x^2+y^2-3y+2}{x^2+y^2-2y+1}+\dfrac{-x}{x^2+y^2-2y+1}i$

ومنه z' تخيلي صرف يعني ان $\dfrac{x^2+y^2-3y+2}{x^2+y^2-2y+1}=0$

اذن $x^2+y^2-3y+2=0$ اي $(x)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

و $x^2+y^2-2y+1\neq 0$ اي $(x)^2+(y-1)^2\neq 0$

اي $(x;y)\neq(0;1)$

ومنه المجموعة (δ_1) هي الدائرة التي مركزها ω ذو اللاحقة

$z_w=\dfrac{3}{2}i$ ونصف قطره $r=\dfrac{1}{2}$ باستثناء النقطة $C(1;0)$

20). (δ_2) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z

بحيث: $|z-z_E|=|\overline{z}-z_B|$ علما ان $\overline{z_B}=z_A$

ومنه $|z-z_E|=|\overline{z}-z_B|$ يكافئ ان $|z-z_E|=|\overline{z-\overline{z_B}}|$ وبما ان

$\overline{z_B}=z_A$ يصبح $|z-z_E|=|\overline{z-z_A}|$ بما ان $|z|=|\overline{z}|$

فان $|z-z_E|=|z-z_A|$ وبالتالي (δ_2) مجموعة النقط M من

المستوي ذات اللاحقة z هي مستقيم محور القطعة $[EA]$