مديرية التربية لولاية الـــــوادي
امتحان بكالوريا التعليم الثانوي التجريبي
الشعبة: علوم تجريبية

ثانويات: بوشوشة- 19 مارس 1962
حساني عبد الكريم-السعيد عبد الحي
(دورة: ماي2014)

اختبار في مادة الرياضيات — المـدة: 03 ساعات ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضـــوع الأول

التمرين الأول: (04.5 نقط)

أ)حل في مجموعة الاعداد المركبة المعادلة $(E):\ (z+\sqrt{3}-1)(z^2-2z+4)=0$

ب)في المستوي المركب المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها:
$z_A=1-\sqrt{3}$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}$ و $z_C=1-i\sqrt{3}$.

1-أكتب كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي ، ثم بيّن أن $z_B^{2016}+z_C^{2016}=2^{2017}$.

2- بيّن أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $z_B^n+z_C^n$ عدد حقيقي ، ثم عين قيم العدد الطبيعي n بحيث: $z_B^n+z_C^n=2^n$

3- أعط تفسيرا هندسيا لطويلة وعمدة العدد المركب $\dfrac{z_A-z_C}{z_A-z_B}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

4- عين اللاحقة z_G للنقطة G منتصف القطعة $[BC]$ ثم احسب الطولين BC و GA

5-نسمي (S) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تتحقق: $BM^2+CM^2=12...(1)$

*تحقق أنه من أجل كل نقطة M من المستوي المركب: (1) تكافئ $(2)...\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM}=0$

* بين أن النقطة A تنتمي للمجموعة (S)،ثم حدّد المجموعة (S) مع إعطاء عناصرها المميزة

* علم بدقة النقط A ، B ، C و G ثم أنشئ المجموعة (S).

التمرين الثاني (04.5نقط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نعتبر النقط $A(-2;0;1)$ ، $B(1;2;-1)$ و $C(-2;2;2)$.

1 -أ) احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ، ثم الطولين AB و AC .

ب) عين قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ بالدرجة مقربة إلى الوحدة ، ثم استنتج ان A ، B و C ليست في استقامية.

2- تحقق أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي : $2x-y+2z+2=0$.

3-(P) و (P') في الفضاء والمعرفين بمعادلتيهما على الترتيب : $x+y-3z+3=0$ و $x-2y+6z=0$.

بين ان المستقيم (Δ) والمعرف بتمثيله الوسيطي التالي : $\begin{cases} x=-2 \\ y=3t-1;\ t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$ هو تقاطع المستويين (P) و (P') .

استنتج أن المستويات (P) ، (P') و (ABC) تشترك في نقطة واحدة يطلب تعيين احداثياتها.

4-لتكن (S) سطح الكرة والتي مركزها النقطة $\omega(1;-3;1)$ ونصف قطرها 3 .

أ)اكتب المعادلة الديكارتية لسطح الكرة (S).

ب) أدرس تقاطع سطح الكرة (S) والمستقيم (Δ).

جـ) بين أن المستوي (ABC) يمس سطح الكرة (S).

التمرين الثالث (**04نقط**)

أجب **بصحيح** أو **خطأ** مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية.

1)في المستوي المركب المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها:

$z_A = 1+i$ ، $z_B = 3i$ و $z_C = (1-2\sqrt{2})+i(1-\sqrt{2})$.

النقطة C هي صورة النقطة B بواسطة التشابه المباشر الذي مركزه النقطة A ، ونسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.

2) في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ المستوي (P) الذي معادلته $2x+y-z+1=0$ والمستقيم (d) الذي يشمل النقطة $A(2;1;-1)$ و $\vec{u}(1;-1;1)$ شعاع توجيه له لا يشتركان في أية نقطة.

3) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=-3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{9}{6-u_n}$.

المتتالية (v_n) والمعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\frac{1}{u_n-3}$ حسابية حدّها الأول $v_0=-\frac{1}{6}$ واساسها 5

التمرين الرابع (**07نقط**)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. الوحدة $4cm$

I- نعتبر الدالة العددية g والمعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كمايلي: $g(x)=1-xe^x$.

1-عين نهاية الدالة g عند $+\infty$.

2-ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3- أ) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[0;+\infty[$ يحقق: $0,5 \prec \alpha \prec 1$ ، ثم استنتج أن: $e^{\alpha}=\frac{1}{\alpha}$.

ب)استنتج اشارة $g(x)$ على المجال $[0;+\infty[$ وذلك حسب قيم x

II- f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{x+1}{e^x+1}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني.

1) بيّن أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ ، ماذ تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f) ؟.

2- أ) بين أن f قابلة للاشتقاق على مجال تعريفها ، ثم تحقق أن $f'(x)=\frac{g(x)}{(e^x+1)^2}$.

ب) بين أن: $f(\alpha)=\alpha$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3-أ)بيّن أنه من كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$ فإن: $f(x)-x=\frac{g(x)}{e^x+1}$

ب) استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (d) ذو المعادلة : $y=x$.

4- انشئ المستقيم (d) والمنحى (C_f)

III-1-بيّن أنه إذا كان $x\in[0;\alpha]$ فإن : $f(x)\in[0;\alpha]$.

2- نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ)باستعمال المنحنى (C_f) والمستقيم (d) مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 دون حسابها.

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\le u_n\le u_{n+1}\le\alpha$ ، استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة وجد نهايتها

الموضــوع الثاني

التمرين الاول (4.5 نقط)

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

S التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ من المستوي النقطة $M'(z')$ من المستوي حيث: $z'-1=2i(z-1)$

والتكن A ، B ، C نقط صور الأعداد المركبة: $z_A=1$ ، $z_B=4-i$ ، $z_C=3+i$

1- حدّد طبيعة التحويل S مع إعطاء عناصره المميزة

2- بين أن النقط A ، B ، C تعين مثلثا في المستوي يطلب تعيين لاحقة النقطة G مركز ثقله.

3-أ) عين لاحقتا النقطتين B' و C' صورتي النقطتين، B ، C بالتحويل S

ب) بين أن النقطة G' مركز ثقل المثلث $AB'C'$ هي صورة النقطة G بالتحويل S .

4-ليكن (Δ) مستقيم ذو المعادلة الديكارتية: $x+3y-1=0$.

أ) تحقق أن النقطتين A ، B تنتميان للمستقيم (Δ).

