

الموضوع الأول

التمرين الأول : 4 نقاط

(1) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ : $u_1 = \frac{1}{2}$ و بالعلاقة التراجعية : $u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n + \frac{1}{3}$.

(أ) و لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل $n \geq 1$ بـ : $v_n = u_n - \frac{2}{5}$.

بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها .

(ب) إستنتج عبارة v_n بدلالة n ثم عبارة u_n بدلالة n .

(2) نعتبر نردين A و B غير مزيفين بحيث : النرد A به ثلاث أوجه حمراء و ثلاث أوجه بيضاء أما النرد B به أربع أوجه حمراء و وجهين بيضاوين .

نختار عشوائيا نردا و نرميه : إذا ظهر اللون الأحمر نحتفظ بهذا النرد . أما إذا ظهر اللون الأبيض نغير النرد . ثم نرمي هذا النرد وهكذا دواليك .

نرمز بـ : A_n إلى الحادثة : " رمي النرد n مرة " . و بـ : $\overline{A_n}$ الحادثة العكسية للحادثة A_n .

R_n إلى الحادثة : " ظهور اللون الأحمر في الرمية n " . و بـ : $\overline{R_n}$ الحادثة العكسية للحادثة R_n .

و نرمز بـ : a_n إلى احتمال الحادثة A_n و r_n إلى احتمال الحادثة R_n .

(أ) عين a_1 .

(ب) أكمل الشجرة ثم عين r_1 .

(ج) بملاحظة من أجل كل $n \geq 1$:

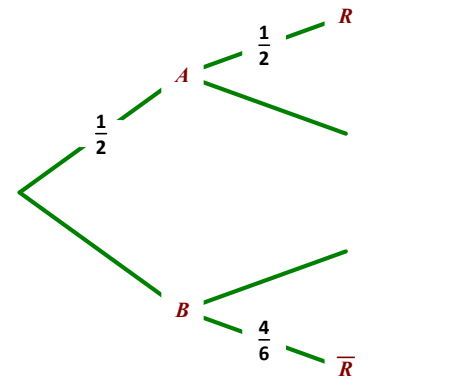
$$R_n = (R_n \cap A_n) \cup (R_n \cap \overline{A_n})$$

$$\text{بين أن : } r_n = -\frac{1}{6}a_n + \frac{2}{3}$$

(د) بين من أجل كل $n \geq 1$: $A_{n+1} = (A_n \cap R_n) \cup (\overline{A_n} \cap \overline{R_n})$.

(هـ) إستنتج من أجل كل $n \geq 1$: $a_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}$. ثم عين عبارة a_n بدلالة n .

(و) إستنتج عبارة r_n بدلالة n ثم $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n$.



التمرين الثاني : 5 نقاط

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2 - 2z + 4 = 0$.

(2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ نعتبر النقط A, B, C التي لواحقها على

الترتيب : $z_A = 2$ ، $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ و $z_C = 1 - i\sqrt{3}$. و لتكن (Γ) الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها 2 .

(أ) أكتب كلا من z_C و z_B على الشكل الأسّي .

(ب) تحقق أن العدد المركب $\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^{2019}$ حقيقي .

(ج) عين مجموعة الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها العدد $\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^n$ عددا حقيقيا سالبا تماما .

(3) ليكن $\theta \in]-\pi ; \pi]$. M نقطة من الدائرة (Γ) لاحتقتها $2e^{i\theta}$.

نسمي N النقطة من (Γ) حيث $(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{ON}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$. تحقق أن : $z_N = 2e^{i(\theta + \frac{\pi}{3})}$.

(4) ليكن r الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

(أ) تحقق أن العبارة المركبة للدوران r هي : $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z + 2 - 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.
 (ب) ليكن F منتصف $[BM]$ و K منتصف $[CN]$. بين أن : $r(F) = K$.
 (ج) استنتج طبيعة المثلث AFK .

(5) (أ) بين أن : $AF^2 = 4 - 2\sqrt{3} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$.

