المسالة الشاملة في الأعداد المركبة

الجزء الاول

الكتابات المختلفة لعدد مركب وحل معادلات

1) z عدد مركب حيث $z=x+iy$ ليكن العدد المركب $L(Z)$ حيث $L(Z)=z\left(\bar{z}-4\left(1-i\sqrt{3}\right)\right)-4i\left(x\sqrt{3}-y\right)+12$ حيث $\bar{z}$ مرافق z بين ان $L(Z)$ عدد حقيقي , ثم عين (C) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث $L(Z)=0$

2) ليكن $a=2+2i\sqrt{3}$ لاحقة مركز الدائرة (C) اكتب a على شكله الاسي ثم بين ان $(a)^{2016}=4^{2016}$

3) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

أ) $z^2=2+2i\sqrt{3}$.

ب) $\bar{z}-iz^2+3\left(i-\sqrt{3}\right)=0$

ج) $z^2+z\left(\sqrt{3}-2i\right)-\left(1+i\sqrt{3}\right)=0$

د) p كثير حدود للمتغير المركب z حيث

$p(z)=z^3+z^2\left(-4i+\sqrt{3}\right)+z\left(-5-3i\sqrt{3}\right)-2\left(\sqrt{3}-i\right)$

ولدينا $p_1(z)=z^3+z^2\sqrt{3}-z5-2\sqrt{3}$ و $p_2(z)=-4z^2i-z3\sqrt{3}i+2i$

a. بين ان $p(z)=p_1(z)+p_2(z)$

b. بين $\overline{p_1(z)}=p_1\left(\bar{z}\right)$ ؟

c. هل $\overline{p(z)}=p\left(\bar{z}\right)$

d. متى تكون العلاقة $\overline{Q(z)}=Q\left(\bar{z}\right)$ صحيحة حيث Q كثير حدود للمتغير المركب z

e. بين ان $2i$ جذر لكثير الحدود p

f. اوجد العددين a و b المركبين حيث $p(z)=(z-2i)\left[z^2+za+b\right]$

g. بين ان $p(z)=(z-2i)\left[z^2+z\left(\sqrt{3}-2i\right)-\left(1+i\sqrt{3}\right)\right]$

h. استنتج حلول المعادلة $p(z)=0$

ه) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

حيث $z^2-6iz-8=0$

ثم استنتج حلول المعادلة $\left(z+3i+\sqrt{3}\right)^2-6iz-6i\sqrt{3}+10=0$

الجزء الثاني

التفسير الهندسي للطويلة والعمدة

في المستوي المركب المنسوب إلى م م م $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ ، نعتبر النقط A ، B و C و E و F لواحقها على الترتيب: $z_A=\sqrt{3}+i$ و $z_B=\sqrt{3}-i$

و $z_C=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$ و $z_F\left(2;\pi/2\right)$ و $z_E=i2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

1) اكتب z_A على شكله الاسي و z_E و z_F على شكلهما الجبري

2) تحقق ان $\left(\frac{z_A}{2}\right)^{2013}+\left(\frac{iz_E}{2}\right)^{2013}=-1-i$

3) ليكن العدد المركب $2\alpha=\left(-1+\sqrt{3}\right)+i\left(1+\sqrt{3}\right)$

أ) عين العدد المركب z_D لاحقة النقطة D حيث $z_D=\alpha^2$ واكتبه على شكله الاسي

ب) عين العدد الطبيعي n حيث $\left(\frac{z_D}{z_E}\right)^n\in\mathbb{R}$

4) نضع $\beta=z_A(1+i)$ و $\delta=z_B(1+i)$

a. اكتب العدد δ و β ; على الشكل الأسي ثم المثلثي و استنتج الشكل الاسي لـ $\lambda=\delta+\beta$

b. عين قيمة مضبوطة لـ ; $\sin\frac{5\pi}{12}$ و $\cos\frac{5\pi}{12}$.

c. بين ان λ^{2020} عدد حقيقي سالب

d. تحقق ان $\delta^2=4z_A$ و ان $\beta=i\bar{\delta}$

e. اكتب على الشكل المثلثي العدد المركب δ^2

f. بين ان $|\delta|=|\beta|$ و ان $\arg(\delta)+\arg(\beta)=\pi/2+2\pi k$

g. عين قيس للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{O\delta};\overrightarrow{O\beta}\right)$ واستنتج نوع المثلث $O\delta\beta$