ب) استنتج المعادلة الديكارتية للمستقيم (Δ') صورة المستقيم (Δ) بالتحويل S.

5-أ) بين أنه من أجل كل نقطة M تختلف عن النقطة A:

$$AM'=2AM \text{ و } (\vec{u};\overrightarrow{AM'})=\frac{\pi}{2}+(\vec{u};\overrightarrow{AM}) .$$

ب) بين أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى دائرة مركزها A ونصف قطرها 1 فصورتها النقطة M' بالتحويل S تنتمي إلى دائرة يطلب تعيين عناصرها المميزة.

جـ) حدّد مجموعة النقط M' التي من اجلها النقطة M تمسح محور الفواصل.

التمرين الثاني: (04 نقط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}$.

1) أ- احسب u_1 ، u_2 ، u_3.، ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \succ 1$.

ب-بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

جـ- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم احسب نهايتها.

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=u_n^2-1$

أ- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2v_{n+1}=v_n$.

ب- استنتج أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول v_0 .

جـ- أكتب بدلالة n ، كلا من v_n و u_n ، ثم أحسب من جديد $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.

3)احسب بدلالة n كلا من المجاميع التالية :

$$S_n=u_0^2+u_1^2+....+u_n^2 \text{ ، } T_n=v_0+2v_1+....+2^n v_n \text{ و } L_n=\ln v_0+\ln v_1+....+\ln v_n$$

التمرين الثالث (4.5 نقط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نعتبر النقط $A(3;-2;2)$ ، $B(6;1;5)$ و $C(6;-2;-1)$.

واليكن المستوي (π) والمعرف بالمعادلة الديكارتية : $x+y+z-3=0$

عين العبارة **الصحيحة** والعبارة **الخاطئة** من بين العبارات التالية مع التعليل في كل حالة.

1) المثلث ABC قائم.

2) المستوي (π) عمودي على المستقيم (AB) ويشمل النقطة A .

3) المستوي (P) العمودي على المستقيم (AC) ويشمل A له معادلة ديكارتية من الشكل: $x - z = 1$.

4) المستويان (π) و (P) متقاطعان وفق مستقيم $\vec{k}$ شعاع توجيه له.

5) لتكن D نقطة من الفضاء إحداثياتها $(-1;4;0)$.

أ- المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC) .

ب- حجم رباعي الوجوه $ABCD$ يساوي $\frac{\sqrt{131}}{2}(u.v)$

التمرين الرابع :(**07 نقط**)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ الوحدة هي $2cm^2$

I- الجدول التالي هو جدول تغيرات الدالة العددية g

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	....	$\searrow$	...

والمعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2+1)$

1- أ) احسب $g(1)$ ، ثم تحقق أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

ب-) أكمل جدول تغيرات الدالة g .

2-أ) علل وجود عدد حقيقي وحيد α على المجال $]1;+\infty[$ بحيث: $g(\alpha) = 0$

ثم تحقق: $1{,}9 \prec \alpha \prec 2$

ب) استنتج اشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II- f الدالة العددية المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ:

$f(0) = 0$ ومن أجل كل عدد حقيقي $x \neq 0$: $f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني.

1) بيّن أن : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

2- أ) بين أن الدالة f فردية .

ب) بيّن أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

3-أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 0 : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0;+\infty[$

جـ) شكل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$.

4) اكتب معادلة المماس (Δ) عند النقط ذات الفاصلة 0.

5-أ) بيّن أن : $f(\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha^2+1}$ ، ثم جد حصرا للعدد $f(\alpha)$.

ب) أنشئ المماس (Δ) ثم المنحنى (C_f) في المعلم السابق.

III- أ) احسب التكامل $A(\alpha)$ والمعرف كمايلي: $A(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{g(x)}{x^2}dx$

ب) بين أن: $A(\alpha) = f(\alpha)$

الإجابة النموذجية وسلم التنقيط
امتحان شهادة البكالوريا التجريبية دوة:2014
لثانويات:بوشوشة-19مارس1962-حسانى عبد الكريم-السعيد عبد الحي ولاية الوادي
المادة: رياضيات **الشعبة: علوم تجريبية**

محاور الموضوع	عناصر الإجابة :الموضوع الأول	مجزأة
	التمرين الأول:	
	أ)حل في مجموعة الاعداد المركبة المعادلة (E) :	
	لدينا: $(z+\sqrt{3}-1)(z^2-2z+4)=0.....(E)$	
	(E) تكافئ $(z^2-2z+4)=0$ أو $(z+\sqrt{3}-1)=0$	
	تكافئ $(z^2-2z+1)=-3$ أو $(z=1-\sqrt{3})=0$	
	تكافئ $(z-1)^2=(i\sqrt{3})^2$ أو $(z=1-\sqrt{3})=0$	
	تكافئ $z=1+i\sqrt{3}$ أو $z=1-i\sqrt{3}$ أو $z=1-\sqrt{3}$	
	وعليه مجموعة الحلول هي : $\boxed{1+i\sqrt{3} \text{ ، } 1-i\sqrt{3} \text{ و } 1-\sqrt{3}.}$	
	1- كتاب كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي ،ثم تبيّان أن $z_B^{2016}+z_C^{2016}=2^{2017}$.	
	$z_A=1-\sqrt{3}=-(\sqrt{3}-1)=(\sqrt{3}-1)e^{\pi i}$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}=2(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})=2e^{\frac{\pi}{3}i}$ و $z_C=\overline{z_B}=2e^{-\frac{\pi}{3}i}$	
	لدينا: $z_B^{2016}+z_C^{2016}=2^{2016}.2\operatorname{Re}(z_B)=2^{2017}\cos(\frac{2016\pi}{3})=2^{2017}\cos(0)=2^{2017}$	
	2- تبيّان أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $z_B^n+z_C^n$ عدد حقيقي .	
	لدينا: $z_B^n+z_C^n=2^{n+1}\operatorname{Re}(z_B)=2^{n+1}\cos(\frac{n\pi}{3})\in\mathbb{R}$	
	تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث: $z_B^n+z_C^n=2^n$	
	$z_B^n+z_C^n=2^n$ تكافئ $2^{n+1}\cos(\frac{n\pi}{3})=2^n$ حسب ما ورد في الجواب السابق.	
	ومنه: $\cos(\frac{n\pi}{3})=\frac{1}{2}$ أي $\begin{cases}\frac{n\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+2k\pi\\ \frac{n\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\end{cases}$ وعليه: $\begin{cases}n=1+6k\\ n=-1+6k\end{cases};k\in\mathbb{N}^*$	
	3-اعطاء تفسيرا هندسيا لطويلة وعمدة العدد المركب $\frac{z_A-z_C}{z_A-z_B}$	
	لدينا: $\frac{z_A-z_C}{z_A-z_B}=\frac{-1+i}{-1-i}=-i$ بعد التبسيط وضرب البسط والمقام في مرافق المقام	
	عليه: $\left\|\frac{z_A-z_C}{z_A-z_B}\right\|=\|-i\|=1$ معناه $AC=AB$ و $\arg\left(\frac{z_A-z_C}{z_A-z_B}\right)=\arg(-i)=-\frac{\pi}{2}$	
	استنتاج طبيعة المثلث ABC.	
	المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين لأن : $AC=AB$ و $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})=\frac{\pi}{2}$	