(ب) استنتج z_M لاحقة النقطة M بحيث تكون المسافة AF أكبر ما يمكن .

التمرين الثالث : 5 نقاط

ليكن $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس في الفضاء .

نعتبر النقطتين : $A(-2; 3; 2)$ و $B(2; 3; 2)$ و S

مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء

حيث : $x^2 + y^2 + z^2 - 6y - 4z + 9 = 0$

(1) (أ) بين أن S معادلة سطح كرة يطلب تعيين

نصف قطرها و إحداثيات مركزها I .

(ب) بين أن $[AB]$ قطرا لـ S .

(2) ليكن (P) مستو معرف بالمعادلة $z = 2$

و لتكن النقطة $J(-6; 3; 2)$

(أ) تحقق أن I تنتمي إلى (P) و استنتج أن S تقطع المستوي (P) وفق دائرة Γ قطرها $[AB]$.

(ب) نعتبر في المستوي (P) دائرة Γ' مركزها J و نصف قطرها 4 . بين أن الدائرتين Γ و Γ' متماستان خارجيا في A .

(3) لتكن النقطة $E(4; 3; 0)$ و نعتبر التحاكي $h\left(E; \frac{5}{2}\right)$ و نرمز بـ S' إلى صورة S بـ h .

(أ) عين نصف قطر S' و إحداثي مركزها I' .

(ب) برر أن المستوي (P) يقطع S' وفق الدائرة Γ'

(ج) المستقيم (EA) يقطع S' في A' . لتكن B' متقابلة قطريا مع A' على S' . بين أن النقط E , B و B' في إستقامة .

التمرين الرابع : 6 نقاط

(I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = e^{-x}$ و (C_g) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

(1) عين معادلة مماس المنحنى (C_g) في النقطة ذات الفاصلة 0 .

(2) (أ) بين من أجل كل $x \geq 0$: $1 - x \leq e^{-x} \leq 1$.

(ب) استنتج من أجل كل $x \geq 0$: $x - \frac{x^2}{2} \leq 1 - e^{-x} \leq x$.

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي : $f(0) = 0$ و $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ إذا كان $x > 0$

(C_f) منحناها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) أ) أحسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ب) أدرس إستمرارية و قابلية الإستقاق للدالة f على اليمين في 0 .

ج) شكل جدول تغيرات الدالة f .

(2) أ) بين أن $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{e^2}\right)$ نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f) .

ب) أكتب معادلة المماس T لـ (C_f) في النقطة $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{e^2}\right)$.

(3) في الشكل المعطى أسفل الورقة الذي يعاد مع ورقة الإجابة هو منحنى الدالة (C_g) في المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
علم النقطة I ، أرسم T و (C_f) .

(4) لتكن A_k مساحة الحيز من المستوي المحدد بـ (C_f) و المستقيمت التي معادلتها $y = 1$ ، $x = k$ و $x = k + 1$ حيث k عدد طبيعي غير معدوم .

أ) باستعمال (2) ب) بين أن : $\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right] \leq A_k \leq \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$

ب) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} A_k$.

(5) من أجل كل $n \geq 1$ نضع : $S_n = \sum_{k=1}^n A_k$.

أ) فسر هندسيا S_n .