5) احسب طويلة الاشعة $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BC}$ ماذا تستنتج بالنسبة للمثلث ABC

6) احسب طويلة وعمدة العدد المركب $\frac{z_B-z_A}{z_F-z_A}$ ثم استنتج طبيعة المثلث FAB

7) احسب طويلة وعمدة العدد المركب $\frac{z_F-z_B}{z_E-z_B}$ ثم بين ان المثلث EFB متقايس الاضلاع جد طريقة ابسط لأثبات ذلك

8) عين لاحقة النقطة H حيث $\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{EB}=0$ و $\left\|\overrightarrow{HC}\right\|=3$

ثم بين ان الرباعي $EFBH$ معين

9) النقطة N لاحقتها -2 اكتب العدد $\frac{z_F-z_O}{z_N-z_O}$ على شكله الجبري ثم الاسي ثم استنتج طبيعة المثلث FON

10) بين ان الرباعي $DABE$ مستطيل

11) اكتب $\frac{z_A-z_O}{z_E-z_O}$ على شكله الجبري ماذا تستنتج؟

12) بين ان النقط $E;F;B$ تنتمي الى نفس الدائرة (Γ) يطلب تعيين معادلتها

الجزء الثالث

التحويلات النقطية

نعتبر النقطة M من المستوي المركب لاحقتها z و النقطة M' من المستوي المركب لاحقتها z'

1) بين ان F هي صورة E بواسطة انسحاب T يطلب تعيين شعاعه

2) R الدوران الذي مركزه النقطة B وزاويته $-\frac{2\pi}{3}$ بين ان صورة النقطة H بواسطة الدوران R هي النقطة F

3) بين ان العبارة المركبة للتحويل R' حيث $R'=T\circ R$ هي $Z'=e^{-i\frac{2\pi}{3}}Z+3\left(\sqrt{3}+i\right)$ عين طبيعة وخواص التحويل R'

4) عين طبيعة التحويل R'' الذي مركزه النقطة O ويحول النقطة E الى النقطة A هل يمكن اعتبار R'' التحويل تناظر لماذا؟

5) من خلال السؤال **(1)** و **(4)** هل تعتبر النقطة F هي صورة النقطة A بواسطة التحويل $R''\circ T$ او التحويل $T\circ R''$

6) عين طبيعة التحويل ℓ الذي مركزه B ويحول النقطة E الى F

7) f تحويل نقطي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z صورتها M' ذات اللاحقة $Z'=\left(\frac{z_A}{z_C}\right)Z$

عين طبيعته و عناصره المميزة

8) عين معادلة و سيطية للدائرة (Γ') صورة (Γ) بواسطة الانسحاب T' الذي شعاعه $\vec{u}(0;-2)$

9)

أ) h تحويل نقطي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z صورتها M' ذات اللاحقة $Z'=-2Z+\sqrt{3}+3i$

عين طبيعة التحويل h وعناصره المميزة ثم استنتج ان النقطة B هي صورة النقطة F بواسطة التحويل h

ب) R_1 تحويل نقطي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z صورتها M' ذات اللاحقة $Z'=e^{i\frac{2\pi}{3}}Z+\sqrt{3}+i$

عين طبيعة التحويل R_1 وعناصره المميزة ثم استنتج ان النقطة F هي صورة النقطة A بواسطة R_1

ج) عين عبارة مركبة للتشابه المباشر S الناتج عن R_1 و h

10)

د) S تشابه مباشر عبارته التحليلية $\begin{cases}x'=x+\sqrt{3}y-\sqrt{3}\\ y'=y-\sqrt{3}x+1\end{cases}$

عين عناصره المميزة

ه) عين A',B',F' صور كل من A,B,F على الترتيب بواسطة التشابه S

و) عين p مركز ثقل المثلث ABF ثم استنتج p' مركز ثقل المثلث $A'B'F'$ بطريقتين مختلفتين ثم احسب مساحتي المثلثين

11) عين معادلة و سيطية للدائرة (Γ'') صورة (Γ') بواسطة S ثم احسب مساحتها

12) ليكن (D) المستقيم الذي معادلته $2x-2\sqrt{3}y+4\sqrt{3}=0$ و ليكن (Δ) الذي معادلته $3x+\sqrt{3}y+-2\sqrt{3}=0$. تأكد أن المستقيمين (D) و (Δ) متعامدان.