4-تعيين اللاحقة z_G للنقطة G منتصف القطعة $[BC]$ ثم حساب الطولين BC و GA

* لدينا: G منتصف القطعة $[BC]$ ومنه : $z_G = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{1+i\sqrt{3}+1-i\sqrt{3}}{2} = 1$

* لدينا: $BC = |z_C - z_B| = |-i2\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$ و $GA = |z_A - z_G| = |-\sqrt{3}| = \sqrt{3}$

5-*التحقق أنه من أجل كل نقطة M من المستوي: (1) تكافئ $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM} = 0...(2)$

لدينا: $BM^2 + CM^2 = 12...(1)$ تكافئ $(\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC})^2 - 2\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BC}^2$

تكافئ $2\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{MC} = 0$ تكافئ $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{MC} = 0...(2)$

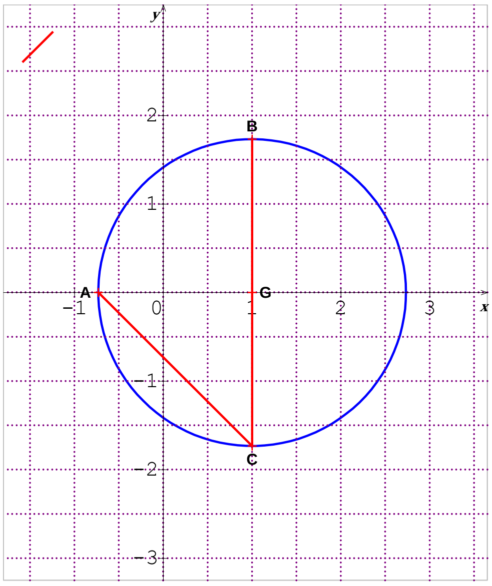
***تبيان أن A تنتمي لـ (S)، ثم حدّد المجموعة (S) مع إعطاء عناصرها المميزة**

- A تنتمي لـ(S) لأن: $BA^2 + CA^2 = BC^2$ محققة لأن المثلث ABC قائم في A.

- من العلاقة $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{MC} = 0...(2)$ نستنتج ان (S) دائرة قطرها $[BC]$

- (S) دائرة قطرها $[AB]$ مركزها G ونصف قطرها $GA = \sqrt{3}$.

*** تعليم بدقة النقط A ، B ، C و G ثم أنشاء المجموعة (S).**



__التمرين الثاني:__

1 -أ) حساب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ، ثم الطولين AB و AC .

$\overrightarrow{AB}(3;2;-2).\overrightarrow{AC}(0;2;1) = 3.0 + 2.2 - 2.1 = 2$

$AB = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{17}$ و $AC = \sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

ب) عين قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ بالدرجة مقربة إلى الوحدة .

لدينا: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ وعليه: $\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC.} = \frac{2}{\sqrt{5}.\sqrt{17}}$

ومنه:قيس $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ والقرب إلى الوحدة هو : $\cos^{-1}(\frac{2}{\sqrt{85}}) \approx 78°$

استنتج ان A ، B و C ليست في استقامية.

النقاط A ، B و C ليست في استقاميةلأن قيس $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ هو $78°$.

2- التحقق أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي : $2x - y + 2z + 2 = 0$.

يكفي أن نبين أن احداثيات النقاط A ، B و C تحقق صحة معادلة(ABC)

لدينا: $2(-2)-0+2(1)+2=0$ ومنه : $A\in(ABC)$.

$2(1)-2+2(-1)+2=0$ ومنه : $B\in(ABC)$.

$2(-2)-2+2(2)+2=0$ ومنه : $C\in(ABC)$.

3- تبيان ان المستقيم (Δ) هو تقاطع المستويين (P) و (P').

(Δ) هو تقاطع (P) و (P') معناه: (Δ) محتوى في (P) و (Δ) محتوى في (P')

(Δ) محتوى في (P) لأن: $-2+(3t-1)-3t+3=0$ محققة

(Δ) محتوى في (P') لأن: $-2-2(3t-1)+6t=0$ محققة.

استنتاج أن : (P)، (P') و (ABC) تشترك في نقطة واحدة يطلب تعيين احداثياتها

من الجواب السابق لدينا (Δ) هو تقاطع (P) و (P')

نبين أن المستقيم (Δ) يقطع المستوي (ABC) في نقطة ولذلك نحل الجملة التالية:

$(s): 2x-y+2z+2=0$ و $\begin{cases} x=-2 \\ y=3t-1 \\ z=t \end{cases}$ و منه: $2(-2)-(3t-1)+2t+2=0$

أي: $t=-1$ أي احداثيات نقطة التقاطع هي: $(-2;-4;-1)$ وذلك بعد تعويض قيمة $t=-1$

4- أ) كتابة المعادلة الديكارتية لسطح الكرة (S).

لدينا: (S) مركزها النقطة $\omega(1;-3;1)$ ونصف قطرها 3 .

المعادلة الديكارتية لـ (S) هي: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

وعليه معادلة (S) هي: $(x-1)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=9$

ب) دراسة تقاطع سطح الكرة (S) والمستقيم (Δ).