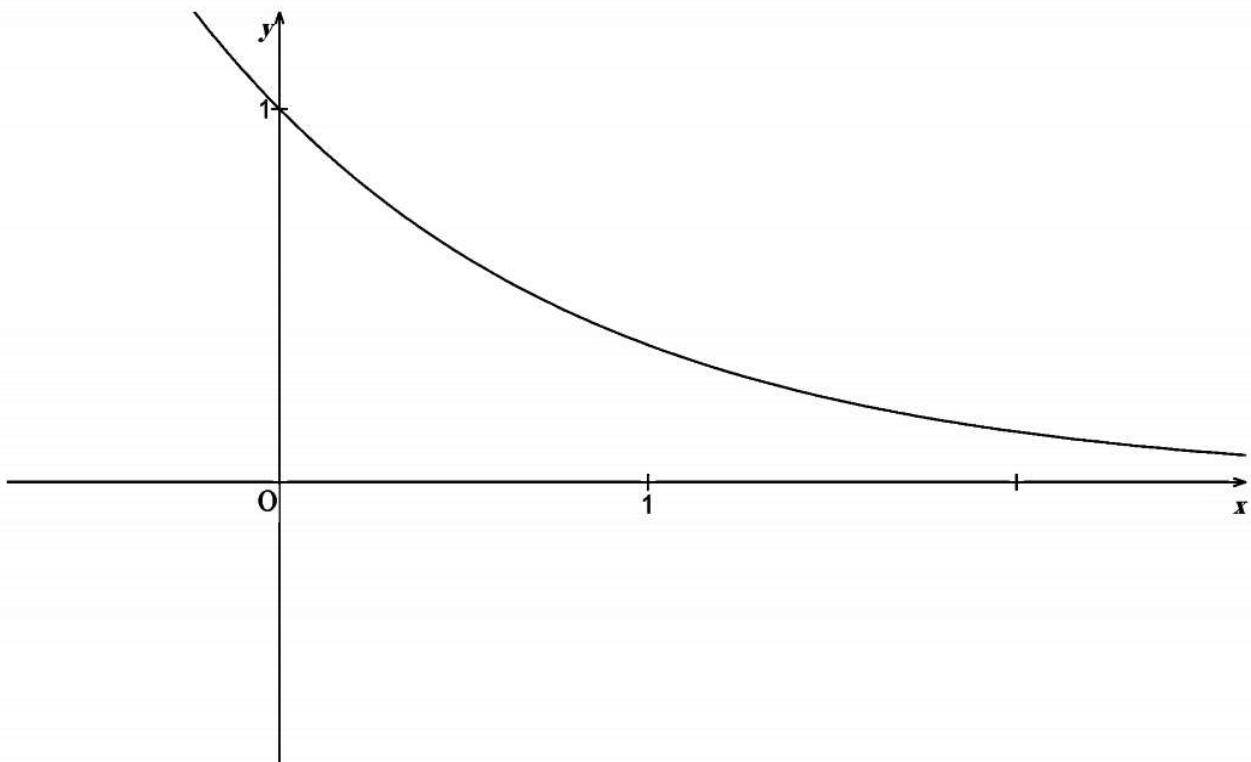
ب) بين أن : $\ln(n+1) - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leq S_n \leq \ln(n+1)$

ج) إستنتج : $\lim_{x \rightarrow +\infty} S_n$.

إنتهى بالتوفيق أستاذ المادة : سعيدي

الإسم:

اللقب :



الموضوع الثانيالتمرين الأول : 7 نقاط

الجزء الأول: لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[0 ; +\infty[$ بما يلي :

$f(0) = 0$ و $f(x) = x(1 + \ln^2 x)$ إذا كان $x > 0$. (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب لمعلم متعامد و متجانس $(\vec{O} ; \vec{i} ; \vec{j})$.

1. أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2. أ) بين أن الدالة f مستمرة على اليمين في 0 .

ب) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$. فسر النتيجة هندسيا .

ج) أحسب $f'(x)$ من أجل $x > 0$. ثم شكل جدول تغيرات الدالة f على $[0 ; +\infty[$.

3. أ) بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف I فاصلتها e^{-1} .

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم الذي معادلته : $y = x$.

ج) أنشئ (C_f) . (إستن بـ : $f(2) ; f(e) ; f(3)$).

الجزء الثاني : نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بما يلي : $u_0 = e^{-1}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. بين بالتراجع من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $e^{-1} \leq u_n \leq 1$.

2. بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متزايدة تماما . و إستنتج تقاربها .

3. نضع : $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$. بين أن $e^{-1} \leq l \leq 1$ ثم حدد قيمة l مع التعليل .

الجزء الثالث: لتكن F الدالة العددية المعرفة على المجال $[0 ; +\infty[$ بما يلي : $F(x) = \int_1^x f(t) dt$.