13) تحقق ان النقطتين F' و D ينتميان الى (D) و ان النقطتين A' و F ينتميان الى (Δ)

14) عين معادلتي (D') و (Δ') صورتي (D) و (Δ) بالتحويل S

15) بين ان F هي نقطة تقاطع (D) و (Δ) ثم استنتج ان F' هي نقطة تقاطع (D') و (Δ')

الجزء الرابع

مجموعات النقط

1). عيّن (Γ_1) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left\|\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{MB}\right\|=6$. ثم مثلها

2). عيّن (Γ_2) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left\|2\overrightarrow{ME}+2\overrightarrow{MH}+2\overrightarrow{MB}\right\|=12$. ثم مثلها

3). عيّن (Γ_3) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $AM^2-4MB^2=0$. ثم مثلها

4). عيّن (Δ_1) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left\|\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|2\overrightarrow{ME}+2\overrightarrow{MH}+2\overrightarrow{MB}\right\|$. ثم مثلها

5). عيّن (Δ_2) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{ME}-\overrightarrow{MB}\right)=0$. ثم مثلها

6). بين ان A مرجح الجملة $\{(B;1),(D;1)(E;-1)\}$

أ) احسب كلا من AB و AD و AE

ب) عيّن (Γ_4) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $2MB^2+2MD^2-ME^2=36$. ثم مثلها

7). عيّن (Δ_3) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\left|z+\sqrt{3}+i\right|=\left|z-\sqrt{3}+i\right|$

8). عيّن (Γ_5) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left|z+\sqrt{3}+i\right|=\left|z_E-z_B\right|$. ثم مثلها

9). عيّن (Γ_6) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left|z-z_O\right|=2$. ثم مثلها

10). عيّن (Δ_4) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\left|z-z_E\right|=\left|\overline{z}-z_B\right|$ علما ان $\overline{z}_B=z_A$

11). عين (E) مجموعة النقط $\boldsymbol{M}$ ذات اللاحقة $\boldsymbol{Z}$ حيث : .

$$\boldsymbol{arg}\left(\boldsymbol{Z}+\sqrt{3}+i\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

12). لتكن (E_1) مجموعة النقط $\boldsymbol{M}$ ذات اللاحقة $\boldsymbol{Z}$ حيث : .

$$\boldsymbol{arg}\left(\boldsymbol{Z}-2i\right)=-\frac{\pi}{6}+2\pi K$$

أ) تحقق أن النقطة $\boldsymbol{A}$ تنتمي إلى المجموعة (E_1) .

ب) عين طبيعة المجموعة (E_1) ثم أنشئها .

13). لتكن (φ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $z=-\sqrt{3}-i+ke^{i\frac{\pi}{3}}$.

أ) تحقق أن النقطة O تنتمي إلى المجموعة (φ) .

ب) عين طبيعة المجموعة (φ) ثم أنشئها .

14). لتكن (Γ_7) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $z=\sqrt{3}+i+2e^{i\theta}$.

أ) تحقق أن النقطة F تنتمي إلى المجموعة (Γ_7) .

ب) عين طبيعة المجموعة (Γ_7) ثم أنشئها .

15). عيّن (Ω_1) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق $\arg\left(\frac{(z-2i)}{(z+4i)}\right)=\frac{\pi}{2}+\pi k$ ثم مثلها

16). عيّن (Ω_2) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق $\arg\left(\frac{(z-2i)}{(z+4i)}\right)=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ ثم مثلها

17). عيّن (Ω_3) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق $\arg\left(\frac{(z-2i)}{(z+4i)}\right)=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$ ثم مثلها

18). عيّن (δ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق (M تختلف عن B و C) ذات اللاحقة z التي يكون من اجلها $\frac{(z_B-z)}{(z_C-z)}$ عدد حقيقي سالب

19). النقطة M من المستوي المركب لاحقتها z والنقطة M' من المستوي المركب لاحقتها z' و $z_F=2i$ و $z_C=i$

المطلوب (δ_1) مجموعة النقط M من المستوي حيث M' تنتمي الى محور التراتيب