لدراسة تقاطع سطح الكرة (S) والمستقيم (Δ) نحسب المسافة بين (Δ) و $\omega(1;-3;1)$

لدينا: $d(\omega;(\Delta))=H\omega$ حيث H هي المسقط العمودي للمركز ω على (Δ)

لدينا: $H(-2;3t-1;t)$ لأن $H\in(\Delta)$ وعليه يكون : $\overrightarrow{\omega H}.\vec{u}_\Delta=0$

$\overrightarrow{\omega H}.\vec{u}_\Delta=0$ تكافئ $\overrightarrow{\omega H}(-3;3t+2;;t-1).\vec{u}_\Delta(0;3;1)=10t+5=0$ أي: $t=-\dfrac{1}{2}$

وعيله تكون احداثيات النقطة H هي: $(-2;-\dfrac{5}{2};-\dfrac{1}{2})$

ومنه: $d(\omega;(\Delta))=H\omega=\sqrt{(-3^2+(-\dfrac{1}{2})^2+(-\dfrac{5}{2})^2}=\dfrac{\sqrt{46}}{2}\succ R=3$

وعليه يكون تقاطع (S) و (Δ) هو مجموعة خالية.

جـ) تبيان أن المستوي (ABC) يمس سطح الكرة (S).

المستوي (ABC) يمس سطح الكرة (S) معناه $d(\omega;(ABC))=R$

$$d(\omega;(ABC))=\frac{|2x_\omega-y_\omega+2z_\omega+2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{9}{3}=3$$

التمرين الثالث

الإجابة **بصحيح** أ و **خطأ** مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية.

1) C هي صورة B ب بالتشابه المباشر الذي مركزه النقطة A ، ونسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

خطأ : لأن: $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i\sqrt{2}$ ومن المفروض $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i\sqrt{2}$

2) المستوي (P) الذي معادلته $2x + y - z + 1 = 0$ والمستقيم (d) الذي يشمل النقطة $A(2;1;-1)$ و $\vec{u}(1;-1;1)$ شعاع توجيه له لا يشتركان في أية نقطة.

صحيح: لأن: $A(2;1;-1)$ لاتنتمي للمستوي (P) و $\vec{u}(1;-1;1) \perp \vec{n}(2;1;-1)$

3) المتتالية (v_n) حسابية حدّها الأول $v_0 = -\frac{1}{6}$ واساسها 5

خطأ : لأن: أساس المتتالية (v_n) يساوي: $q = v_1 - v_0 = \frac{1}{u_1 - 3} - \frac{1}{u_0 - 3} = -\frac{1}{2}$.

التمرين الرابع

I-1-تعيين نهاية الدالة g عند $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}(1 - xe^x) = -\infty$$

2-دراسة اتجاه تغير الدالة g ، ثم تشكيل جدول تغيراتها.

دراسة اتجاه تغير g و تشكيل جدول تغيراتها.

$$g'(x) = (1 - xe^x)' = -1.e^x - xe^x = -e^x(x+1)$$

$g'(x) \prec 0$ لأن: $x \in [0;+\infty[$ وعليه تكون الدالة g متناقصة تماماعلى مجال تعريفها

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	1 ↘	0	↘ $-\infty$

3- أ) تبيّان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[0;+\infty[$ يحقق: $0,5 \prec \alpha \prec 1$ ، ثم استنتاج أن: $e^\alpha = \frac{1}{\alpha}$.

*الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]0,5;1[$ و $g(0,5) \times g(1) \prec 0$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد $\alpha \in]0,5;1[$ يحقق: $g(\alpha) = 0$

* $g(\alpha) = 0$ معناه $1 - \alpha e^\alpha = 0$ ومنه $e^\alpha = \frac{1}{\alpha}$

ب)استنتاج اشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$ وذلك حسب قيم x

من جدول تغيرات الدالة g ومن الجواب 3-أ) نستنتج أن :

$g([0;\alpha[) = [1;0[$ معناه $g(x) \geq 0$ و $g([\alpha;+\infty[) =]-\infty;0]$ معناه $g(x) \leq 0$

II- 1) تبيّان أن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ، والاستنتاج بالنسبة للمنحنى (C_f).

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{e^x + 1}$ حالة عدم التعيين لأن: $\lim_{x\to+\infty}(x+1) = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}(e^x + 1) = +\infty$

إزالة حالة عدم التعيين: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{x(1+\frac{1}{x})}{e^x(1+\frac{1}{e^x})} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ معناه (C_f) يقبل المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب في جوار $+\infty$

2- أ) تبيان أن f قابلة للاشتقاق على مجال تعريفها ، والتحقق أن $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(e^x+1)^2}$

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ لأنها حاصل قسمة الدالتين:

$x \to (x+1)$ و $x \to (e^x+1)$ قابلتين للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$.

$$f'(x) = \frac{1(e^x+1) - e^x(x+1)}{(e^x+1)^2} = \frac{1-e^x(x)}{(e^x+1)^2} = \frac{g(x)}{(e^x+1)^2}$$

ب) تبيان أن: $f(\alpha) = \alpha$ ، ثم تشكيل جدول تغيرات الدالة f.

*لدينا: $f(\alpha) = \dfrac{\alpha+1}{(e^\alpha+1)^2}$ ولدينا من الجواب 3- أ) $e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha}$

وعليه: $f(\alpha) = \dfrac{\alpha+1}{\frac{1}{\alpha}+1} = \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{\alpha+1} = \alpha$

*لدينا: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(e^x+1)^2}$ ومنه إشارة $f'(x)$ هي حسب إشارة $g(x)$

ومنه :الدالة f تكون متزايدة على المجال $]0;\alpha[$

ومتناقصة على المجال $]\alpha;+\infty[$.