1. أ) بين أن الدالة : $H : x \mapsto -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ln x$ دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto x \ln x$ على المجال $]0 ; +\infty[$

ب) بين من أجل $x > 0$: $\int_1^x t \ln^2(t) dt = \frac{x^2}{2} \ln^2(x) - \int_1^x t \ln(t) dt$.

ج) إستنتج من أجل $x > 0$ أن : $F(x) = -\frac{3}{4} + \frac{3x^2}{4} - \frac{x^2}{2} \ln(x) + \frac{x^2}{2} \ln^2(x)$.

2. أ) بين أن الدالة F مستمرة على المجال : $[0 ; +\infty[$.

ب) أحسب : $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$ ثم إستنتج قيمة التكامل $\int_0^1 f(x) dx$.

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ و m عدد حقيقي:

و لتكن (P_m) مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء التي تحقق : $mx - y + (2 - m)z + m + 4 = 0$.

1. بين أن (P_m) مستو من أجل كل عدد حقيقي m .
2. بين أن جميع المستويات تتقاطع في نفس المستقيم (Δ) الذي يطلب تعيين تمثيلا وسيطيا له.
3. عين m حتى يكون (P_2) عمودي على (P_m) .
4. نعتبر النقطة $H(0; 1; 1)$ أحسب : $d(H; (\Delta))$.
5. أ) ليكن (S) سطح الكرة ذو المعادلة : $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z - 3 = 0$. عين مركز و نصف قطر (S) .
ب) عين المستويات (P_m) التي تمس (S) .

$$6. \text{ ليكن المستقيم } (D) \text{ المعروف بتمثيله الوسيطى : } \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = -1 - 3t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

أدرس الوضع النسبي بين (P_m) و (D) .

التمرين الثالث : 5 نقاط

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$. نعتبر التحويل النقطي T الذي يرفق بكل نقطة

M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z' = (m - i)z + b$ ($b \in \mathbb{C}$ و $m \in \mathbb{R}$).

1. أ) عين قيم m حتى يكون T دوران يطلب تعيين زاويته.
ب) عين العدد المركب b حتى يكون مركز الدوران هو النقطة A ذات اللاحقة $-1 + 4i$.
2. نضع : $m = \sqrt{3}$ و $b = x + iy$ حيث x و y عدنان حقيقيان.
أ) أثبت أن T تشابه مباشر يطلب تعيين نسبته و زاويته.
ب) عين العدد المركب z_0 لاحقة النقطة ω مركز التشابه T و ذلك بدلالة x و y .
ج) عين (Γ) مجموعة النقط بحيث يكون z_0 عددا تخيليا صرفا.
3. نعتبر النقط : $A ; B ; C$ ذات اللواحق : $z_A = -1 + 4i$; $z_B = 1$; $z_C = yi$. عين العدنان الحقيقيان y و β حتى تكون النقطة O (مبدأ المعلم) مرجحا للجملة : $\{(A; 2), (B; \beta), (C; 3)\}$.
4. أكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه O و نسبته 2 و زاوته $\frac{7\pi}{6}$.
5. بين أن التحويل النقطي $T \circ S$ تحاك يطلب تعيين نسبته.

التمرين الرابع : 4 نقاط

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث : $3x + 4y = -8$.

1. أ) تحقق أن $(0 ; -2)$ حل لـ (E) .

ب) حل في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة (E) .

2. نعتبر في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ المستقيم (Δ) المعروف بالمعادلة :

$$3x + 4y + 8 = 0 \text{ و } A \text{ نقطة من } (\Delta) \text{ فاصلتها معدومة .}$$

أ) بين أنه إذا كانت M نقطة من (Δ) إحداثياتها أعداد صحيحة فإن AM مضاعف لـ 5 .

ب) لتكن N نقطة من (Δ) إحداثياتها $(x ; y)$. تحقق أن : $AN = \frac{5}{4}|x|$.

ج) إستنتج أنه إذا كانت AN مضاعف لـ 5 فإن x و y عددان صحيحان .

إنتهى بالتوفيق أستاذ المادة : سعيدي