وعليه جدول تغيرات الدالة f يكون كمايلي:

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\frac{1}{2}$ ↗	α	↘ $-\infty$

ملاحظة: f معرفة عند 0 و $f(0) = \dfrac{1}{2}$

3-أ)تبيّان أنه من كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ فإن: $f(x) - x = \dfrac{g(x)}{e^x+1}$

لدينا: $f(x) - x = \dfrac{x+1}{e^x+1} - x = \dfrac{x+1-x(e^x+1)}{e^x+1} = \dfrac{1-x(e^x)}{e^x+1} = \dfrac{g(x)}{e^x+1}$

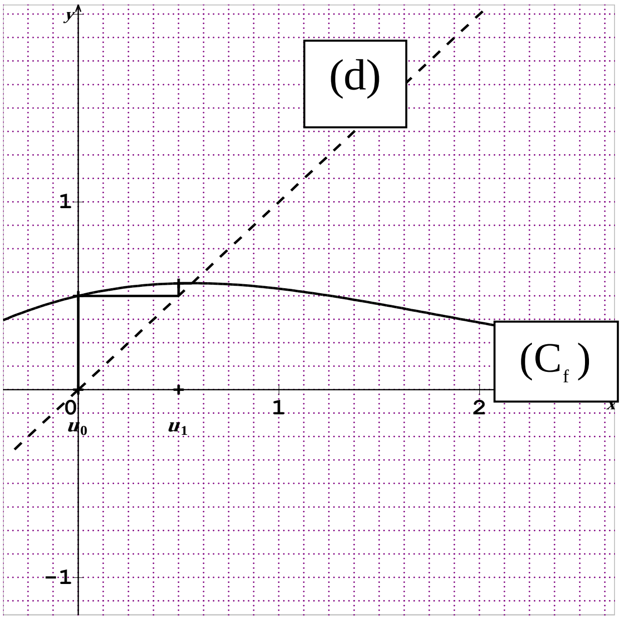
ب) استنتاج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (d) ذو المعادلة : $y = x$.

الوضع النسبي لـ(C_f) و المستقيم (d) هو حسب إشارة الفرق $f(x) - x = \dfrac{g(x)}{e^x+1}$

وعليه يكون: $x \in]0;\alpha[$ معناه (C_f) فوق (d) و $x \in]\alpha;+\infty[$ معناه (C_f) تحت (d)

ولدينا: $f(\alpha) = \alpha$ معناه (C_f) يقطع (d) في النقطة التي احداثييها $(\alpha;\alpha)$.

4- إنشاء (d) والمنحى (C_f) وتمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 وu_3



III - 1-تبيّان أنه إذا كان $x \in [0;\alpha]$ فإن : $f(x) \in [0;\alpha]$.

لدينا: $x \in [0;\alpha]$ معناه $0 \le x \le \alpha$ ومنه: $f(0) \le f(x) \le f(\alpha)$ لأن: f متزايدة

ولدينا: $f(0) = \frac{1}{2}$ و $f(\alpha) = \alpha$ عليه: $0 \prec \frac{1}{2} \le f(x) \le \alpha$ أي: $f(x) \in [0;\alpha]$.

2-أ)تمثيل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 وu_3 . رفقة تمثيل المنحنى(C_f)

ب) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \le u_n \le u_{n+1} \le \alpha$

* التأكد من صحة $p(0)$

من أجل $n = 0$ يكون: $0 \le u_0 \le u_1 \le \alpha$ محققة لأن: $u_0 = 0$ و $u_1 = f(u_0) = \frac{1}{2}$

* نفرض أن: $p(n)$ صحيحة من أجل $n = k$ حيث $n \ge k$ أي: $0 \le u_k \le u_{k+1} \le \alpha$

ونبرهن أن: $p(n+1)$ صحيحة أي: $0 \le u_{k+1} \le u_{k+2} \le \alpha$

لدينا: $0 \le u_k \le u_{k+1} \le \alpha$ ومنه $f(0) \le f(u_k) \le f(u_{k+1}) \le f(\alpha)$ لأن: f متزايدة

ومنه: $0 \prec \frac{1}{2} \le u_{k+1} \le u_{k+2} \le \alpha$

استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة وإيجاد نهايتها

من المتباينة : $0 \le u_n \le u_{n+1} \le \alpha$ نستنتج أن (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل وعليه تكون المتتالية (u_n) متقاربة.

نفرض: $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = L$ ونبحث عن قيمة L أي نحل المعادلة $f(L) = L$.

$f(L) = L$ تكافئ $L = \frac{L+1}{e^L + 1}$ أي: $1 - Le^L = 0$ معناه $g(L) = 0$ إذن: $L = \alpha$

الإجابة النموذجية وسلم التنقيط
امتحان شهادة البكالوريا التجريبية دوة:2014
لثانويات:بوشوشة-19مارس1962-حساني عبد الكريم-السعيد عبد الحي ولاية الوادي
المادة: رياضيات **الشعبة: علوم تجريبية**

محاور الموضوع	عناصر الإجابة :الموضوع الثاني	جزأة
	التمرين الأول: **1- تحديد طبيعة التحويل S مع إعطاء عناصره المميزة** العبارة المركبة للتحويل S هي: $z'-1=2i(z-1)$ حيث : $a=2e^{\frac{\pi}{2}i}$ و $z_\omega=z_A$ التحويل S تشابه مباشر لأن: $a\in\mathbb{C}$ و $\|a\|=2$ وتختلف عن 1 . العناصر المميزة لتشابه المباشر S هي: المركز A و النسبة $\|a\|=2$ والزاوية $\arg(a)=\frac{\pi}{2}$ **2-تبيان أن النقط A ، B ، C تعين مثلثا في المستوي و تعيين لاحقة النقطة G مركز ثقله.** النقط A ، B ، C تعين مثلثا في المستوي معناه: $\overrightarrow{AB}$ لايوازي $\overrightarrow{AC}$ لأن: $\overrightarrow{AC}\neq K\overrightarrow{AB}$ لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث هي : $z_G=\frac{z_A+z_C+z_B}{3}=\frac{8}{3}$ **3-أ) تعيين لاحقتا النقطتين B' و C' صورتي النقطتين، B ، C بالتحويل S** لاحقة النقطة B' صورة B هي: $z_{B'}-1=2i(z_B-1)=3+6i$ لاحقة النقطة C' صورة C هي: $z_{C'}-1=2i(z_C-1)=-1+4i$. **ب) تبيان أن النقطة G' مركز ثقل المثلث $AB'C'$ هي صورة النقطة G بالتحويل S .** لدينا: $z_{G'}=\frac{z_A+z_{C'}+z_{B'}}{3}=1+\frac{10}{3}i$ ولدينا: $z_{G'}-1=2i(z_G-1)=1+\frac{10}{3}i$ ومنه: $z_{G'}=S(G)$ **4- أ) التحقق أن النقطتين A ، B تنتميان للمستقيم (Δ).** $A\in(\Delta)$ لأن احداثيا النقطة A تحقق صحة المعادلة $x+3y-1=0$ لأن: $1+3(0)-1=0$ $B\in(\Delta)$ لأن احداثيا النقطة B تحقق صحة المعادلة $x+3y-1=0$ لأن: $4+3(-1)-1=0$. ب) استنتاج المعادلة الديكارتية للمستقيم (Δ') صورة المستقيم (Δ) بالتحويل S. من الجواب السابق نستنتج ان (Δ') صورة المستقيم (Δ) بالتحويل S يشمل النقطتين A ، B' وعليه يكون $M(x;y)\in(\Delta')$ معناه $\overrightarrow{AM}(x-1;y)\parallel\overrightarrow{AB'}(2;6)$ معناه $6x-2y-6=0$ أي $3x-y-3=0$ **5-أ) تبيان أنه من أجل كل نقطة M تختلف عن النقطة A :** $AM'=2AM$ و $(\vec{u};\overrightarrow{AM'})=\frac{\pi}{2}+(\vec{u};\overrightarrow{AM})$ لدينا: $z'-1=2i(z-1)$ تكافئ $\begin{cases}\|z'-1\|=\|2i\|\|z-1\|\\ \arg(z'-1)=\arg(2i)+\arg(z-1)\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}AM'=2AM\\ (\vec{u};\overrightarrow{AM'})=\frac{\pi}{2}+(\vec{u};\overrightarrow{AM})\end{cases}$	

ب) تبيان أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى دائرة مركزها A ونصف قطرها 1 فصورتها النقطة M' بالتحويل S تنتمي إلى دائرة يطلب تعيين عناصرها المميزة.

M تنتمي إلى دائرة مركزها A ونصف قطرها 1 فصورتها النقطة M' بالتحويل S تنتمي إلى دائرة مركزها A ونصف قطرها 2 لأن: النقطة A صامدة بالتحويل S ونسبة التشابه هي 2 .

أي: $AM = 1$ تكافئ $AM' = 2$

جـ) تحديد مجموعة النقط M' التي من اجلها النقطة M تمسح محور الفواصل.

لدينا: M تمسح محور الفواصل معناه $(\vec{u};\overrightarrow{AM}) = k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

وعليه العلاقة $(\vec{u};\overrightarrow{AM'}) = \frac{\pi}{2} + (\vec{u};\overrightarrow{AM})$ تكافئ $(\vec{u};\overrightarrow{AM'}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

تكافئ $M' \in (\Delta) - \{A\}$ حيث (Δ) معادلته $x = 1$

التمرين الثاني:

1) أ- حساب u_1 ، u_2 ، u_3.، ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \succ 1$.

لدينا: $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}$

* ومنه: $u_1 = \sqrt{\frac{1+u_0^2}{2}} = \sqrt{5}$ ، $u_2 = \sqrt{\frac{1+u_1^2}{2}} = \sqrt{3}$ و $u_3 = \sqrt{\frac{1+u_2^2}{2}} = \sqrt{2}$

* البرهان بالتراجع:

1) التحقق من صحة $P(0)$

من أجل $n = 0$ فإن: $u_0 \succ 1$ محققة لأن: $u_0 = 3 \succ 1$.

2) نفرض أن: $p(n)$ صحيحة أي: $u_k \succ 1$ حيث $n \geq k$

ونبرهن أن: $p(n+1)$ صحيحة أي: $u_{k+1} \succ 1$ أي نبرهن أن: $u_{k+1} = \sqrt{\frac{1+u_k^2}{2}}$

لدينا حسب فرضية التراجع: $u_k \succ 1$

ومنه: $u_k^2 \succ 1$ ومنه: $1+u_k^2 \succ 2$ ومنه: $\frac{1+u_k^2}{2} \succ 1$ ومنه: $\sqrt{\frac{1+u_k^2}{2}} \succ 1$ أي: $u_{k+1} \succ 1$

ومنه الخاصية $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

ب-تبيّان أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

(u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ معناه $u_{n+1} - u_n \prec 0$ من أجل كل عدد طبيعي n .

لدينا: $u_{n+1} - u_n = \sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} - u_n = \frac{-u_n^2+1}{\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} + u_n}$ بعد الضرب والقسمة في المرافق

اشارة الفرق هي دوما سالبة لأنها حسب إشارة البسط $-u_n^2+1$ لأن: $u_n \succ 1$ والمقام موجب تماما.

وعليه تكون المتتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

جـ استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم حساب نهايتها.

*المتتالية (u_n) متقاربة لأنها محدودة من الأسفل بـ 1 ($u_n \succ 1$) ومتناقصة

* حساب نهاية (u_n): نفرض أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = L$ حيث L عدد حقيقي موجب تماما

$\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = L$ معناه $L=\sqrt{\dfrac{1+L^2}{2}}$ وعليه $L^2=\dfrac{1+L^2}{2}$ ومنه $L^2=1$ وأخيرا $L=1$

2- أ- تبيّان أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $2v_{n+1}=v_n$.

لدينا: $v_n=u_n^2-1$ ومنه: $v_{n+1}=u_{n+1}^2-1=\dfrac{1+u_n^2}{2}-1=\dfrac{u_n^2-1}{2}=\dfrac{v_n}{2}$ أي: $2v_{n+1}=v_n$

ب- استنتاج أن (v_n) متتالية هندسية و تعيين أساسها وحدّها الأول v_0 .

من العلاقة التراجعية: $2v_{n+1}=v_n$ نستنتج أن: $v_{n+1}=\dfrac{v_n}{2}$

وعليه: (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$ وحدّها الأول $v_0=u_0^2-1=8$.

جـ- كتابة بدلالة n، كلا من v_n و u_n، ثم أحسب من جديد $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.

(v_n)* متتالية هندسية حدّها العام هو: $v_n=v_0.q^n$ وعليه $v_n=8.\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

* حساب نهاية (u_n): $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{8.\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+1}=1$ لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty} 8.\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=0$

3) حساب بدلالة n كلا من المجاميع التالية: S_n، T_n و L_n

*لدينا: $v_n=u_n^2-1$ ومنه: $u_n^2=v_n+1$

$$S_n=u_0^2+u_1^2+....+u_n^2=(v_0+1)+(v_1+1)+...+(v_n+1)$$

وعليه: $=(v_0+v_1+...+v_n)+1(n+1)=v_0\left[\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}\right]+(n+1)$

<u>تطبيق عددي</u>: $S_n=8\left[\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right]+(n+1)=16\left[1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right]+(n+1)$

* $T_n=v_0+2v_1+....+2^n v_n=v_0+2v_0(q)+....+2^n v_0(q^n)$

و بمأن: $q=\dfrac{1}{2}$ فإن: $T_n=v_0+v_0+....+v_0=v_0(n+1)=8(n+1)$.

$*L_n=\ln v_0+\ln v_1+....+\ln v_n=\ln(v_0\times v_1\times....\times v_n)$

ولدينا: $v_0\times v_1\times....\times v_n=v_0\times v_0q\times....\times v_0q^n=v_0^{n+1}q^{\frac{n(n+1)}{2}}=8^{n+1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

وعليه: $L_n=\ln(8^{n+1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}})$

التمرين الثالث

تعيين العبارة **الصحيحة** والعبارة **الخاطئة** مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية.

1) المثلث ABC قائم.

صحيحة: لأن: $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ لأن : $\overrightarrow{AB}(3;3;3).\overrightarrow{AC}(3;0;-3) = 9-9=0$.

2) المستوي (π) عمودي على المستقيم (AB) ويشمل النقطة A.

صحيحة: لأن:إحداثيات A تحقق صحة معادلة: (π) لأن: $3+(-2)+2-3=0$

و $\overrightarrow{AB}$ يوازي $\vec{n}_{(\pi)}$ لأن: $\overrightarrow{AB}=3\vec{n}_{(\pi)}$.

3)المستوي (P) العمودي على المستقيم (AC) ويشمل A له معادلة ديكارتية من الشكل: $x-z=1$.

صحيحة: لأن: إحداثيات A تحقق صحة معادلة: (P) لأن: $3-2=1$

و $\overrightarrow{AC}$ يوازي $\vec{n}_{(P)}$ لأن: $\overrightarrow{AC}=3\vec{n}_{(P)}$.

4) المستويان (π) و (P) متقاطعان وفق مستقيم $\vec{k}$ شعاع توجيه له.

خاطئة لأن: $\vec{n}_{(P)}$ لايوازي $\vec{n}_{(\pi)}$ لكن : $\vec{k}(0;0;1)$ لا يعامد $\vec{n}_{(P)}$ لأن: $\vec{k}.\vec{n}_{(P)} \neq 0$.

5) أ-المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC).

خاطئة لأن: $\overrightarrow{AD}$ لا يعامد $\overrightarrow{AC}$ لأن: $\overrightarrow{AD} \neq 0$. $\overrightarrow{AC}$.

ب-حجم رباعي الوجوه $ABCD$ يساوي $\frac{\sqrt{131}}{2}(u.v)$.

لدينا: حجم رباعي الوجوه $ABCD$ يعطى بالعلاقة $v_{ABCD}=\frac{S_{ABC}.d(D;(ABC))}{3}$

$$S_{ABC}=\frac{AB.AC}{2}=\frac{3\sqrt{3}.3\sqrt{2}}{2} \text{ و } d(D;(ABC))=\frac{|ax_D+bx_D+cx_D+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{4}{\sqrt{3}}$$

ومنه: $v_{ABCD}=\frac{4.3\sqrt{3}.3\sqrt{2}}{3.2.\sqrt{3}}=6\sqrt{3}u.a \neq \frac{\sqrt{131}}{2}(u.v)$

التمرين الرابع

I-1-أ) حساب $g(1)$ **، ثم التحقق أن :** $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ **.**

$$g(1)=1-\ln 3 \text{ و } \lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(\frac{2x^2}{x^2+1}-\ln(x^2+1)=2-\infty=-\infty$$

ب) أكمال جدول تغيرات الدالة g **.**

x	0 $\quad$ 1 $\quad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$
$g(x)$	$0 \nearrow g(1) \searrow -\infty$

2-أ)**تعليل وجود عدد حقيقي وحيد** α **على المجال** $[1;+\infty[$

بحيث: $g(\alpha)=0$ ، **ثم التحقق:** $1,9 \prec \alpha \prec 2$

الدالة g مستمرة ومتنا قصة المجال $[1;+\infty[$

(من جدول تغيرات) و $g(1) \succ 0$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

ومنه توجد قيمة وحيدة α على المجال $[1;+\infty[$ بحيث: $g(\alpha)=0$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة

لدينا: $g(1,9)=0,037$ و $g(2)=-0,0093$ أي $g(1,9).g(2) \prec 0$ ومنه : $1,9 \prec \alpha \prec 2$

ب) استنتاج اشارة $g(x)$ **على المجال** $[0;+\infty[$**.**

من جدول تغيرات الدالة g ومن الجواب 3-أ) نستنتج أن :

$g([0;\alpha[)=[0;1-\ln 3[$ معناه $g(x)\geq 0$ و $g([\alpha;+\infty[)=]-\infty;0]$ معناه $g(x)\leq 0$.

II -1) تبيّان أن : $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$ ثم تفسير النتيجة هندسيا .

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(x^2+1)}{x^2}=\lim_{y\to0}\frac{\ln(y+1)}{y}=1$ ملاحظة : $\lim_{y\to0}\frac{\ln(y+1)}{y}=1$ نهاية شهيرة

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$ تكافئ $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=1$ نستنتج ان (C_f) يقبل مماسا معامل توجبهه 1

2- أ) تبيان أن الدالة f فردية .

الدالة f فردية معناه $f(-x)+f(x)=0$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$.

$$f(-x)+f(x)=\frac{\ln(x^2+1)}{-x}+\frac{\ln(x^2+1)}{x}=0$$

ب) تبيّان أن: $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ ثم استنتاج $\lim_{x\to-\infty}f(x)$.

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x}$ حالة عدم التعيين

ازالة حالة عدم التعيين

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x^2(1+\frac{1}{x^2})}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x^2+\ln(1+\frac{1}{x^2})}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x^2}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x^2})}{x}=0$$

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$ لأن f دالة فردية.

3-أ) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 0 : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

$$f'(x)=\frac{\frac{2x}{x^2+1}(x)-1.\ln(x^2+1)}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}.$$

ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0;+\infty[$

من العبارة $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ نستنتج أن أشارة $f'(x)$ هي نفس اشارة $g(x)$

وعليه تكون f متزايدة على المجال $]0;\alpha]$ ومتناقصة على المجال $[\alpha;+\infty[$.

جـ) تشكيل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$.

من الجواب السابق وبمأن الدالة f فردية فإن جدول تغيراتها على $\mathbb{R}$ يكون كمايلي:

x	$-\infty$		$-\alpha$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		-	0		+		0	-	
$f(x)$	0	↘	$-f(\alpha)$	↗	0	↗	$f(\alpha)$	↘	0

4) كتابة معادلة المماس (Δ) عند النقط ذات الفاصلة 0.

المماس (Δ) له معادلة من الشكل: $y=f'(0)(x-0)+f(0)$

ولدينا: $f'(0)=1$ من الجواب (II-1) (التفسير الهندسي $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$) ولدينا: $f(0)=0$

وعليه تكون معادلة (Δ) من الشكل: $y=x$

5-أ) تبيّان أن : $f(\alpha)=\frac{2\alpha}{\alpha^2+1}$ ، ثم جد حصرا للعدد $f(\alpha)$.

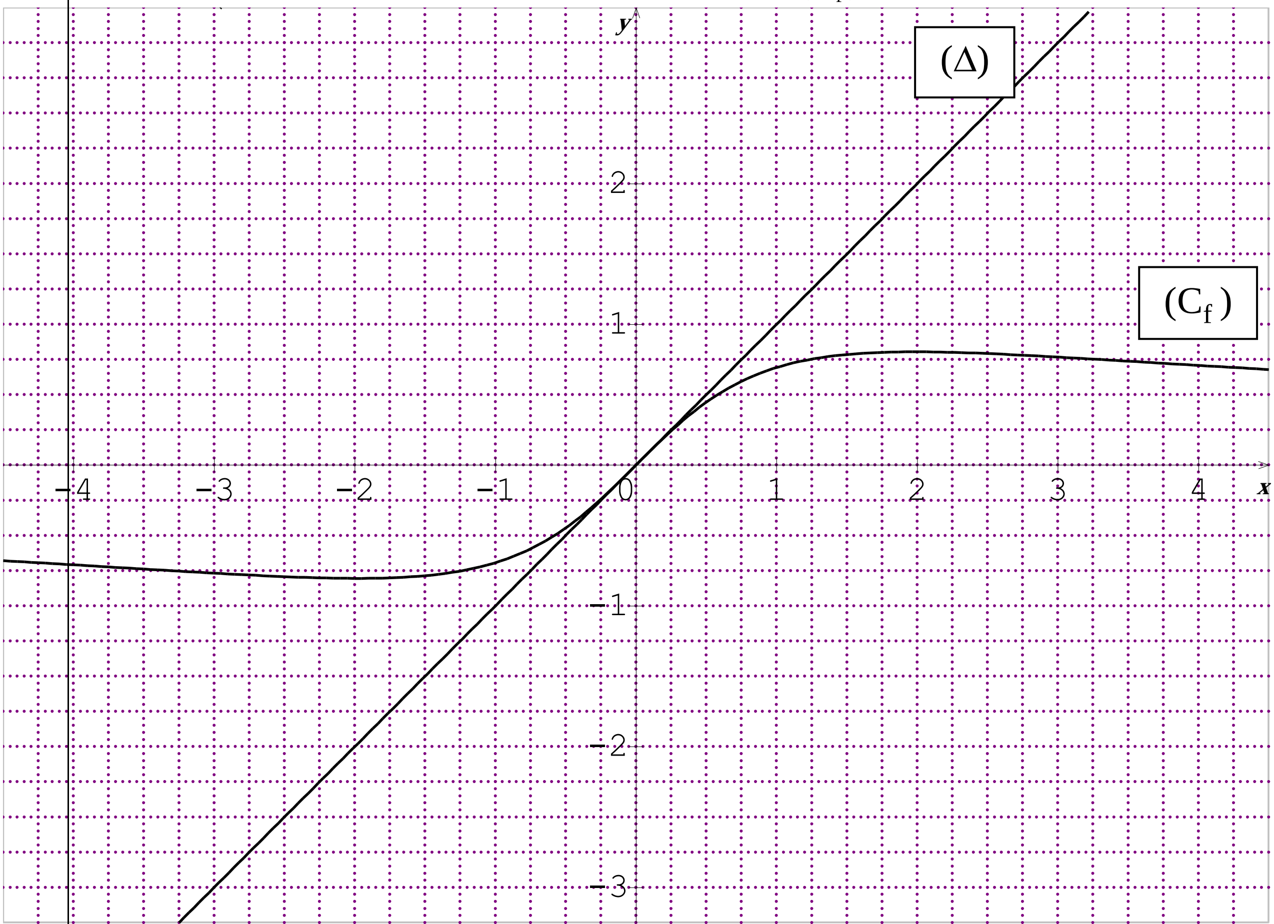
لدينا: $f(\alpha)=\dfrac{\ln(\alpha^2+1)}{\alpha}$ ومن جهة أخرى لدينا: $g(\alpha)=0$ معناه $\ln(\alpha^2+1)=\dfrac{2\alpha^2}{\alpha^2+1}$

ومنه: $f(\alpha)=\dfrac{\frac{2\alpha^2}{\alpha^2+1}}{\alpha}=\dfrac{2\alpha^2}{\alpha(\alpha^2+1)}=\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1}$

<u>الحصر</u> :لدينا: $1,9\prec\alpha\prec 2$ ومنه $3,8\prec 2\alpha\prec 4....(1)$ ولدينا أيضا: $4,61\prec\alpha^2+1\prec 5.....(2)$

من (1) و (2) نستنتج أن: $\dfrac{3,8}{5}\prec f(\alpha)\prec\dfrac{4}{4,61}$ أي $0,76\prec f(\alpha)\prec 0,86$.

ب)انشاء المماس (Δ) ثم المنحنى (C_f) في المعلم السابق.



III- أ)احسب التكامل $A(\alpha)$ والمعرف كمايلي: $A(\alpha)=\int_0^{\alpha}\dfrac{g(x)}{x^2}dx$

$$A(\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{g(x)}{x^2}dx=\int_0^{\alpha}f'(x)dx=\left[f(x)\right]_0^{\alpha}$$

ب) تبيان أن: $A(\alpha)=f(\alpha)$

$$A(\alpha)=f(\alpha)-f(0)=f(\alpha)$$